



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Algunas órbitas periódicas y la coreografía del ocho

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con Orientación en
Matemáticas Básicas

Presenta

Carlos Rubén Gutiérrez Arias

Director de Tesis:

Dr. Renato Gabriel Iturriaga Acevedo

Autorización de la versión final

Agradecimientos

Quiero agradecerles primero a mis padres Concepción Arias Morales y Carlos Rubén Gutiérrez Zamora por darme lo necesario de llegar hasta aquí. Especialmente agradezco a mi madre por motivarme a continuar en momentos difíciles con la ayuda de mi hermana Hilda Domínguez Arias, por confiar que podría con este objetivo, sufrir conmigo cada obstáculo en este proceso y por educarme con el apoyo de mis abuelos a los que también les quiero la educación y cuidados que me dieron. También me gustaría agradecerle por este medio a mi novia Denisse Amaro Delgado por su apoyo incondicional, sus ánimos, cuando la situación se complicaba, y por estar a mi lado. También quiero agradecerles los profesores que me dieron cátedra de los conocimientos que hoy en día representa este trabajo especialmente a mis asesor, el Doctor Renato Gabriel Iturriaga Acevedo con el cual realice este proyecto, que requirió de mucha paciencia y horas de estudio. Finalmente le agradezco a CONACyT por apoyarme con la beca de posgrado, la cual me dio la oportunidad de realizar este proyecto.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	V
Preliminares	1
0.1. El problema de los dos cuerpos	1
0.2. Planteamiento del problema de los tres cuerpos en el plano . .	3
0.3. Configuraciones centrales y soluciones homográficas	8
0.4. Esfera de formas	10
1. Algunas órbitas periódicas	15
1.1. Introducción	15
1.2. Región de Hill	17
1.3. Momento angular grande	21
1.4. El primer valor crítico de ω	23
1.5. Debajo del tercer valor crítico de ω	24
1.6. Debajo del último valor crítico de ω	25
1.7. Momento angular ω bajo	26
2. Coreografía del 8	27
2.1. Introducción	27
2.2. Planteamiento	29
2.3. La exclusión de colisiones	31
2.4. Prueba de la existencia del ocho	44

Introducción

El problema de los n -cuerpos consiste en entender el movimiento de n cuerpos sometidos a la ley de Gravitación universal. Dicho problema resulta de obvio interés y con muchas aplicaciones, como lo es el movimiento de cuerpos celestes.

El problema de los n -cuerpos está matemáticamente resuelto sólo para el caso de dos cuerpos, esta solución es un trabajo de Newton, donde describe las leyes de Kepler.

A pesar de que el problema de los tres cuerpos se ha trabajado desde el siglo XVII, está lejos de ser resuelto. Se han encontrado soluciones particulares y algunas aproximaciones numéricas confiables a otras soluciones. También, se ha demostrado la existencia de órbitas periódicas, como las soluciones homográficas de Euler y Lagrange (ver sección 0.3). En el problema de los tres cuerpos se ha demostrado la existencia del caos, incluso en el problema restringido al plano. Como el problema de los tres cuerpos restringidos al plano es más manejable, concentraremos este trabajo en ello.

En este trabajo comenzaremos por un capítulo preliminar. En donde veremos la solución de Newton para el problema de los dos cuerpos. Daremos el planteamiento del problema de los tres cuerpos restringido al plano, el cual surge de las leyes de Newton y es gobernado por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= M^{-1}y \\ \dot{y} &= \nabla U(x),\end{aligned}$$

con $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ el vector de posiciones, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ el vector de momentos, $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$ con m_i masa del cuerpo i y $U(x) = \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{m_3 m_2}{|x_3 - x_2|} + \frac{m_1 m_3}{|x_1 - x_3|}$ la función potencial (el negativo de la energía potencial). Claramente el sistema está en \mathbb{R}^{12} .

Veremos las configuraciones centrales, definidas a partir de puntos críticos de

la función potencial $U(x)$ restringida al espacio de configuraciones de un tamaño $r_0 > 0$ fijo. Donde el tamaño de una configuración es $\sum_{i=1}^3 m_i |x_i - x_{cm}|^2$, con $x_{cm} \in \mathbb{R}^2$ centro de masa. También veremos las soluciones homográficas que las configuraciones centrales inducen, encontradas por Euler y Lagrange. Más adelante, mostraremos que las primeras integrales de movimiento y simetrías le bajan 7 dimensiones al sistema que gobierna el movimiento de los tres cuerpos de 12 dimensiones. Definiendo una variedad $M(\omega, h)$, 5 dimensional, cuya topología depende del momento angular ω , la energía h y las masas de los cuerpos.

Describamos geoméricamente el espacio de formas admisibles por tres cuerpos: Tres puntos en el plano nos determinan un triángulo. La forma de un triángulo no depende de donde esté ubicado el triángulo, entonces podemos suponer que el cuerpo 1 está en el origen. La forma de un triángulo no depende de la posición relativa respecto a los ejes, esto nos permite suponer que el cuerpo 2 está sobre el eje x. Como la forma de un triángulo no depende del tamaño, podemos escalar el triángulo y ubicar el cuerpo 2 en el punto (1,0). Ahora, notemos que el tercer cuerpo tiene la libertad de posicionarse en \mathbb{R}^2 , incluyendo en colisión con el cuerpo 1 en el origen y en colisión con el cuerpo 2 en (1,0). Por ello, nos gustaría incluir la forma donde los cuerpos 1 y 2 estén en colisión, esta forma la representaremos con el cuerpo 3 ubicado en el punto al infinito. Por lo tanto, vemos que el espacio de formas es isomorfo a $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, isomorfo a S^2 , a esta esfera le llamaremos la esfera de formas. Sin pérdida de generalidad, suponemos que el centro de masa está siempre en el origen, haciendo uso de una invarianza Galileana. Haremos un cambio de coordenadas (r, \tilde{s}, z) , descubiertas por McGehee. Donde $r = \sqrt{x^T M x}$ es una variable radial que mide el tamaño de una configuración. La variable $\tilde{s} = x/r$ es el vector de posición escalado, es decir, mide la forma y posición angular, después de hacer el cociente con S^1 , $s = [\tilde{s}]$ sólo mide la forma. Y la variable $z = \sqrt{r}y$ es el momento escalado. Llevando el sistema original a otro sistema con dos ecuaciones desacopladas

$$\begin{aligned} r' &= vr \\ \tilde{s}' &= M^{-1}z - v\tilde{s} \\ z' &= \nabla U(\tilde{s}) + \frac{1}{2}vz, \end{aligned}$$

donde $v = \tilde{s} \cdot z$. Se puede observar que las dos últimas ecuaciones no dependen del tamaño r . Este sistema facilita la visión geométrica del espacio

de formas (discutido previamente). Así, considerando un tamaño r_0 fijo, vemos que la variedad de configuraciones de tamaño r_0 ($C_{r_0} = \{(r_0, \tilde{s})\}/S^1$), es homeomorfo a una dos esfera (la esfera de formas). Y describiremos las variedades y puntos destacados de la esfera de formas.

En el segundo capítulo mostraremos la existencia de diferentes órbitas periódicas. Estas se construyen variando un parámetro λ , asociado esencialmente al momento angular y a la energía. Más precisamente, gracias la discusión anterior el espacio de configuraciones C es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times S^2$, donde el origen representa la triple colisión. Estudiaremos la región de Hill $C(h, \omega) = \{(r, s) \in C : (r, z, \tilde{s}) \in M(\omega, h), \text{ para algún } z\}$, restringida a la energía negativa. Pues si el sistema tiene energía positiva, las órbitas solución escapan al infinito en ambas direcciones del tiempo perdiendo la posibilidad de recursividad. Demostraremos que la dinámica de la región de Hill sólo depende de $\lambda = -h\omega^2$. Para determinar la forma de la región de Hill seguiremos las restricciones que imponen el fijar la energía y el momento angular, halladas por G.W.Hill.

En el tercer y último capítulo de este trabajo estudiaremos una órbita solución muy peculiar del problema de los tres cuerpos con la misma masa en el plano. Encontrada por Alain Chenciner y Richard Montgomery a través de métodos variacionales. En el trabajo [2] los autores muestran que existe una curva en el plano con forma de ocho, en la que tres cuerpos con masas iguales se mueven sin colisionar sobre ella, es decir, forman una coreografía. Esta órbita es notable, tiene una gran simetría, es estable, es periódica, visita las configuraciones centrales colineales (o configuraciones Euler) y el centro de masa está fijo en el origen.

Para demostrar la existencia de la coreografía del ocho: Consideraremos el camino que minimiza la acción entre todos los caminos que van de E_3 (rayo de configuraciones Euler, donde el cuerpo 3 está en medio) a M_1 (variedad de configuraciones donde los cuerpos 2 y 3 equidistan al cuerpo 1), en un tiempo $T \in \mathbb{R}^+$. Para descartar colisiones en este segmento, compararemos su acción con la acción de la órbita de media colisión-eyeción (esta órbita realiza el ínfimo sobre la acción de caminos con colisión en el problema de dos cuerpos). Por lo tanto, el problema del segmento que minimiza la acción tiene dos posibles soluciones simétricas respecto al ecuador (en la esfera de formas). Planteando el mismo problema en caminos que van de E_i con $i = 1, 2, 3$ a M_j con $j = 1, 2, 3$ y $J \neq i$, encontraremos 12 curvas simétricas que unen

suavemente (pues a través de métodos variacionales se puede observar que son ortogonales en sus puntos finales al rayo E_i y a la variedad M_j). Uniendo los 12 segmentos habremos construido la proyección de la curva solución en el espacio de configuraciones. Ahora, invocando la regla del área podremos recuperar el movimiento de los cuerpos en el espacio inercial. Finalmente observando el momento angular del tercer cuerpo comprobaremos que la curva no tiene lazos extras. Así, habremos construido la coreografía del ocho.

Preliminares

En este capítulo veremos la solución general al problema de los dos cuerpos dada por Newton. El planteamiento de las ecuaciones para el problema de los tres cuerpos en el plano. Como se reduce la dimensión al problema con las primeras integrales de movimiento. Después nos concentraremos en los puntos críticos de la función potencial restringida a la superficie que forman las configuraciones de tamaño 1 $U|_{I=1}$. Definiendo las configuraciones centrales y las soluciones que generan del tipo homográficas. Por último, introduciremos las coordenadas de McGehee para darle una mejor visión al espacio de configuraciones. Con ello definiremos la esfera de formas (superficie de todas las configuraciones de tamaño $r_0 > 0$), sus variedades y puntos sobresalientes.

0.1. El problema de los dos cuerpos

En el problema de los n-cuerpos, el primer caso a tratar fue el problema de los dos cuerpos, el cual se da en el plano y fue resuelto por Newton. Que consiste en determinar el movimiento de dos cuerpos en el plano sometidos a la ley de gravitación universal, y para el cual veremos la solución general. Consideremos dos cuerpos con masas m_1 y m_2 (las cuales están en \mathbb{R}^+), y posiciones x_1 y x_2 respectivamente en el plano \mathbb{R}^2 , dependientes del tiempo y que actúan por gravedad mutua, es decir,

$$F_{1,2} = \frac{Gm_1m_2(x_2 - x_1)}{|x_1 - x_2|^3}$$

$$F_{2,1} = \frac{Gm_1m_2(x_1 - x_2)}{|x_2 - x_1|^3}$$

con G constante de gravedad y $F_{i,j}$ denota la fuerza del cuerpo j sobre el cuerpo i .

Por la segunda ley de Newton

$$F_{1,2} = m_1 a_1 = m_1 \ddot{x}_1,$$

$$F_{2,1} = m_2 a_2 = m_2 \ddot{x}_2,$$

donde a_i denota la aceleración del cuerpo i , $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ y $\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}$.

Tomando $x = x_1 - x_2$, entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \\ &= \frac{F_{1,2}}{m_1} - \frac{F_{2,1}}{m_2} \\ &= \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{|x_1 - x_2|^3} - \frac{Gm_1(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^3} \\ &= -\frac{G(m_2 + m_1)(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^3} \\ &= \frac{-\lambda x}{|x|^3}, \end{aligned}$$

con $\lambda = G(m_2 + m_1)$.

Ahora consideremos x en coordenadas polares (r, θ) ,

$$\begin{aligned} x &= r \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \dot{x} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + r \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \\ \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación anterior, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{-\lambda}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0 \\ \Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} &= 0 \\ \Rightarrow r^2\dot{\theta} &= l. \end{aligned}$$

0.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS EN EL PLANO³

Ahora, tomando el cambio de variable $r = 1/u$, nos implica $lu^2 = \dot{\theta}$ y

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta} = -l \frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= -l \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -l \dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -l^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.\end{aligned}$$

Así, sustituyendo esto en la primera ecuación del sistema, obtenemos

$$-l^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - l^2 u^3 = -\lambda u^2.$$

Simplificando

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\lambda}{l^2}.$$

Resolviendo

$$u = \frac{\lambda}{l^2} + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta,$$

con c_1 y c_2 constantes de integración. Ahora, consideramos el vector (c_1, c_2) en coordenadas polares con radio $\frac{e\lambda}{l^2} > 0$ y ángulo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, entonces

$$u = \frac{\lambda}{l^2} (1 + e \cos \theta_0 \cos \theta + e \sin \theta_0 \sin \theta) = -\frac{\lambda}{l^2} (1 - e \cos(\theta - \theta_0)),$$

con e y θ_0 las constantes de la integración. Por lo tanto, regresando a la variable r

$$r = \frac{l^2}{\lambda(1 - e \cos(\theta - \theta_0))}.$$

Esta función pertenece a una sección cónica con un foco en el origen, con excentricidad e . Notando que $e \geq 0$ por definición: Si $e = 0$, la sección es una circunferencia, si $e < 1$, corresponde a una elipse, si $e = 1$, es una parábola, y si $e > 1$, es una hipérbola.

Así, tomando como punto de referencia el centro de masa, es decir, fijarlo en el origen, podemos calcular el movimiento de los cuerpos.

0.2. Planteamiento del problema de los tres cuerpos en el plano

Entre muchas otras complicaciones, el problema de los tres cuerpos ya no está necesariamente en el plano. El problema está en un plano sólo cuando

los vectores de velocidad están en el plano de los vectores de posiciones. El problema de los tres cuerpos restringido al plano es más manejable, por ello concentraremos este estudio en el problema de los tres cuerpos restringido al plano.

Con este fin, consideramos tres cuerpos con masas m_1 , m_2 y m_3 (las masas m_i pertenecen a \mathbb{R}^+ , para $i = 1, 2, 3$), los cuales actúan por gravedad mutua (descrita por Newton). Considerando el problema restringido al plano, es decir, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ las respectivas posiciones, y $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^2$ los respectivos momentos ($y_i = m_i \dot{x}_i$, para $1 \leq i \leq 3$). Tomaremos $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^6$. El sistema surge de la ley gravitacional universal:

$$F_{i,j} = \frac{Gm_i m_j (x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^3},$$

donde $F_{i,j}$ denota la fuerza que experimenta el cuerpo j bajo la influencia del cuerpo i y G la constante de gravedad.

Por la segunda ley de Newton (fuerza igual a masa por aceleración), entonces

$$\dot{y}_i = m_i \ddot{x}_i = F_{total} = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j (x_j - x_i)}{|x_i - x_j|^3}, \quad i \geq 1, j \leq 3.$$

Sin perder la generalidad, suponemos $G = 1$ y con la función potencial $U : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$U(x) = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_3 m_2}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}},$$

el negativo de la energía potencial, con $r_{12} = |x_1 - x_2|, r_{23} = |x_3 - x_2|, r_{13} = |x_1 - x_3|$. Nos implica que la dinámica es gobernada por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M^{-1}y \\ \dot{y} &= \nabla U(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Donde la primera ecuación corresponde a la derivada respecto al tiempo de la posición y la segunda ecuación a las leyes de Newton, con $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$. El cual es un sistema dinámico en \mathbb{R}^{12} .

Definición 0.2.1. *El Hamiltoniano es una función escalar, de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico clásico.*

0.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS EN EL PLANO5

Considerando una función $H : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\dot{x}_i = H_{y_i}$ y $\dot{y}_i = H_{x_i}$, el sistema de ecuaciones diferenciales define la siguiente función Hamiltoniana:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^T M^{-1}y - U(x).$$

El sistema 1 es posible reducir con las primeras integrales de movimiento. La primera integral es el momento total, dado que $\dot{y} = \nabla U(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y_1 + y_2 + y_3) &= \sum_{i=1}^3 U_{x_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, el momento total es constante

$$y_1 + y_2 + y_3 = a.$$

Esto implica que el centro de masa tiene un movimiento rectilíneo uniforme, pues su integral respecto al tiempo es

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = at + b.$$

Así, bajo una invarianza Galileana (o relatividad Newtoniana, establece que si un objeto tiene movimiento rectilíneo uniforme, entonces puede tomarse como punto de referencia) podemos fijar el centro de masa en el origen. Por lo tanto, con $a = b = 0$ conseguimos

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0.$$

Estas dos ecuaciones forman un subespacio vectorial de dimensión 8 en \mathbb{R}^{12} , con ello le baja el grado en 4 al sistema 1.

Ahora, considerando que el sistema es invariante bajo rotaciones simultáneas de posiciones y momentos. En consecuencia el momento angular total del

sistema $\omega : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\omega = y_1 \times x_1 + y_2 \times x_2 + y_3 \times x_3$ es constante

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\omega &= \frac{d}{dt}(y_1 \times x_1 + y_2 \times x_2 + y_3 \times x_3) \\
 &= \dot{y}_1 \times x_1 + \dot{y}_2 \times x_2 + \dot{y}_3 \times x_3 \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^3} \times x_i \\
 &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j x_j}{|x_i - x_j|^3} \times x_i \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

pues $x_i \times x_j = -x_j \times x_i$. Esto nos reduce una dimensión más al sistema. De igual manera, el considerar la identificación de posiciones y momentos bajo rotaciones, es decir, el sistema es invariante bajo el grupo isométrico $SO(2)$ de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. $SO(2)$ actúa entrada por entrada en X , es decir, con la rotación R_θ del ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ como

$$R_\theta \cdot (x_1, x_2, x_3) = (e^{i\theta} x_1, e^{i\theta} x_2, e^{i\theta} x_3).$$

Así, podemos pasar al espacio cociente eliminando una dimensión más. Por último, como el Hamiltoniano es igual a la energía total del sistema, la cual también es constante

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}H(x, y) &= \frac{d}{dt}h = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} y^T M^{-1} y - U(x) \\
 &= \sum_{i=1}^3 (m_i^{-1} y_i \cdot \dot{y}_i - U_{x_i}(x) \dot{x}_i) \\
 &= M^{-1} y \cdot \dot{y} - \nabla U(x) \cdot \dot{x} \\
 &= M^{-1} y \cdot \dot{y} - \dot{y} \cdot M^{-1} y \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Esto le reduce otra dimensión más al sistema. Así, el sistema 1 junto con las ecuaciones, anteriores forman una variedad $M(h, \omega)$ cinco-dimensional. La topología de esta variedad depende de la energía h , momento angular ω y las masas.

0.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS EN EL PLANO 7

Definición 0.2.2. a) Definimos la simetría S respecto al primer eje coordenado como

$$S \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

pensando que $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

b) El momento inercial con respecto al centro de masa es una función $I : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $I = x^T M x$, cuya interpretación física es: la magnitud vectorial que mide la suma de inercia rotacional de los cuerpos.

c) Definimos un medio de la derivada del momento inercial $J : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$ como $J = x \cdot y$.

d) El doble de la energía cinética es una función $K : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $K = y^T M^{-1} y$.

e) El Lagrangiano es una función $L : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L = \frac{1}{2}K + U$, usada para caracterizar variaciones.

Nota 0.2.3. La acción $O(2)$ en $(\mathbb{R}^2)^3$ no altera los valores funciones definidas en 0.2.2 y la función potencial, en consecuencia tampoco altera el Hamiltoniano H .

Lema 0.2.4 (Desigualdad de Sundman). Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$ solución al sistema 1, entonces

$$|\omega|^2 \leq IK.$$

Demostración. Recordando que el momento angular es

$$\omega = \sum_{i=1}^3 y_i \times x_i.$$

Tomamos valor absoluto de ambos lados y aplicamos la desigualdad del triángulo

$$|\omega| = \left| \sum_{i=1}^3 y_i \times x_i \right| \leq \sum_{i=1}^3 |y_i| |x_i| \sum_{i=1}^3 \sqrt{m_i} |y_i| \sqrt{m_i^{-1}} |x_i|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, obtenemos

$$|\omega| \leq \left(\sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^3 m_i^{-1} |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Elevando ambos lados al cuadrado, resulta

$$|\omega|^2 \leq \sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2 \sum_{i=1}^3 m_i^{-1} |y_i|^2.$$

De la definición anterior de I, K obtenemos

$$\therefore |\omega|^2 \leq IK.$$

□

A lo largo de todo el escrito haremos uso de la palabra curva, lo cual entenderemos como la siguiente definición.

Definición 0.2.5. *Una curva en \mathbb{R}^n , para algún $n \in \mathbb{Z}$, es un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ tal que es la imagen de un intervalo $I \in \mathbb{R}$ bajo una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, es decir,*

$$C := \{f(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$$

0.3. Configuraciones centrales y soluciones homográficas

Con el fin de entender más el problema de los tres cuerpos. Estudiaremos algunas de las soluciones particulares generadas por las configuraciones centrales. El estudio de configuraciones centrales inició en 1767, cuando el matemático y físico suizo Leonhard Euler publicó un interesante trabajo sobre el problema de los tres cuerpos. En este encuentra explícitamente una familia de órbitas periódicas. Euler demuestra que si tres cuerpos con masa arbitraria se encuentran sobre una recta a cierta distancia y velocidad ambas dependientes de sus masas. Entonces cada cuerpo se moverá periódicamente sobre una elipse, y los tres cuerpos seguirán siendo colineales conservando velocidad y su distancia proporcional.

Por otro lado, Joseph L. Lagrange encontró una nueva familia de órbitas periódicas en 1772. Obtenidas de colocar tres cuerpos de masa arbitraria sobre los vértices de un triángulo equilátero, con velocidades iniciales escogidas. La solución consiste igual que en las de Euler cada cuerpo se mueve sobre una órbita elíptica, y en todo momento se mantendrá la configuración equilateral,

0.3. CONFIGURACIONES CENTRALES Y SOLUCIONES HOMOGRAFICAS 9

aunque puede variar el tamaño del triángulo.

Las configuraciones iniciales de las órbitas de Euler y de Lagrange son configuraciones centrales.

Considerando el sistema 1 con centro de masa en el origen, definiremos las configuraciones centrales. Nos referimos a una configuración del sistema 1 como $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)(t_0)$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definición 0.3.1. Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$ una configuración del sistema 1, decimos que es una configuración central si existe $k > 0$, tal que

$$\ddot{x} = kx.$$

Es decir, la configuración central es una configuración donde los vectores de posición son proporcionales a los vectores de aceleración respectivamente, con la misma proporción.

O equivalentemente, podemos probar que las configuraciones centrales son puntos de equilibrio de la función potencial U restringida al espacio de configuraciones de tamaño $I = I_0 \in \mathbb{R}^+$ fijo.

Lema 0.3.2. Una configuración $x = (x_1, x_2, x_3)$ es central si, y sólo si, x satisface

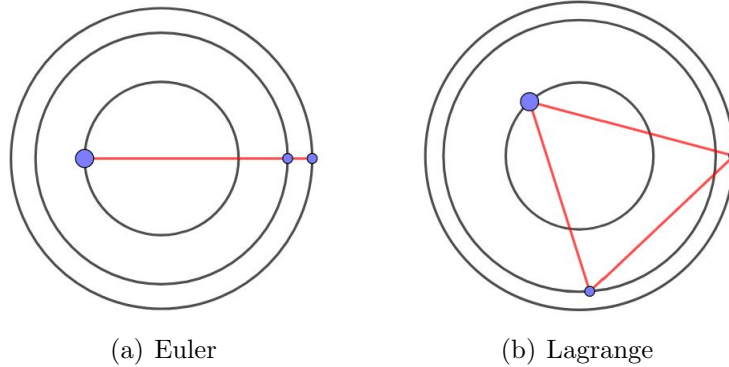
$$\nabla U|_I(x) = 0.$$

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$ configuración central, es decir,

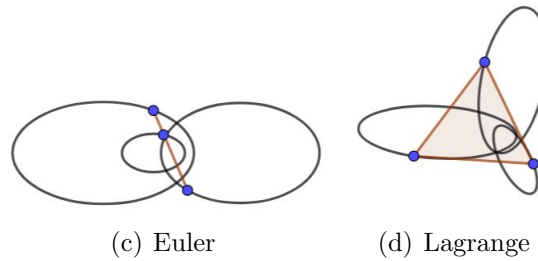
$$\begin{aligned} \ddot{x} = kx &\Leftrightarrow km_i x_i = U_{x_i}(x), & i = 1, 2, 3 \\ &\Leftrightarrow kI_{x_i} = U_{x_i}(x), & i = 1, 2, 3 \\ &\Leftrightarrow k\nabla I(x) = \nabla U(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando multiplicadores de Lagrange llegamos a lo deseado. \square

Con esta equivalencia podemos observar que las órbitas de Euler y Lagrange que no cambian de tamaño, son rotaciones de las configuraciones iniciales. Pues la equivalencia anterior con tamaño constantes implica que U es constante y con configuración constante, sólo queda un movimiento circular. Donde las elipses en las que se mueven las masas tienen excentricidad igual a 0.



El caso en que la configuración se mantiene pero el tamaño varía, la excentricidad es $0 < e < 1$.



Y el caso donde la configuración sólo se expande y contrae homotéticamente, la excentricidad es 1.

0.4. Esfera de formas

Otro problema de gran interés fue: Dado un $r_0 > 0$ fijo quisiéramos saber como se ve la variedad de triángulos que tienen tamaño r_0 . McGehee descubrió un sistema de coordenadas que facilita la visión geométrica del espacio configuraciones. Fijando el centro de masa en el origen, el momento de inercial resulta de suma importancia, pues define el tamaño de la configuración. Por ello, define la variable radial:

$$r^2 = x^T M x = m_1 |x_1|^2 + m_2 |x_2|^2 + m_3 |x_3|^2$$

con $r = 0$ representando la triple colisión en el origen. El vector de posición escalado $\tilde{s} = x/r$ mide la forma y posición angular del triángulo, y satisface

$\tilde{s}^T M \tilde{s} = 1$. En la variedad cociente bajo la simetría de las rotaciones, $s = [\tilde{s}]$ pierde la información de la orientación, más precisamente el ángulo que hace la posición 1 respecto a un eje fijo, entonces s sólo representa la forma. Define $z = \sqrt{r}y$ como el momento escalado. Veamos que el sistema 1 en estas variables presenta un desacoplamiento, esto nos ayudará a dar solución al problema planteado. Antes, veamos la expresión de la función potencial U en estas variables.

Lema 0.4.1. *La función potencial U en coordenadas de McGehee es:*

$$rU(s) = \frac{m_1 m_2}{|s_1 - s_2|} + \frac{m_3 m_2}{|s_3 - s_2|} + \frac{m_3 m_1}{|s_1 - s_3|}.$$

Demostración. Sustituyendo $x = r\tilde{s}$ en $U(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{m_3 m_2}{|x_3 - x_2|} + \frac{m_3 m_1}{|x_1 - x_3|} \\ &= \frac{m_1 m_2}{|r\tilde{s}_1 - r\tilde{s}_2|} + \frac{m_3 m_2}{|r\tilde{s}_3 - r\tilde{s}_2|} + \frac{m_3 m_1}{|r\tilde{s}_1 - r\tilde{s}_3|} \\ &= \frac{m_1 m_2}{r|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2|} + \frac{m_3 m_2}{r|\tilde{s}_3 - \tilde{s}_2|} + \frac{m_3 m_1}{r|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_3|}. \end{aligned}$$

Dado que $|s_i - s_j| = |\tilde{s}_i - \tilde{s}_j|$,

$$\therefore rU(s) = \frac{m_1 m_2}{|s_1 - s_2|} + \frac{m_3 m_2}{|s_3 - s_2|} + \frac{m_3 m_1}{|s_1 - s_3|}.$$

□

Lema 0.4.2. *El sistema dinámico 1 en coordenadas de McGehee se puede reparametrizar en:*

$$\begin{aligned} r' &= vr \\ s' &= M^{-1}z - vs \\ z' &= \nabla U(s) + \frac{1}{2}vz, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $v = s \cdot z$.

Demostración. Derivando la expresión de la variable radial obtenemos

$$\begin{aligned}
2r\dot{r} &= \frac{d}{dt}(m_1|x_1|^2 + m_2|x_2|^2 + m_3|x_3|^2) \\
&= \frac{d}{dt}[m_1(x_{11}^2 + x_{12}^2) + m_2(x_{21}^2 + x_{22}^2) + m_3(x_{31}^2 + x_{32}^2)] \\
&= 2[m_1(x_{11}\dot{x}_{11} + x_{12}\dot{x}_{12}) + m_2(x_{21}\dot{x}_{21} + x_{22}\dot{x}_{22}) + m_3(x_{31}\dot{x}_{31} + x_{32}\dot{x}_{32})] \\
&= 2[x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22} + x_{31}y_{31} + x_{32}y_{32}] \\
&= 2x \cdot y \\
&= 2\sqrt{r}\tilde{s} \cdot z.
\end{aligned}$$

$$\therefore \dot{r} = r^{-1/2}\tilde{s} \cdot z.$$

Ahora derivando $\tilde{s}r = x$, llegamos a

$$\begin{aligned}
r\dot{\tilde{s}} + \tilde{s}\dot{r} &= \dot{x} \\
\Rightarrow r\dot{\tilde{s}} + \tilde{s}r^{-1/2}\tilde{s} \cdot z &= M^{-1}y = M^{-1}zr^{-1/2} \\
\Rightarrow r\dot{\tilde{s}} &= M^{-1}zr^{-1/2} - \tilde{s}r^{-1/2}\tilde{s} \cdot z. \\
\therefore \dot{\tilde{s}} &= M^{-1}zr^{-3/2} - \tilde{s}r^{-3/2}\tilde{s} \cdot z.
\end{aligned}$$

Y derivando la expresión $z = \sqrt{r}y$, conseguimos

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \sqrt{r}\dot{y} + 1/2yr^{-1/2}\dot{r} \\
&= \sqrt{r}\nabla U(x) + 1/2zr^{-1}r^{-1/2}\tilde{s} \cdot z \\
&= \sqrt{r}\nabla U(\tilde{s}/r) + 1/2zr^{-3/2}\tilde{s} \cdot z \\
&= r^{-3/2}\nabla U(\tilde{s}) + 1/2zr^{-3/2}\tilde{s} \cdot z. \\
\therefore \dot{z} &= r^{-3/2}(\nabla U(\tilde{s}) + 1/2vz).
\end{aligned}$$

Ahora, como el sistema es invariante bajo rotaciones (es decir, dada una solución al sistema con condición inicial, el rotar la condición inicial nos da la misma solución rotada con el mismo ángulo en la cual fue rotada al principio), podemos sustituir \tilde{s} por s , y reparametrizando $\tau = -2tr^{-1/2}$, eliminamos $r^{-3/2}$ en todas las ecuaciones, obteniendo lo deseado. \square

Nota 0.4.3. *Observemos que el sistema 2 presenta un desacoplamiento en las dos últimas ecuaciones. Por lo tanto, las últimas dos ecuaciones describen el cambio de la forma y momento escalado, sin depender del tamaño.*

Vimos en la sección 0.2, que la dimensión del sistema dinámico que describe el problema planar de los tres cuerpos es reducido, de 12 dimensiones a 5 dimensiones con las primeras integrales de movimiento. El espacio de configuraciones $\tilde{C} = \{(r, \tilde{s}) : r \geq 0, \tilde{s}^T M \tilde{s} = 1, m_1 \tilde{s}_1 + m_2 \tilde{s}_2 + m_3 \tilde{s}_3 = 0\}$, aún no lo hemos identificado con las rotaciones. Así, el espacio de configuraciones reducido es

$$C = \{(r, \tilde{s}) : r \geq 0, \tilde{s}^T M \tilde{s} = 1, m_1 \tilde{s}_1 + m_2 \tilde{s}_2 + m_3 \tilde{s}_3 = 0\} / S^1.$$

Es decir, el espacio de todas las configuraciones permitidas cociente el simétrico rotacional. Es fácil ver que C es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times S^2$. Ya que las dos ecuaciones definen un elipsoide tridimensional en \mathbb{R}^6 . Y el espacio cociente de un elipsoide tridimensional bajo la acción de S^1 , es homeomorfo a S^2 . Entonces la variedad que forma el espacio de formas de un tamaño $r_0 > 0$ fijo es

$$C_{r_0} = \{(r_0, \tilde{s}) : r_0 \geq 0, \tilde{s}^T M \tilde{s} = 1, m_1 \tilde{s}_1 + m_2 \tilde{s}_2 + m_3 \tilde{s}_3 = 0\} / S^1.$$

Por lo tanto, C_{r_0} es homeomorfo a una esfera, que llamaremos esfera de formas.

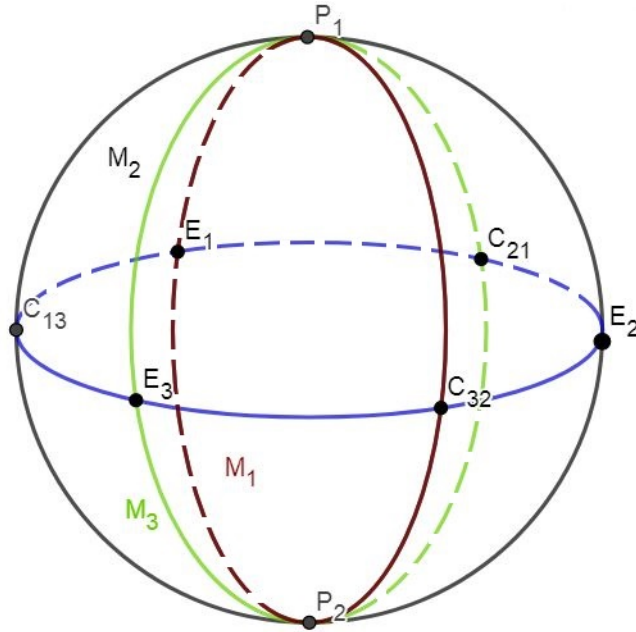


Figura 1: Esfera de formas

En la esfera de formas: Las configuraciones colineales forman el ecuador. En los polos, están las configuraciones de triángulos equiláteros P_1 y P_2 . Los triángulos isósceles forman tres circunferencias (formada por dos meridianos simétricos) M_1 , M_2 y M_3 , cada uno es la variedad donde un cuerpo equidista a los otros dos. Cada variedad M_1 , M_2 y M_3 interseca el ecuador en dos puntos: Uno representa la doble colisión C_{23} , C_{31} y C_{12} respectivamente (los subíndices indican los cuerpos que colisionan) y el otro donde el cuerpo $i = 1, 2, 3$ es centro de masa E_1 , E_2 y E_3 respectivamente (configuraciones de Euler).

Capítulo 1

Algunas órbitas periódicas

1.1. Introducción

En este capítulo hablaremos acerca de algunas de las características cualitativas del problema de los 3 cuerpos presentadas por Richard Moeckel con la intención de encontrar órbitas periódicas. Pues las órbitas periódicas resultan de gran interés desde la famosa frase de Poincaré:

Dadas unas ecuaciones de la forma definida en la sección núm. 13 y una solución particular cualquiera de esas ecuaciones, podemos siempre encontrar una solución periódica (en la cual el periodo, es cierto, puede ser muy largo), tal que la diferencia entre las dos soluciones sea arbitrariamente pequeña, a lo largo de un intervalo de tiempo arbitrariamente largo. Además, lo que vuelve estas soluciones periódicas tan valiosas, es el hecho que nos proveen, por decirlo de una manera, la única brecha que nos permite intentar a penetrar a una zona hasta la fecha considerada inaccesible...

Con el fin de encontrar órbitas periódicas, en este capítulo describiremos el comportamiento dinámico de algunas órbitas en el problema de tres cuerpos en el plano, con posiciones $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$, momentos $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^2$ y masas $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^+$ respectivamente. Dado que la dinámica es gobernada por el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= M^{-1}y \\ \dot{y} &= \nabla U(x)\end{aligned}$$

Dictado por la segunda ley de Newton y la ley universal de la gravedad, con $U(x) = \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{m_3 m_2}{|x_3 - x_2|} + \frac{m_1 m_3}{|x_1 - x_3|}$ la función potencial, $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$y = (y_1, y_2, y_3)$, $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$, definiendo una dinámica en \mathbb{R}^{12} . Donde usando las primeras integrales de movimiento: El momento total constante, centro de masa constante (bajo un cambio de perspectiva), el momento angular total es constante, la simetría bajo rotaciones y la energía total es constante. Pudimos reducir a una variedad 5-dimensional $M(\omega, h)$ cuya topología depende de la energía total h , el momento angular ω y las masas. Después usando las coordenadas de McGehee (r, \tilde{s}, z) , que definen una variable radial, posiciones y momentos escalados), facilitaron la visión geométrica. Ahora, como el comportamiento del tamaño y la forma del triángulo formado por los tres cuerpos tiene un significado más intuitivo que el comportamiento del momento. Nos concentraremos en el espacio de configuraciones C dependiente de r y s (donde $s := [\tilde{s}]$ es la clase de todas las rotaciones de la forma s). Vimos que C es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times S^2$, donde el origen representa la triple colisión.

Gracias al trabajo de G.W.Hill, quien observó que se pueden restringir las configuraciones con la energía y el momento angular. Define la región de Hill como $C(h, \omega) := \{(r, s) \in C : (r, z, \tilde{s}) \in M(\omega, h)\}$ que es la proyección en el espacio de configuraciones de $M(\omega, h)$. Estudiaremos la región de Hill restringida a la energía negativa, dado que para la energía positiva es de poco interés. Esto sucede porque cuando el sistema tiene energía positiva las órbitas solución escapan al infinito en ambas direcciones del tiempo. Veremos que la proyección de la región de Hill sobre la esfera de formas se encuentra acotada por una curva equipotencial. Así, podemos ver el comportamiento de la región de Hill y sus órbitas con la ayuda de la función $U(s)$ (analizada en la sección 0.4). Con esto determinaremos que la dinámica de la región de Hill sólo depende de $\lambda = -h\omega^2$ y de la elección de las masas. Entonces partiendo de este análisis con la ayuda de la función potencial, podremos ver todo el análisis de la región de Hill sólo variando la energía en $h < 0$ o equivalentemente el momento angular $\omega \in [0, \infty)$.

Iniciaremos el análisis con momento angular muy grande. Para este intervalo la función potencial tiende a infinito debido a la cercanía a una colisión. Obteniendo varios resultados de gran interés para esta teoría sobre las órbitas que se desarrollan en los tres lóbulos que aparecen alrededor de cada doble colisión.

Después bajaremos el momento angular hasta el primer valor crítico del potencial. Donde dos lóbulos se unen dando la posibilidad de que una órbita contenga una configuración central (la primera configuración isósceles colineal).

El siguiente intervalo de interés del momento angular, está por debajo del tercer valor crítico. Donde ya se conectó el otro lóbulo a los otros dos. La proyección de la región de Hill en la esfera de formas de este intervalo es una banda ecuatorial que contiene las tres configuraciones centrales colineales, y del que se sabe muy poco.

Después analizaremos el intervalo de los valores del momento angular por debajo del último valor crítico. Donde la proyección de la región de Hill en la esfera de formas ya cubre los polos, es decir, contiene a las configuraciones equilaterales aparte de las tres colineales. También notamos que si el momento angular tiende a cero la superficie interna converge a la triple colisión. Lo que nos lleva a analizar el caso donde el momento angular es nulo o casi nulo. Este caso es el más rico en información y más estudiado.

1.2. Región de Hill

G. W. Hill fue el primero en encontrar que las integrales de la energía y momento angular imponen restricciones sobre las configuraciones. Con este fin, veamos el momento angular y la energía en términos de las coordenadas (r, s, z) , introducidas en la sección 0.4. En este capítulo daremos una perspectiva pictórica del espacio de formas, la cual fue herramienta (junto con otras herramientas fuera de este trabajo) para demostrar la existencia de algunas órbitas periódicas.

Lema 1.2.1. *La energía y el momento angular en coordenadas de McGehee son:*

$$rH(s, z) = \frac{1}{2}z^T M^{-1}z - U(s) = hr,$$

$$z_1 \times s_1 + z_2 \times s_2 + z_3 \times s_3 = \frac{\omega}{\sqrt{r}}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H(x, y) = h &= \frac{1}{2}y^T M^{-1}y - U(x) \\ &= \frac{1}{2}r^{-1/2}z^T M^{-1}zr^{-1/2} - U(\tilde{s}r) \\ &= \frac{1}{2}r^{-1}z^T M^{-1}z - r^{-1}U(\tilde{s}). \\ \therefore \frac{1}{2}z^T M^{-1}z - U(\tilde{s}) &= rh. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\omega &= y_1 \times x_1 + y_2 \times x_2 + y_3 \times x_3 \\ &= r^{-1/2} z_1 \times r \tilde{s}_1 + r^{-1/2} z_2 \times r \tilde{s}_2 + r^{-1/2} z_3 \times r \tilde{s}_3 \\ &= r^{1/2} z_1 \times \tilde{s}_1 + r^{1/2} z_2 \times \tilde{s}_2 + r^{1/2} z_3 \times \tilde{s}_3.\end{aligned}$$

$$\therefore \omega r^{-1/2} = z_1 \times \tilde{s}_1 + z_2 \times \tilde{s}_2 + z_3 \times \tilde{s}_3.$$

Luego, como la energía y el momento angular no varían si rotamos las posiciones y momentos simultáneamente, entonces podemos sustituir \tilde{s} por s . Así, llegamos a lo deseado. \square

G.W.Hill define la región de Hill como

$$C(h, \omega) := \{(r, s) \in C : \text{para algún } z \in \mathbb{R}^6, (r, \tilde{s}, z) \in M(h, \omega)\},$$

con $C = \{(r, \tilde{s}) : r \geq 0, \tilde{s}^T M \tilde{s} = 1, m_1 \tilde{s}_1 + m_2 \tilde{s}_2 + m_3 \tilde{s}_3 = 0\} / S^1$. Por lo tanto, $C(h, \omega)$ es la proyección en el espacio de configuraciones reducido de la variedad integral $M(h, \omega)$. Estudiaremos la región de Hill para cada elección de h y ω describiendo algunas de las características del sistema dinámico en $M(h, \omega)$ y como se ve $C(h, \omega)$. Veamos que no es necesario variar los dos parámetros. Primero impondremos restricciones sobre la energía h restringida al caso negativo, ya que es bien sabido que si $h \geq 0$ todas las órbitas escapan al infinito en ambas direcciones del tiempo. Por lo tanto, no es posible la recurrencia y el problema es poco interesante.

Lema 1.2.2. *Si una órbita tiene energía h positiva, entonces los cuerpos escapan al infinito en ambas direcciones del tiempo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $I \rightarrow \infty$ si $|t| \rightarrow \infty$.*

Demostración. Derivando el momento inercial $I(t) = x^T M x(t)$ respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{I} = 2y^T x.$$

Derivando la expresión anterior respecto al tiempo, y usando la ecuación de la energía $h = \frac{1}{2}K - U$

$$\ddot{I} = 2y^T M^{-1}y + 2x^T \nabla U(x) = y^T M^{-1}y + 2U(x) = 2K + 2U(x) = 4h + 6U(x).$$

Ahora recordemos que $U(x) > 0$, entonces $\ddot{I} > 4h$, entonces integrando \ddot{I} respecto al tiempo

$$\int_0^t \ddot{I}(s) ds > \int_0^t 4h ds \Rightarrow \dot{I}(t) > 4ht + \dot{I}(0).$$

Integrando \dot{I} respecto al tiempo

$$\int_0^t \dot{I}(s) ds > \int_0^t (4hs + \dot{I}(0)) ds \Rightarrow I(t) > 4ht^2 + t\dot{I}(0) + I(0).$$

Finalmente tomando límite a infinito en cualquier sentido

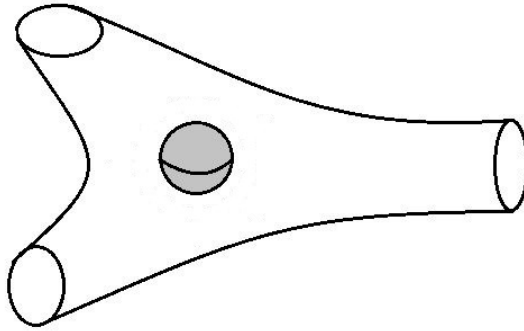
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I(t) > \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (4ht^2 + t\dot{I}(0) + I(0)) = \infty.$$

□

La ecuación de energía impone restricciones en las configuraciones: Como el término de la energía cinética $\frac{1}{2}z^T M^{-1}z$ es no negativo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z^T M^{-1}z - U(s) &= hr \\ \Rightarrow U(s) &= \frac{1}{2}z^T M^{-1}z - hr = |h|r + \frac{1}{2}z^T M^{-1}z \geq |h|r. \end{aligned}$$

Entonces para alguna forma s_0 en la esfera de formas, el tamaño está restringido entre 0 (la triple colisión) y $U(s_0)/|h|$ que es finito a menos que la forma corresponda a una de las tres dobles colisiones. Por lo tanto, todas las configuraciones que surgen del estado con energía h se encuentran en la región acotada por la siguiente figura.



La función potencial $U(s)$ tiene un máximo valor ∞ en la configuración de la doble colisión y un mínimo en las configuraciones equilaterales. Así, la energía no impone restricciones en el tamaño de una doble colisión, pero descarta todos los triángulos suficientemente grandes con cualquier otra forma.

Lema 1.2.3. *Con momento angular fijo se obtiene la siguiente desigualdad:*

$$z^T M^{-1} z \geq \omega^2 / r.$$

Demostración. Supongamos que el momento angular ω está fijo, dado que

$$\omega = \sum_{i=1}^3 y_i \times x_i.$$

Tomamos valor absoluto de ambos lados y aplicamos la desigualdad del triángulo

$$|\omega| = \left| \sum_{i=1}^3 y_i \times x_i \right| \leq \sum_{i=1}^3 |y_i| |x_i| = \sum_{i=1}^3 |y_i| |x_i| = \sum_{i=1}^3 \sqrt{m_i} |y_i| \sqrt{m_i^{-1}} |x_i|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, obtenemos

$$|\omega| \leq \left(\sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^3 m_i^{-1} |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Elevando ambos lados al cuadrado, resulta

$$\omega^2 \leq \sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^3 m_i^{-1} |y_i|^2.$$

Dado que el primer término es igual a r^2 y $y_i = z_i / \sqrt{r}$, entonces

$$\omega^2 \leq r \sum_{i=1}^3 m_i^{-1} |z_i|^2 = r z^T M^{-1} z.$$

□

Con el resultado anterior sumado a la ecuación de energía, obtenemos

$$U(s) = \frac{1}{2}z^T M^{-1}z - hr \geq |h|r + \frac{\omega^2}{2r}.$$

$$\therefore U(s) \geq |h|r + \frac{\omega^2}{2r}. \quad (1)$$

El cual caracteriza $C(h, \omega)$, pues tomando una forma s_0 en la esfera de formas, su tamaño es acotado inferiormente por $\frac{\omega^2}{2U(s_0)}$. De considerar que $0 \leq r \leq U(s_0)/|h|$, obtenemos que $\frac{\omega^2}{2U(s_0)} \leq r \leq U(s_0)/|h|$. Suponiendo que s_0 es una doble colisión entonces $\frac{\omega^2}{2U(s_0)} = 0$, entonces vemos que la región de Hill admite una doble colisión de cualquier tamaño.

Mostremos que la dinámica sólo depende de $\lambda = -h\omega^2$, permitiendo ver todo el análisis fijando algún $h < 0$ y variando ω en $[0, \infty)$. La proyección de $\partial C(h, \omega)$ en la esfera de formas es el conjunto de todas las s que cumplen la desigualdad 1 para algún $r \geq 0$. Minimizando $|h|r + \frac{\omega^2}{2r}$ respecto a r

$$\frac{d}{dr}\left(|h|r + \frac{\omega^2}{2r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow |h| - \frac{\omega^2}{2r^2} = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{|\omega|}{\sqrt{2|h|}}.$$

$$\therefore U(s) \geq |\omega|\sqrt{|h|/2} + |\omega|\sqrt{|h|/2} = |\omega|\sqrt{2|h|} = \sqrt{2\lambda}. \quad (2)$$

Esta desigualdad caracteriza la proyección de la región de Hill en la esfera de formas, dado que h y ω son constantes la $U(s)$ alcanza el mínimo en $\sqrt{2\lambda}$. Por lo tanto, la proyección de la región de Hill en la esfera de formas es acotada por una curva equipotencial.

1.3. Momento angular grande

El primer caso que analizaremos es cuando el momento angular ω es grande. La desigualdad 2 fuerza a la forma s , a quedarse en uno de los tres discos alrededor de cada configuración de doble colisión donde $U(s) = \infty$. Esto significa que dos de los cuerpos están relativamente cercanos con respecto a la

distancia al tercer cuerpo, a lo que llamaremos configuración binaria ajustada. La región de Hill consiste en tres lóbulos sobre los discos mencionados. Estos lóbulos tocan la triple colisión y el infinito sobre la configuración de doble colisión. El comportamiento de las órbitas cerca de estos dos extremos de r es similar para todo momento angular no cero.

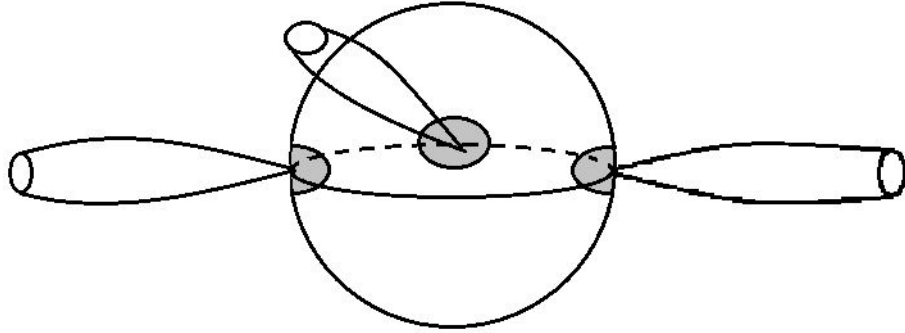


Figura 1.1: Región de Hill para momento angular grande

Teorema 1.3.1. *Si el momento angular no es cero. Entonces si alguna órbita pasa suficientemente cerca a la triple colisión es del siguiente tipo: la configuración es binaria ajustada para todo tiempo y el lado pequeño del triángulo se mantiene siempre ajustado mientras que los otros dos lados tienden a infinito en ambos sentido del tiempo.*

Este teorema fue hecho por Sundman con refinamientos de Birkhoff. En particular implica que la triple colisión no es posible para $\omega \neq 0$. En el infinito de un lóbulo tenemos el problema de dos cuerpos al infinito ($r \rightarrow \infty$), donde la desigualdad 1 muestra que la configuración es binaria ajustada. Sin embargo no sucede que los tres lados de los triángulos tiendan a infinito, apelando a la ecuación de energía no escalada muestra que un lado se mantiene acotado mientras que los otros dos tienden a infinito. Esta es la razón por la que la influencia de la tercer masa se desprecia y la configuración binaria se comporta esencialmente como el problema de los dos cuerpos. De hecho, es posible copiar y pegar el problema de los dos cuerpos al infinito de los tres lóbulos de $M(h, \omega)$. Realmente existen muchos problemas de dos cuerpos en el infinito, que se distinguen por su velocidad asintótica de la separación de la configuración binaria con la tercer masa, intuitivamente hay tres casos: Primero, la tercer masa tiene sólo la energía suficiente para escapar de la configuración binaria y alcanzar el infinito con velocidad asintótica cero (caso parabólico).

Segundo, la tercer masa tiene energía de sobra para alcanzar el infinito con velocidad asintótica positiva (caso hiperbólico). Tercero, la tercer masa no tiene energía suficiente para alcanzar el infinito y regresa aproximándose a la configuración binaria (caso elíptico). Claramente el primer caso separa a los otros dos.

Pensando en que la configuración binaria es la tierra y la luna, y el tercer cuerpo es el sol, vemos que la luna siempre está a una distancia acotada de la tierra y mucho mas cercana que la distancia de la tierra al sol. En esta analogía de la tierra-luna podemos observar las órbitas periódicas lunares, órbitas donde los dos cuerpos del binario se mueven en órbitas cercanamente circulares a su centro de masa mientras que la tercer masa y el centro de masa del binario se mueve cercanamente circular alrededor del centro de masa. Dicha órbita es llamada prógrada si ambos movimientos circulares van en la misma dirección y retrógrada si van en direcciones diferentes.

1.4. El primer valor crítico de ω

La región de Hill tiene un comportamiento continuo mientras bajemos el valor de ω hasta llegar a su primer valor crítico. Bajaremos ω hasta alcanzar el primer valor crítico para $U(s)$. Pues de la descripción de la sección 1.2, de como la región de Hill se proyecta sobre la esfera de formas, es claro que la bifurcación de esta región surge de una curva equipotencial en la esfera de formas. Así, el valor crítico de ω corresponde a un valor crítico de $U(s)$. Tenemos que las configuraciones equilaterales son mínimos de $U(s)$ y tres configuraciones colineales son puntos silla de $U(s)$.

Cada configuración central determina un punto de reposo en $M(h, \omega)$ para el correspondiente valor crítico de ω . Esto representa órbitas periódicas del problema de los tres cuerpos, donde el triángulo formado por las tres masas rota rígidamente alrededor del centro de masa (soluciones homográficas).

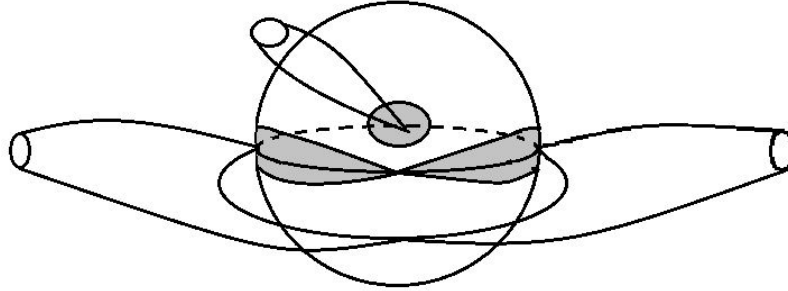


Figura 1.2: Región de Hill en el primer momento angular crítico

Como alcanzamos el primer valor crítico de ω , dos de los tres discos que se están alrededor de una doble colisión en la esfera de formas se encuentran en la configuración colineal E_j $1 \leq j \leq 3$. Sobre este punto silla de radio $U(E_j)/2|h|$, dos de los tres lóbulos de la región de Hill se encuentran representando la configuración de la órbita periódica de Euler. Como pasamos a través del crítico ω un túnel se abre entre dos lóbulos. Un interesante conjunto invariante vive en el túnel (soluciones homográficas). Esto surge de la continuación de bajar el momento angular de la órbita circular donde la configuración central sólo rota rígidamente. La configuración permanece similar a la configuración central pero no rota rígidamente, el tamaño se expande y contrae. La órbita de los tres cuerpos es similar a una elipse alrededor del centro de masa obedeciendo las leyes de Kepler para el problema de los dos cuerpos. Ya que la forma permanece siempre acotada, tal órbita aparece en la región de Hill como un segmento de línea radial sobre la configuración central.

1.5. Debajo del tercer valor crítico de ω

Las otras dos configuraciones colineales están asociadas con una bifurcación similar a la de la sección anterior. En los niveles críticos aparecen órbitas circulares periódicas. Nuevos túneles aparecen conectando el tercer lóbulo con los otros dos. Después de la tercer órbita colineal, la proyección de la región de Hill es una banda ecuatorial en la esfera de formas. Bastante poco se sabe acerca de la dinámica entre estos valores del momento angular.

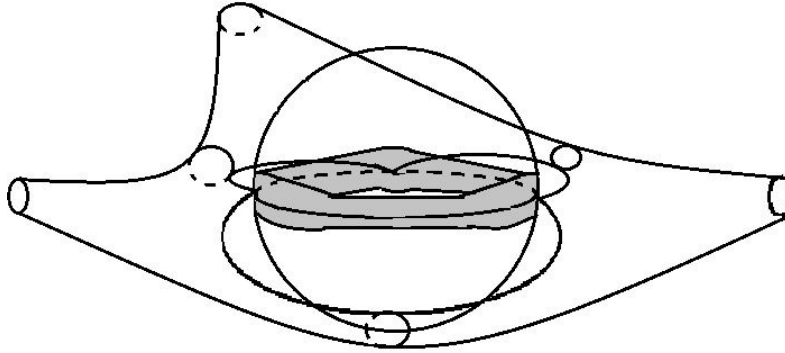


Figura 1.3: Región de Hill debajo del tercer momento angular crítico

1.6. Debajo del último valor crítico de ω

Conforme bajemos ω , la banda ecuatorial en la esfera de formas se va ampliando hasta alcanzar el último valor crítico de ω , donde finalmente cubre los polos que representan las configuraciones equilaterales. En los valores críticos surgen dos puntos de reposo en $M(h, \omega)$ correspondiendo a las órbitas circulares periódicas equilaterales de Lagrange. Las órbitas se vuelven elípticas como en el caso colineal. Después de la bifurcación, las órbitas elípticas de Lagrange aparecen como un segmento de línea radial. Globalmente la frontera de la región de Hill está dividida en dos dos esferas. Esta topología se conserva hasta $\omega = 0$. Cuando $\omega \rightarrow 0$, la superficie interna converge a la triple colisión. Para todo $\omega \neq 0$ bajo la última bifurcación, existen cinco órbitas elípticas de Lagrange, una para cada una de las configuraciones centrales.

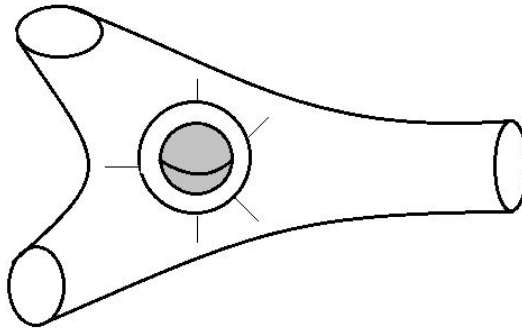


Figura 1.4: Región de Hill debajo del último momento angular crítico

1.7. Momento angular ω bajo

En esta sección consideraremos el caso $\omega = 0$ y $\omega \neq 0$ pequeño. La dinámica interesante se da con las órbitas que pasan cerca de la tripe colisión. En las nuevas coordenadas explota la singularidad en el conjunto invariante $\{r = 0\}$. El estudio de la triple colisión inició con Sundman y continuó por Siegel. El estudio de McGehee del problema de los tres cuerpos colineales impulsó un trabajo mayor. El problema de los tres cuerpos isósceles presenta un sub-sistema cuando dos de las tres masas son iguales, el cual fue estudiado por numerosos autores.

El teorema de Sundman ya no aplica sobre las órbitas cerca de $r = 0$ y la triple colisión es posible. Mucho se puede decir sobre las órbitas que inician y terminan en triple colisión, primero su existencia: Por ejemplo, las órbitas elípticas de Lagrange vienen cada vez más excéntricas cuando $\omega \rightarrow 0$ y las elipses se degeneran en un segmento de línea. Las órbitas límite son expansiones y contracciones homotéticas, es decir, su forma siempre es la configuración central mientras que el tamaño crece desde cero hasta un máximo y después regresa a cero. Por lo tanto, estas órbitas son homoclínicas a la triple colisión.

Capítulo 2

Coreografía del 8

2.1. Introducción

En esta última etapa, estudiaremos una órbita muy peculiar del problema de los tres cuerpos en el plano, encontrada por Alain Chenciner y Richard Montgomery, a través de métodos variacionales. Esta solución es una notable órbita periódica, donde el movimiento de cada cuerpo describe la misma curva en forma ocho, y los tres cuerpos con masas iguales se mueven sin colisionar. Este tipo de soluciones son llamadas coreografías. Esta órbita es simétrica, estable, su centro de masa está fijo en el origen y tiene momento angular cero.

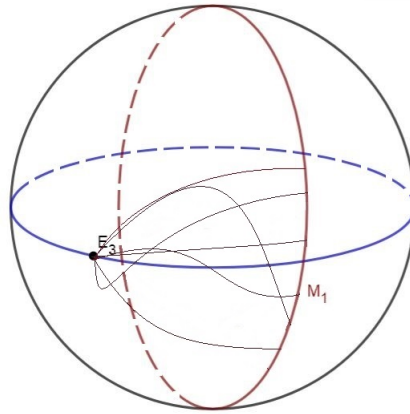
Para probar la existencia de esta coreografía primero consideraremos el espacio de configuraciones

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3\}$$

con centro de masa en el origen, sin colisiones y lo dotamos de un producto escalar Hermitiano. Recordemos que el sistema que gobierna el problema de los tres cuerpos es invariante bajo el grupo isométrico actuando entrada por entrada. Notemos que el espacio fase se identifica con el producto del espacio de configuraciones con sí mismo incluyendo las colisiones ($X \times X - \{colisiones\}$). El hecho de que las masas sean iguales le da una gran simetría al problema. Para construir el ocho, usaremos esta simetría y curvas uniendo ciertas configuraciones centrales. Más precisamente, consideraremos el siguiente problema de minimización de acción en el espacio de configuraciones:

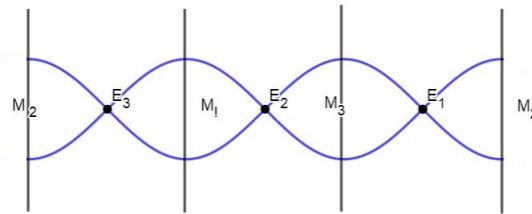
Fijamos una configuración de Euler, digamos E_3 con tamaño arbitrario y una

variedad de configuraciones isósceles ajena a E_3 , digamos M_1 . Y consideramos todas las curvas que unen a E_3 con algún punto de M_1 en un tiempo T , para algún $T \in \mathbb{R}$ fijo. Entre todas estas curvas consideramos la que minimiza la acción.



A través de métodos variacionales, probaremos que la curva que minimiza la acción, llega a M_1 con un ángulo recto, y parte del rayo de E_3 con ángulo recto.

El mismo problema se puede plantear con cualquier otra configuración de Euler E_i y variedad isósceles M_j tales que $i \neq j$. Así, obtenemos 12 curvas similares, tales que por su simetría y la ortogonalidad a las variedades isósceles y a los rayos de configuraciones de Euler, se unen suavemente.



Por lo tanto, nos podemos concentrar en el doceavo de curva que va de E_3 a M_1 . Para asegurarnos que la solución no tenga colisiones: Compararemos la acción de un camino con colisión, con la acción de la solución colineal al problema de los dos cuerpos donde empiezan en colisión y terminan en reposo. Órbita llamada media colisión-eyección, esta órbita minimiza la acción en el problema de dos cuerpos con colisión. Mostrando que si un camino

tiene colisión, entonces su acción es mayor o igual a la acción de la media colisión-eyección. Después, consideraremos los ccaminos equipotencial en la esfera $I = I_0$, con $U_0 = U(E_3)$ y velocidad constante tal que recorran de E_3 a M_1 en un tiempo T . Esto nos define una familia de caminos equipotenciales dependientes de I_0 . Tomaremos el camino a que minimiza la acción en el conjunto que acabamos de describir. Compararemos la acción de segmento antes mencionado de a con la acción de la media colisión-eyección, estableciendo que la longitud l_0 de a (en el segmento de E_3 a M_1 en el espacio de configuraciones) es menor a $\pi/5$ si, y sólo si, no tiene colisiones. Comprobaremos numéricamente que $l_0 < \pi/5$, empleando coordenadas esféricas en la métrica reducida, inducida por la descomposición de la velocidad de Saari ($K = K_{red} + K_{rot}$), y la composición de dos mapeos (Jacobiano y Kustaanheimo-Stiefel) en el espacio de configuraciones. Así, obtendremos la proyección de un doceavo de la curva solución en el espacio de configuraciones. Considerando los otros 11 segmentos de curva simétricos, conseguiremos la proyección de la curva en el espacio de configuraciones. Haciendo uso de la regla del área podemos recuperar la forma de la curva en el plano inercial y su invarianza bajo el grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Por último, verificaremos que la curva no tenga lazos extras, observando que cada lóbulo tiene forma de estrella.

2.2. Planteamiento

Consideramos tres cuerpos con masa unitaria en el plano $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, el espacio fase se convierte en el haz tangente al espacio de configuraciones $\widehat{X} = X - \{\text{colisiones}\}$, donde

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3, \sum_{i=1}^3 x_i = 0 \right\}.$$

Dotado con el producto escalar Hermitiano de masas, en el caso de masas unitarias es:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i \cdot y_i = x \cdot y + i\omega(x, y).$$

Donde la parte real es el producto escalar y la imaginaria es la estructura simpléctica. El espacio fase se identifica con $\widehat{X} \times X$, con elementos (x, y) .

Definición 2.2.1. Sean $P \in \mathbb{R}^2$ y $T > 0$, nos referiremos a un circuito planar en forma de ocho T -periódico con vértice en P . Como la curva imagen de una función suave regular $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

1. $\gamma(0) = P$;
2. existe un único $t \in (0, T)$, tal que $\gamma(t) = P$;
3. $\gamma((0, t_0))$ y $\gamma((t_0, T))$ son curvas simples (la función restringida a los intervalos mencionados es inyectiva), disjuntas, con interiores disjuntos y en forma de estrella a partir de P ;
4. $\gamma([0, T])$ es simétrico, con dos ejes de simetría.

Nota 2.2.2. 1. Un conjunto $A \in \mathbb{R}^2$ tiene forma de estrella a partir de un punto $a \in A$, si para todo $b \in A$ el segmento de recta que une a los puntos a, b está contenida en A .

2. La definición del interior de una curva, surge del teorema de la curva de Jordan: Toda curva cerrada simple divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera en común. Una de estas está acotada (interior de la curva) y la otra no está acotada (exterior de la curva).
3. Sean l_1, l_2 dos rectas en el plano, entonces un conjunto $A \in \mathbb{R}^2$ es simétrico con dos ejes de simetría l_1, l_2 , si A es invariante bajo la reflexión en l_1 o l_2 .

Queremos encontrar la órbita periódica en forma de ocho ya mencionada, con este fin, consideremos un $\bar{T} > 0$ y definimos la acción del grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en \mathbb{R} y en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera: Sean σ y τ los generadores de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, con $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\sigma \cdot t = t + \bar{T}/2, \tau \cdot t = -t + \bar{T}/2, \sigma \cdot (x, y) = (-x, y), \tau \cdot (x, y) = (x, -y). \quad (1)$$

Con esto, nos concentraremos en la prueba del siguiente teorema el resto del capítulo.

Teorema 2.2.3. Existe un circuito planar en forma de ocho \bar{T} -periódico $q : \mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$, con vértice $q(0) = (0, 0)$ y las siguientes propiedades:

1. para cada $t \in \mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$,

$$q(t) + q(t + \bar{T}/3) + q(t + 2\bar{T}/3) = 0;$$

2. q es equivariante bajo las acciones de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en \mathbb{R} y en \mathbb{R}^2 , descritas en 1, es decir,

$$q(\sigma \cdot t) = \sigma \cdot q(t) \text{ y } q(\tau \cdot t) = \tau \cdot q(t);$$

3. la función $x : \mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z} \rightarrow \hat{X}$ definida por

$$x(t) = (q(t + 2\bar{T}/3), q(t + \bar{T}/3), q(t))$$

es una solución \bar{T} -periódica con momento angular cero del problema planar de los tres cuerpos con masas iguales.

2.3. La exclusión de colisiones

Sea Λ el subespacio de $H^1([0, T], X) := \{x \in L^2([0, T]) : \dot{x} \in L^2([0, T]), x : [0, T] \rightarrow X\}$, que consiste de todos los caminos que empiezan en la configuración de Euler E_3 con tamaño arbitrario y terminan en una configuración isósceles de M_1 con tamaño arbitrario, en un tiempo $T = \bar{T}/12$. En esta sección probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Un camino $x \in \Lambda$ que minimiza la acción*

$$A(x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} K(x(t)) + U(x(t)) \right) dt$$

no tiene colisiones.

Primero observemos que la acción

$$A(m_1, m_2, m_3; x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{x}_i(t)|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_i(t) - x_j(t)|} \right)$$

a lo largo de un camino $x(t)$ es una función creciente con respecto a las masas. Ajustando por ejemplo $m_1 = 0$, tenemos:

$$A(x) = A(1, 1, 1, x) > A(0, 1, 1; x).$$

Notemos que el último término corresponde a la acción de un problema de dos cuerpos con masas iguales a 1.

Definición 2.3.2. Consideremos el problema de dos cuerpos con masas unitarias donde los cuerpos están en reposo a cierta distancia $2d \in \mathbb{R}^+$. Por atracción Newtoniana colisionan y después regresan a distar $2d$ con velocidad final 0, a esta órbita le llamaremos órbita elíptica de colisión-eyección.

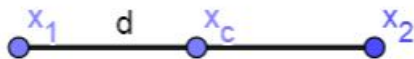


Figura 2.1: Órbita colisión-eyección

A la órbita de colisión-eyección le ajustaremos la velocidad para que en tiempo T recorra el segmento a partir de la colisión hasta el punto de reposo, y le llamaremos media órbita elíptica de colisión-eyección.

Lema 2.3.3. Si $x \in H^1([0, T], X)$ tiene una colisión, ya sea doble o triple, entonces su acción es mayor a A_2 , donde A_2 es la acción de la media órbita elíptica de colisión-eyección.

Nota 2.3.4. El lema afirma que el ínfimo de la acción $A(x)$ sobre todos los caminos con colisión $x \in H^1([0, T], X)$ es mayor o igual a A_2 . De hecho igual. En efecto, supongamos una sucesión de caminos x_n , en los cuales m_2 y m_3 hacen la media órbita elíptica de colisión-eyección, mientras que m_1 permanece fijo, y dista n al centro de masa de los otros dos cuerpos. Así, $A(x_n) \rightarrow A_2$ cuando $n \rightarrow \infty$, pues x_1 tiene velocidad 0 y la energía potencial de este cuerpo tiende a cero cuando se aleja de los otros dos cuerpos.

Demostración. Supongamos que las masas m_3 y m_2 (y tal vez m_1) colisionan después de un tiempo T_1 . Como ya vimos, bajamos la acción del camino ajustando $m_1 = 0$. Entonces nos podemos olvidar de la posición de m_1 para esta nueva acción, quedando la acción para el problema de dos cuerpos Kepleriano. De acuerdo con Gordon cada parte de la curva x antes y después de T_1 tienen acción mayor o igual al correspondiente movimiento colineal de masas m_2 y m_3 en el cual colisionan en tiempo T_1 y reposan en sus puntos finales ($t = 0, T$). En efecto, de doblar cada parte y concatenarla en sentido opuesto, obtenemos dos caminos cerrados, que van de colisión a colisión, uno de tiempo $2T_1$ y otro en tiempo $2(T - T_1)$. El mínimo absoluto para

el problema de colisión a colisión fué mostrado por Gordon (ver [4]) y es la solución colisión-eyección: Su acción es proporcional a $T^{1/3}$ (podemos ver esta relación en el lema 2.3.5), como $A = cT^{1/3}$ y con \hat{A} como la acción de la concatenación antes mencionada, entonces

$$\begin{aligned}\hat{A} &= cT_1^{1/3} + c(T - T_1)^{1/3} \\ &= cT^{1/3} \left[\left(\frac{T_1}{T}\right)^{1/3} + \left(\frac{T - T_1}{T}\right)^{1/3} \right] \\ &\geq cT^{1/3} \left(\frac{T_1}{T} + \frac{T - T_1}{T}\right) \\ &= cT^{1/3}.\end{aligned}$$

Es decir, que si reemplazamos los dos movimientos anteriores por una solución de colisión-eyección iniciando y terminando en colisión, sin colisiones en medio habremos bajado la acción. Por lo tanto, la mitad de este camino realiza el ínfimo de la acción de los caminos con colisión en tiempo T para el problema de Kepler (el problema de los dos cuerpos). \square

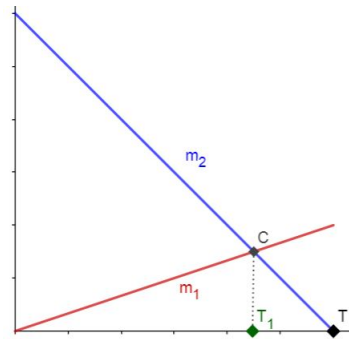


Figura 2.2: Órbita con colisión



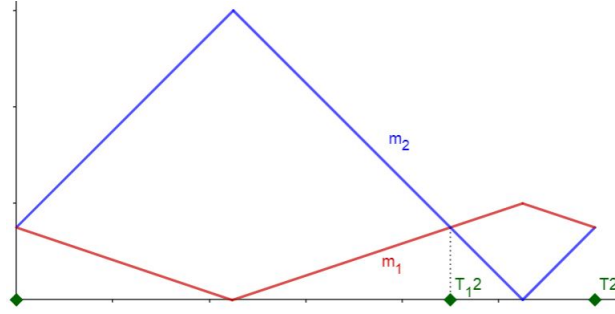


Figura 2.3: Órbita de colisión a colisión resultante de la concatenación

Lema 2.3.5. *La acción A de la órbita colisión-eyección con periodo $P \in \mathbb{R}^+$, masas unitarias y centro de masa en el origen, es*

$$A = 3 \cdot 2^{-2/3} \pi^{2/3} P^{1/3}.$$

Demostración. Recordando que las ecuaciones que rigen el movimiento del problema de los dos cuerpos, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{|x_1 - x_2|^3} = \frac{x_2 - x_1}{|x_1 - x_2|^3}, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{Gm_1(x_1 - x_2)}{|x_2 - x_1|^3} = \frac{x_1 - x_2}{|x_2 - x_1|^3}, \end{aligned}$$

con $G = 1$ y masas unitarias.

Por otro lado, podemos notar que el fijar el centro de masa en el origen, esto nos implica que

$$x_1 = -x_2.$$

Entonces

$$\ddot{x}_1 = \frac{-2x_1}{|2x_1|^3} = \frac{-x_1}{4|x_1|^3} \quad (2)$$

Notemos que en el punto inicial la energía h es $-(2d)^{-1}$, pues tiene velocidad cero en ese punto y los cuerpos distan $2d$, y recordando que la energía es constante, entonces $h = -(2d)^{-1}$. Ahora, por la tercera ley de Kepler: El periodo P de una órbita Kepleriana y el semieje mayor a están relacionados de la siguiente manera:

$$P^2 = \frac{4\pi}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Notando que en la órbita de colisión-eyección de periodo P , los dos cuerpos describen la misma órbita Kepleriana con longitud del eje mayor $2d$. Aplicando la tercera ley de Kepler a esta órbita, obtenemos

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}d^3 = 2\pi^2d^3 = -\frac{\pi^2h^{-3}}{4}.$$

Despejando h , obtenemos

$$h = -2^{-2/3}\pi^{2/3}P^{-2/3}.$$

Calculando la acción A de la órbita colisión-eyección con las características mencionadas:

$$A = \int_0^P \left(\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{|x_1 - x_2|} \right) dt.$$

Usando $x_1 = -x_2$,

$$A = \int_0^P \left(\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2|x_1|} \right) dt.$$

Utilizando $h = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{|x_1 - x_2|} = \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2|x_1|}$,

$$A = \int_0^P 2\dot{x}_1^2 dt - hP.$$

Integrando por partes el primer término,

$$A = 2\dot{x}_1x_1|_0^P - \int_0^P 2\ddot{x}_1x_1 dt - hP.$$

Sustituyendo \ddot{x}_1 con la ecuación 2, observando que $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(P) = 0$, pues son puntos de reposo y $|x(0)| = |x(p)| = d$, entonces

$$A = \int_0^P 2\frac{x_1}{4|x_1|^3}x_1 dt - hP = \int_0^P \frac{1}{2|x_1|} dt - hP.$$

Utilizando de nuevo $h = \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2|x_1|}$

$$A = \int_0^P \dot{x}_1^2 dt - 2hP.$$

De observar que $\int_0^P 2\dot{x}_1^2 dt - hP = \int_0^P \dot{x}_1^2 dt - 2hP$, concluimos que

$$A = -3hP.$$

Finalmente, usando la relación de la tercera ley de Kepler, llegaremos a

$$A = 3 \cdot 2^{-2/3} \pi^{2/3} P^{1/3}.$$

□

Definición 2.3.6 (Caminos de prueba equipotenciales y su longitud). *Fijemos $I = I_0$ y $U = U_0$, donde U_0 es el valor de la función potencial en alguna de las configuraciones de Euler en la esfera $I = I_0$. Visto en el espacio de configuraciones reducido, esto define una curva en la dos esfera de radio $\sqrt{I_0}$. Tomando un doceavo de la curva alrededor del ecuador, que conecta E_3 con M_1 . Tomamos estos caminos con velocidad constante tal que recorra el segmento anterior en tiempo T . Esto define una familia de caminos de prueba reducidos en $X/SO(2)$ dependientes de I_0 . La longitud de estos caminos es $l_0\sqrt{I_0}$ donde l_0 es la longitud del camino cuando $I_0 = 1$, desde ahora llamada La longitud equipotencial de Euler.*

Lema 2.3.7. *El mínimo de las acciones de los caminos de prueba equipotenciales a es más pequeño que el ínfimo de las acciones de caminos con colisión en tiempo T , A_2 si, y sólo si, La longitud equipotencial de Euler l_0 satisface:*

$$l_0 < \frac{\pi}{5}.$$

Demostración. La acción A_2 es la mitad del camino de colisión-eyección de periodo $2T$, por el lema 2.3.5 es

$$A_2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 2^{-2/3} \pi^{2/3} (2T)^{1/3}.$$

Ahora evaluaremos el mínimo a de las acciones de los caminos de prueba equipotenciales. Calculando la acción $A(I_0) := A(x_{I_0})$, donde x_{I_0} es un camino de prueba equipotencial en la esfera de radio $\sqrt{I_0}$

$$A(I_0) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} K_0 + U_0 \right) dt = \left(\frac{1}{2} K_0 + U_0 \right) T$$

con $K_0 = I_0 l_0^2 / T^2$ (pues el camino recorre $l_0\sqrt{I_0}$ en un tiempo T con velocidad constante), y $U_0 = \tilde{U}_E / \sqrt{I_0}$, donde \tilde{U}_E indica el valor de la función potencial

U en una configuración de Euler en la esfera $I = 1$. Considerando que $x_3 = (0, 0)$ y dado que el sistema es invariante bajo rotaciones, podemos considerar los otros dos cuerpos se encuentran sobre el eje x , $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ y no están en colisión, entonces

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \sqrt{2} \\ |x_1 - x_3| &= 1/\sqrt{2} \\ |x_2 - x_3| &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{U}_E = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{32}} + \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1/\sqrt{2}} + \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Ahora minimizaremos la función $A(I_0)$, derivando respecto a I_0 e igualando la derivada a cero, obtenemos

$$\begin{aligned} A'(I_0) &= \frac{d}{dI_0} \left(\frac{l_0^2 I_0}{4T} + \frac{5T}{\sqrt{2I_0}} \right) \\ &= \frac{l_0^2}{4T} - \frac{5T}{2\sqrt{2I_0^3}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore I_0 = \left(\frac{25T^4}{2l_0^4} \right)^{1/3}.$$

Dada la concavidad de esta función este valor es su único valor mínimo, así, sustituyendo

$$a = \frac{l_0^2 I_0}{4T^2} + \frac{5T}{\sqrt{2I_0}} = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} l_0^{2/3} T^{1/3}.$$

Por lo tanto, $a < A_2$ si, y sólo si,

$$\frac{3}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} l_0^{2/3} T^{1/3} < \frac{1}{2} 3 \cdot 2^{-2/3} \pi^{2/3} (2T)^{1/3}.$$

Finalmente, despejando l_0 , obtenemos

$$l_0 < \frac{\pi}{5}.$$

□

Ahora veremos una aproximación de La longitud equipotencial de Euler obtenida numéricamente, para ello necesitamos coordenadas explícitas de: Las configuraciones en el espacio cociente $X/SO(2)$, la expresión de la métrica a la esfera de formas y la función potencial.

Definición 2.3.8. *Un mapeo de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ es una función continua tal que cada punto en particular de la 2-esfera proviene de una circunferencia específica de la 3-esfera.*

El cociente es realizado por la composición del mapeo Jacobiano \mathcal{J} con el mapeo de Hopf \mathcal{K} (también llamado mapeo de Kustaanheimo-Stiefel):

$$\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$\mathcal{K} : S^3 \times \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3 \cong S^2 \times \mathbb{R}^+,$$

definidos por

$$\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_1), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \right) \right) = (z_1, z_2),$$

$$\mathcal{K}(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) = (u_1, u_2 + iu_3).$$

Recordemos que si $(x_1, x_2, x_3) \in X$, entonces $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, con ello, podemos notar que el mapeo \mathcal{J} es un isomorfismo y dado que I es la métrica en X también es una isometría, pues $I = |z_1|^2 + |z_2|^2$. La acción que realiza $SO(2)$ sobre X corresponde a la acción de multiplicar entrada por entrada los complejos unitarios en las coordenadas (z_1, z_2) , es decir, $X/SO(2) \cong \mathbb{C}^2/S^1$. El cociente de las rotaciones es realizado de hacer un vector de los polinomios invariantes del mapeo \mathcal{K} . También notemos, que

$$|\mathcal{K}(z_1, z_2)|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = I^2.$$

La 3-esfera $I = 1$ es mandada por $\mathcal{K} \circ \mathcal{J}$ a una 2-esfera unitaria en \mathbb{R}^3 (La esfera de formas), es decir, \mathcal{K} preserva la métrica. La localización de las configuraciones de doble colisión (donde $C_i = C_{j,k}$ con $j \neq i \neq k$), Euler y Lagrange de la esfera de radio $I = 1$ bajo la composición $\mathcal{K} \circ \mathcal{J}$ son:

$$\begin{aligned} C_1 &= (-1, 0, 0), & C_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & C_3 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\ E_1 &= (1, 0, 0), & E_2 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & E_3 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\ L_1 &= (0, 0, 1), & L_2 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Evaluando r_{12}, r_{23}, r_{13} en las coordenadas Jacobianas:

$$\begin{aligned} r_{23} &= |x_3 - x_2| \\ &= \sqrt{2}|(1\sqrt{2})(x_3 - x_2)| \\ &= \sqrt{2}|z_1|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= |x_2 - x_1| \\ &= |x_1 - x_2 + (1/2)x_3 - (1/2)x_3| \\ &= |(x_1 - (1/2)(x_2 + x_3)) + (1/2)(x_3 - x_2)| \\ &= |\sqrt{3/2}\sqrt{2/3}(x_1 - (1/2)(x_2 + x_3)) + (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2})(x_3 - x_2)| \\ &= |\sqrt{3/2}z_2 + (1/\sqrt{2})z_1|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= |x_1 - x_3| \\ &= |x_1 - x_3 + (1/2)x_2 - (1/2)x_2| \\ &= |(x_1 - (1/2)(x_2 + x_3)) - (1/2)(x_3 - x_2)| \\ &= |\sqrt{3/2}\sqrt{2/3}(x_1 - (1/2)(x_2 + x_3)) - (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2})(x_3 - x_2)| \\ &= |\sqrt{3/2}z_2 - (1/\sqrt{2})z_1|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r_{23} = \sqrt{2}|z_1|, \quad r_{12} = |\sqrt{3/2}z_2 + (1/\sqrt{2})z_1|, \quad r_{13} = |\sqrt{3/2}z_2 - (1/\sqrt{2})z_1|.$$

Lema 2.3.9 (Hsiang). *Para $u = (u_1, u_2, u_3)$ en la esfera de formas, corresponde a un triángulo con lados $r_{23} = \sqrt{1 - C_1 \cdot u}$, $r_{12} = \sqrt{1 - C_2 \cdot u}$, $r_{31} = \sqrt{1 - C_3 \cdot u}$.*

Demostración. Usando que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ y las expresiones anteriores, obtenemos:

$$\sqrt{1 - C_1 \cdot u} = \sqrt{1 + u_1} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - |z_2|^2} = \sqrt{2}|z_1| = r_{23},$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - C_2 \cdot u} &= \sqrt{1 - (1/2)u_1 + (\sqrt{3}/2)u_2} \\
&= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (1/2)|z_1|^2 + (1/2)|z_2|^2 + (\sqrt{3}/2)Re(2\bar{z}_1 z_2)} \\
&= \sqrt{|(1/2)\bar{z}_1 z_1 + (3/2)\bar{z}_2 z_2 + (\sqrt{3}/2)(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1)|} \\
&= \sqrt{((1/2)z_1 + (\sqrt{3}/2)z_2)((1/2)\bar{z}_1 + (\sqrt{3}/2)\bar{z}_2)} \\
&= \sqrt{|(1/2)z_1 + (\sqrt{3}/2)z_2|^2} \\
&= |\sqrt{3}/2 z_2 + (1/\sqrt{2})z_1| = r_{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - C_3 \cdot u} &= \sqrt{1 - (1/2)u_1 - (\sqrt{3}/2)u_2} \\
&= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (1/2)|z_1|^2 + (1/2)|z_2|^2 - (\sqrt{3}/2)Re(2\bar{z}_1 z_2)} \\
&= \sqrt{|(1/2)\bar{z}_1 z_1 + (3/2)\bar{z}_2 z_2 - (\sqrt{3}/2)(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1)|} \\
&= \sqrt{((1/2)z_1 - (\sqrt{3}/2)z_2)((1/2)\bar{z}_1 - (\sqrt{3}/2)\bar{z}_2)} \\
&= \sqrt{|(1/2)z_1 - (\sqrt{3}/2)z_2|^2} \\
&= |\sqrt{3}/2 z_2 - (1/\sqrt{2})z_1| = r_{13}.
\end{aligned}$$

□

Ahora deduciremos la fórmula para la métrica reducida K_{red} (la métrica Riemanniana en el espacio cociente $X/SO(2)$) de la distancia $d(x, y)$ entre órbitas $x, y \in X$. Como $SO(2)$ actúa por isometrías, entonces

$$d^2(x, y) = \inf_{\theta} \sum_{i=1}^3 |x_i - e^{i\theta} y_i|^2 = \inf_{\theta} [|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \sin \theta].$$

Si derivamos respecto a θ e igualamos a cero, notamos que el mínimo ocurre

en $\theta = \theta_0$ donde $x \cdot y \sin \theta_0 + \omega(x, y) \cos \theta_0 = 0$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
d^2(x, y) &= |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \sin \theta \\
&= |x|^2 + |y|^2 - 2\sqrt{(x \cdot y \cos \theta - \omega(x, y) \sin \theta)^2} \\
&= |x|^2 + |y|^2 \\
&\quad - 2\sqrt{(x \cdot y \cos \theta - \omega(x, y) \sin \theta)^2 + (x \cdot y \sin \theta + \omega(x, y) \cos \theta)^2} \\
&= |x|^2 + |y|^2 - 2\sqrt{(x, y)^2 + \omega(x, y)^2} \\
&= |x|^2 + |y|^2 - 2|\langle x, y \rangle|.
\end{aligned}$$

Ahora expandimos $d^2(x, x + \epsilon v)$, dado que el término ϵ^2 corresponde a la métrica reducida, pues de la descomposición de la velocidad de Saari (para ver la descomposición de la velocidad de Saari en [6]) $K_{red} = K - K_{rot}$ (K_{rot} es la parte rotacional de la energía cinética), entonces

$$K_{red}(x, v) = f''(0)/2,$$

con

$$\begin{aligned}
f(\epsilon) &= |x|^2 + |x + \epsilon v|^2 - 2\sqrt{(x \cdot (x + \epsilon v))^2 + \omega(x, x + \epsilon v)^2} \\
&= |x|^2 + |x + \epsilon v|^2 - 2\sqrt{(x \cdot (x + \epsilon v))^2 + \epsilon^2 \omega(x, v)^2}, \\
f'(\epsilon) &= 2v \cdot (x + \epsilon v) - 2 \frac{(x \cdot (x + \epsilon v))(x \cdot v) + \epsilon \omega(x, v)^2}{\sqrt{(x \cdot (x + \epsilon v))^2 + \epsilon^2 \omega(x, v)^2}}, \\
f''(\epsilon) &= 2|v|^2 - \frac{(x \cdot v)^2 + \omega(x, v)^2 - \frac{[(x \cdot (x + \epsilon v))(x \cdot v) + \epsilon \omega(x, v)^2]^2}{(x \cdot (x + \epsilon v))^2 + \epsilon^2 \omega(x, v)^2}}{\sqrt{(x \cdot (x + \epsilon v))^2 + \epsilon^2 \omega(x, v)^2}}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$f''(0) = 2|v|^2 - 2 \frac{(x \cdot v)^2 + \omega(x, v)^2 - \frac{|x|^4 (x \cdot v)^2}{|x|^4}}{|x|^2}.$$

Por lo tanto,

$$K_{red}(x, v) = |v|^2 - \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2}.$$

Notemos que es consistente esta definición, pues es el pullback de la métrica inducida en el cociente y $K_{red}(x, v) = 0$ si v es tangente a la órbita x , es decir, si v es proporcional a ix .

Dada la forma del espacio de formas (esfera de formas), es conveniente utilizar coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 :

$$u_1 = r \cos \gamma \cos \theta, \quad u_2 = r \cos \gamma \sin \theta, \quad u_3 = r \sin \gamma.$$

Notemos que $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = I$.

Lema 2.3.10. *El mapeo de Kustaanheimo-stiefel $\mathcal{K} : \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}} \cong \mathbb{R}^3$, lo podemos ver como $\mathcal{K}(q) = \bar{q}iq$.*

Demostración. Tomando $z_1 + z_2j = q$, $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q) &= \bar{q}iq \\ &= (a - bi - cj - dk)i(a + bi + cj + dk) \\ &= (a - bi - cj - dk)(ai - b + ck - dj) \\ &= a^2i - ab + ack - adj + ab + b^2i + bcj + bdk \\ &\quad + cak + bcj - c^2i - cd - adj + bdk + cd - d^2i \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (-2ad + 2bc)j + 2(ac + bd)k \\ &= (|z_1|^2 - |z_2|^2)i - \text{Im}(2\bar{z}_1z_2)j + \text{Re}(2\bar{z}_1z_2)k \\ &= u_1i - u_3j + u_2k. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.11. *En coordenadas esféricas la métrica cociente correspondiente a la energía cinética reducida K_{red} que ocurre en la acción reducida está dada por*

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}(\cos^2 \gamma d\theta^2 + d\gamma^2).$$

En particular la esfera de formas $I = r = 1$ es isométrico a la esfera de radio $1/2$, el espacio de formas \mathbb{R}^3 es el cono sobre esta esfera y la esfera en sí misma consiste en todos los puntos que distan 1 de la triple colisión.

Demostración. Primero veamos que \mathbb{C}^2 es isométrico al cono $C(S^3(1)) = S^3(1) \times [0, \infty)/(S^3(1) \times 0 \sim 0)$. En efecto, con la isometría $(\omega, R) \rightarrow R\omega$, pues ambos puntos en los diferentes espacios miden R . Ahora sabemos que tanto S^1 , como $S^3(1) = SU(2)$ actúan linealmente por isometrías (es decir, actúan linealmente y preservan la métrica) en \mathbb{C}^2 . Entonces de hacer el cociente resulta $\mathbb{C}^2/S^1 = C(S^3(1))/S^1 = C(S^3(1)/S^1)$, pues conmuta con la isometría, es decir, dado un $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces $e^{i\theta}(R\omega) = R(e^{i\theta}\omega)$. Y

por el mapeo de Kustaanheimo-Stiefel (que es un mapeo de Hopf), entonces $\mathbb{C}^2/S^1 = C(S^2(1))$. Por lo tanto, $ds^2 = dr^2 + r^2d\omega^2$. Ahora para ver el factor $1/2$, notemos que la acción de $SU(2)$ conmuta con la acción de S^1 sobre \mathbb{C}^2 , dado que ambas son rotaciones. Entonces su acción desciende a una acción en \mathbb{R}^3 , que por el lema anterior es un cubrimiento 2:1 de $SU(2) \rightarrow SO(3)$. Donde podemos observar que los antipodales se corresponden, es decir, m y $-m$, van al mismo punto. Así, las geodésica en S^3 de dos antipodales (recorriendo 180 grados) es mandada a una geodésica que empieza y termina en el mismo punto (recorriendo la vuelta completa). \square

Ya con la métrica reducida podemos calcular La longitud equipotencial de Euler l_0 , usando las expresiones del Lema de Hsiang la podemos expresar en términos de la configuración de Euler en la esfera de formas, es decir, con $\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$ y $\cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{2}} &= \tilde{U}_E \\ &= \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{32}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - C_1 \cdot u}} + \frac{1}{\sqrt{1 - C_2 \cdot u}} + \frac{1}{\sqrt{1 - C_3 \cdot u}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \gamma \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \gamma \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \gamma \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}}. \end{aligned}$$

Esta curva cubre dos veces el ecuador con $\gamma = 0$, entonces podemos parametrizar $\gamma = \gamma(\theta)$, con θ variando en una longitud de 4π . Dado que estamos interesados en calcular un doceavo de la curva, utilizando el lema anterior y como $r \equiv 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{12} \int_0^T ds \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{4\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \gamma(\theta) + \gamma'^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos^2 \gamma(\theta) + \gamma'^2(\theta)} d\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Esta integral fue calculada numéricamente por Carles Simó y confirmada por Jacques Laskar, quienes obtuvieron con los métodos de Newton para el

calculo de $\gamma(\theta)$ y $\gamma'(\theta)$ y con el método del trapezoide la integral, que :

$$\frac{\pi}{5,082553924511} \leq l_0 \leq \frac{\pi}{5,082553924509}.$$

Concluyendo que el segmento de la órbita de E_3 a M_1 que minimiza la acción no tiene colisiones.

2.4. Prueba de la existencia del ocho

En esta sección se probará la existencia de la curva, su simetría y que no contiene lazos extras.

Lema 2.4.1. *Después de ser simetrizado según el patrón de la curva equipotencial de Euler en la esfera de formas, un camino minimizador x da un $\bar{T} = 12T$ -ciclo periódico, con momento angular cero, el cual trasladado hasta un cierto tiempo y rotado en el espacio, es de la forma*

$$x(t) = (q(t + 2\bar{T}/3), q(t + \bar{T}/3), q(t))$$

descrito en el teorema 2.2.3.

Demostración. Primero observemos que un arco minimizador es ortogonal a la variedad M_1 y al rayo E_3 en sus puntos finales. Esto surge del término acotado en la primera fórmula de variación de la acción:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (A_L(x + \epsilon v) - A_L(x)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (L(x + \epsilon v, x' + \epsilon v') - L(x, x')) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (L(x, x') + L_x \epsilon v + L_{x'} \epsilon v' - L(x, x') + O(\epsilon^2)) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (L_x v + L_{x'} v' + O(\epsilon)) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (L_x v - \frac{d}{dt} L_{x'} v + O(\epsilon)) dt + L_{x'} v \Big|_0^T \\ &= L_{x'} v \Big|_0^T. \end{aligned}$$

De este último término podemos concluir la ortogonalidad, pues el camino no es cerrado, $L_{x'}$ es distinto a cero y $v(0), v(T)$ son arbitrarios en el rayo

E_3 y en la variedad M_1 respectivamente. Por lo tanto, de hacer $v(0) = 0$ y $v(T) \neq 0$ concluimos la ortogonalidad del segmento de curva con M_1 y con $v(1) = 0$ y $v(T) \neq 0$ concluimos la ortogonalidad del segmento de curva con el rayo E_3 .

Ahora recordemos la acción de el grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$ y en \mathbb{R}^2 , son de la siguiente manera: Sean σ y τ los generadores de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, entonces

$$\sigma \cdot t = t + \bar{T}/2, \tau \cdot t = -t + \bar{T}/2, \sigma \cdot (x, y) = (-x, y), \tau \cdot (x, y) = (x, -y).$$

Por lo tanto, podemos reconstruir las otras once partes de la curva, dado que son ortogonales a las variedades donde se unen, entonces se unen suavemente en sus extremos. Primero reflejamos a través del meridiano M_1 , es decir, $x(\bar{T}/12 + t) = s_1(x(\bar{T}/12 - t))$ donde s_1 es la reflexión a través del meridiano M_1 . Esta reflexión puede ser realizada en el plano inercial de la siguiente manera: En un tiempo $T = \bar{T}/12$ el triángulo es un isósceles del tipo M_1 y en consecuencia tiene una simetría de reflexión τ , ($\tau(x, y) = (x, -y)$). Sea $S_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ la operación de intercambiar las masas 1 y 2, entonces $s_1 = S_1 \circ \tau = \tau \circ S_1$. Así, obtenemos la solución de E_3 a E_2 , que recorre este segmento en un tiempo $2T$.

Continuando de esa manera definimos el medio giro H_2 en E_2 : $x(2T - t) = H_2(x(2T + t))$. Este medio giro es una simetría de la acción de la composición de la reflexión en el ecuador con la reflexión en el meridiano M_2 , es decir, en el plano inercial se realiza de intercambiar las masas 1 y 3, y luego realizar el medio giro sobre el origen $\sigma \circ \tau(x, y) = (-x, -y)$. Así, obtenemos a solución de E_3 a E_1 en un tiempo $4T$.

Continuando de manera similar al medio giro, pero en E_1 y E_3 , podemos obtener el resto de la curva para un tiempo total $12T$.

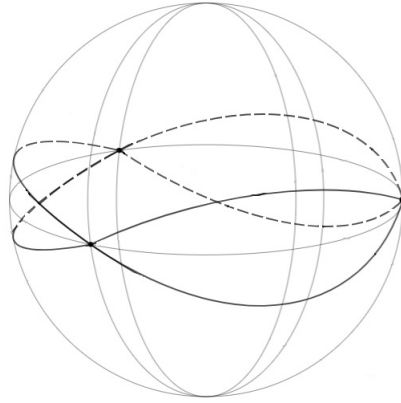


Figura 2.4: Proyección de la curva en la esfera de formas

Hasta ahora hemos construido la proyección de la curva solución en el espacio de configuraciones reducido ($X/SO(2)$). Para reconstruir la curva en el plano inercial X usaremos la regla del área y la simetría de la proyección de la curva solución.

Teorema 2.4.2 (Regla del área). *Dado un segmento de curva C de una función $x : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow X/SO(2)$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ que describe el movimiento de tres cuerpos con momento angular cero, consideremos su proyección en la esfera de formas \hat{C} (notemos que también es una curva de $\hat{x} : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow X/(SO(2) \times I = 1)$), entonces:*

1. *Si \hat{C} es cerrada, sabemos que los triángulos iniciales y finales son similares. Entonces el ángulo de rotación que relaciona estos dos triángulos es dos veces el área esférica encerrada por la curva de la forma.*
2. *Si \hat{C} no es cerrada, pero inicia y termina en el ecuador, entonces podemos cerrar \hat{C} a través del ecuador desde el punto final hasta el punto inicial. Calculamos el doble del área esférica que encierra la curva, y esto es igual al ángulo entre las dos líneas en el plano inercial de las configuraciones inicial y final.*
3. *Si \hat{C} no es cerrada, pero inicia y termina en uno de los meridianos M_i con $i = 1, 2, 3$, podemos cerrar \hat{C} de la siguiente manera: Partiendo desde la configuración final bajamos (o subimos) por el meridiano hasta el ecuador, regresamos por el ecuador hasta el meridiano del que partimos y subimos (o bajamos). Calculamos el doble del área esférica*

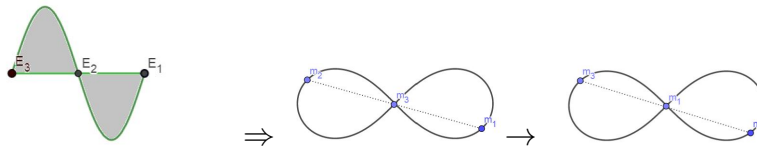
que encierra esta nueva curva, y esta es el ángulo de rotación entre los triángulos si ambos están en el mismo hemisferio, de lo contrario resulta el ángulo la rotación entre los triángulos después de reflejarlo respecto al eje y .

Nota 2.4.3. Notemos que el área de la esfera de radio $1/2$ es π . Así, el factor 2 en el área de la fórmula asegura que esté bien definida modulo 2π . Una demostración se puede ver en [3].

Recordemos que la solución que estamos considerando minimiza la acción, en el problema planar de los tres cuerpos $K_{rot} = |\omega|^2/I$ (esto surge de remplazar la desigualdad $K_{rot} \geq |\omega|^2/I$ en el problema de los tres cuerpos espacial en la desigualdad 0.2.4), como las condiciones de frontera definidas en Λ son invariantes bajo rotaciones, entonces si $x(t)$ es el camino buscado, entonces $g(t)x(t)$ también lo es para alguna $g : \mathbb{R} \rightarrow SO(2)$ suficientemente regular. Notemos que si cambiamos $g(t)$ cambiamos K_{rot} , mientras K_{red} se mantiene fija, entonces podemos elegir $g(t)$ tal que $K_{rot} = 0$. Por lo tanto $c = 0$ y en consecuencia el camino minimizador de la acción tiene momento angular cero.

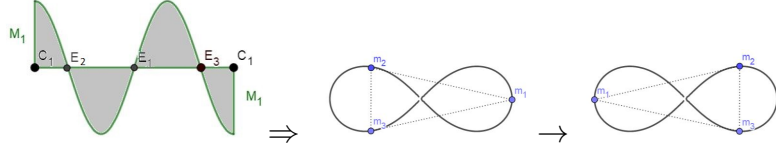
Considerando la solución construida en la esfera de formas.

1. Si empezamos en una configuración de Euler y continuamos por un tiempo $\bar{T}/3 = 4T$, pasando a través de una configuración de Euler intermedia en un tiempo $2T$ y llegando a la última configuración de Euler. Caemos al segundo caso del teorema 2.4.2 y como las dos superficies que encierra esta curva (después de haberla cerrado como dicta el teorema) tienen la misma área por ser simétricas. Entonces el área total es cero, dado que tienen diferente orientación. Esto nos dice, que no hay rotación entre las líneas de las configuraciones de Euler, contrario a lo que pasa en tiempo $2T$, pues en ese caso el área es positiva e implica una rotación.



2. Si empezamos en una configuración isósceles después de un tiempo $\bar{T}/2$, una configuración regresa a sí misma reflejado por el eje y . En efecto,

este segmento corresponde al tercer caso, después de cerrar la curva (como especifica el teorema) y considerar la simetría de la curva obtenemos que tiene área 0. Por lo tanto, regresamos la misma configuración reflejada por el eje y .



Por lo tanto, escogiendo que en tiempo $t = 0$ se encuentre en la configuración de Euler E_3 . Ajustamos $q(t) = x_3(t)$, donde $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ es la solución. La condición 1 implica que:

$$q(t) = \begin{cases} x_3(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \bar{T}/3, \\ x_2(t - \bar{T}/3) & \text{si } \bar{T}/3 \leq t \leq 2\bar{T}/3, \\ x_1(t - 2\bar{T}/3) & \text{si } 2\bar{T}/3 \leq t \leq \bar{T} \end{cases} \quad (4)$$

Así, después de un tiempo $\bar{T}/3$ ($2\bar{T}/3$), los cuerpos 2,3,1 son reemplazados por los cuerpos 3,1,2 (1,2,3) incluyendo las velocidades. Los tres cuerpos se mueven a lo largo de la curva $q(t)$ de periodo \bar{T} con un cambio de fase relativo en sí de $\bar{T}/3$. La propiedad 2 nos implica la simetría de Klein, pues la reflexión a través del ecuador se ve en el plano inercial como la reflexión a través del eje y , y la reflexión a través del punto M_3 se ve en el plano inercial como la reflexión a través del eje x . \square

Ahora sólo nos falta demostrar que $q(t)$ tiene forma de Ocho sin lazos extras. Para ello emplearemos el siguiente lema.

Lema 2.4.4. *El momento angular $q(t) \times \dot{q}(t)$ no es cero para $0 < t \leq \bar{T}/4$, es decir, en un cuarto de la curva el momento angular de la masa que realiza el movimiento no es cero.*

Demostración. Usando la ecuación de Newton $\ddot{x}_3 = \frac{x_1 - x_3}{r_{13}^3} + \frac{x_2 - x_3}{r_{32}^3}$ y $x_1 + x_2 +$

$x_3 = 0$ en la derivada del momento angular:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(q(t) \times \dot{q}(t)) &= \dot{q}(t) \times \dot{q}(t) + q(t) \times \ddot{q}(t) \\
 &= x_3 \times \ddot{x}_3 \\
 &= x_3 \times \left(\frac{x_1 - x_3}{r_{13}^3} + \frac{x_2 - x_3}{r_{32}^3} \right) \\
 &= x_3 \times x_1 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{32}^3} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{d}{dt}(q(t) \times \dot{q}(t)) = 0$ si, y sólo si, x_1 y x_3 son linealmente dependientes o $r_{13} = r_{23}$.

Si x_1 es linealmente dependiente a x_3 , entonces toda la configuración es colineal, es decir, cruza el ecuador en el espacio de formas. En un arco minimizador esto sólo puede pasar en una configuración de Euler. Dado que si lo hizo en otro punto del arco minimizador entre el Euler y el Isósceles ($0 < t < \bar{T}/12$), debe ser dividido en dos subarcos o más, con uno por encima del ecuador y otro debajo. Reflejando uno de estos arcos a través del ecuador y dejando los otro fijos. El resultado es un arco con la misma acción sin colisiones y que conecta al Euler con el Isósceles minimizador. Pero su longitud ya no es analítica, contradiciendo que es solución.

Si suponemos ahora que $r_{13} = r_{23}$ para un tiempo $0 < t < \bar{T}/12$, esto afirma que el arco cruza el meridiano de isósceles, cayendo al caso anterior pero en lugar de reflejar a través del ecuador, se refleja a través del meridiano.

Suponemos que el momento angular $q(t) \times \dot{q}(t)$ empieza decreciendo, entonces los argumentos muestran que decrece desde 0 para $0 < t < \bar{T}/6$, y crece para $\bar{T}/6 < t < \bar{T}/4$. Dado que $x = (q(t), q(t + \bar{T}/3), q(t + 2\bar{T}/3))$ y el momento

angular total es cero, entonces

$$\begin{aligned}
q \times \dot{q}(\bar{T}/4) &= -q \times \dot{q}(7\bar{T}/12) - q \times \dot{q}(11\bar{T}/12) \\
&= - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Big|_{(7\bar{T}/12)} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Big|_{(11\bar{T}/12)} \\
&= - \sigma \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \times \frac{d}{dt} \sigma \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{T}/12)} \\
&\quad - \tau \circ \sigma \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \times \frac{d}{dt} \tau \circ \sigma \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{T}/12)} \\
&= - \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{T}/12)} - \begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{T}/12)} \\
&= 2 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{T}/12)} < 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es negativo en $\bar{T}/4$, podemos concluir que permanece estrictamente negativo en $0 < t \leq \bar{T}/4$, y usando la simetría de Klein, se sigue que permanece estrictamente negativo para $0 < t \leq \bar{T}/2$ y estrictamente positivo $\bar{T}/2 < t < \bar{T}$. \square

Corolario 2.4.5. *Cada lóbulo de la curva tiene forma de estrella: La única vez donde $x_i \times \dot{x}_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$, es cuando x_i pasa a través del origen.*

Demostración. Expresamos el momento angular en coordenadas polares (r, θ) , $x \times \dot{x} = r^2 \dot{\theta} e_1 \times e_2$. Se sigue que el ángulo $\theta(t)$ de la función $q(t)$ decrece monótonamente en el intervalo $(0, \bar{T}/2)$ desde su máximo valor $\theta(0)$ cuando $r(0) = 0$, hasta su mínimo valor $\theta(\bar{T}/2) = -\theta(0)$. \square

Por lo tanto, hemos construido la coreografía del ocho.

Bibliografía

- [1] RICHARD MOECKEL, *Some qualitative features of the three-body problem*, Contemp. Math., vol. 81, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 1–21, (1988).
- [2] ALAIN CHENCINER AND RICHARD MONTGOMERY, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math., pp. 881-901, November (2000).
- [3] RICHARD MONTGOMERY, *The geometric phase of the three-body problem*, Nonlinearity 9 1341–1360, (1996).
- [4] WILLIAM B. GORDON, *A minimizing property of Keplerian orbits*, Amer. J. Math. 99 961–971, (1970).
- [5] A. ALBOUY ET A. CHENCINER, *Le probl'eme des n corps et les distances mutuelles*, Invent. Math., 131, 151–184, (1998).
- [6] SAARI, D., *Symetry in n -particle systems*, Contemporary Math., 81, 23-42, 1988.