CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ EN $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Básicas

Presenta

Rafael Correa Morales

Director de Tesis:

Dr. Fernando Galaz Fontes

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 20 de junio de 2019

“La matemática es la ciencia del orden y la medida,
de bellas cadenas de razonamientos,
todos sencillos y fáciles”
René Descartes

Agradecimientos

A la naturaleza y todo lo que representa.

A mis padres y mis hermanos, que en todo momento están ahí para ayudar; somos un equipo y el logro de uno es el logro de todos.

A mi director de tesis, Dr. Fernando Galaz Fontes, que con su ejemplo, sus consejos y su invaluable experiencia me han guiado a ser mejor.

A mis sinodales, Dr. Fernando Núñez Medina y Dr. Raúl Quiroga Barranco, por su apoyo y el tiempo que dedicaron a este trabajo.

A María Guadalupe Robles Frausto por ser mi inspiración y por todas las noches que estuvo enfrente de su monitor apoyándome.

Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por permitirme continuar mi formación académica, así como a los profesores que me instruyeron, el personal de la institución y a mis compañeros.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme los medios económicos (Número de beca: 634758) durante los dos años de estudio que duró el programa de maestría.

Índice

Introducción

Los conceptos fundamentales en este trabajo son los de medida, integral y funcional. La idea intuitiva de medida es una de las nociones más antiguas e importantes que ha tenido el ser humano a lo largo de su historia, se calcula que tiene más de 5000 años y surge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes. A partir de la primera noción de medida para un conjunto acotado arbitrario ([2]), establecida por G. Cantor (1845-1918) en el año 1883 aproximadamente, surgieron nuevas definiciones equivalentes en $\mathbb{R}$, como las dadas por O. Stolz (1842-1905) en 1884 y A. Harnack (1851-1930) en 1885. En dichas definiciones, la propiedad de aditividad se establecía si los conjuntos estaban "completamente separados", pero no en general. Con esas definiciones, se obtiene que un conjunto tiene la misma medida que su cerradura, por lo tanto los racionales e irracionales en $[0,1]$ tienen la misma medida que todo $[0,1]$.

La primera persona en dar una definición adecuada de medida fue G. Peano (1858-1932) en 1887. Peano utilizó la idea de medida, m, que habían establecido sus antecesores, la cual llamó medida exterior. Determinó que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es medible si $m(A)$ es igual a $m(R) - m(R \setminus A)$ para algún rectángulo $R \supset A$. En 1892 C. Jordan (1838-1922) dio una definición mas simple utilizando una malla de cuadrados, en lugar de polígonos, para aproximar el conjunto.

Cantor demostró que todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ era unión numerable de intervalos abiertos disjuntos, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Teniendo en cuenta lo anterior, E. Borel (1871-1956), dentro de su tesis doctoral en 1894, agregó la σ-aditividad en su definición de medida y determinó que $m(U) = \sum m(I_n)$. Con dicha consideración, se obtuvo una definición razonable para conjuntos de medida cero y la medida de los racionales en [0,1] ya no era 1, como sí era el caso al usar la definición de sus antecesores. Borel describió la clase de los conjuntos medibles a partir de los abiertos, la cual construye a través de iteraciones de uniones o diferencias numerables de conjuntos en la clase. A dichos conjuntos se les conoce hoy en día como conjuntos borelianos.

Finalmente, H. Lebesgue (1875-1943) desarrolló una teoría de la medida más adecuada que la de E. Borel. Por su parte C. Caratheódory (1873-1950), presentó en 1914 un método general para construir medidas exteriores en un espacio métrico, y en 1918 demostró parte del teorema fundamental de extensión que lleva su nombre.

Por otra parte, el concepto formal de integral fue iniciado por A. Cauchy (1789-1857), desarrollado por B. Riemann (1826-1866) en la primera mitad del siglo XIX y culminado en 1902 por H. Lebesgue en su trabajo de tesis. La teoría de Lebesgue fue extendida y desarrollada en la siguiente década. La originalidad de Lebesgue no sólo reside en haber extendido la integral de Riemann, sino, entre otras cosas, en el teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral. Por su parte J. Radón (1857-1956) estableció la teoría de integración con respecto a lo que hoy conocemos como medida regular de Borel en $\mathbb{R}^n$. En 1915 Fréchet (1878-1873) hizo notar que muchas de las ideas de Radón se podían aplicar en el marco general de conjuntos equipados con σ-álgebras. Así nació la medida abstracta y la teoría de integración.

El termino funcional es atribuido a V. Volterra (1860-1940) ([6]) quien lo utilizó en su estudio de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. Pero su uso se remonta al cálculo de variaciones, donde juega el papel de una función cuyo dominio es un conjunto de funciones. En el enfoque moderno se considera análisis funcional al estudio de espacios vectoriales normados reales o complejos. Algunos de los precursores de análisis funcional son I. Fredholm (1866-1927), D. Hilbert (1862-1943) y Volterra . El trabajo de Banach (1892-1945), generalizó las contribuciones realizadas por Fredholm, Hilbert y Volterra. Entre otras cosas, Banach formuló el concepto de espacio de Banach y realizó contribuciones fundamentales. Es por ello, que es considerado como uno de los fundadores del análisis funcional moderno.

En el desarrollo del análisis funcional, el problema de representar funcionales es elemental, pues resulta conveniente trabajar con funcionales que tengan una "forma" mas simple de estudiar. Por ejemplo en el análisis del funcional $\varphi(f) := \int f d\mu$ podemos hacer uso de las herramientas disponibles en las teorías de integración y medida. Uno de los que primero consideraron este problema fue J. Hadamard (1865-1963) ([4]), quien en 1903 aborda el problema de representar funcionales lineales continuos en el espacio de funciones reales continuas que tienen por dominio un compacto. Más tarde, M. Fréchet realizó una mejora sustancial al trabajo de Hadamard y se aventuró al estudio de funcionales en espacios más generales. Posteriormente Hilbert, Fréchet y F. Riesz (1880-1956) demuestran de forma independiente el hoy conocido como teorema de representación de Riesz en espacios de Hilbert. Pero fue en 1904 cuando Riesz, usando la integral de Riemann-Stieltjes, prueba el teorema de representación de Riesz en $C[a, b]$. Finalmente en 1913, Radón logró resolver el teorema para un cubo $[a, b]^n$, por medio de medidas (no regulares) finitas. La medida de Radón, la cual tiene como propiedades fundamentales ser regular y finita en compactos, fue desarrollada por J. Radón y acogida por Nicolas Bourbaki (seudónimo utilizado por un grupo de matemáticos franceses (1930)). En el estudio del problema de representar funcionales, Riesz indagó en los espacios L^p con $1 < p < \infty$ y contribuyó a establecer el teorema de representación de Riesz en esos espacios.

Hay diferentes formas de relacionar los conceptos de medida, integral y funcional lineal. Describiremos en seguida la que es de nuestro interés. Recordemos que cuando partimos de una medida μ en $\mathbb{R}^n$ podemos desarrollar la noción de integral $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$. Con base en esta integral, definimos una norma en el espacio de funciones integrables, $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, y con ello consideramos las transformaciones lineales del tipo $\varphi : L^1(\mathbb{R}^n, \mu) \to \mathbb{R}$, las cuales conocemos como funcionales lineales. Si dichos funcionales son continuos podemos demostrar que existe $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu)$ tal que $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fgd\mu$, siempre que μ sea una medida σ-finita. A un teorema de este tipo se le conoce como teorema de representación. El objetivo esencial de este trabajo es obtener un resultado parecido. Esto es, considere el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con soporte compacto, $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ¿será posible que dado un funcional lineal $\varphi : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, exista alguna medida μ_φ y una función μ_φ-medible g tales que φ quede completamente representado en términos de μ_φ y g?.

El teorema de representación de Riesz más socorrido para dar una solución parcial a lo planteado con anterioridad, es el que parte de un espacio topológico Hausdorff localmente compacto X y un funcional lineal positivo $\varphi : C_c(X) \to \mathbb{R}$. Entonces, se obtiene una única medida de Radón μ en X tal que

$$\varphi(f) = \int_X f d\mu.$$

El inconveniente del resultado anterior es que son relativamente pocos los funcionales de ese tipo, ya que la condición de positividad hace difícil la posible aplicación.

A lo largo de la monografía se desarrollará el concepto de medida exterior, poniendo particular interés al de medida exterior de Radón. El concepto de medida exterior de Radón tendrá asociada la noción de regularidad en borelianos, en el sentido de que la medida exterior de cualquier conjunto en $\mathbb{R}^n$ es igual a la de un conjunto boreliano. Dicha definición satisfará la versión estándar de aproximar las medidas exteriores por abiertos y compactos. Como ejemplo fundamental de una medida de Radón, se desarrollará la medida de Lebesgue. También se construirán herramientas para buscar aproximar funciones medibles por continuas, y extender el dominio de funciones continuas. Además, será necesario abordar algunos resultados de espacios de Banach como los teoremas de representación de Riesz en espacios de Hilbert y en L^1. Finalmente, dado un funcional $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, construiremos el concepto de medida exterior de variación μ_φ^*, la cual será de Radón y ayudará a representar el funcional φ. Con esto se obtendrá una función medible σ tal que $\|\sigma\| = 1$ y

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, \sigma \rangle d\mu_\varphi^*.$$

El escrito se estructura tomando como guía el texto "Measure theory and fine properties of functions" de Evans-Gariepy ([5]), el cual, establece el teorema de representación de Riesz para $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, en cambio, el presente trabajo se realiza para $C_c(U, \mathbb{R}^m)$ donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Se agregan los resultados necesarios, principalmente de [9], [7] y [8], para facilitar la comprensión de lo que se abarca, así como el desarrollo de ejemplos y herramientas los cuales serán útiles e ilustrativos para los fines que queremos alcanzar. En la exposición del trabajo buscamos que se utilice la mínima cantidad de herramientas para obtener el resultado central, y que el escrito sea auto-contenido, en el sentido de que se demuestran todos los resultados excepto aquellos que se establecen a partir de un primer curso de teoría de la medida o que tienen una prueba muy similar. Además, se supondrá que el lector cuenta con nociones básicas de análisis funcional.

El trabajo consta de cinco breves capítulos a través de los cuales se presentan ejemplos y resultados complementarios. El primer capitulo aborda los conceptos de σ-álgebra, medida, medida exterior y medida producto. En particular, se indagará en el hecho de que una medida exterior induce una medida, y una medida se puede extender a una medida exterior. Por ello, ambos conceptos están intrínsecamente relacionados y en ocasiones no se hace diferencia significativa entre ellas, a pesar de que sus definiciones son diferentes. El segundo capitulo busca recordar algunos resultados importantes de teoría de la medida, como es el de función medible y sus propiedades. Además, este capitulo aborda la forma de aproximar funciones medibles a través de funciones continuas, y la extensión de funciones continuas. En el capitulo tres presentaremos la teoría de integración. Dicha teoría es esencial para lograr hacer la conexión entre medidas y funcionales. El capitulo cuatro establece los teoremas de representación de Riesz en $L^1(\mu)$ y en espacios de Hilbert, donde μ es una medida σ-finita. Finalmente, el capitulo cinco es la parte principal de este trabajo. En él se aborda el teorema de representación de Riesz en $C_c(U, \mathbb{R}^m)$ y se presentan algunas de sus aplicaciones. Una de ellas, para funcionales lineales positivos, extiende el teorema de representación de Riesz en $C_c^\infty(U)$.

Capítulo 1
Medida y medida exterior

En este primer capitulo definiremos la estructura de σ-álgebra y la caracterizaremos mediante λ-sistemas y π-sistemas. Daremos la definición formal de medida abstracta y algunas de sus propiedades. El tema central de esta sección será el de medida exterior de Radón en $\mathbb{R}^n$. Dicha medida exterior tiene las siguientes dos propiedades cruciales. La primera es que para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ existe un conjunto boreliano $B \supseteq A$ en $\mathbb{R}^n$ tal que las medidas exteriores de A y B coinciden. La segunda es que la medida exterior de los conjuntos compactos es finita. Por lo tanto las medidas exteriores de Radón están relacionadas con la topología estándar en $\mathbb{R}^n$. Por otra parte veremos que a partir de una medida exterior es posible inducir una medida y una medida se puede extender a una medida exterior.

1.1. Sistemas de conjuntos

En este trabajo Ω siempre denotará un conjunto y $2^\Omega := \{A : A \subseteq \Omega\}$ es el conjunto potencia de Ω.

Definición 1.1.1 Decimos que $\Sigma \subseteq 2^\Omega$ es una *σ-álgebra* en Ω si:

i) $\emptyset, \Omega \in \Sigma$.

ii) $A \in \Sigma$ implica que $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

iii) Si $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \Sigma$, entonces $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$.

Un *espacio medible* es un par ordenado (Ω, Σ), donde Ω es un conjunto y Σ es una σ-álgebra en Ω.

Ejemplo 1.1.1 El conjunto 2^Ω es una σ-álgebra en Ω.

Ejemplo 1.1.2 Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Dado $E \subseteq \Omega$, entonces el conjunto $\Sigma_E := \{A \cap E : A \in \Sigma\}$ es una σ-álgebra en E. Si $E \in \Sigma$, entonces $\Sigma_E = \{A \in \Sigma : A \subseteq E\}$.

Lema 1.1.1 La intersección arbitraria de σ-álgebras es una σ-álgebra.

Definición 1.1.2 Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$. Definimos la *$\sigma$-álgebra generada* por $\mathcal{C}$, la cual denotamos por $\sigma(\mathcal{C})$, como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{C}$.

Observemos que $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.1.3 La *σ-álgebra de Borel* en un espacio topológico (Ω, τ) es la σ-álgebra generada por la topología τ y se denota por $\beta(\Omega)$. Los elementos de $\beta(\Omega)$ se llamarán conjuntos *borelianos*.

Si tenemos una colección $\mathcal{P} \subseteq 2^\Omega$, $\mathcal{L}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$, claramente $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$. A continuación veremos que esta conexión se sigue cumpliendo cuando $\mathcal{L}$ satisface una condición más débil que la de ser σ-álgebra y $\mathcal{P}$ tiene cierta propiedad.

Definición 1.1.3 Un *π-sistema* en Ω es una colección no-vacía $\mathcal{P} \subseteq 2^\Omega$, con la siguiente propiedad. Si $A, B \in \mathcal{P}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{P}$.

Definición 1.1.4 Un *λ-sistema* en Ω es una colección $\mathcal{L} \subseteq 2^\Omega$ que satisface:

i) $\Omega \in \mathcal{L}$.

ii) Si $A, B \in \mathcal{L}$ y $B \subseteq A$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{L}$.

iii) Si $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}$ y $A_k \subseteq A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{L}$.

Notemos que la intersección arbitraria de λ-sistemas es un λ-sistema.

Lema 1.1.2 Σ es una σ-álgebra en Ω si, y sólo si Σ es un π-sistema (en Ω) y un λ-sistema (en Ω).

Demostración Supongamos que Σ es un π-sistema y λ-sistema. Dado que $\Omega \in \Sigma$, entonces $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \Sigma$. Claramente $A \in \Sigma$ implica que $\Omega \setminus A \in \Sigma$. Dado que Σ es cerrado bajo complementos y bajo intersecciones finitas, se tiene que Σ es cerrado bajo uniones finitas. Si $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \Sigma$, entonces $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}$. Dado que Σ es λ-sistema y $B_n \subseteq B_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$. Luego, Σ es una σ-álgebra. Solo resta notar que una σ-álgebra cumple las propiedades que definen un π-sistema y un λ-sistema. ■

Lema 1.1.3 Sea $A \in \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es un λ-sistema en Ω. Entonces la colección $\mathcal{L}_A := \{C \subseteq \Omega \mid A \cap C \in \mathcal{L}\}$ es un λ-sistema en Ω.

Demostración Dado que $\Omega \subseteq \Omega$ y $A \cap \Omega = A \in \mathcal{L}$, se tiene que $\Omega \in \mathcal{L}_A$. Si $B, C \in \mathcal{L}_A$ con $C \subseteq B$, entonces $A \cap C, A \cap B \in \mathcal{L}$. De la definición de λ-sistema, resulta que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) \in \mathcal{L}$. Por lo tanto $B \setminus C \in \mathcal{L}_A$.

Finalmente si $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}_A$ con $A_k \subseteq A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $A \cap A_k \in \mathcal{L}$ con $A \cap A_k \subseteq A \cap A_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k \right) = \bigcup_{k=1}^\infty A \cap A_k \in \mathcal{L}.$$

Por lo tanto $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{L}_A$. ■

Teorema 1.1.1 Sean $\mathcal{P}$ un π-sistema (en Ω) y $\mathcal{L}$ un λ-sistema (en Ω). Si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$, entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

Demostración Sea

$$S = \bigcap_{\mathcal{P} \subset \mathcal{L}'} \mathcal{L}'$$

la intersección de todos los λ-sistemas que contengan a $\mathcal{P}$. Observamos que $\mathcal{P} \subseteq S \subseteq \mathcal{L}$ y que S es un λ-sistema.

Ahora se probará que S es un π-sistema. Esto es, si $A, B \in S$, entonces debemos demostrar que $A \cap B \in S$. Para ello tomamos $C \in \mathcal{P}$. Dado que $\mathcal{P} \subseteq S_C$ y S_C es λ-sistema, entonces $S \subseteq S_C$. Luego $A \in S_C$. Por lo tanto $A \cap C \in S$ y $C \in S_A$. De lo anterior se tiene que $\mathcal{P} \subseteq S_A$, y dado que S_A es λ-sistema, se sigue que $S \subseteq S_A$. Finalmente, ya que $B \in S$, entonces $B \cap A \in S$. Lo que demuestra que S es un π-sistema.

Luego, por lema 1.1.2, se sigue que S es σ-álgebra. Entonces, $\sigma(P) \subseteq S \subseteq \mathcal{L}$ i.e. $\sigma(P) \subseteq \mathcal{L}$. ■

1.2. Medida

Definición 1.2.1 Sea Σ una σ-álgebra en Ω. Decimos que $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ es una *medida* en Σ (o en Ω) si:

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Para $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ tal que $A_k \cap A_j = \emptyset \; \forall k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$ se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Un *espacio de medida* es una terna ordenada (Ω, Σ, μ), donde Σ es una σ-álgebra en Ω y $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ es una medida en Σ. Los elementos de Σ serán llamados *conjuntos medibles*. Además, decimos que μ es *finita* si $\mu(\Omega) < \infty$.

Ejemplo 1.2.1 Sea Ω un conjunto no-vacío. Para $x \in \Omega$ fijo, definimos $\delta_x : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Entonces, δ_x es una medida en 2^{Ω} y se le llamará la *medida de Dirac* concentrada en x.

Ejemplo 1.2.2 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $A \in \Sigma$. Entonces la función $\mu_A(B) := \mu(A \cap B), \forall B \in \Sigma$, es una medida en Σ.

Proposición 1.2.1 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se cumplen las siguientes propiedades:

i) Si $A, B \in \Sigma$ y $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

ii) Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$. Si $A_k \subseteq A_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

iii) Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$. Si $A_{k+1} \subseteq A_k, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Definición 1.2.2 i) Sean Σ una σ-álgebra en un espacio topológico E con la topología τ y μ una medida en Σ. Diremos que μ es de *Borel* en E si $\sigma(\tau) \subseteq \Sigma$.

ii) Cuando digamos que una medida μ es de Borel en $\mathbb{R}^n$, entenderemos que la topología en $\mathbb{R}^n$ es la estándar. Así mismo, para un conjunto abierto no-vacío $U \subseteq \mathbb{R}^n$, cuando digamos que la medida μ es de Borel en U, entenderemos que la topología en U es la inducida por $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.3 Un *rectángulo* R en $\mathbb{R}^n$ es un producto cartesiano de n intervalos, esto es,

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \in I_j, j = 1, \ldots, n\}$$

donde $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos. La colección de todos los rectángulos cerrados en $\mathbb{R}^n$ se denotará por $\mathcal{R}^n$.

Observemos que para $R, S \in \mathcal{R}^n$ se satisface que $R \cap S \in \mathcal{R}^n$. Entonces $\mathcal{R}^n$ es un π-sistema.

Proposición 1.2.2 $\beta(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{R}^n)$.

Demostración Sea τ la topología estándar en $\mathbb{R}^n$. Todo conjunto abierto es una unión numerable de rectángulos cerrados. Por lo tanto, $\tau \subset \sigma(\mathcal{R}^n)$, y dado que $\sigma(\tau)$ es la mínima σ-álgebra que contiene a τ, se sigue que $\sigma(\tau) \subseteq \sigma(\mathcal{R}^n)$.

Observemos que $\mathbb{R}^n \setminus R \in \sigma(\tau), \forall R \in \mathcal{R}^n$. Es decir, $\mathcal{R}^n \subset \sigma(\tau)$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{R}^n) \subseteq \sigma(\tau)$. ■

Proposición 1.2.3 Sean μ y ν dos medidas finitas de Borel en $\mathbb{R}^n$. Si $\mu(R) = \nu(R)$, $\forall R \in \mathcal{R}^n$, entonces

$$\mu(B) = \nu(B), \forall B \in \beta(\mathbb{R}^n).$$

Demostración Sea $\mathcal{L} = \left\{B \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; B \text{ es boreliano}, \mu(B) = \nu(B)\right\}$. Entonces tenemos por hipótesis que $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{L}$. Dado que μ y ν son medidas finitas de Borel en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema. Y observamos que $\mathcal{R}^n$ es un π-sistema, entonces por el teorema 1.1.1 se sigue que $\sigma(\mathcal{R}^n) \subseteq \mathcal{L}$. Luego de la proposición anterior $\sigma(\tau) \subseteq \mathcal{L}$. ■

1.3. Medida exterior

Definición 1.3.1 Una función $\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ es una *medida exterior* en Ω si satisface las siguientes condiciones:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii) Sean $\{A_k\} \subseteq 2^\Omega$ y $A \subseteq \Omega$. Si $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, entonces

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Decimos que μ^* es una *medida exterior finita* si μ^* es una medida exterior en Ω y $\mu^*(\Omega) < \infty$.

Notemos que una medida exterior μ^* es *monótona*. Esto es, dados $A, B \subseteq \Omega$, si $A \subseteq B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Ejemplo 1.3.1 Consideremos una colección $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y una función $\ell : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ tal que $\ell(\emptyset) = 0$. Entonces la función ℓ^* definida por

$$\ell^*(A) := \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(C_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, C_j \in \mathcal{C} \right\}, A \subseteq \Omega,$$

es una medida exterior. La cual, llamaremos *medida exterior inducida por* ℓ.

En efecto, es claro que $\ell^*(\emptyset) = 0$. Supongamos que $A \subseteq B \subseteq \Omega$, entonces $\ell^*(A) \leq \ell^*(B)$. Por lo tanto, ℓ^* es monótona. Tomemos $A \subseteq \Omega$ y una sucesión $\{C_i\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Dado $\epsilon > 0$, existe una colección $\{C_{ij}\} \subseteq \mathcal{C}$, la cual satisface

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(C_{ij}) \leq \ell^*(C_i) + \frac{\epsilon}{2^i}, \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \ell(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(C_{ij})$ por monotonía, de (1,1), se tiene que

$$\ell^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell^*(C_i) + \epsilon.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$, se obtiene que $\displaystyle\ell^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell^*(C_i)$.

Definición 1.3.2 Sea μ^* una medida exterior en Ω. Diremos que un conjunto $A \subseteq \Omega$ es μ^**-medible* si para cada conjunto $B \subseteq \Omega$ se cumple que

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

De ahora en adelante salvo que se diga otra cosa, μ^* denota una medida exterior en Ω y Σ^* (o Σ_{μ^*}) la colección de conjuntos μ^*-medibles.

Observemos que en la definición 1.3.2, la desigualdad

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

siempre se cumple por la definición de medida exterior.

Teorema 1.3.1 (Carathéodory) Sea μ^* una medida exterior en Ω. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) La colección Σ^* es una σ-álgebra y $(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$ es un espacio de medida.

ii) Sea $A \subseteq \Omega$. Si $\mu^*(A) = 0$, entonces A es medible.

Cuando sea clara la medida exterior μ^* involucrada, simplemente se les dirán *medibles* a los conjuntos μ^*-medibles.

Definición 1.3.3 Sea μ^* una medida exterior en Ω y $C \subseteq \Omega$. Entonces *la restricción* de μ^* a C es la función $\mu^*_C : 2^\Omega \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu^*_C(A) := \mu^*(A \cap C) \text{ para todo } A \subseteq \Omega.$$

Lema 1.3.1 Dado $C \subseteq \Omega$, la función μ^*_C es una medida exterior en Ω y cada conjunto μ^*-medible es también μ^*_C-medible.

Demostración Notamos que $\mu^*_C(\emptyset) = \mu^*(\emptyset \cap C) = \mu^*(\emptyset) = 0$. Ahora tomamos $\{A_k\} \subseteq 2^\Omega$, $A \subseteq \Omega$ tales que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Entonces $A \cap C \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty (A_k \cap C)$. Por la definición de medida exterior, se cumple que

$$\mu^*_C(A) = \mu^*(A \cap C) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k \cap C) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*_C(A_k).$$

Luego μ^*_C es una medida exterior en Ω. Sea A un conjunto μ^*-medible y $B \subseteq \Omega$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mu^*_C(B) = \mu^*(B \cap C) &= \mu^*((B \cap C) \cap A) + \mu^*((B \cap C) \setminus A) \\
&= \mu^*((B \cap A) \cap C) + \mu^*((B \setminus A) \cap C) \\
&= \mu^*_C(B \cap A) + \mu^*_C(B \setminus A).
\end{aligned}$$

Luego A es μ^*_C-medible. ∎

1.4. Medida en un semianillo y medida producto

Definición 1.4.1 Un conjunto $\mathcal{S} \subseteq 2^\Omega$ es un *semianillo* en Ω si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\emptyset \in \mathcal{S}$

ii) Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$.

iii) Dados $A, B \in \mathcal{S}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ y conjuntos $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{S}$ disjuntos por pares tales que

$$A \setminus B = C_1 \cup \cdots \cup C_k.$$

Ejemplo 1.4.1 Los intervalos acotados en $\mathbb{R}$ forman un semianillo en $\mathbb{R}$.

Definición 1.4.2 Sea $\mathcal{S}$ un semianillo en Ω. Una función $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ es una *medida* en $\mathcal{S}$ si $\mu(\emptyset) = 0$ y $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos entre si tal que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S},$$

entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Ejemplo 1.4.2 La *longitud* de un intervalo acotado $I \subseteq \mathbb{R}$, de extremos a, b tal que $a \leq b$, es

$$m(I) := b - a.$$

Entonces, m es una medida en el semianillo formado por los intervalos acotados.

Teorema 1.4.1 Sea μ una medida en un semianillo $\mathcal{S}$ y μ^* la medida exterior inducida por μ, como el ejemplo 1.3.1. Entonces la medida inducida por μ^* es una extensión de μ.

Ejemplo 1.4.3 Sea m la medida en el semianillo $\mathcal{S}$ de los intervalos acotados definida en el ejemplo 1.4.2. Llamaremos *medida exterior de Lebesgue* a la medida exterior m^* inducida por m. Entonces, por el teorema 1.4.1, la medida inducida por m^* es una extensión de m. Dicha medida se llamará *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ y se seguirá denotando por m.

Sean Ω_1 y Ω_2 conjuntos no-vacíos. *medida producto*

Lema 1.4.1 Sea S_j un semianillo en Ω_j, $j = 1, 2$. Entonces

$$\mathcal{C}(S_1, S_2) := \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\}$$

es un semianillo en $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Teorema 1.4.2 Sean $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ y $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ dos espacios de medida. Entonces la función $\mu \times \nu : \mathcal{C}(\Sigma_1, \Sigma_2) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu \times \nu(A \times B) := \mu(A)\nu(A)$$

es una medida en el semianillo $\mathcal{C}(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Por lo tanto, induce una medida exterior $(\mu \times \nu)^*$ en $\Omega_1 \times \Omega_2$. Entonces, la *medida producto* de μ y ν es la medida inducida por $(\mu \times \nu)^*$, la cual, seguiremos denotando por $\mu \times \nu$.

1.5. Medida exterior de Radón

Definición 1.5.1 Sea μ^* una medida exterior en un espacio topológico E.

i) Decimos que μ^* es *regular* en E si para cualquier $A \subseteq E$, existe un conjunto medible B tal que $A \subseteq B$ y $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

ii) Decimos que μ^* es *Borel-regular* en E si la medida inducida por μ^* es de Borel en E y para cada $A \subseteq E$ existe un conjunto boreliano B tal que $A \subseteq B$ y $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

iii) Decimos que μ^* es de *Radón* en E si μ^* es Borel-regular y $\mu^*(K) < \infty$ para cada compacto $K \subseteq E$.

La medida inducida por una medida exterior de Radón en Ω será llamada *medida de Radón* en Ω.

Ejemplo 1.5.1 Sean $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Definimos $\ell : \mathcal{C} \to [0, \infty]$, por, $\ell(\{a, b\}) = 1$, $\ell(\{c, d\}) = 2$, $\ell(\{c\}) = 1$ y $\ell(\emptyset) = 0$. Ahora consideremos la función ℓ^* como en el ejemplo 1.3.1.

Observemos que $\ell^*(\{a, b, c\}) = 2$ y $\ell^*(\Omega) = 3$. Además, si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{c, d\}$, entonces $\ell^*(B) = 2$, $\ell^*(B \cap A) = 1$ y $\ell^*(B \cap A^c) = 2$. Por lo tanto A no es ℓ^*-medible. Así, el único conjunto que contiene propiamente a A es Ω. Luego, ℓ^* no es una medida exterior regular.

Notación: Sea E un espacio topológico. Recordemos que la cerradura de un conjunto $A \subseteq E$ se escribe $\overline{A}$.

Ejemplo 1.5.2 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la medida de Dirac $\delta_x : 2^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$. Notemos que δ_x es una medida exterior. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si $x \in A$, entonces $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta_x(A) = 1 = \delta_x(\mathbb{R}^n)$. Si $x \notin A$, entonces $A \subseteq \overline{A} \setminus \{x\}$, $\overline{A} \setminus \{x\}$ es un conjunto boreliano, $A \subseteq \overline{A} \setminus \{x\}$ y $\delta_x(A) = 0 = \delta_x(\overline{A} \setminus \{x\})$. Luego, δ_x es una medida exterior Borel-regular, y entonces es claro que δ_x es una medida exterior de Radón.

Recordemos que a partir de una medida μ en un semianillo, podemos construir una medida exterior. El siguiente resultado nos dice que la medida exterior inducida por μ será regular.

Lema 1.5.1 Sean E un espacio topológico y μ una medida en un semianillo $\mathcal{S}$.

i) La medida exterior μ^*, inducida por μ, es regular.

ii) Si $\mathcal{S} \subseteq \beta(E)$, entonces μ^* es Borel-regular.

Demostración i) Dado que la medida $\mu^* : \Sigma^* \to [0, \infty]$ extiende a μ, entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \Sigma^*$. Sea $A \subseteq \Omega$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $\left\{A_k^N\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $A \subseteq B_N = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^N \in \sigma(\mathcal{S})$ y

$$\mu^*(B_N) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^N\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k^N) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^N) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{N}.$$

Además, por la monotonía de μ^*, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$C_m = \bigcap_{n=1}^{m} B_n \text{ y } C = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Entonces, $A \subseteq C$, $C, C_m \in \sigma(\mathcal{S}), \forall m \in \mathbb{N}$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(C)$ y

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(C_m) \leq \mu^*(B_m) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Luego, $\mu^*(C) = \mu^*(A)$, donde $A \subseteq C$ y $C \in \Sigma^*$.

ii) Si además, $\mathcal{S} \subseteq \beta(E)$. Entonces, $B_N \in \beta(E), \forall N \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $C \in \beta(E)$. ■

Observemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es una medida inducida a partir de una medida en un semianillo. Por lo tanto, el siguiente ejemplo es claro.

Ejemplo 1.5.3 La medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es de Radón en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.5.1 Sean μ^* una medida exterior en Ω y $\{A_k\} \subseteq 2^{\Omega}$. Si μ^* es regular y $A_k \subseteq A_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Notemos que los conjuntos A_k's no son necesariamente medibles.

Demostración Como μ^* es regular, entonces existe una colección de conjuntos medibles $\{C_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq 2^{\Omega}$, tales que $A_k \subseteq C_k$ y $\mu^*(A_k) = \mu^*(C_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Definimos $B_k = \bigcap_{j\geq k} C_j$. Entonces $A_k \subseteq B_k$ y B_k es medible. Como $A_k \subseteq B_k \subseteq C_k$ y $\mu^*(A_k) = \mu^*(C_k)$, entonces $\mu^*(A_k) = \mu^*(B_k)$. Luego,

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(B_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Por otra parte, $A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, entonces se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) \leq \mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j).$$

La conclusión se sigue de las desigualdades anteriores. ■

Proposición 1.5.2 Sean μ^* una medida exterior Borel-regular en Ω y $A \subseteq \Omega$ un conjunto medible. Si $\mu^*(A) < \infty$, entonces μ^*_A es una medida de Radón finita en Ω.

Demostración Definamos $\nu^* = \mu^*_A$. Claramente $\nu^*(K) < \infty$ para cada compacto $K \subseteq \Omega$. Por el lema 1.3.1 todo conjunto μ^*-medible es ν^*-medible, entonces ν^* es de Borel.

Ahora demostraremos que ν^* es Borel-regular. Dado que μ^* es Borel-regular, entonces existe un boreliano B tal que $A \subseteq B$ y $\mu^*(A) = \mu^*(B) < \infty$. Luego, del hecho que A es μ^*-medible, se sigue que $\mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) = 0$. Para cada $C \subseteq \Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(\mu^*_B)(C) &= \mu^*(C \cap B)\\ &= \mu^*(C \cap B \cap A) + \mu^*((C \cap B) \setminus A)\\ &\leq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(B \setminus A)\\ &= (\mu^*_A)(C).\end{aligned}$$

Así $\mu^*_B = \mu^*_A$. Entonces podemos suponer que A es un boreliano.

Ahora tomemos $C \subseteq \Omega$. Debemos demostrar que existe un conjunto boreliano D tal que $C \subseteq D$ y $\nu^*(C) = \nu^*(D)$. Como μ^* es Borel-regular, entonces existe un boreliano E tal que $A \cap C \subseteq E$ y $\mu^*(E) = \mu^*(A \cap C)$. Definimos $D = E \cup (\Omega \setminus A)$. Ya que A y E son borelianos, entonces D también es boreliano. Además, $C \subseteq (A \cap C) \cup (\Omega \setminus A) \subseteq D$. Finalmente, dado que $D \cap A = E \cap A$, se sigue que

$$\nu^*(D) = \mu^*(D \cap A) = \mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(E) = \mu^*(A \cap C) = \nu^*(C).$$

■

Definición 1.5.2 Sea (M, d) un espacio métrico. Dados $x \in M$ y $r > 0$, definimos:

i) La *bola abierta en* M centrada en x y radio r como

$$V(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\}.$$

ii) La *bola cerrada en* M centrada en x y radio r como

$$B(x, r) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}.$$

Definición 1.5.3 Sea E un espacio topológico. Decimos que E es localmente compacto si para cada $x \in E$ y $x \in V \in \tau_E$, existe un conjunto compacto $K \subseteq E$ tal que

$$x \in K^0 \subseteq K \subseteq V \subseteq E.$$

En adelante $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto (respecto a la topología estándar).

Ejemplo 1.5.4

i) $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto y separable.

ii) $\mathbb{Q}^n$ no es localmente compacto.

iii) Si $V \subseteq U$ es abierto, entonces V es localmente compacto y separable.

iv) Si $C \subseteq U$ es cerrado, entonces C es localmente compacto y separable.

Lema 1.5.2 Sea $W \subseteq U$ un abierto. Si $K \subseteq W$ es compacto, entonces existe un conjunto abierto V tal que $\overline{V}$ es compacto y

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset W.$$

Demostración Siendo W abierto y $K \subseteq W$, para cada $x \in K$ es posible elegir $r(x) > 0$ tal que $V(x, 2r(x)) \subset W$. Ya que K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_J \in K$ tales que $K \subset V_1 \cup \ldots V_J$, donde $V_J = V(x_j, r(x_j)), j = 1, \ldots, J$. Tomemos $V = V_1 \cup \cdots \cup V_J$. Luego $K \subset V$ y $\overline{V} = \overline{V_1} \cup \ldots \overline{V_J}$. Observando que cada $\overline{V_j}$ es compacto y está contenido en W, de la igualdad anterior se sigue que $\overline{V}$ es compacto. ∎

Lema 1.5.3 Sea $W \subseteq U$ un conjunto abierto no-vacío. Entonces:

i) Existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{V_m\} \subseteq W$ tal que $\overline{V_m}$ es un compacto en $U, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$W = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{V_m}.$$

ii) Existe una sucesión de conjuntos compactos $\{K_m\}$ tal que $K_m \subseteq K_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$W = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

Demostración Dado que $\mathbb{R}^n$ es separable y $W \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces W es separable. Por lo tanto existe una sucesión $A = \{x_i\}$ densa en W. En seguida consideremos la sucesión $\mathcal{Q} = \left\{V(x_i, \frac{1}{k}) \subseteq W \mid B(x_i, \frac{1}{k}) \subseteq W : k, i \in \mathbb{N}\right\}$. Sean $x \in W$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $B(x, \epsilon) \subseteq W$. Entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \frac{\epsilon}{2}$, y por ser A un conjunto denso en W, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V(x_{i_0}, \frac{1}{m_0})$. Por lo tanto, para cada $y \in V(x_{i_0}, \frac{1}{m_0})$, se tiene que

$$\|x - y\| \leq \|x - x_{i_0}\| + \|x_{i_0} - y\| < \epsilon.$$

Así,

$$W \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{Q}}^{\infty} V \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{Q}}^{\infty} \overline{V} \subseteq W.$$

Por i) existe una sucesión de conjuntos compactos $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W$ tal que

$$W = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Enseguida tomemos $K_m = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. Dado que la unión finita de conjuntos compactos es compacto, se sigue que $K_m \subseteq W$ es un conjunto compacto, $K_m \subseteq K_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$W = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \subseteq W.$$

■

Lema 1.5.4 Sea (U, Σ, ν) un espacio de medida donde ν es una medida de Borel finita.

i) Sea

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq U \mid A \in \Sigma \text{ y para cada } \epsilon > 0$$
$$\text{existe un conjunto cerrado } C \subseteq A \text{ tal que } \nu(A \setminus C) < \epsilon\}.$$

Entonces F es cerrado bajo intersecciones y uniones numerables.

ii) Sea $\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{F} \mid U \setminus A \in \mathcal{F}\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra y $\beta(U) \subseteq \mathcal{G}$.

iii) Si $B \in \beta(U)$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $C \subseteq B$ tal que $\nu(B \setminus C) < \epsilon$.

Demostración i) Primero observemos que $\mathcal{F}$ contiene todos los conjunto cerrados de U. Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y $\epsilon > 0$ fijo. Para cada $i \in \mathbb{N}$, ya que $A_i \in \mathcal{F}$, existe un conjunto cerrado $C_i \subset A_i$ tal que $\nu(A_i \setminus C_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$. Tomemos $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Para $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ se tiene que C es un conjunto cerrado y

$$\begin{aligned}
\nu(A \setminus C) &= \nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\
&\leq \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus C_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \setminus C_i) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Así $A \in \mathcal{F}$. Ahora tomemos $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dado que $\nu(D) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \nu\left(D \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) &= \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)\\ &\leq \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus C_i)\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \setminus C_i) < \epsilon.\end{aligned}$$

Consecuentemente, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu\left(D \setminus \bigcup_{i=1}^{m_0} C_i\right) < \epsilon,$$

donde $\bigcup_{i=1}^{m_0} C_i$ es un conjunto cerrado. Luego, $D \in \mathcal{F}$.

ii) Por el lema 1.5.3, cada conjunto abierto de U puede ser expresado como una unión numerable de conjuntos cerrados, y por i) se obtiene que $\mathcal{F}$ contiene los conjuntos abiertos de U. Por lo tanto $\mathcal{G}$ contiene los conjuntos abiertos de U. Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$ y $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Por la forma que fue definido $\mathcal{G}$, y i) se tiene que $G \in \mathcal{F}$. Dado que $\{U \setminus A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$, se sigue que

$$U \setminus G = \bigcap_{i=1}^{\infty}(U \setminus A_i) \in \mathcal{G}.$$

Por lo tanto $G \in \mathcal{G}$. Se sigue entonces que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra que contiene los conjuntos abiertos en U, y así $\beta(U) \subseteq \mathcal{G}$. ■

Lema 1.5.5 Sean μ^* una medida exterior en U tal que μ es de Borel en U y $B \subseteq U$ un conjunto boreliano.

i) Si $\mu^*(B) < \infty$, entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $C \subseteq U$ tal que $C \subseteq B$, $\mu^*(B \setminus C) < \epsilon$.

ii) Si μ^* es de Radón en U, entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un conjunto abierto $W \subseteq U$ tal que $B \subseteq W$, $\mu^*(W \setminus B) < \epsilon$.

Demostración Sea $\nu^* = \mu^*_B$. Por el lema 1.3.1 y ya que $\mu^*(B) < \infty$, ν^* es una medida exterior finita en U y cada conjunto μ^*-medible es ν^*-medible. Luego ν es una medida de Borel. Sea $\epsilon > 0$ y $B \in \beta(U)$. Entonces por iii) del lema anterior, existe un conjunto cerrado $C \subseteq B$ tal que

$$\mu(B \setminus C) = \nu(B \setminus C) < \epsilon.$$

Luego se establece i).

Ahora supongamos que μ^* es de Radón. De acuerdo al lema 1.5.3, podemos fijar una sucesión de conjuntos abiertos $\{W_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq U$ tal que $\mu(W_m) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m.$$

Para $m \in \mathbb{N}$ fijo. Dado que $W_m \setminus B$ es un boreliano y $\mu(W_m \setminus B) < \infty$, por i), tomamos un conjunto cerrado $C_m \subseteq W_m \setminus B$ tal que

$$\mu((W_m \setminus C_m) \setminus B) = \mu((W_m \setminus B) \setminus C_m) < \frac{\epsilon}{2^m}.$$

Observemos que $W = \bigcup_{m=1}^{\infty}(W_m \setminus C_m)$ es un conjunto abierto y $B \subseteq U \setminus C_m$, por lo tanto $W_m \cap B \subseteq W_m \setminus C_m$. Consecuentemente,

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty}(W_m \cap B) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}(W_m \setminus C_m) = W.$$

Además,

$$\mu(W \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(W_m \setminus C_m) \setminus B\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu((W_m \setminus C_m) \setminus B) < \epsilon.$$

■

A continuación, veremos que cuando trabajamos con una medida exterior de Radón es posible aproximar la medida exterior usando conjuntos abiertos o compactos.

Lema 1.5.6 Sean μ una medida de Radón en U y $W \subseteq U$ un conjunto abierto. Entonces existe una sucesión de conjuntos borelianos $\{B_m\} \subseteq W$ tal que $B_m \cap B_k = \emptyset, m \neq k$, $\mu(B_m) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$W = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Demostración Por el lema 1.5.3, existe una sucesión de conjuntos compactos $\{K_j\} \subseteq W$ tal que $K_j \subseteq K_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$ y $W = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_m$. Ahora tomamos

$$B_m = K_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} K_j, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Notemos que, $B_m \in \beta(U)$, $\mu(B_m) \leq \mu(K_m) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$, $B_m \cap B_k = \emptyset, m \neq k$ y

$$\bigcup_{m=1}^{N} B_m = \bigcup_{m=1}^{N} K_m.$$

De lo anterior, se sigue que

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m,$$

donde $\mu(B_m) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 1.5.1 Sea μ^* una medida exterior de Radón en U. Entonces:

i) Para cada $A \subseteq U$,

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\mu^*(W) \mid A \subseteq W, W \in \tau_U\right\}.$$

ii) Para cada $A \subseteq U$ medible,

$$\mu^*(A) = \sup\left\{\mu^*(K) \mid K \subset A, K \text{ es un compacto}\right\}.$$

Demostración $i)$ Notamos que si $\mu^*(A) = \infty$ entonces $i)$ se satisface. Supongamos que $\mu^*(A) < \infty$. Primero veamos el caso cuando A es un boreliano. Dado $\epsilon > 0$, por el lema anterior existe un conjunto abierto $W \supseteq A$ con $\mu^*(W \setminus A) < \epsilon$. Entonces

$$\mu^*(W) = \mu^*(A) + \mu^*(W \setminus A) \leq \mu^*(A) + \epsilon < \infty.$$

Luego, $i)$ se satisface.

Consideremos ahora $A \subseteq U$ arbitrario. Dado que μ^* es Borel-regular, entonces existe un boreliano $B \supseteq A$ con $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu^*(A) = \mu^*(B) &= \text{ínf}\left\{\mu^*(W) \mid B \subseteq W, W \in \tau_U\right\} \\ &\geq \text{ínf}\left\{\mu^*(W) \mid A \subseteq W, W \in \tau_U\right\}. \end{aligned}$$

La otra desigualdad se sigue directamente de la monotonía de μ^*.

$ii)$ Sea $A \subseteq U$ medible, con $\mu^*(A) < \infty$. Definimos $\nu^* = \mu^*_A$. Por la proposición 1.5.2, se tiene que ν^* es de Radón en U. Dado $\epsilon > 0$. Por (i) existe un abierto W tal que $U \setminus A \subseteq W$ y

$$\nu^*(W) \leq \nu^*(U \setminus A) + \epsilon = \epsilon.$$

Sea $C = U \setminus W$. Luego C es cerrado y $C \subseteq A$. Además,

$$\mu^*(A \setminus C) = \nu^*(U \setminus C) = \nu^*(W) \leq \epsilon.$$

Entonces $0 \leq \mu^*(A) - \mu^*(C) \leq \epsilon$. Por lo tanto

$$\mu^*(A) = \sup\left\{\mu^*(C) \,\middle|\, C \subseteq A, C \text{ es cerrado}\right\}. \tag{1.2}$$

Supongamos ahora que $\mu^*(A) = \infty$. Por el lema 1.5.6, existe una sucesión de conjuntos borelianos $\{D_m\} \subseteq W$ tal que $D_m \cap D_k = \emptyset, m \neq k$, $\mu(D_m) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m.$$

Ahora tomemos $A = \bigcup_{m=1}^{\infty}(D_m \cap A)$, así $\mu^*(D_m \cap A) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A \cap D_m) = \mu^*(A) = \infty.$$

Notemos que, por ii) del lema 1.5.5, existe un conjunto cerrado $C_m \subseteq D_m \cap A$ con $\mu^*(C_m) \geq \mu^*(D_m \cap A) - \frac{1}{2^m}$. Entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subseteq A$ y

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mu^* \left(\bigcup_{m=1}^{N} C_m \right) &= \mu^* \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(C_m) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mu^*(D_m \cap A) - \frac{1}{2^m} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Ya que $\bigcup_{k=1}^{m} C_k$ es cerrado para cada $m \in \mathbb{N}$, en este caso también se satisface (1.2). Solo falta demostrar que $s = r$ donde

$$s = \sup \left\{ \mu^*(K) \,\middle|\, K \subseteq A, K \text{ compacto} \right\}, r = \sup \left\{ \mu^*(C) \,\middle|\, C \subseteq A, C \text{ cerrado} \right\}.$$

Notemos que de la definición se sigue directamente que $s \leq r$. Ahora tomamos un conjunto cerrado $C \subseteq U$. Por el lema 1.5.3, existe una sucesión de conjuntos compactos $\{K_m\} \subseteq U$ tal que $K_m \subseteq K_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

En seguida consideremos el conjunto $C_m = K_m \cap C, m \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que cada C_m es compacto y por la proposición 1.5.1 se sigue que $\mu^*(C) = \lim_{m\to\infty} \mu^*(C_m)$. Luego para cada conjunto medible $A \subseteq U$ y $C \subseteq A$ cerrado se cumple que $\mu^*(C) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu^*(C_m) \leq s$. Por lo tanto $r \leq s$.

■

Del teorema 1.5.1 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.5.1 Si dos medidas exteriores de Radón en U coinciden en los abiertos, entonces son iguales.

Definición 1.5.4 Un conjunto $A \subseteq \Omega$ es σ-*finito* con respecto a la medida μ si podemos escribir

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

donde B_k es medible y $\mu(B_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$. Además, decimos que μ es una *medida* σ-*finita* si el conjunto Ω es σ-finito con respecto a μ.

Del lema 1.5.3 se sigue directamente el siguiente resultado.

Proposición 1.5.3 Toda medida de Radón en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es σ-finita.

1.6. Criterio de Carathéodory

A continuación se presenta un resultado que nos da condiciones suficientes para que una medida exterior sea de Borel.

Definición 1.6.1 La *distancia* entre dos conjuntos $A, B \subseteq M$, está dada por

$$\text{dist}(A, B) := \text{ínf}\,\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}\,.$$

En particular,

$$\text{dist}(x, A) = \text{ínf}\,\{d(x, y) : y \in A\}\,.$$

Teorema 1.6.1 Sean (M, d) un espacio métrico y μ^* una medida exterior en M. Si μ^* satisface el criterio de Carathéodory en M, i.e. para cada $A, B \subseteq M$ tal que $0 < \text{dist}(A, B)$, se cumple que

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

entonces, μ^* es de Borel en M.

Demostración Fijemos un conjunto cerrado no-vacío $C \subseteq M$. Para $A \subseteq M$ probaremos que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \setminus C). \tag{1.3}$$

Si $\mu^*(A) = \infty$, entonces (1.3) se satisface. Supongamos que $\mu^*(A) < \infty$. Definimos

$$C_n = \left\{x \in M \,\middle|\, \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n}\right\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego $\text{dist}(A \setminus C_n, A \cap C) \geq \frac{1}{n} > 0$. Entonces por hipótesis

$$\mu^*(A \setminus C_n) + \mu^*(A \cap C) = \mu^*((A \setminus C_n) \cup (A \cap C)) \leq \mu^*(A). \tag{1.4}$$

Resta verificar que $\text{lím}_{n\to\infty} \mu^*(A \setminus C_n) = \mu^*(A \setminus C)$. Tomemos

$$A_k = \left\{x \in A \,\middle|\, \frac{1}{k+1} < \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\right\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que C es cerrado, $A \setminus C = (A \setminus C_n) \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Consecuentemente,

$$\mu^*(A \setminus C_n) \leq \mu^*(A \setminus C) \leq \mu^*(A \setminus C_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Si demostramos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) < \infty$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu^*(A \setminus C_n) &\leq \mu^*(A \setminus C) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A \setminus C_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(A_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu^*(A \setminus C_n).
\end{aligned}$$

Observemos que $\operatorname{dist}(A_i, A_j) > 0$ si $j \geq i + 2$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_{2k}) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{2k}\right) \leq \mu^*(A)$$

y

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_{2k+1}) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{2k+1}\right) \leq \mu^*(A).$$

Sumando termino a termino las desigualdades anteriores y haciendo $m \to \infty$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \leq 2\mu^*(A) < \infty.$$

Finalmente obtenemos que

$$\mu^*(A \setminus C) + \mu^*(A \cap C) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A \setminus C_n) + \mu^*(A \cap C) \leq \mu^*(A).$$

Luego se satisface (1.3) y por lo tanto también (1.4). Entonces C es μ^*-medible. ■

Capítulo 2
Funciones medibles y continuas

Las funciones medibles se definen a partir de dos espacios medibles, de hecho, las funciones medibles son los morfismos en la categoría de espacios medibles. Sin embargo, para los fines que queremos alcanzar será suficiente que la función tenga por dominio un espacio de medida y por codominio un espacio topológico, al cual le asociaremos la σ-álgebra de Borel correspondiente. Bastará entonces que una función cumpla con la condición de medibilidad para los conjuntos abiertos, para ser función medible. También se abordan teoremas de aproximación para funciones medibles por funciones continuas, y teoremas de extensión para funciones continuas.

2.1. Propiedades básicas

En esta sección, salvo que se diga otra cosa, Y es un espacio topológico y (Ω, Σ) es un espacio medible.

Definición 2.1.1 Sea $f : \Omega \to Y$.

i) Diremos que f es Σ-*medible* o *medible* si para cada conjunto abierto $U \subseteq Y$, $f^{-1}(U) \in \Sigma$.

ii) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces diremos que f es *Borel-medible* si f es $\beta(\mathbb{R}^n)$-medible.

iii) Si μ es una medida en Σ, diremos que f es *medible con respecto a* μ o simplemente *medible* si f es Σ-medible.

iv) Si μ^* es una medida exterior en Ω, diremos que f es μ^*-medible o simplemente *medible* si f es Σ^*-medible.

Notación: El conjunto de funciones Σ-medibles se indicará por $\mathcal{L}^0(\Sigma)$.

Proposición 2.1.1 i) Si $f : \mathbb{R}^n \to Y$ es continua, entonces f es Borel-medible. Por consiguiente, f es medible con respecto a cualquier medida de Borel en $\mathbb{R}^n$.

ii) Sea $f : \Omega \to Y$ medible. Si $B \subseteq Y$ es un conjunto boreliano, entonces

$$f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

iii) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ son funciones medibles, entonces $(f, g) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ es medible.

Notación: Recordemos que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\mathbb{R}^{*+} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\mathbb{R}^{*-} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ son espacios topológicos con sus respectivas topologías estándar (son las generadas por las bolas en $\mathbb{R}$ y los rayos $(c, -\infty], [\infty, c), \forall c \in \mathbb{R}$).

Proposición 2.1.2 Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es medible si, y sólo si

$$f^{-1}([-\infty, a)) \in \Sigma \text{ para cada } a \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema expresa algunas de las propiedades de funciones medibles.

Teorema 2.1.1 i) Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ son medibles, entonces $fg, |f|, \operatorname{mín}(f, g)$ y $\operatorname{máx}(f, g)$ también son funciones medibles.

ii) Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ son medibles, entonces $f + g$ y $\frac{f}{g}$ son medibles en su dominio.

iii) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles, $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^*, \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, $\operatorname{ínf}_{k\geq 1} f_k, \sup_{k\geq 1} f_k, \operatorname{lím\,ínf}_{k\to\infty} f_k$ y $\operatorname{lím\,sup}_{k\to\infty} f_k$ también son medibles.

Observemos que si $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R}^{*-}\}$, entonces el dominio de $f + g$ es Ω.

Notación: Si $f : \Omega \to Y$ y $A \subseteq \Omega$, entonces la *restricción de f a A*, es la función $f|_A : A \to Y$ dada por $f|_A(x) := f(x)$.

Lema 2.1.1 Sea $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ donde $\Omega_k \in \Sigma$ y $g|_{\Omega_k}$ es Σ_{Ω_k}-medible, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces g es medible.

Definición 2.1.2 La *función característica* de un conjunto $A \subseteq \Omega$, se define por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Además, para $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ definimos

$$g_A(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases},$$

Observemos que en la definición anterior $g_A = g\chi_A$.

Lema 2.1.2 Un conjunto $A \subseteq \Omega$ es medible si, y sólo si χ_A es medible.

2.2. Extensión de funciones continuas

Lema 2.2.1 Sea (M, d) un espacio métrico. Para $A \subseteq M$ no-vacío, se cumple que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Demostración Notemos que para $x, y \in M$, por propiedades de la función distancia, se cumple

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a), \forall a \in A.$$

Ya que $d(x, A) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$, entonces

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A). \tag{2.1}$$

Análogamente, intercambiando los papeles de x y y en el desarrollo anterior, se obtiene que $d(y, A) - d(x, y) \leq d(x, A)$. Por la desigualdad anterior y (2.1) se obtiene el resultado deseado. ■

Teorema 2.2.1 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ cerrado no-vacío y $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces existe una función continua $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{f} = f$ en K.

Demostración Notemos que solo basta demostrar el caso cuando $m = 1$. Sea $U = \mathbb{R}^n \setminus K$ y fijemos $s \in K$. Dado $x \in U$, observemos que $d(x, K) > 0$, entonces definimos

$$u_s(x) = \max \left\{ 2 - \frac{\|x - s\|}{\text{dist}(x, K)}, 0 \right\}.$$

Observemos que se cumple:

i) u_s es continua en U,

ii) $0 \leq u_s \leq 1$,

iii) $u_s(x) = 0$, si $\|x - s\| \geq 2\text{dist}(x, K)$.

Dado que $\mathbb{R}^n$ es un espacio separable, fijemos una sucesión densa $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$. Ahora, definimos

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u_{s_k}(x), \text{ para } x \in U.$$

De la definición de distancia, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - s_{k_0}\| < 2\text{dist}(x, K).$$

Por lo tanto $2^{-k_0} u_{s_{k_0}}(x) > 0$. Luego $0 < \sigma \leq 1$. Ahora definimos

$$v_k(x) = \frac{2^{-k} u_{s_k}(x)}{\sigma(x)}$$

donde $x \in U$, $k \in \mathbb{N}$, la cual es una función continua en U. Tomamos

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)v_k(x) & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Veamos que $\bar{f}$ es continua en U. Fijemos $x_0 \in U$ y consideremos $R = \text{dist}(x_0, K) > 0$. Definamos $V_0 = V(x_0, R) \subseteq U$ y $B_0 = B(x_0, 4R)$. Como B_0 es compacto, existe $C \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(s)| \leq C \ , \forall s \in B_0. \tag{2.2}$$

Si $x \in V_0$ y $\|s_k - x\| > 4R$, se tiene que

$$\|s_k - x\| > 2R + 2R \geq 2\text{dist}(x, x_0) + 2\text{dist}(x_0, K) \geq 2\text{dist}(x, K).$$

Luego, si $\|s_k - x\| > 4R$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $u_{s_k}(x) = 0$. Y si $\|s_k - x\| \leq 4R$ se cumple (2.2). Notemos que $f(s_k)u_{s_k}(x)$ es continua, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$|2^{-k} f(s_k)u_{s_k}(x)| \leq 2^{-k}C, \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}C < \infty.$$

Entonces, por el criterio M de Weierstrass, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(s_k)u_{s_k}(x)$ es continua en U_0. Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}u_{s_k}(x)}{\sigma(x)} f(s_k) = \frac{g(x)}{\sigma(x)}.$$

Por lo tanto $\bar{f}$ es continua en U_0, y por ende en U. Ahora solo resta verificar que

$$\lim_{x \to a, x \in U} \bar{f}(x) = f(a)$$

para cada a en la frontera de K. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $\|a - s_k\| < \delta$ se cumple que

$$|f(a) - f(s_k)| < \epsilon. \tag{2.3}$$

Sea $x \in U$ tal que $\|x - a\| < \frac{\delta}{4}$. Notemos que si $\|a - s_k\| \geq \delta$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\delta \leq \|a - s_k\| \leq \|a - x\| + \|x - s_k\| < \frac{\delta}{4} + \|x - s_k\|.$$

Por lo tanto

$$\|x - s_k\| \geq \frac{3}{4}\delta > 2\|x - a\| \geq 2\text{dist}(x, K).$$

Luego, si $\|a - s_k\| \geq \delta$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $v_k(x) = 0$. Y si $\|a - s_k\| < \delta$ se satisface (2.3). Además observemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 1, \forall x \in U.$$

De lo anterior se sigue que

$$|\bar{f}(x) - f(a)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)|f(s_k) - f(a)| < \epsilon.$$

■

Teorema 2.2.2 Sean X y Y espacios normados, y $V \subseteq X$ un subespacio vectorial real de X. Si $T : V \to Y$ es lineal, continua y Y es completo, entonces existe una única extensión $\overline{T} : \overline{V} \to Y$ que es continua. Además, $\overline{T}$ es lineal y $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Demostración Primero veamos que existe una única extensión continua de T.

Supongamos que $\overline{T}$ y S son extensiones continuas de T a $\overline{V}$. Dado $x \in \overline{V}$ elijamos una sucesión $\{x_n\} \subseteq V$ tal que $x_n \to x$. Luego, por la continuidad de $\overline{T}$ y de S, resulta

$$S(x) = \lim S(x_n) = \lim T(x_n) = \overline{T}(x). \tag{2.4}$$

Dado $x \in \overline{V}$, consideremos una sucesión $\{x_n\} \subseteq V$ tal que $x_n \to x$. De acuerdo con (2.4), definimos

$$\overline{T}(x) = \lim T(x_n). \tag{2.5}$$

Para que (2.5) esté bien definida, debemos justificar dos puntos. Primero que $\{T(x_n)\}$ converge y, segundo, que la definición en (2.5) no depende de la sucesión en V que converja a x.

Como Y es completo, el primer punto se establece por ser T uniformemente continua. Consideremos ahora otra sucesión $\{y_n\} \subseteq V$ tal que $y_n \to x$. Formemos en seguida la sucesión $\{z_n\}$, donde

$$z_{2n-1} = x_n, z_{2n} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que esta sucesión es de Cauchy. Entonces, al utilizar lo probado en el paso anterior, resulta que $T(z_k)$ es convergente, digamos $T(z_k) \to b \in Y$. Esto implica que $T(z_{2n-1}) \to b$ y $T(z_{2n}) \to b$. Por consiguiente

$$\lim T(x_n) = \lim T(y_n).$$

Habiendo definido $\overline{T}$, resta probar que tiene las propiedades requeridas. Sea $x \in V$. Luego, tomando la sucesión constante $x_n = x$, resulta $\overline{T}(x) = \lim T(x_n) = f(x)$. Esto demuestra que $\overline{T}$ es extensión de T.

Sean $x, y \in \overline{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomemos sucesiónes $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq V$, tales que

$$x_n \to x, y_n \to y. \tag{2.6}$$

Luego,

$$x_n + y_n \to x + y, \lambda x_n \to \lambda x.$$

De esto y la definición de $\overline{T}$ en (2.5), resulta

$$\begin{aligned}\overline{T}(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} (Tx_n + Ty_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} Ty_n = \overline{T}x + \overline{T}y, \\ \overline{T}(\lambda x) &= \lim_{n\to\infty} T(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda T(x_n) = \lambda \overline{T}x\end{aligned}$$

y

$$\|\overline{T}x\| = \|\lim_{n\to\infty} Tx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|. \tag{2.7}$$

Esto muestra que $\overline{T}$ es lineal y continua.

Como $\{x \in V : \|x\| \leq 1\} \subseteq \left\{x \in \overline{V} : \|x\| \leq 1\right\}$, se cumple que $\|T\| \leq \|\overline{T}\|$. La desigualdad restante se sigue de 2.7. Por lo tanto, $\|\overline{T}\| = \|T\|$. ■

2.3. Espacio $C_c(U, \mathbb{R}^m)$

Definición 2.3.1 Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$.

i) El *soporte* de f, está dado por $\text{sop}(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

ii) Si además, E es un espacio topológico, entonces $\text{supp}(f) := \overline{\text{sop}(f)}$ es el *soporte topológico* de f.

iii) El conjunto de funciones vectoriales con variable vectorial que son continuas y tienen soporte topológico compacto es

$$C_c(E, \mathbb{R}^m) := \{f : E \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ es continua y } \text{supp}(f) \text{ es compacto}\}.$$

En particular, $C_c(E) := C_c(E, \mathbb{R})$. Además, definimos

$$C_c^+(E) := \{f \in C_c(E), f \geq 0\}.$$

Lema 2.3.1 Sea E un espacio topológico. El conjunto $C_c(E, \mathbb{R}^m)$ es un espacio vectorial.

Demostración Es claro que $0 \in C_c(E, \mathbb{R}^m)$. Sean $f, g \in C_c(E, \mathbb{R}^m)$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $\text{supp}(f)$ y $\text{supp}(g)$ son conjuntos compactos. Luego,

$$\text{supp}(f+g) \subseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(f).$$

Ya que $\text{supp}(f+g)$ es cerrado y $\text{supp}(f) \cup \text{supp}(f)$ es compacto, entonces $\text{supp}(f+g)$ es compacto, es decir, $f+g \in C_c(E, \mathbb{R}^m)$. Finalmente, notemos que $\text{supp}(cf) \subseteq \text{supp}(f)$, por lo tanto $cf \in C_c(E, \mathbb{R}^m)$. ■

Lema 2.3.2 Sea (M, d) un espacio métrico y $K, V \subseteq M$. Si $K \subset V$, K es cerrado y V es abierto, entonces existe una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ en K y $f = 0$ en $M \setminus V$.

Demostración Si $K = \emptyset$, la función $f = 0$ tiene la propiedad señalada. Si $V = M$, la función $f = 1$ cumple lo indicado. Supongamos ahora que $K \neq \emptyset$ y $V \neq M$. Consideremos entonces las funciones continuas $g(x) = d(x, K)$ y $h(x) = d(x, M \setminus V), \forall x \in M$. Si $x \in K$, entonces $x \notin M \setminus V$, por lo que $h(x) > 0$. Si $x \notin K$, entonces $g(x) > 0$. Esto demuestra que

$$f = \frac{h}{g + h}$$

está definida y es continua en M. Es sencillo verificar que f posee las propiedades requeridas. ■

Corolario 2.3.1 Sea $K \subset U$ compacto no-vacío y $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces existe $F \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ tal que $F = f$ en K.

Demostración Por el teorema 2.2.1, existe una función continua $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{f} = f$ en K. De acuerdo al lema 1.5.2, existe un abierto $W \subseteq U$ tal que $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subset U$ y $\overline{W}$ es compacto, entonces, por el lema 2.3.2, existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $h = 1$ en K, $h = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus W$, $0 \leq h \leq 1$. Consideremos la función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$F(x) = h(x) f(x).$$

Observemos que F es continua. Además, sop$(F) \subset W$, y por lo tanto supp$(F) \subseteq \overline{W}$ es compacto. Es decir, $F|_U \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$. Finalmente, notemos que para $x \in K$, $F|_U(x) = h(x) f(x) = f(x)$. ■

Proposición 2.3.1 (Partición continua de la unidad) Sean $V_1, \ldots, V_\ell$ conjuntos abiertos no-vacíos de U y $K \subseteq U$ un conjunto compacto tales que

$$K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_\ell.$$

Entonces existen funciones $\zeta_i \in C_c(U)$, $0 \leq \zeta_i \leq 1$, supp$(\zeta_i) \subseteq V_i, \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \zeta_i(x) = 1, \forall x \in K.$$

Demostración Para cada $x \in K$ podemos encontrar una vecindad W_x tal que $\overline{W_x}$ es un conjunto compacto y $\overline{W_x} \subseteq V_i$, para algún $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Dado que K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que

$$K \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_m.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, definimos H_i como la unión de los $\overline{W_{x_j}}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $\overline{W_{x_j}} \subseteq V_i$. Por lo tanto $H_i \subset V_i$ es compacto, $\forall i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Por el lema 2.3.2, existen funciones $g_i \in C(U)$, $0 \leq g_i \leq 1$, $g_i(x) = 1, \forall x \in H_i$ y supp$(g_i) \subseteq V_i, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Ahora definimos

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1, \\ h_2 &= (1 - g_1)g_2, \\ &\vdots \\ h_\ell &= (1 - g_1)(1 - g_2)\ldots(1 - g_{\ell-1})g_\ell. \end{aligned}$$

Notemos que $h_i \in C_c(U), 0 \leq h_i \leq 1$, supp$(h_i) \subseteq V_i, \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}$ y

$$h_1 + \cdots + h_k = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2)\ldots(1 - g_\ell).$$

Finalmente, observemos que si $x \in K$, entonces $x \in H_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, luego $h_1(x) + \cdots + h_\ell(x) = 1$. ■

Lema 2.3.3 Si $f \in C_c(U)$, entonces f es uniformemente continua.

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad de f, para cada $x \in$ supp(f), existe $\delta(x) > 0$ tal que

$$y \in \text{supp}(f), \|x - y\| \leq \delta(x) \to |f(x) - f(y)| \leq \epsilon/2. \tag{2.8}$$

Como $\{V(x, \delta(x)/2) : x \in \text{supp}(f)\}$ es una cubierta abierta de supp(f) y supp(f) es compacto, existen $x_j \in$ supp(f), $r_j = \dfrac{\delta(x_j)}{2}$, $j = 1, \ldots, n$, tales que

$$\text{supp}(f) \subseteq V(x_1, r_1) \cup \cdots \cup V(x_k, r_k).$$

Sea $\delta = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Consideremos ahora $x, y \in$ supp(f) tales que $\|x - y\| \leq \delta$. Elijamos j de manera que $\|x - x_j\| < r_j$. Notemos que $\|y - x_j\| \leq \|y - x\| + \|x - x_j\| < 2r_j = \delta(r_j)$. Por (2.8), esto implica que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \epsilon.$$

■

Recordemos que $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es un subespacio de $B(\Omega, \mathbb{R}^m)$, el espacio de las funciones acotadas $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. En $B(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la norma estándar es la norma del supremo $\|f\|_B := \sup\{\|f(x)\| : x \in \Omega\}$.

Pese a lo anterior, más adelante será conveniente que en $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ consideremos la norma $\|\cdot\|_\infty$, dada por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f_k(x)| : x \in \Omega, k \in \{1, \ldots, m\}\}, \text{ donde } f = (f_1, \ldots, f_m).$$

En este caso ambas normas son equivalentes en $B(\Omega, \mathbb{R}^m)$. En efecto, para $x \in \Omega$

$$\|f(x)\| = \sqrt{|f_1(x)|^2 + \cdots + |f_m(x)|^2} \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} \{|f_k(x)|\} \leq \sqrt{m}\|f\|_\infty.$$

Por lo tanto, $\|f\|_B \leq \sqrt{m}\|f\|_\infty$.

Por otro lado, para $x \in \Omega$, $k \in \{1, \ldots, m\}$,

$$|f_k(x)| \leq \sqrt{|f_1(x)|^2 + \cdots + |f_m(x)|^2} \leq \|f\|_B.$$

Entonces, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_B$. Luego, ambas normas son equivalentes.

2.4. Aproximación por funciones continuas

Lema 2.4.1 Para cada $\epsilon > 0$, existe una sucesión $\{B_k\} \subseteq \beta(\mathbb{R}^n)$ disjuntos, tal que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \mathbb{R}^n \text{ y diam } B_k < \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ dado. Fijemos una sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ densa en $\mathbb{R}^n$. Ahora, definamos inductivamente

$$B_k = V\left(x_k, \frac{\epsilon}{2}\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} V\left(x_j, \frac{\epsilon}{2}\right), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que, $B_k \in \beta(\mathbb{R}^n)$, diam $B_k < \epsilon$, para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap B_\ell = \emptyset, k \neq \ell$ y

$$\bigcup_{k=1}^{m} B_k = \bigcup_{k=1}^{m} V\left(x_k, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Se sigue que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = U,$$

donde diam $B_k < \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Lusin) Sean μ^* una medida exterior Borel-regular en U y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función μ^*-medible. Dados $\epsilon > 0$ y $A \subseteq U$ medible tal que $\mu^*(A) < \infty$, entonces existe un compacto $K \subseteq A$ tal que:

i) $\mu^*(A \setminus K) < \epsilon$ y

ii) $f|_K$ es continua.

Demostración Fijemos $i \in \mathbb{N}$, definimos una sucesión de borelianos disjuntos $\{B_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} \text{ y diam} B_{ij} < \frac{1}{i}.$$

Ahora definimos $A_{ij} = A \cap f^{-1}(B_{ij})$. Entonces A_{ij} es medible y $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$. Tomamos $\nu^* := \mu^*_A$, entonces ν^* es de Radón en U. Por el lema 1.5.5, existe un compacto $K_{ij} \subseteq A_{ij}$ con $\nu^*(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \frac{\epsilon}{2^{i+j}}$. Entonces,

$$\mu^*\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right) = \nu^*\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right) = \nu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right)$$
$$\leq \nu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_{ij} \setminus K_{ij})\right) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Como $\lim\limits_{N\to\infty} \mu^*\left(A \setminus \cup_{j=1}^{N} K_{ij}\right) = \mu^*(A \setminus \cup_{j=1}^{\infty} K_{ij})$. Entonces existen $N_i \in \mathbb{N}$, $D_i = \cup_{j=1}^{N_i} K_{ij}$ tales que

$$\mu^*\left(A \setminus D_i\right) = \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N_i} K_{ij}\right) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Entonces, D_i es compacto. Para cada i y j, fijamos $b_{ij} \in B_{ij}$ y definimos $g_i : D_i \to \mathbb{R}^m$ dada por $g_i(x) = b_{ij}$, para $x \in K_{ij}$ ($j \leq N_i$).

Dado que $K_{il}, \ldots, K_{iN_i}$ son compactos disjuntos, entonces están a una distancia positiva y g_i es continua. Por lo tanto, $|f(x) - g_i(x)| < \frac{1}{i}$ para cada $x \in D_i$. Tomando $K = \cap_{i=1}^{\infty} D_i$. Entonces K es compacto y

$$\mu^*(A \setminus K) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \setminus D_i) < \epsilon.$$

Como $|f(x) - g_i(x)| < \frac{1}{i}$ para cada $x \in D_i$, entonces $g_i \to f$ uniformemente en K. Luego, $f_{|_K}$ es continua. ■

Lema 2.4.2 Sean μ^* una medida exterior Borel-regular en U y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función μ^*-medible. Dados $\epsilon > 0$ y un conjunto medible $A \subseteq U$ tal que $\mu^*(A) < \infty$, entonces existe una función continua $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mu^*(\{x \in A \mid \bar{f}(x) \neq f(x)\}) < \epsilon.$$

Demostración Por el teorema de Lusin, existe un conjunto compacto $K \subseteq A$ tal que $\mu^*(A \setminus K) < \epsilon$ y $f|_K$ es continua. Entonces por el teorema 2.2.1 existe una función continua $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{f}|_K = f|_K$. Por lo tanto

$$\mu^*(\{x \in A \bigm| \bar{f}(x) \neq f(x)\}) \leq \mu^*(A \setminus K) < \epsilon.$$

■

Teorema 2.4.2 (Aproximación por funciones continuas) Sean μ^* una medida exterior Borel-regular en U y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función μ^*-medible. Dados $\epsilon > 0$ y $A \subseteq U$ un conjunto medible tal que $\mu^*(A) < \infty$, entonces existe $F \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\mu^*(\{x \in A \mid F(x) \neq f(x)\}) < \epsilon.$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Por el teorema de Lusin, existe un compacto $K \subseteq A$ tal que $\mu^*(A \setminus K) < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $f|_K$ es continua. Entonces, por el lema 2.4.2, existe una función continua $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mu^*\left(\{x \in K \mid \bar{f}(x) \neq f(x)\}\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por el corolario 2.3.1, existe una función $F \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ tal que $F = \bar{f}$ en K. Luego

$$\mu^*\left(\{x \in A \mid F(x) \neq f(x)\}\right) \leq \mu^*\left(\{x \in K \mid \bar{f}(x) \neq f(x)\}\right) + \mu^*(A \setminus K) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo cual, concluye la prueba. ■

Notación: Decimos que una propiedad p se cumple μ-c.t.p (casi en todas partes respecto a μ) cuando p se satisface excepto posiblemente en un conjunto medible A tal que $\mu(A) = 0$.

Teorema 2.4.3 (Teorema de Egoroff) Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, (M, d) un espacio métrico, $f_k : \Omega \to M$, $k \in \mathbb{N}$, funciones medibles y $A \in \Sigma$ medible. Si $\mu(A) < \infty$ y $f_k \to f$ μ-c.t.p. en A, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto $B \in \Sigma_A$ tal que:

i) $\mu(A \setminus B) < \epsilon$ y

ii) $f_k \to f$ uniformemente en B.

Demostración Para $i, j \in \mathbb{N}$, definimos $C_{ij} = \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x \mid d(f_k(x), f(x)) > 2^{-i}\right\}$. Observemos que $C_{i(j+1)} \subseteq C_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N}$. Y también, como $\mu(A) < \infty$,

$$\lim_{j\to\infty} \mu\left(A \cap C_{ij}\right) = \mu\left(A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{ij}\right) = 0.$$

Por lo tanto existe un entero N_i tal que $\mu(A \cap C_{iN_i}) < \epsilon 2^{-i}$. Definimos el conjunto $B = A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} C_{iN_i}$. Entonces,

$$\mu(A \setminus B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap C_{iN_i}) < \epsilon.$$

Luego para cada $i \in \mathbb{N}$, $x \in B$, tenemos que $d(f_n(x), f(x)) \leq 2^{-i}, \forall n \geq N_i$. Consecuentemente $f_n \to f$ uniformemente en B. ∎

Capítulo 3

Integración

La teoría clásica de integración en $\mathbb{R}$ es la propuesta por Riemann y la teoría de integración de Lebesgue generaliza dicha noción. Podemos decir que la diferencia entre la integral de Lebesgue y la de Riemann, es que en la de Lebesgue se aproxima la función a integrar con base en particiones de su codominio, en cambio la de Riemann se sustenta en particiones del dominio. En este capítulo desarrollaremos la teoría de integración a partir de un espacio de medida arbitrario, sin embargo, en esencia es la misma teoría desarrollada por Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

3.1. Definición y propiedades

A continuación, nuestro marco es un espacio de medida (Ω, Σ, μ).

Definición 3.1.1 Una función $s : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función *simple* si es medible y toma solamente un número finito de valores. Se denotará por $S(\Sigma)$ al conjunto de funciones simples y $S(\Sigma)^+$ será el conjunto de funciones simples positivas.

Observación A lo largo del trabajo, cuando nos refiramos a espacios vectoriales, entenderemos que son espacios vectoriales reales.

Lema 3.1.1 El conjunto $S(\Sigma)$ es un espacio vectorial.

Teorema 3.1.1 Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Si f es medible, entonces existe una sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S(\Sigma)$ que converge puntualmente a f, esto es $s_n(x) \to f(x), \forall x \in \Omega$. Además,

i) $|s_n| \leq |f|, \forall k \in \mathbb{N}$.

ii) Si f es acotada, entonces la convergencia es uniforme.

iii) Si $f \geq 0$, entonces $s_{k+1} \geq s_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Definición 3.1.2 Sean $s \in S(\Sigma)$ y $C_1, \ldots, C_m$ los distintos valores que toma s. Definimos

$$A_k = s^{-1}(C_k), k = 1, \ldots, m.$$

Entonces
$$s = \sum_{k=1}^{m} C_k \chi_{A_k}.$$
A esta expresión la llamaremos *representación canónica* de s.

Observemos que en la definición anterior cada A_k es medible y $A_k \cap A_j = \emptyset$ cuando $k \neq j$.

Definición 3.1.3 Sea $s \in S(\Sigma)^+$ y $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k}$ su representación canónica. Entonces
$$\int_\Omega s d\mu := \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(A_k).$$

Notemos que $0 \leq \int_\Omega s d\mu \leq \infty$.

Notación: En gran parte del desarrollo, estaremos trabajando respecto a una medida fija μ por esta razón, usualmente usaremos "$\int_\Omega s$" en lugar de "$\int_\Omega s d\mu$". Así mismo, en ocasiones omitiremos Ω y escribiremos simplemente "$\int s$".

Definición 3.1.4 La *integral* de $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)^+$ respecto a μ es
$$\int_\Omega f := \sup \left\{ \int_\Omega s : 0 \leq s \leq f, s \in S(\Sigma) \right\}.$$

Notemos que $0 \leq \int_\Omega f \leq \infty$.

Teorema 3.1.2 Si $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)^+$, entonces
$$\int f = 0 \text{ si, y sólo si } f = 0 \ \mu\text{-c.t.p.}$$

Definición 3.1.5 Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)^+$. Para cualquier $A \in \Sigma$ definamos
$$\int_A f := \int_\Omega f \chi_A.$$

Ya que $f\chi_A \in \mathcal{L}^0(\Sigma)^+$, la notación anterior está bien definida. Sean $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma)^+$ y supongamos que $f = g$ en E. Entonces
$$f\chi_E = g\chi_E.$$
Luego,
$$\int_E f = \int_\Omega f\chi_E = \int_\Omega g\chi_E = \int_E g.$$
Esto indica que la integral $\int_E f$ sólo depende de los valores de f en E.

Recordemos que si $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$, entonces $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \max(-f, 0)$ también son funciones medibles.

Definición 3.1.6 Una función $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$ es μ-*integrable* (o simplemente integrable) si $\int_\Omega f^+ < \infty$ o $\int_\Omega f^- < \infty$. En este caso

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-.$$

Observemos que $-\infty \leq \int_\Omega f \leq \infty$.

Definición 3.1.7 Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$ una función integrable. Entonces f es μ-*sumable* (o simplemente *sumable*) si

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ y } \int f^- d\mu < \infty.$$

En este caso $\int_\Omega f \in \mathbb{R}$. El conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sumables será denotado por $\mathcal{L}^1(\mu)$ (o $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$).

Observemos que $\mathcal{L}^1(\mu)$ es un espacio vectorial.

Teorema 3.1.3 Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Entonces f es sumable si, y sólo si $|f|$ es sumable. En este caso se satisface la desigualdad del triangulo

$$\left| \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f|.$$

Teorema 3.1.4 (Convergencia Dominada) Sean $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}^0(\Sigma)$ y $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$ tal que

$$f_k \to f \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Si existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $|f_k| \leq g, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu.$$

Teorema 3.1.5 Sean $f, f_k, k \in \mathbb{N}$, funciones sumables tales que

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| d\mu = 0.$$

Entonces existe una subsucesión $\left\{f_{k_j}\right\}_{j=1}^\infty$ que satisface $f_{k_j} \to f \quad \mu$-c.t.p.

Lema 3.1.2 Sean $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ y $A \in \Sigma$. Entonces

$$\int_\Omega g\chi_A d\mu = \int_A g d\mu_A.$$

Definición 3.1.8 Una función $f : U \to \mathbb{R}$ es μ- *localmente sumable* si f_K es sumable para cada conjunto compacto $K \subseteq U$. El conjunto de funciones localmente sumables con respecto a μ se indicará por $\mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$ (o $\mathcal{L}^1_{loc}(U, \mu)$).

Lema 3.1.3 Si $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$, entonces $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$.

Demostración Sea $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$. Luego,

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \overline{V(0,k)} \\ 0 & \text{si } x \notin \overline{V(0,k)} \end{cases} \text{ es sumable }, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, f_k es medible para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ es medible ■

Definición 3.1.9 Decimos que $\nu : 2^U \to \mathbb{R}$ es una *medida de Radón con signo* en U si existe una medida exterior μ^* que es de Radón en U, y una función $f : U \to \mathbb{R}$ localmente sumable tal que

$$\nu(K) = \int_K f d\mu^*, \text{ para todo conjunto compacto } K \subseteq U.$$

Teorema 3.1.6 (Teorema de Fubini) Sean μ y ν medidas σ-finitas en Ω_1 y Ω_2 respectivamente. Si f es $\mu \times \nu$-integrable, entonces:

i) La función $f_x : \Omega_2 \to \mathbb{R}^*$ definida por $f_x(y) := f(x, y), \forall x \in \Omega_1$, es ν-integrable μ-c.t.p.

ii) La función
$$x \to \int_{\Omega_2} f(x, y) d\nu(y)$$
esta definida μ-c.t.p. y es μ-integrable.

iii) Se cumple
$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d(\mu \times \nu) = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

3.2. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 3.2.1 Sea (M, d) un espacio métrico. El *diámetro* de un conjunto $A \subseteq M$ es
$$\text{diam}\, A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}, \text{ donde } \sup \emptyset = 0.$$

Usando el ejemplo 1.3.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 La función $\mathcal{L}^{1*} : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ dada por

$$\mathcal{L}^{1^*}(A) := \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_i \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, C_i \subseteq \mathbb{R}\right\}, \forall A \subseteq \mathbb{R},$$

es una medida exterior en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.2 La medida exterior $\mathcal{L}^{1*}$ coincide con la medida exterior de Lebesgue m^*.

Demostración Por definición $\mathcal{L}^{1*} \leq m^*$. Notemos que para $C \subseteq \mathbb{R}$, diam $C = \sup C - \text{ínf}\, C$. Por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \text{diam } I_k \;\middle|\; C \subseteq \bigcup_k I_k, I_k \text{ intervalo}\right\} \leq \text{diam } C.$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe una sucesión, $\left\{I_k^j\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ de intervalos acotados tal que $C_j \subseteq \bigcup_k I_k^j$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{diam } I_k^j \leq \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \text{diam } I_k \;\middle|\; C_j \subseteq \bigcup_k I_k, I_k \text{ intervalo}\right\} + \frac{\epsilon}{2^j} \leq \text{diam } C_j + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Entonces

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \text{diam } I_k^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j + \epsilon.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$, obtenemos que

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \text{diam } I_k^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j.$$

Lo cual, concluye la prueba. ■

Definición 3.2.2 La *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$ se define inductivamente por

$$\mathcal{L}^n := \underbrace{(\mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1)}_{n-1 \text{ veces}} \times \mathcal{L}^1.$$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ también la denotaremos por m.

Vale la pena subrayar que la σ-álgebra $\Sigma_{\mathbb{R}^n}$ asociada a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, es la que se obtiene al aplicar el teorema de Carathéodory a la medida exterior que induce la medida en el semianillo $\mathcal{C}(\Sigma_{\mathbb{R}^{n-1}}, \Sigma_{\mathbb{R}})$.

Notación: Sea Y un espacio topológico. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \to Y$ es *Lebesgue-medible* si f es $\Sigma_{\mathbb{R}^n}$-medible.

Proposición 3.2.1 La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es una medida de Radón.

Demostración Se sigue a partir de que $\mathcal{L}^n$ es la medida inducida por la medida exterior $(\mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1)^*$ en $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, la cual, a su vez es inducida por la medida $\mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1$ en el semianillo $\mathcal{C}(\Sigma_{\mathbb{R}^{n-1}}, \Sigma_{\mathbb{R}})$, donde cada $R \in \mathcal{C}(\Sigma_{\mathbb{R}^{n-1}}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ tiene medida finita. ■

Lema 3.2.1 Si f es Lebesgue-medible en $\mathbb{R}^n$, entonces $g(x, y) = f(x - y)$ es Lebesgue-medible en $\mathbb{R}^{2n}$.

Notación: La integral de una función $f \in \mathcal{L}^1(m)$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, seguido se escribirá “$\int f(x)dx$” en lugar de “$\int f dm$”.

Lema 3.2.2 Sea $y \in \mathbb{R}^n$. Tomemos $f_y(x) = f(x+y), x \in \mathbb{R}^n$. Si f es integrable, entonces f_y es integrable y

$$\int f_y dx = \int f dx.$$

Lema 3.2.3 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal inyectiva. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$, entonces

$$\int f = |\det T| \int f \circ T.$$

3.3. Integrales dependientes de un parámetro

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y consideremos $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$. En esta sección supondremos que, para cada valor del parámetro t, $a \leq t \leq b$, la función $x \to f(t, x)$ es integrable. Esto permite definir

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x)dx.$$

En seguida analizaremos la continuidad y derivabilidad de esta función F.

Proposición 3.3.1 Sea $t_0 \in [a, b]$. Supongamos:

i) $\lim_{t \to t_0} f(t, x) = f(t_0, x), x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ tal que $|f(t, x)| \leq g(x), t \in [a, b], x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, F es continua en t_0. Es decir,

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t_0, x)dx.$$

Demostración Consideremos una sucesión $\{t_n\} \subset [a,b]$ tal que $t_n \to t_0$ y hagamos $f_n(x) = f(t_n,x), f(x) = f(t_0,x), x \in \mathbb{R}^n$. Por i), $f_n \to f$. En seguida, ii) permite aplicar el teorema de convergencia dominada para concluir que $\int_{\mathbb{R}^n} f_n \to \int_{\mathbb{R}^n} f$. Esto prueba lo afirmado. ■

Proposición 3.3.2 (derivación bajo la integral) Supongamos:

i) $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe en cada $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Además, para cada $t \in [a,b]$ la función $x \to \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ es integrable.

ii) Existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n,\mu)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x), t \in [a,b], x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, $F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x), t \in [a,b]$.

Demostración Fijemos $t \in [a,b]$ y consideremos una sucesión $\{h_k\} \subset \mathbb{R}$ tal que $h_k \neq 0$ y $h_k \to 0$. Observemos que

$$\frac{F(t+h_k - F(t))}{h_k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t+h_k,x) - f(t,x)}{h_k} dx$$

y

$$\frac{f(t+h_k,x) - f(t,x)}{h_k} \to \frac{\partial f}{\partial t}(t,x). \tag{3.1}$$

Ahora, haciendo uso del teorema del valor medio, encontramos t_{k_0} entre $t_0 + h_k$ y t_0 de manera que

$$\left|\frac{f(t+h_k,x) - f(t,x)}{h_k}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t_{k_0},x)\right| \leq g(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

A partir de (3.1) y (3.2) podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para obtener

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{k\to\infty} \frac{F(t+h_k) - F(t)}{h_k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} \frac{f(t+h_k,x) - f(t,x)}{h_k} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x). \end{aligned}$$ ■

3.4. Convolución

En esta sección se introducirá el concepto de convolución y algunas ilaciones que serán de utilidad en el siguiente capitulo.

Recordemos que para un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $C^k(U)$ es el espacio de funciones $f : U \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales continuas de orden menor o igual a k. Además $C_c^k(U)$ es la colección de todas las funciones en $C^k(U)$ que tienen soporte topológico compacto contenido en U.

Definición 3.4.1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es de *clase* C^∞ (o *suave*) si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Denotaremos por $C_c^\infty(U)$ la colección de todas las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ que son de clase C^∞ y tienen soporte topológico compacto contenido en U.

Ejemplo 3.4.1 La existencia de funciones no-triviales en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es obvia; la construcción estándar de éstas funciones se basa en el hecho que la función $\eta(t) = e^{-1/t}\chi_{(0,\infty)}(t)$ es C^∞ incluso en el origen. Tomemos

$$\phi(x) = \eta(1 - \|x\|^2) = \begin{cases} \exp\left[(\|x\|^2 - 1)^{-1}\right] & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

luego $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y supp(ϕ) es la bola cerrada unitaria, i.e. $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, notemos que $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$. Definimos ahora $\psi = \frac{1}{a}\phi$ donde $a = \int \phi dm > 0$. De lo anterior se sigue que $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\int \psi dm = 1$.

Observemos que si f es una función Lebesgue-medible en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \to f(x - y)$ es una función Lebesgue-medible en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, dada otra función Lebesgue-medible g en $\mathbb{R}^n$, la función $y \to f(x - y)g(y)$ es medible. Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.4.2 Sean f y g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la función $y \to f(x - y)g(y)$ es integrable, definimos la *convolución* de f y g en x como

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

A continuación se establecerán algunas propiedades de la convolución, la mayoría de ellas se pueden establecer en situaciones más generales, pero con el fin de hacer más breve y autocontenido el desarrollo del trabajo, se optó por limitarnos a los espacios que hemos estado trabajando.

Proposición 3.4.1 Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$ y $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, entonces:

i) Si $f * g$ esta definida en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $g * f$ también está definida en x y $f * g(x) = g * f(x)$.

ii) Sea A la cerradura del conjunto $\{x + y : x \in \text{supp}(f), y \in \text{supp}(g)\}$. Entonces supp$(f * g) \subseteq A$. Así, supp$(f * g)$ es compacto si supp(f) lo es.

Demostración Tomemos la función $F(y) := f(x - y)g(y), \forall y \in \mathbb{R}^n$, y observemos que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$. Como $F_x(y) = F(y + x) = f(-y)g(x + y)$, por el lema 3.2.2, se tiene que

$$f * g(x) = \int F(y)dy = \int F_x(y)dy = \int f(-y)g(x + y)dy.$$

Ahora consideremos la transformación lineal biyectiva $T(y) := -y, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces, por el lema 3.2.3,

$$f * g(x) = \int f(-u)g(x+u)du = \int f(u)g(x-u)du = g * f(x).$$

De lo cual se sigue i).

Finalmente, para $ii)$, observemos que si $x \notin A$, entonces para cualquier $y \in \text{supp}(g)$. De lo anterior, se tiene que $x - y \notin \text{supp}(f)$. Por lo tanto, $f(x-y)g(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$. Es decir, $f * g(x) = 0$. ■

Lema 3.4.1 Si $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n, m)$ y $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que existe $C \geq 0$ tal que $|g| \leq C$. Haciendo el cambio de variable u por $x - y$, obtenemos que

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x-u)du.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)g(x-u)|du \leq C \int_{x-\text{supp}(g)} |f(u)|du < \infty$, se sigue que $f * g(x)$ está definida. ■

Notación: Si $\alpha \in \mathbb{R}^n$ es un vector de enteros no-negativos, entonces

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \text{ y } \partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial_x}\right)^{\alpha_n}.$$

Lema 3.4.2 Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, m)$, $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ para $|\alpha| \leq k$.

Demostración Se sigue directamente de observar que $\partial^\alpha g$ es acotado para $|\alpha| \leq k$ y usar la proposición 3.3.2. ■

Notación: Para cada $t > 0$ definimos

$$\psi_t(x) := t^{-n}\psi(t^{-1}x),$$

donde $\text{supp}(\psi_t) = tB(0,1)$. Del lema 3.2.3, se sigue que

$$\int \psi_t dm = \int \psi(t^{-1}x)t^{-n}dx = \int \psi(y)dy = 1.$$

Lema 3.4.3 (Lema de Urysohn para $C^\infty(U)$) Sean $K \subseteq U$ un conjunto compacto y $W \subseteq U$ un conjunto abierto tales que $K \subset W$. Entonces, existe $f \in C^\infty_c(U)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ en K y $\text{supp}(f) \subseteq W$.

Demostración Basta hacer el caso cuando $U = \mathbb{R}^n$. Sea $\delta = \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus W) > 0$ y $V = \{x : \text{dist}(x, K) < \delta/3\}$. Consideremos la función $g = \left(\int \psi_{\frac{3}{\delta}}\right) \psi_{\frac{3}{\delta}}$. Observemos que $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es tal que $\text{supp}(g) = \frac{\delta}{3}B(0,1)$ y $\int g = 1$. Ahora tomemos $f = \chi_V * g$. Entonces, por la proposición 3.4.1 y por el lema 3.4.2, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, observemos que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ en K, pues para $x \in \mathbb{R}^n$ es claro que $f(x) \geq 0$, y se cumple que

$$f(x) = g * \chi_V(x) = \int g(x-y)\chi_V(y)dy = \int_V g(x-y)dy \leq \int g(y)dy = 1.$$

Si $x \in K$ y $y \in \text{supp}(\psi)$, entonces $x - y = B(x, \frac{\delta}{3})$. Por lo tanto $x - y \in V$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} f(x) = \chi_V * g(x) &= \int \chi_V(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\text{supp}(\psi)} \chi_V(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(\psi)} \chi_V(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\text{supp}(\psi)} \chi_V(x-y)g(y)dy = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la proposición 3.4.1, se sigue que

$$\text{supp}(f) \subset \{x : \text{dist}(x, K) \leq 2\delta/3\} \subset W.$$

Lo cual concluye la prueba. ■

Capítulo 4

Teoremas de representación

Entre los resultados mas relevantes en la teoría de espacios de Banach se encuentran justamente los llamados teoremas de representación de Riesz, que aunque tienen el mismo nombre, se aplican en diferentes espacios. El objetivo de este capítulo es demostrar el teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert, el cual, nos dice que todo elemento del espacio dual de un espacio de Hilbert, se puede representar por un único elemento del mismo espacio. También, se demostrará el teorema de representación de Riesz en $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ para el caso cuando μ es una medida σ-finita.

4.1. Espacios $L^1(\Omega, \mu)$ y $L^\infty(\Omega, \mu)$

En esta sección, salvo que se diga otra cosa (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida fijo.

Definición 4.1.1 Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible. Definimos

$$\|f\|_1 := \int_\Omega |f|.$$

Lema 4.1.1 $\|\cdot\|_1$ es una seminorma en $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Además, $\|f\|_1 = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ c.t.p.

Definición 4.1.2 $L^1(\Omega, \mu)$ es el espacio normado inducido por la seminorma $\|\cdot\|_1$.

Definición 4.1.3 El conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas μ-c.t.p. (esencialmente acotadas) será denotado por $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$.

Lema 4.1.2 Se satisface que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} := \text{ínf}\,\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq a\}) = 0\}\,, \forall f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$$

es una seminorma en $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$.

Definición 4.1.4 $L^\infty(\Omega, \mu)$ es el espacio normado inducido por la seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$.

A partir de las definiciones anteriores se puede demostrar que los espacios $L^1(\Omega, \mu)$ y $L^\infty(\Omega, \mu)$ son completos y por ende espacios de Banach.

Lema 4.1.3 Si μ es una medida finita, entonces $L^\infty(\Omega,\mu) \subseteq L^1(\Omega,\mu)$.
Además, $L^\infty(\Omega,\mu) \subseteq L^1_{loc}(\Omega,\mu)$ cuando μ es de Radón.

Demostración Sea $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$. Entonces $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ p.c.t $x \in \Omega$. Por lo tanto,

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq \int_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mu)} d\mu = \mu(\Omega)\|f\|_{L^\infty(\mu)} < \infty.$$

Luego, $L^\infty(\Omega,\mu) \subseteq L^1(\Omega,\mu)$. ■

Lema 4.1.4 Sean $\mu(\Omega) < \infty$ y $h \in L^1(\Omega,\mu)$. Si existe $b \geq 0$ tal que $\left|\int_E h\right| \leq b\mu(E)$, para cada conjunto medible $E \subset \Omega$, entonces $\|h\|_{L^\infty(\mu)} \leq b$.

Demostración Introduzcamos el conjunto $E = \{z \in \mathbb{R} : |z| > b\}$. Ya que $E \subset \mathbb{R}$ es abierto, expresemos $E = \bigcup_{k=1}^\infty V(p_k, r_k)$, donde $p_k \in E$ y $r_k > 0$. Entonces

$$\{x \in A : |h(x)| > b\} = h^{-1}(E) = \bigcup_{k=1}^\infty h^{-1}(V(p_k, r_k)).$$

Por lo tanto, para obtener la conclusión basta establecer que cada conjunto $h^{-1}(V(p_k, r_k))$ tiene medida cero.

Supongamos que $E_k = h^{-1}(V(p_k, r_k))$ tiene medida positiva, para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\left|\frac{1}{\mu(E_k)} \int_{E_k} h - p_k\right| = \left|\frac{\int_{E_k}(h - p_k)}{\mu(E_k)}\right| < r_k.$$

Lo cual implica que $\frac{1}{\mu(E_k)} \int_{E_k} h \in V(p_k, r_k) \subset E$, lo cual contradice la hipótesis. Luego, $|h(x)| \leq b$ p.c.t. $x \in \Omega$. ■

Lema 4.1.5 Sea μ una medida de Radón en U. Entonces, se cumple que

$$C_c(U) \subset \mathcal{L}^1(U,\mu).$$

Demostración Sea $f \in C_c(U)$. Puesto que $f : U \to \mathbb{R}$ es continua y μ es de Borel, entonces f es medible. Siendo supp(f) un conjunto compacto y f continua en supp(f), existe $C > 0$ de manera que $|f(x)| \leq C, \forall x \in$ supp(f). Luego, se cumple que

$$\int_U |f| \leq \int_{\text{supp}(f)} |f| + \int_{U \setminus \text{supp}(f)} |f| \leq C\mu(\text{supp}(f)) < \infty.$$

■

Lema 4.1.6 Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ y f es continua en U, entonces $f * \psi_t \to f$ uniformemente en cada compacto $K \subseteq U$.

Demostración Sea $\epsilon > 0$ dado. Notemos que podemos tomar un conjunto compacto $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\int_{E^c}|\psi| < \epsilon$, y existe $r_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $E \subseteq V(0,r_0)$. Sea $K \subset U$ un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Por el lema 1.5.2 existe un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$K \subset W \subset \overline{W} \subset U$$

donde $\overline{W}$ es compacto. En seguida tomamos $d = \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus W)$ y notamos que $0 < d < \infty$. Entonces existe $0 < r_1 < 1$ tal que $r_1 r_0 < d$, y por lo tanto

$$x - r_1 z \subset V(x, r_1 r_0) \subset V(x,d) \subset U, \forall x \in k, z \in E.$$

Por otro lado, procediendo de la misma manera que en el lema 2.3.3, resulta que existe $0 < t < r_1$ tal que

$$\sup_{x\in K, z\in E} |f(x-tz) - f(x)| < \epsilon.$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}|f * \psi_t(x) - f(x)| &\leq \sup_{x\in K}\left[\int_E + \int_{E^c}\right]|f(x-tz) - f(x)||\psi(z)|dz \\ &\leq \epsilon \int |\psi| + 2\|f\|_\infty \epsilon.\end{aligned}$$

De lo cual, se obtiene el resultado. ∎

Lema 4.1.7 El conjunto $C_c^\infty(U)$ es denso en $C_c(U)$. Además, Si $f \in C_c(U)$, entonces $f * \psi_t \to f$ en $L^\infty(U,\mu)$, para cualquier medida μ en U.

Demostración Si $f \in C_c(U)$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que $f * \psi_t \in C_c^\infty(U)$ para cada $t_0 > t > 0$, y por el lema 4.1.6, $f * \psi_t \to f$ uniformemente en cada compacto $K \subseteq U$. Por lo tanto $C_c^\infty(U)$ es denso en $C_c(U)$. Además, para cualquier medida μ en U se cumple que $\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|g\|_\infty$, $\forall g \in C_c(U)$, entonces $f * \psi_t \to f$ en $L^\infty(U,\mu)$. ∎

4.2. Densidad de $C_c(U)$ en $L^1(U,\mu)$

En esta sección μ es una medida de Radón en U fija.

Definición 4.2.1 Sea V un espacio vectorial. El *subespacio vectorial generado* por $A \subseteq V$ se define como

$$< A > := \bigcap_{W\in\mathcal{C}} W,$$

donde $\mathcal{C}$ consiste de todos los subespacios vectoriales $W \subseteq V$ tales que $A \subseteq W$.

Lema 4.2.1 Sea X un espacio normado, $V \subseteq X$ un subespacio vectorial. Si $A \subseteq V$, entonces $< A > \subseteq V$.

Teorema 4.2.1 i) Sea $C_f := \{\chi_B : B \subset U, B \text{ medible}, \mu(B) < \infty\}$. Entonces, $< C_f >$ es denso en $\mathcal{L}^1(U, \mu)$.

ii) Sea $C_K := \{\chi_B : B \subset U, B \text{ compacto en } \mathbb{R}^n\}$. Entonces, $< C_K >$ es denso en $\mathcal{L}^1(U, \mu)$.

Demostración i) Consideremos $g \in \mathcal{L}^1(U, \mu)$. Supongamos primero que $g \geq 0$. Como g es medible, existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples, tal que $0 \leq s_n \leq s_{n+1}$ y $s_n \to g$. Puesto que $0 \leq s_n \leq g$, notemos que $s_n \in \mathcal{L}^1(U, \mu), \forall n \in \mathbb{N}$. Se sigue de esto que $s_n \in < C_f >, \forall n \in \mathbb{N}$. Así mismo,

$$|g - s_n| \to 0 \text{ y } |g - s_n| \leq (g + s_n) \leq 2g.$$

Por el teorema de convergencia dominada, se concluye que $s_n \to g$ en $\mathcal{L}^1(U, \mu)$.

Sea P el subconjunto de $\mathcal{L}^1(U, \mu)$ formado por las funciones no-negativas. En el desarrollo anterior se probó que $P \subseteq \overline{< C_f >}$. Aplicando el lema anterior se concluye que $< P > \subseteq \overline{< C_f >}$. Basta notar ahora que $< P >= \mathcal{L}^1(U, \mu)$.

ii) Consideremos $s = \chi_A$, donde $A \subseteq U$ y $\mu(A) < \infty$. Sea $\epsilon > 0$. Ya que

$$\mu(A) = \sup \{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ compacto}\}$$

elijamos $K \subset A$ compacto de manera que $\mu(A \setminus K) \leq \epsilon$. Resulta entonces

$$\|\chi_A - \chi_K\|_1 \leq \mu(A \setminus K) \leq \epsilon.$$

Esto indica que $C_f \subseteq \overline{< C_K >}$. Lo cual por el lema anterior, implica que $< C_f > \subseteq \overline{< C_K >}$. Haciendo uso de i), resulta entonces

$$\mathcal{L}^1(U, \mu) = \overline{< C_f >} \subseteq \overline{< C_K >}.$$

$\blacksquare$

Teorema 4.2.2 $C_c(U)$ es denso en $\mathcal{L}^1(U, \mu)$.

Demostración Sea C_K como en el teorema anterior y $S_K =< C_K >$ el espacio que genera. Consideremos primero $f = \chi_K$, donde $K \subseteq U$ es un compacto en $\mathbb{R}^n$. Ya que

$$\mu(K) = \text{ínf} \{\mu(W) : K \subset W, W \text{ abierto}\},$$

elijamos un abierto W tal que $K \subset W \subset U$ y $\mu(W \setminus K) < \epsilon$. Aplicando el lema 1.5.2, construyamos un abierto V de manera que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset W \text{ y } \overline{V} \text{ es compacto.}$$

Usando el lema 2.3.2, tomemos una función continua $h : U \to [0, 1]$ tal que $h = 1$ en K y $h = 0$ en $U \setminus V$. Entonces, $\text{supp}(h) \subset \overline{V} \subset W$ y, consecuentemente $h \in C_c(U)$. Además,

$$\int_U |\chi_K - h| d\mu \leq \left(\int_K + \int_{\overline{V} \setminus K} + \int_{U \setminus \overline{V}} \right) |\chi_K - h| \leq 0 + \mu(W \setminus K) + 0 \leq \epsilon.$$

Ya que $C_c(U)$ es un espacio vectorial, a partir del lema 4.2.1 se sigue que

$$S_K \subseteq \overline{C_c(U)}.$$

Aplicando ii) del teorema 4.2.1. Se obtiene la conclusión. ■

Lema 4.2.2 Sea $W \subseteq U$ un abierto. Si $\mu(W) < \infty$ y $f \in L^\infty(W, \mu)$, entonces existe $\{f_k\} \subseteq C_c(W)$ tal que $f_k \to f$ c.t.p. y $\|f_k\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$.

Demostración Como $\mu(W) < \infty$ y $f \in L^\infty(W, \mu)$, por el lema 4.1.3, se cumple que $f \in L^1(W, \mu)$. Esto permite aplicar el teorema anterior para obtener una sucesión $\{f_n\} \subset C_c(W)$ tal que $f_n \to f$ en L^1. De esta sucesión, aplicando el teorema 3.1.5, es posible extraer una subsucesión que converge puntualmente a f c.t.p. Seguiremos denotando esta sucesión por $\{f_n\}$. Sólo resta modificar f_n para que cumpla con lo requerido. Sea $r = \|f\|_{L^\infty(\mu)}$. Si $r = 0$, la conclusión es clara. Supondremos ahora que $r > 0$. Consideremos $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq r\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq r\}$ y definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \frac{r}{|x|}x, & x \in B \end{cases}.$$

Si $x \in A \cap B$, entonces $\frac{r}{|x|}x = x$. Lo cual indica que g esta bien definida. Como A y B son cerrados en $\mathbb{R}$ y g es continua tanto en A como en B, se sigue que g es continua en $A \cup B = \mathbb{R}$. Tomemos ahora

$$g_n = g \circ f_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $\{g_n\} \subset C_c(W)$ y $\|g_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Supongamos que $f_n(x) \to f(x)$ y $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$, lo cual se cumple c.t.p. Siendo g continua, se sigue que

$$g(f_n(x)) \to g(f(x)) = f(x).$$

Lo cual prueba lo indicado. ■

Observemos que si $f \in C_c(W)$, entonces podemos extender continuamente f a todo U haciendo $f(x) = 0, \forall x \in U \setminus \text{supp}(f)$.

4.3. Teorema de representación de Riesz en un espacio de Hilbert

Empecemos recordando lo que entendemos por espacio dual algebraico y espacio dual topológico.

Definición 4.3.1 Si V es un espacio vectorial, entonces definimos el *espacio dual algebraico* $V^\#$ como el conjunto de todos los funcionales lineales definidos en V, es decir,

$$V^\# := \left\{\varphi : V \to \mathbb{R} \;\middle|\; \varphi \text{ es un funcional lineal}\right\}.$$

Definición 4.3.2 Si V es un espacio normado, entonces definimos el *espacio dual topológico* V^* como el conjunto de todos los funcionales lineales continuos definidos en V, es decir,

$$V^* := \left\{\varphi \in V^\# : \varphi \text{ es continuo}\right\}.$$

Lema 4.3.1 El espacio V^* es un espacio normado, con norma

$$\|\varphi\| := \sup\left\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\right\}$$

Antes de proceder a demostrar el teorema de representación de Riesz en espacios de Hilbert, recordemos lo que significa ser un espacio de Hilbert.

Notación: Un producto escalar en un espacio vectorial X se denotará por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Además, si $f : \Omega \to X, g : \Omega \to X$, entonces $\langle f, g\rangle(x) := \langle f(x), g(x)\rangle, x \in \Omega$.

Definición 4.3.3 Si H es un espacio de Banach y

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en H, entonces decimos que H es un *espacio de Hilbert*.

Teorema 4.3.1 (de representación de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, para cada $\varphi \in H^*$ existe un único $x \in H$ tal que

$$\varphi(y) = \langle y, x\rangle, \forall y \in H. \tag{4.1}$$

Además, $\|\varphi\| = \|x\|$.

Demostración Si $\varphi = 0$, tomando $x = 0$ se cumple (4.1). En adelante supondremos que que $\varphi \neq 0$.

Para proponer x, consideremos la condición (4.1). Si $y \in N := \ker\varphi$, entonces (4.1) indica que $\langle y, x\rangle = 0, \forall y \in H$. Luego, de existir el elemento x, que buscamos, se encuentra en $N^\perp$. Demostraremos primero que $\dim N^\perp = 1$. Elijamos $w \in H$ tal que $\varphi(w) \neq 0$. Por el teorema de descomposición ortogonal, expresemos $w = x_0 + m$, donde $x_0 \in N^\perp$ y $m \in N$. Notemos que $\varphi(x_0) \neq 0$. Sea $y \in N^\perp$. Como $\varphi(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}x_0) = 0$, entonces $y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}x_0 \in N$. Puesto que $y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}x_0$ también pertenece a $N^\perp$, concluimos que $y = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}x_0$.

De acuerdo a lo anterior, el elemento $x \in H$, que se busca, debe ser de la forma $x = kx_0$ para algún valor $k \in R \setminus \{0\}$. Para encontrar k notemos que debe de cumplirse

$$\varphi(x) = \langle x, x\rangle \Leftrightarrow k\varphi(x_0) = k^2\langle x_0, x_0\rangle.$$

Lo cual se logra tomando $k = \frac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0\rangle}$. Esto nos lleva a proponer

$$x = \frac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0\rangle}x_0.$$

Resta mostrar que efectivamente se cumple (4.1). Dado $y \in H$, expresémoslo en la forma $y = cx_0 + m$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $m \in N$. Entonces

$$\varphi(y) = c\varphi(x_0) = c\varphi(x_0)\langle x_0, \frac{x_0}{\langle x_0, x_0\rangle}\rangle$$
$$\langle cx_0 + m, \frac{\varphi(x_0)}{\langle x_0, x_0\rangle}x_0\rangle = \langle y, x\rangle.$$

■

4.4. Espacio $L^2(\Omega,\mu)$

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida. Recordemos que el conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale que $\int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty$, es un espacio vectorial, el cual denotamos por $\mathcal{L}^2(\Omega,\mu)$, y tiene asociado la función

$$\|f\|_2 := \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2}.$$

Lema 4.4.1 $\|\cdot\|_2$ es una seminorma en $\mathcal{L}^2(\Omega,\mu)$. Además, $\|f\|_2 = 0$ si, y sólo si, $f = 0$.

Definición 4.4.1 $L^2(\Omega,\mu)$ es el espacio normado inducido por la seminorma $\|\cdot\|_2$.

Lema 4.4.2 El espacio $L^2(\Omega,\mu)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 4.4.1 Definimos $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(\mu)\times L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ por

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega fg d\mu.$$

Observemos que por la desigualdad de Hölder $\langle\cdot,\cdot\rangle$ está bien definida. Además, es un producto escalar y

$$\langle f, f\rangle = \int_\Omega |f|^2 d\mu, \forall f \in L^2(\Omega,\mu),$$

por lo tanto $L^2(\Omega,\mu)$ es un espacio de Hilbert.

Observemos, por el teorema anterior, que para $\varphi \in L^2(\Omega,\mu)^*$ existe una única $g \in L^2(\Omega,\mu)$ tal que

$$\varphi(f) = \langle f, g\rangle = \int_\Omega fg d\mu.$$

Lema 4.4.3 Sea μ una medida finita. Entonces, $L^2(\Omega,\mu) \subseteq L^1(\Omega,\mu)$.

Demostración Si $f \in L^2(\Omega,\mu)$, por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\int_\Omega |f| d\mu \le \left(\int_\Omega |f|^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int 1 d\mu\right)^{1/2} = (\mu(\Omega))^{1/2}\|f\|_2 < \infty.$$

Luego, $f \in L^1(\Omega,\mu)$. ■

4.5. Teorema de representación de Riesz en $L^1(\Omega, \mu)$

A lo largo de esta sección (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida fijo donde μ es una medida σ-finita.

Antes de iniciar formalmente la prueba del teorema de representación de Riesz en L^1, observemos lo siguiente.

Dado $g \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definamos $Rg : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$Rg(f) = \int_\Omega fg, \forall f \in L^1(\Omega, \mu). \tag{4.2}$$

La desigualdad de Hölder implica que $Rg(f)$ esta bien definida y

$$|Rg(f)| \leq \|f\|_1 \|g\|_{L^\infty(\mu)}, \forall f \in L^1(\Omega, \mu), g \in L^\infty(\Omega, \mu). \tag{4.3}$$

De (4.2) se sigue que Rg es lineal y (4.3) indica que

$$\|Rg\| \leq \|g\|_{L^\infty(\mu)}, \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu). \tag{4.4}$$

Lo anterior señala que $Rg \in L^1(\Omega, \mu)^*, \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu)$, y de ésta manera se obtiene una función $R : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^1(\Omega, \mu)^*$. A partir de (4.2) resulta que R es lineal y, por (4.5), R es continuo.

Teorema 4.5.1 (de representación de Riesz) La función $R : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^1(\Omega, \mu)^*$ es un isomorfismo isométrico.

Demostración Probaremos primero que $R : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^1(\Omega, \mu)^*$ es una isometría. De acuerdo con (4.4) sólo resta mostrar que

$$\|Rg\| \geq \|g\|_{L^\infty(\mu)}, \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu). \tag{4.5}$$

Sea pues $g \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Si $g = 0$, claramente se cumple (4.5). Supongamos ahora que $g \neq 0$ y tomemos $0 < r < \|g\|_{L^\infty(\mu)}$. Luego, existe $A \subset \Omega$ tal que $\mu(A) > 0$ y $|g| > r$ en A. Dado que μ es σ-finito, fijemos una sucesión $\{B_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \Sigma_\mu$ tal que $0 < \mu(B_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$. Elijamos enseguida $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $B = A \cap B_{k_0}$ tenga medida positiva, y definamos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|g(x)|}{g(x)}, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}.$$

Observemos que $f \in L^1(\Omega, \mu)$ y se cumple

$$Rg(f) = \int_\Omega fg = \int_B |g| \geq r\mu(B) = r\|f\|_1.$$

Lo cual implica que $\|Rg\| \geq r, \forall r \in (0, \|g\|_{L^\infty(\mu)})$. Haciendo ahora $r \to \|g\|_{L^\infty(\mu)}$, se obtiene (4.5).

Para probar que R es suprayectiva, consideremos $\varphi \in L^1(\Omega,\mu)^*$. Tomemos $A_1 = B_1$ y $A_k = B_k \setminus B_{k-1}, k \geq 2$. De esta forma, los conjuntos A_k son medibles, disjuntos a pares y se cumple que $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Ya que A_k tiene medida finita, por el lema 4.4.3, $L^2(\Omega,\mu_{A_k}) \subseteq L^1(\Omega,\mu_{A_k})$ y la inclusión es continua. Esto implica que $\varphi : L^2(\Omega,\mu_{A_k}) \to \mathbb{R}$ es continuo. Luego, por el teorema de representación de Riesz en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega,\mu_{A_k})$, existe un único $g_k \in L^2(\Omega,\mu_{A_k})$ de manera que

$$\varphi(f) = \int_{A_k} f g_k d\mu_{A_k}, \forall f \in L^2(\Omega,\mu_{A_k}). \tag{4.6}$$

Definamos $g : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = g_k(x), \text{ si } x \in A_k, \text{ donde } k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

De acuerdo al lema 2.1.1, g es medible. Sea $E \subset A_k$. Entonces $\chi_E \in L^2(\Omega,\mu_{A_k})$. Por lo tanto, de (4.6) y el lema 3.1.2, se sigue que

$$\left|\int_E g d\mu\right| = \left|\int_E g_k d\mu_{A_k}\right| = \left|\int_{A_k} \chi_E g_k d\mu_{A_k}\right| = |\varphi(\chi_E)| \leq \|\varphi\|\|\chi_E\|_1 = \|\varphi\|\mu(E).$$

Por el lema 4.1.4, se obtiene que $|g_k| \leq \|\varphi\|$ μ-c.t.p. en A_k. De aquí, teniendo presente (4.7), resulta que

$$\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\varphi\|.$$

En consecuencia, $g \in L^\infty(\Omega,\mu)$.

Para establecer que $\varphi = Rg$, consideremos primero $k \in \mathbb{N}$ y tomemos $f \in L^1(\Omega,\mu_{A_k})$. Empleando i) del teorema 4.2.1, es posible encontrar una sucesión $\{f_n\} \subset L^1(\Omega,\mu_{A_k}) \cap L^2(\Omega,\mu_{A_k})$ tal que $f_m \to f$ en L^1. Por el lema 3.1.2, y la continuidad de φ y Rg, se sigue que

$$\begin{aligned}\varphi(\chi_{A_k} f) &= \lim_{m\to\infty} \varphi(\chi_{A_k} f_m) = \lim_{m\to\infty} \int_{A_k} f_m g_k d\mu_{A_k} = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \chi_{A_k} f_m g d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty} Rg(\chi_{A_k} f_m) = Rg(\chi_{A_k} f), \forall f \in L^1(\Omega,\mu_{A_k}), k \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Consideremos ahora $f \in L^1(\Omega,\mu)$. Se cumple entonces

$$f = \sum_{k=1}^\infty \chi_{A_k} f, \quad \sum_{k=1}^\infty |\chi_{A_k} f| \leq |f|.$$

Lo cual permite aplicar el teorema de convergencia dominada para concluir que

$$\sum_{k=1}^K \chi_{A_k} f \to f \text{ en } L^1.$$

Por la continuidad de φ, de Rg y por (4.8), concluimos que

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\chi_{A_k} f) = \sum_{k=1}^{\infty} Rg(\chi_{A_k} f) \\ &= Rg\left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} f\right) = Rg(f), \forall f \in L^1(\Omega, \mu).\end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Teorema de representación de Riesz en $C_c(U, \mathbb{R}^m)$

Sean ν una medida de Radón (en U) y $f \in L^1_{loc}(U, \nu)$. Dada $g \in C_c(U)$ definamos

$$\varphi(g) := \int fg d\nu.$$

Como $|g|$ es sumable y $|g| \leq C\chi_{\text{supp}(f)}$, para alguna $C \in \mathbb{N}$, entonces φ está bien definida y es continua. Además, se satisface que

$$\sup\left\{\varphi(g) \;\middle|\; g \in C_c(U), ||g||_\infty \leq 1, \text{supp}(g) \subseteq K\right\} \leq \int_K |f| < \infty,$$

para cada compacto $K \subseteq U$.

Por otro lado, si partimos de un funcional lineal $\varphi : C_c(U) \to \mathbb{R}$ que satisfaga la propiedad anterior, ¿será posible que exista una medida de Radón μ_φ y una función μ_φ-medible σ tal que $\varphi(f) = \int f\sigma d\mu_\varphi$?. El teorema de representación de Riesz en $C_c(U, \mathbb{R}^m)$ busca dar respuesta a la pregunta anterior.

5.1. Medida exterior asociada a un funcional lineal

Recordemos que $C_c(U, \mathbb{R}^m)$ denota el conjunto de funciones continuas $f : U \to \mathbb{R}^m$ con soporte topológico compacto (en U).

Definición 5.1.1 Sea $\varphi : C_c(U, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal fijo. Para cada conjunto abierto $V \subseteq U$, definimos

$$\mu^*_\varphi(V) := \sup\left\{\varphi(f) \;\middle|\; f \in C_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f) \subseteq V\right\}.$$

Notando que $\mu^*_\varphi(V) = \text{ínf}\left\{\mu^*_\varphi(W) \;\middle|\; V \subset W, W \text{ abierto}\right\}$, se motiva la siguiente definición,

$$\mu^*_\varphi(A) := \text{ínf}\left\{\mu^*_\varphi(V) \;\middle|\; A \subseteq V, V \text{ abierto}\right\}, \forall A \subseteq U.$$

Lema 5.1.1 La función $\mu^*_\varphi : 2^U \to \mathbb{R}$ es una medida exterior.

Demostración Sea V un conjunto abierto en U y $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos en U tales que $V \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$. Tomamos $g \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ tal que $\|g\|_\infty \leq 1$ y $\text{supp}(g) \subseteq V$. Dado que $\text{supp}(g)$ es compacto, entonces $\text{supp}(g) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_j$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Por la proposición 2.3.1, podemos tomar una sucesión finita de funciones continuas no negativas $\{h_j\}_{j=1}^{k}$ tales que $\text{supp}(h_j) \subseteq V_j$ para $1 \leq j \leq k$ y $\sum_{j=1}^{k} h_j = 1$ en $\text{supp}(g)$. Entonces

$$g = \sum_{j=1}^{k} g h_j \quad \text{y} \quad |\varphi(g)| \leq \sum_{j=1}^{k} |\varphi(g\zeta_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\varphi^*(V_j).$$

Por lo tanto

$$\mu_\varphi^*(V) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\varphi^*(V_j).$$

Sean $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos en U y $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. De la definición de μ_φ^*, para $\epsilon > 0$ dado, podemos tomar conjuntos abiertos $V_j \subseteq U$ tales que $A_j \subseteq V_j$ y

$$\mu_\varphi^*(V_j) \leq \mu_\varphi^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\mu_\varphi^*(A) \leq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\varphi^*(V_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\varphi^*(A_j) + \epsilon.$$

De aquí se obtiene lo afirmado. ∎

La función μ_φ^* es conocida como la *medida exterior de variación* de φ. Denotaremos por μ_φ a la medida inducida por μ_φ^*.

Definición 5.1.2 Decimos que $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^m)^\#$ es *acotado compactamente* si

$$\sup \left\{ \varphi(g) \;\middle|\; g \in C_c(U, \mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq 1, \text{supp}(g) \subseteq K \right\} < \infty,$$

para cada compacto $K \subseteq U$.

Lema 5.1.2 Si $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^m)^\#$, entonces μ_φ^* es Borel-regular. Si además, φ es acotado compactamente, entonces μ_φ^* es de Radón en U.

Demostración Observamos que si W_1 y W_2 son conjuntos abiertos en U tales que $\text{dist}(W_1, W_2) > 0$, ya que μ_φ^* es una medida exterior, entonces

$$\mu_\varphi^*(W_1 \cup W_2) \leq \mu_\varphi^*(W_1) + \mu_\varphi^*(W_2).$$

Además, por la definición de μ_φ^* se satisface que $\mu_\varphi^*(W_1 \cup W_2) \geq \mu_\varphi^*(W_1) + \mu_\varphi^*(W_2)$. Por lo tanto

$$\mu_\varphi^*(W_1 \cup W_2) = \mu_\varphi^*(W_1) + \mu_\varphi^*(W_2).$$

Si $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ son tales que $\text{dist}(A_1, A_2) > 0$, entonces existen abiertos $W_1, W_2 \subseteq U$ tales que $A_1 \subseteq W_1$, $A_2 \subseteq W_2$ y $\text{dist}(W_1, W_2) > 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto $W \subseteq U$ tal que $A_1 \cup A_2 \subseteq W$ y

$$\mu_\varphi^*(W) \leq \mu_\varphi^*(A_1 \cup A_2) + \epsilon.$$

Como $A_1 \subseteq W_1 \cap W$, $A_2 \subseteq W_2 \cap W$ y $\text{dist}(W_1 \cap W, W_2 \cap W) > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mu_\varphi^*(A_1) + \mu_\varphi^*(A_2) &\leq \mu_\varphi^*(W_1 \cap W) + \mu_\varphi^*(W_2 \cap W) \\ &= \mu_\varphi^*((W_1 \cup W_2) \cap W) \\ &\leq \mu_\varphi^*(W) \leq \mu_\varphi^*(A_1 \cup A_2) + \epsilon.\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ se obtiene que $\mu_\varphi^*(A_1 \cup A_2) = \mu_\varphi^*(A_1) + \mu_\varphi^*(A_2)$. Por el criterio de Caratheodory, se sigue que μ_φ^* es de Borel en U.

Si $A \subseteq U$, entonces existen conjuntos abiertos V_k tal que $A \subseteq V_k$ y

$$\mu_\varphi^*(V_k) \leq \mu_\varphi^*(A) + \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, $\mu_\varphi^*(A) = \mu_\varphi^*(\bigcap_{k=1}^\infty V_k)$. Por lo tanto μ_φ^* es Borel-regular en U. Por hipótesis $\mu_\varphi^*(K) < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset U$, entonces μ_φ^* es de Radón. ■

Ejemplo 5.1.1 Consideremos el funcional lineal

$$\varphi_{\mathcal{R}}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f dx, f \in C_c(\mathbb{R}^n),$$

determinado por la integral de Riemann. Notemos que $\varphi_{\mathcal{R}}$ es un funcional lineal. Tomemos un conjunto abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\|g\|_\infty \leq 1$ y $\text{supp}(g) \subseteq W$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g dx = \int_W g dx \leq \int_W 1 dx = m(W).$$

Por lo tanto, $\mu_{\varphi_{\mathcal{R}}}^*(W) \leq m(W)$.

Por otro lado, sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto tal que $m(W) < \infty$. Por el corolario 4.2.2, existe $\{f_k\} \subseteq C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \to \chi_W$ c.t.p., $\text{supp}(f_k) \subset W$ y $\|f_k\| \leq \|\chi_W\|_{L^\infty(\mu)} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, por el teorema de Egoroff, existe $B \in \Sigma_W$ tal que $m(W \setminus B) < \epsilon$ y $f_k \to \chi_W$ uniformemente en B. De lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}m(W) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_W dx &= \int_{W\setminus B} \text{lím} f_k dx + \int_{U\cap B} \text{lím} f_k dx \\ &\leq m(W \setminus B) + \text{lím} \int_B f_k dx \leq \epsilon + \mu_{\varphi_{\mathcal{R}}}^*(W).\end{aligned}$$

Haciendo, $\epsilon \to 0$, se obtiene que $m(W) \leq \mu_{\varphi_{\mathcal{R}}}^*(W)$ y por ende $m(W) = \mu_{\varphi_{\mathcal{R}}}^*(W)$.

Sea ahora W un conjunto abierto arbitrario. Dado que m es una medida σ-finita, entonces

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k, \text{ donde } W_k \text{ es un conjunto abierto y } m(W_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si tomamos $A_N = \bigcup_{k=1}^{N} W_k$, entonces $A_N \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto para cada $m \in \mathbb{N}$ y además, $A_N \subseteq A_{N+1}$. Por lo tanto

$$m(W) = \lim m(A_N) = \lim \mu^*_{\varphi_{\mathcal{R}}}(A_N) = \mu^*_{\varphi_{\mathcal{R}}}(W).$$

Luego, $m(W) = \mu^*_{\varphi_{\mathcal{R}}}(W), \forall W \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

Para $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ya que m es una medida de Radón y el teorema 1.5.1, se sigue que

$$\begin{aligned} \mu^*_{\varphi_{\mathcal{R}}}(A) :&= \inf\left\{\mu^*_{\varphi_{\mathcal{R}}}(W) \;\middle|\; A \subseteq W, W \text{ abierto}\right\} \\ &= \inf\left\{m(W) \;\middle|\; A \subseteq W, W \text{ abierto}\right\} \\ &= m^*(A). \end{aligned}$$

Observemos que el ejemplo anterior es una caracterización de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, como una medida exterior asociada al funcional que consiste en aplicar la integral de Riemann.

Ejemplo 5.1.2 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Definimos el funcional lineal $\varphi_x : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi_x(f) = f(x).$$

Entonces, para un conjunto abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu^*_{\varphi_x}(W) = \sup\left\{\varphi_x(g) \;\middle|\; g \in C_c(\mathbb{R}^n), \|g\|_\infty \leq 1, \text{supp}(g) \subseteq W\right\} = \delta_x(W).$$

Para $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mu^*_{\varphi_x}(A) :&= \inf\left\{\mu^*_{\varphi_x}(W) \;\middle|\; A \subseteq W, W \text{ abierto}\right\} \\ &= \delta_x(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto la medida de Dirac es caracterizada como la medida exterior de variación asociada al funcional de evaluación.

5.2. Representación auxiliar

Definición 5.2.1 Dado $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^m)^\#$ le asociaremos la siguiente función

$$\lambda_\varphi(f) := \sup\left\{\varphi(g) \;\middle|\; g \in C_c(U, \mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq f\right\}, f \in C_c^+(U).$$

Observemos que $0 \leq \lambda_\varphi \leq \infty$; si $f_1, f_2 \in C_c^+(U)$ y $f_1 \leq f_2$, entonces $\lambda_\varphi(f_1) \leq \lambda_\varphi(f_2)$. Y también $\lambda_\varphi(cf) = c\lambda_\varphi(f), \forall f \in C_c^+(U)$, $c \geq 0$. A continuación veremos que λ_φ es aditivo.

Lema 5.2.1 Para cada $f_1, f_2 \in C_c^+(U)$, se satisface que

$$\lambda_\varphi(f_1 + f_2) = \lambda_\varphi(f_1) + \lambda_\varphi(f_2).$$

Demostración Notemos que si $g_1, g_2 \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ y satisfacen que $\|g_1\|_\infty \leq f_1$ y $\|g_2\|_\infty \leq f_2$, entonces $\|g_1 + g_2\|_\infty \leq f_1 + f_2$. Dado que $f_1 \geq 0$ y $f_2 \geq 0$, entonces se puede suponer que $\varphi(g_1), \varphi(g_2) \geq 0$. Por lo tanto,

$$\varphi(g_1) + \varphi(g_2) = \varphi(g_1 + g_2) = |\varphi(g_1 + g_2)| \leq \lambda_\varphi(f_1 + f_2).$$

Tomando supremos para $g_1, g_2 \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ se obtiene que

$$\lambda_\varphi(f_1) + \lambda_\varphi(f_2) \leq \lambda_\varphi(f_1 + f_2).$$

Sea $g \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ fija, tal que $\|g\|_\infty \leq f_1 + f_2$. Entonces definimos

$$g_i = \begin{cases} \frac{f_i g}{f_1 + f_2} & \text{si } f_1 + f_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_1 + f_2 = 0 \end{cases}, i = 1, 2.$$

Notamos que $g_1, g_2 \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$, $g = g_1 + g_2$ y $\|g_i\|_\infty \leq f_i, i = 1, 2$. Entonces

$$|\varphi(g)| \leq |\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| \leq \lambda_\varphi(f_1) + \lambda_\varphi(f_2).$$

Luego,

$$\lambda_\varphi(f_1 + f_2) \leq \lambda_\varphi(f_1) + \lambda_\varphi(f_2).$$

■

El lema anterior establece que si $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^n)^\#$, entonces λ_φ es una función aditiva homogénea, la cual será llamada *función auxiliar* asociada a φ.

A continuación demostraremos que la función auxiliar λ_φ asociada a un funcional acotado compactamente φ, es representada por la medida de Radón μ_φ. Pero primero, demostraremos el siguiente lema que nos ayudará a obtener dicho resultado.

Lema 5.2.2 Sea μ una medida de Radón en U y $f \in C_c^+(U)$. Para cada intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ de longitud positiva, existe $t \in I$ tal que $\mu(f^{-1}(t)) = 0$.

Demostración Sin perdida de generalidad supongamos que $I = [a, b]$ y $\mu(f^{-1}(t)) > 0, \forall t \in I$. Ahora definamos

$$A_{t_0} = \left\{ t \in I : \mu(f^{-1}(t)) > t_0 \right\}.$$

Entonces $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{\frac{1}{n_0}}$ es no-numerable. Tomemos una sucesión $\{t_k\} \subset A_{\frac{1}{n_0}}$ tal que $t_k \neq t_m, k \neq m$. Se sigue que

$$\mu(f^{-1}([a,b])) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(\{t_k\})) > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} = \infty.$$

Pero, $f^{-1}([a,b]) \subseteq \text{supp}(f)$ y $\mu(\text{supp}(f)) < \infty$. Por lo tanto, se satisface lo deseado. ■

Lema 5.2.3 Sea $\varphi \in C_c(U,\mathbb{R}^m)^{\#}$ acotado compactamente. Entonces

$$\lambda_\varphi(f) = \int_U f d\mu_\varphi, \forall f \in C_c^+(U).$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ dado. Tomamos una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ donde $t_N = 2\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}, 0 < t_i - t_{i-1} < \epsilon$, y $\mu_\varphi(f^{-1}(\{t_i\})) = 0, \forall i \in \{1,\ldots,N\}$. Si definimos $W_j = f^{-1}((t_{j-1},t_j))$, entonces W_j es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\mu_\varphi(W_j) < \infty, j = 1,\ldots,N$. Por el teorema de Lusin existen conjuntos compactos $K_j \subset W_j$ tales que

$$\mu_\varphi(W_j \setminus K_j) < \frac{\epsilon}{N}, j = 1,\ldots,N.$$

Además, por la definición de μ_φ, existe una colección de funciones $\{g_j\}_{j=1}^N \subset C_c(U,\mathbb{R}^m)$, donde $|g_j| \leq 1, \text{supp}(g_j) \subseteq W_j$ y

$$\mu_\varphi(W_j) - \frac{\epsilon}{N} \leq |\varphi(g_j)|, j = 1,\ldots,N.$$

Dado que cada W_j es un conjunto abierto, entonces existe una colección de funciones $\{h_j\}_{j=1}^N \subseteq C_c^+(U)$, tal que $\text{supp}(h_j) \subseteq W_j, 0 \leq h_j \leq 1$ y $h_j = 1$ en el conjunto compacto $B_j = K_j \cup \text{supp}(g_j), \forall j \in \{1,\ldots,N\}$. Luego

$$\lambda_\varphi(h_j) \geq |\varphi(g_j)| \geq \mu_\varphi(W_j) - \frac{\epsilon}{N}$$

y

$$\begin{aligned}\lambda_\varphi(h_j) &= \sup\left\{|\varphi(g)| \;\middle|\; g \in C_c(U,\mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq h_j\right\}\\ &\leq \sup\left\{|\varphi(g)| \;\middle|\; g \in C_c(U,\mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq 1, \text{supp}(g) \subseteq W_j\right\}\\ &= \mu_\varphi(W_j).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_\varphi(W_j) - \frac{\epsilon}{N} \leq \lambda_\varphi(h_j) \leq \mu_\varphi(W_j)$. Ahora definamos el conjunto

$$A = \left\{x \mid f(x)\left(1 - \sum_{j=1}^N h_j(x)\right) > 0\right\}.$$

Notamos que A es un conjunto abierto y que

$$\mu_\varphi(A) = \mu_\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{N}(W_j \setminus B_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{N}\mu_\varphi(W_j \setminus K_j) \leq \epsilon.$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\lambda_\varphi\left(f - f\sum_{j=1}^{N}h_j\right) &= \sup\left\{|\varphi(g)| \;\middle|\; g \in C_c(U,\mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq f - f\sum_{j=1}^{N}h_j\right\}\\ &= \sup\left\{|\varphi(g)| \;\middle|\; g \in C_c(U,\mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}\chi_A\right\}\\ &= \|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}\mu_\varphi(A)\\ &\leq \epsilon\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\lambda_\varphi(f) &= \lambda_\varphi\left(f - f\sum_{j=1}^{N}h_j\right) + \lambda_\varphi\left(f\sum_{j=1}^{N}h_j\right)\\ &\leq \epsilon\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)} + \sum_{j=1}^{N}\lambda_\varphi(fh_j) \leq \epsilon\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)} + \sum_{j=1}^{N}t_j\mu_\varphi(W_j)\end{aligned}$$

y

$$\lambda_\varphi(f) \geq \sum_{j=1}^{N}\lambda_\varphi(fh_j) \geq \sum_{j=1}^{N}t_{j-1}\left(\mu_\varphi(W_j - \frac{\epsilon}{N})\right) \geq \sum_{j=1}^{N}t_{j-1}\mu_\varphi(W_j) - t_N\epsilon.$$

Dado que

$$\sum_{j=1}^{N}t_{j-1}\mu_\varphi(W_j) \leq \int_U f d\mu_\varphi \leq \sum_{j=1}^{N}t_j\mu_\varphi(W_j),$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}\left|\lambda_\varphi(f) - \int f d\mu_\varphi\right| &\leq \sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})\mu_\varphi(W_j) + \epsilon\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)} + \epsilon t_N\\ &\leq \epsilon\mu_\varphi\left(\operatorname{supp}(f)\right) + 3\epsilon\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}.\end{aligned}$$ ■

Ejemplo 5.2.1 Consideremos el funcional asociado a la integral de Riemann $\varphi_{\mathcal{R}}$. Entonces, por el lema anterior

$$\lambda_{\varphi_{\mathcal{R}}}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_{\varphi_{\mathcal{R}}} = \int_{\mathbb{R}^n} f dm, \forall f \in C_c^+(\mathbb{R}^n).$$

Ejemplo 5.2.2 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Consideremos $\varphi_x(f) = f(x)$. Entonces, por el lema anterior

$$\lambda_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu^*_{\varphi_x} = \int_{\mathbb{R}^n} f d\delta_x = f(x).$$

5.3. Funcionales lineales positivos

Observemos que,

$$\sup\left\{|\varphi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1, f \in C_c(U)\right\} = \sup\left\{\varphi(f) : \|f\|_\infty \leq 1, f \in C_c(U)\right\},$$

pues si $f \in C_c(U)$, $\|f\|_\infty \leq 1$ y $\varphi(f) \leq 0$, entonces $-f \in C_c(U)$, $\|-f\|_\infty \leq 1$ y $\varphi(-f) = -\varphi(f) \geq 0$. Luego, $|\varphi(f)| = \varphi(-f)$.

Definición 5.3.1 Decimos que $\varphi \in C_c(U)^\#$ es *positivo* si

$$\varphi(f) \geq 0, \forall f \in C_c(U), f \geq 0.$$

Teorema 5.3.1 (Funcionales lineales positivos) Si $\varphi \in C_c(U)^\#$ y φ es positivo, entonces

$$\varphi(f) = \int_U f\mu_\varphi, \forall f \in C_c(U).$$

Además, μ_φ es la única medida de Radón con esta propiedad.

Demostración Tomamos un conjunto compacto $K \subseteq U$. Por el lema 1.5.2 existe un conjunto abierto $V_K \subseteq U$ tal que $K \subseteq V_K \subseteq \overline{V_K} \subseteq U$ y $\overline{V_K}$ es compacto, y haciendo uso del lema de 2.3.2, existe una función continua h, la cual, tiene soporte compacto, $h = 1$ en $\overline{V_K}$, $0 \leq h \leq 1$ y $h = 0$ en $U \setminus \overline{V_K}$. Para $f \in C_c(U)$ donde supp$(f) \subseteq K$, definimos $g = \|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}h - f \geq 0$. Luego, se obtiene que

$$0 \leq \varphi(g) = \|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}\varphi(h) - \varphi(f),$$

y también $\varphi(f) \leq C\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}, C = \varphi(h)$. Remplazando f por $-f$ en el argumento anterior se sigue que

$$|\varphi(f)| \leq C\|f\|_{L^\infty(\mu_\varphi)}.$$

Así

$$\sup\left\{|\varphi(g)| \;\middle|\; g \in C_c(U), \|g\|_\infty \leq 1, \text{supp}(g) \subseteq K\right\} \leq C < \infty,$$

es decir, φ es acotado compactamente.

Observemos que para $f \in C_c^+(U)$, se satisface que

$$\varphi(f) \leq \lambda_\varphi(f).$$

Por otro lado si $g \in C_c(U)$ tal que $|g| \leq f$, entonces $f - g \geq 0$, y por lo tanto $0 \leq \varphi(f-g) = \varphi(f) - \varphi(g)$. Es decir, $\varphi(g) \leq \varphi(f)$, y por ende

$$\lambda_\varphi(f) \leq \varphi(f).$$

Así, por el lema 5.2.3,

$$\varphi(f) = \lambda_\varphi(f) = \int_U f d\mu_\varphi. \tag{5.1}$$

Para el caso general, $f \in C_c(U)$, se tiene que $f^+, f^- \in C_c(U)$. Por lo tanto, de (5.1), se sigue que

$$\varphi(f) = \varphi(f^+ - f^-) = \varphi(f^+) - \varphi(f^-) = \int_U f^+ d\mu_\varphi - \int_U f^- d\mu_\varphi = \int_U f d\mu_\varphi.$$

Solo resta verificar la unicidad. Tomemos una medida de Radón μ tal que

$$\varphi(f) = \int_U f d\mu.$$

Sea $W \subseteq U$ un conjunto abierto. Notemos que para cada $f \in C_c(U)$ tal que $\|f\|_\infty \leq 1$ y $\text{supp}(f) \subset W$, se tiene que

$$\varphi(f) \leq \mu(W).$$

Luego, $\sup\{\varphi(f) : f \in C_c(U), \|f\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f) \subset W\} \leq \mu(W)$.

Por otra parte, para cada conjunto compacto $K \subset U$, por el lema 2.3.2, existe $f_0 \in C_c(U)$ tal que $\|f_0\|_\infty \leq 1$, $\text{supp}(f_0) \subseteq W$ y $f_0 = 1$ en K, y por lo tanto

$$\mu(K) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_0 d\mu = \varphi(f_0).$$

Así, por el teorema 1.5.1, $\mu(W) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq W \text{ compacto}\}$, y en consecuencia

$$\mu(W) \leq \sup\{\varphi(f) : f \in C_c(U), \|f\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f) \subset W\}.$$

De lo anterior, $\mu = \mu_\varphi$ en los conjuntos abiertos. La igualdad se sigue del corolario 1.5.1. ■

Corolario 5.3.1 Si $\varphi \in C_c(U)^*$ y φ es positivo, entonces

$$\varphi(f) = \int_U f\mu_\varphi, \forall f \in C_c(U).$$

Además, μ_φ es la única medida de Radón con esta propiedad y es finita.

Demostración Sólo resta observar que

$$\mu_\varphi(U) = \sup\{|\varphi(f)| : f \in C_c(U), \|f\|_\infty \leq 1\} = \|\varphi\| < \infty.$$

Por lo tanto, μ_φ es finita. ■

Teorema 5.3.2 (Teorema de representación de Riesz en $C_c^\infty(U)$) Sea $\varphi \in C_c^\infty(U)^\#$ positivo. Entonces

$$\varphi(f) = \int_U f d\mu_\varphi, f \in C_c^\infty(U).$$

Además, μ_φ es la única medida de Radón con esta propiedad.

Demostración Primero se verificará la unicidad. Para $\varphi \in C_c^\infty(U)^\#$ supongamos que existen dos medidas de Radón, μ_1 y μ_2, tales que

$$\int_U f d\mu_1 = \varphi(f) = \int_U f d\mu_1, \forall f \in C_c^\infty(U).$$

Enseguida tomemos un conjunto abierto $W \subseteq U$ y fijemos un conjunto compacto $K \subset W$. Por el lema 1.5.2 existe un conjunto abierto $W \subseteq U$ tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset W$ y $\overline{V}$ es compacto, así, según el lema 4.1.6, tenemos existe $t_0 > 0$ tal que $\chi_V * \psi_t \in C_c^\infty(U),$ para cada $0 < t < t_0$ y $\chi_V * \psi_t \to \chi_V$ uniformemente en K. Por lo tanto,

$$\mu_1(K) = \lim_{t\to 0} \int_K \chi_U * \psi_t d\mu_1 = \lim_{t\to 0} \int_K \chi_W * \psi_t d\mu_2 = \mu_2(K).$$

Entonces, por el lema 1.5.1, se sigue que $\mu_1(W) = \mu_2(W)$. Luego, por la propiedad de regularidad, y el lema 1.5.1, se obtiene que $\mu_1 = \mu_2$.

Para demostrar existencia, tomamos un conjunto compacto $K \subseteq U$. Por el lema 1.5.2 existe un conjunto abierto $V_K \subseteq U$ tal que $K \subseteq V_K \subseteq \overline{V_K} \subseteq U$ y $\overline{V_K}$ es compacto, y haciendo uso del lema de Urysohn, existe una función suave h, la cual, tiene soporte compacto, $h = 1$ en $\overline{V_K}$, $0 \leq h \leq 1$ y $h = 0$ en $U \setminus \overline{V_K}$.

Para $f \in C_c^\infty(U)$ donde $\operatorname{supp}(f) \subseteq V_K$, definimos $g = \|f\|_\infty h - f \geq 0$. Luego, se sigue que

$$0 \leq \varphi(g) = \|f\|_\infty \varphi(h) - \varphi(f),$$

y también $\varphi(f) \leq C\|f\|_\infty, C = \varphi(h)$. Remplazando f por $-f$ en el argumento anterior se sigue que

$$|\varphi(f)| \leq C\|f\|_\infty. \tag{5.2}$$

Por lo anterior, observemos que $\varphi|_{C_c^\infty(V_K)}$ es continuo para cada $K \subseteq U$ compacto. En virtud del lema 4.1.7, el funcional $\varphi|_{C_c^\infty(V_K)}$ se extiende como un funcional lineal continuo Φ_{V_K} en $C_c(V_K)$.

Ahora para $f \in C_c(U)$ consideremos $K = \operatorname{supp}(f)$, y definimos Φ por

$$\Phi(f) := \Phi_{V_K}(f).$$

Notemos que por un argumento análogo al hecho en el lema 4.1.7, se sigue que Φ es un funcional lineal y está bien definido.

Además, por el lema 4.1.7, existe una sucesión $\{g_i\} \subseteq C_c^\infty(U)$ tal que $\operatorname{supp}(g_i) \subseteq V_K$, $g_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$, y $g \to f$ uniformemente. Por lo tanto

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \Phi(g_i) = \lim_{i\to\infty} \varphi_{V_K}(g_i) = \Phi(f).$$

Luego Φ es positivo.

Así pues $\Phi \in C_c(U)^\#$ y es positivo. Entonces por el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos, existe una medida de Radón μ_φ tal que

$$\varphi(f) = \Phi(f) = \int_U f d\mu_\varphi, \forall f \in C_c^\infty(U).$$

■

5.4. Teorema de representación de Riesz en $C_c(U, \mathbb{R}^m)$

Lema 5.4.1 Sea μ una medida de Radón en U. Si $W \subseteq U$ un conjunto abierto y $h : W \to \mathbb{R}^m$ tal que $h = (h_1, \ldots, h_m)$, $h_i \in L^\infty(W, \mu)$, entonces existe $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c(W, \mathbb{R}^m)$ tal que $\|f_k\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f_k) \subset W, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\langle f_k, h\rangle \to \|h\|$.

Demostración Se sigue de aplicar el lema 4.2.2 a $\dfrac{h_i}{\|h\|}, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$. ■

Lema 5.4.2 Sean μ una medida de Radón en U y $g, h \in L^1(U, \mu)$. Si $\int_W g d\mu = \int_W h d\mu$, para cada $W \in \tau_U$ tal que $\mu(W) < \infty$, entonces $g = h$ μ-c.t.p.

Demostración Tomemos $N \in \mathbb{N}$ fijo, $A \subseteq V(0, N)$ medible y $f = g - h$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, por el teorema 1.5.5, existe un conjunto abierto $W_k \subseteq U$ tal que $A \subset W_k$ y $\mu(W_k \setminus A) < \frac{1}{k}$. Ahora, definimos $W = \bigcap_{k=1}^\infty W_k$. Y notamos que

$$\mu(W \setminus A) \leq \mu(W_k \setminus A) < \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$\mu(W \setminus A) = 0 \tag{5.3}$$

En seguida consideremos $V_m = \left(\bigcap_{k=1}^m W_k\right), \forall m \in \mathbb{N}$, y observemos que

$$\chi_{V_m} f \to \chi_W f.$$

Dado que $|f| \in L^1(\mu)$ y $|\chi_{V_m} f| \leq |f|, \forall m \in \mathbb{N}$, por el teorema de convergencia dominada y (5.3), se obtiene que

$$\int_A f = \int_W f = \lim_{m\to\infty} \int_{V_m} f = 0.$$

Por el lema 4.1.4, tomando $b = 0$, se sigue que $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \|g - h\|_{L^\infty(\mu)} = 0$. Es decir, $g = h$ en $V(0, N)$ μ- c.t.p.

Ya que $U = \bigcup_{k=1}^\infty V(0, k)$, se obtiene que $g = h$ μ-c.t.p. ■

Teorema 5.4.1 (Teorema de representación de Riesz en $C_c(U, \mathbb{R}^n)$) Si $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^m)^\#$ es acotado compactamente, entonces existe una función medible $\sigma : U \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\|\sigma\| = 1 \quad \mu_\varphi\text{-}c.t.p.$$

y

$$\varphi(f) = \int \langle f, \sigma\rangle d\mu_\varphi, f \in C_c(U, \mathbb{R}^m).$$

Demostración Dado $e \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|e\| = 1$, definimos

$$\psi_e(f) := \varphi(fe), f \in C_c(U).$$

Notemos que ψ_e es un funcional lineal, en efecto, para $f, g \in C_c(U)$ y $c \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\psi_e(f + cg) = \varphi((f + cg)e) = \varphi(fe + cge) = \varphi(fe) + c\varphi(ge) = \psi_e(f) + c\psi_e(g).$$

Además,

$$\begin{aligned}|\psi_e(f)| &= |\varphi(fe)| \\ &\leq \sup\left\{|\varphi(g)| \,\Big|\, g \in C_c(U, \mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq |f|\right\} \\ &= \lambda_\varphi(|f|) = \int_U |f| d\mu_\varphi,\end{aligned}$$

Lo anterior indica que $\psi_e : C_c(U) \subset L^1(U, \mu_\varphi) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo. Por los teoremas 2.2.2 y 4.2.2, podemos extender continuamente ψ_e a $\overline{C_c(U)} = L^1(U, \mu_\varphi)$. Luego, del teorema 4.5.1, existe $\sigma_e \in L^\infty(U, \mu_\varphi)$ tal que

$$\psi_e(f) = \int_U f\sigma_e d\mu_\varphi, \forall f \in C_c(U).$$

En seguida tomamos la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathbb{R}^m$ y definimos la función $\sigma = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{e_j} e_j$. Para $g \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ se tiene que,

$$\varphi(g) = \sum_{j=1}^{m} \varphi((\langle g, e_j\rangle)e_j) = \sum_{j=1}^{m} \int (\langle g, e_j\rangle)\sigma_{e_j} d\mu_\varphi = \int \langle g, \sigma\rangle d\mu_\varphi.$$

Solo falta verificar que $\|\sigma\| = 1$ μ_φ-c.t.p. Sea $W \subseteq U$ un conjunto abierto tal que $\mu_\varphi(W) < \infty$. Por definición sabemos que

$$\mu_\varphi^*(W) = \sup\left\{\int \langle g, \sigma\rangle d\mu_\varphi \,\Big|\, g \in C_c(U, \mathbb{R}^m), \|g\|_\infty \leq 1, \text{supp}(g) \subset W\right\}. \tag{5.4}$$

Por el lema 5.4.1 es posible tomar una colección $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c(W, \mathbb{R}^m) \subseteq C_c(U, \mathbb{R}^m)$ tal que satisface $\|f_k\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f_k) \subset W, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\langle f_k, \sigma\rangle \to \|\sigma\|$ μ_φ-c.t.p. en W. Luego por (5.4) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_W \|\sigma\| d\mu_\varphi = \lim_{k\to\infty} \int \langle f_k, \sigma\rangle d\mu_\varphi \leq \mu_\varphi(W).$$

Por otro lado, si $g \in C_c(U, \mathbb{R}^m)$ y cumple que $\|g\|_\infty \leq 1$ y $\text{supp}(g) \subseteq W$, entonces

$$\int \langle g, \sigma\rangle d\mu_\varphi \leq \int_W \|\sigma\| d\mu_\varphi.$$

Por lo tanto

$$\mu_\varphi(W) \leq \int_W \|\sigma\| d\mu_\varphi.$$

Así, $\mu_\varphi(W) = \int_W \|\sigma\| d\mu_\varphi$, para cada $W \in \tau_U$ tal que $\mu_\varphi(W) < \infty$. Por el lema 5.4.2, se concluye que $\|\sigma\| = 1$ μ_φ-c.t.p. ∎

5.5. Teorema de representación de Riesz en $C_0(U)$

Definición 5.5.1 Para $f \in C(U)$, decimos que f se *anula en infinito* si dado $\epsilon > 0$, el conjunto $\{x \in U : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto, y definimos

$$C_0(U) = \{f \in C(U) : f \text{ se anula en infinito}\}.$$

Claramente $C_c(U) \subset C_0(U)$. Además, $C_0(U) \subset B(U)$, pues para $f \in C_0(U)$, la imagen de f en el conjunto $D = \{x \in U : |f(x)| \geq 1\}$ es compacto, y $|f(x)| < 1, \forall x \in U \setminus D$.

Proposición 5.5.1 Considerando la norma del supremo, $C_c(U)$ es denso en $C_0(U)$.

Demostración Sea $f \in C_0(U)$. Para $k \in \mathbb{N}$, tomamos $D_k = \left\{x \in U : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$. Luego D_k es compacto, y haciendo uso del lema 2.3.2, existe $g_k \in C_c(U)$ tal que $0 \leq g_k \leq 1$ y $g_k = 1$ en D_k. En seguida tomamos $f_k = g_k f$. Entonces $f_k \in C_c(U)$ y $\|f_k - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, es decir $f_k \to f$ uniformemente. ∎

Proposición 5.5.2 Si $\varphi \in C_0(U)^*$ y es positivo, entonces

$$\varphi(f) = \int_U f\mu_\varphi, \forall f \in C_0(U).$$

Además, μ_φ es la única con esta propiedad y es finita.

Demostración Notemos que $\varphi \in C_c(U)^*$. Por el teorema 5.3.1, existe una única medida de Radón tal que es finita y

$$\varphi(f) = \int_U f d\mu_\varphi, \forall f \in C_c(U).$$

Ya que $C_c(U)$ es denso en $C_0(U)$, φ se extiende continuamente a $C_0(U)$. Veamos que para $f \in C_0(U)$, $\varphi(f) = \int_U d\mu_\varphi$. Por la proposición anterior, existe una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c(U)$ tal que $f_k \to f$ uniformemente. Dado que $\mu_\varphi(U) < \infty$, entonces $f \in \mathcal{L}^1(\mu_\varphi)$ y

$$\varphi(f) = \lim_{k\to\infty} \varphi(f_k) = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k d\mu_\varphi = \int_U f d\mu_\varphi.$$

∎

Lema 5.5.1 Si $\varphi \in C_0(U)^*$, entonces existen funcionales positivos $\varphi^+, \varphi^- \in C_0(U)^*$ tal que $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$.

Demostración Si $f \in C_0(U)$ y $f \geq 0$, definimos

$$\varphi^+(f) = \sup\{\varphi(g) : g \in C_0(U), 0 \leq g \leq f\}.$$

A partir de que $|\varphi(g)| \leq \|\varphi\|\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|\|f\|_\infty$ para $0 \leq g \leq f$, y $\varphi(0) = 0$, se obtiene que $0 \leq \varphi^+(f) \leq \|\varphi\|\|f\|_\infty$. En seguida demostraremos φ^+ es aditiva y homogénea para funciones no-negativas en $C_0(U)$.

Es claro que $\varphi^+(cf) = c\varphi^+(f), \forall c \geq 0$. También, para $0 \leq g_1 \leq f_1$ y $0 \leq g_2 \leq f_2$ se tiene que $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, y entonces $\varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi^+(f_1 + f_2)$. De lo anterior se sigue que

$$\varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2) \leq \varphi^+(f_1 + f_2).$$

Por otro lado, si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, tomemos $g_1 = \min(g, f_1)$ y $g_2 = g - g_1$. Entonces $0 \leq g_1 \leq f_1$ y $0 \leq g_2 \leq f_2$, y por lo tanto $\varphi(g) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2)$, luego

$$\varphi^+(f_1 + f_2) \leq \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2).$$

Así, $\varphi^+(f_1 + f_2) = \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2)$.

Ahora, si $f \in C_0(U)$, entonces $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \min(f, 0) \in C_0(U)$. Definimos $\varphi(f) = \varphi^+(f^+) - \varphi^+(f^-)$.

Notemos que si $f = g - h$ donde $g, h \geq 0$, entonces $g + f^- = h + f^+$. Así, $\varphi^+(g) + \varphi^+(f^-) = \varphi^+(h) + \varphi^+(f^+)$. Luego $\varphi^+(f) = \varphi^+(g) - \varphi^+(h)$, es decir φ^+ no depende de la descomposición de f como diferencia de funciones no-negativas en $C_0(U)$.

De lo anterior se sigue que φ^+ es un funcional lineal en $C_0(U)$. Más aún,

$$|\varphi^+(f)| \leq \max(\varphi^+(f^+), \varphi^+(f^-)) \leq \|\varphi\| \max(\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty) = \|\varphi\|\|f\|_\infty,$$

luego $\|\varphi^+\| \leq \|\varphi\|$.

Finalmente, tomamos $\varphi^- = \varphi^+ - \varphi$. Entonces $\varphi^- \in C_0(U)^*$, y de la definición de φ^+ se sigue que φ^+ y φ^- son positivos. ■

Teorema 5.5.1 Si $\varphi \in C_0(U)^*$, entonces existen μ_{φ^+} y μ_{φ^-} medidas de Radón tales que

$$\varphi(f) = \int_U f d\mu_{\varphi^+} - \int_U f d\mu_{\varphi^-}.$$

Demostración Por el lema anterior, $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ donde $\varphi^+, \varphi^- \in C_0(U)^*$ y son positivos. Entonces, por el lema 5.5.2, existen medidas de Radón finitas μ_{φ^+} y μ_{φ^-} tales que

$$\varphi(f) = \varphi^+(f) - \varphi^-(f) = \int_U f d\mu_{\varphi^+} - \int_U f d\mu_{\varphi^-}, \forall f \in C_0(U).$$

■

Bibliografía

[1] R.G. Bartle, “*The elements of integration and Lebesgue Measure*”, Wiley-Interscience, New York, 1966.

[2] F. Bombal, *La teoría de la medida: 1875-1925*, Seminario de Historia de la Matemática I, Universidad Complutense, Madrid, España, 1991.

[3] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, N. Y., 1985.

[4] J. Dieudonne, *History of Functional Analysis*, North-Holland Publishing Company, 1981.

[5] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory And Fine Properties Of Functions*, Studies in Advanced Math., CRC press,1992.

[6] H. Fetter N. y B. Gamboa, *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Grupo Ed. Iberoamérica, México, 1997.

[7] G. B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley, New York, 1984.

[8] F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$, Oxford University Press-CIMAT, México, 2002.

[9] F. Galaz Fontes, *Elementos de análisis funcional*, S y G Editores, México, 2006.

[10] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Third Edition, Singapore, 1987.

[11] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, AMS, 2nd edition, 2001.

[12] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 6th edition, 1980.

Índice alfabético