CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

FUNCIONES ISOPARAMÉTRICAS Y ECUACIONES DE TIPO YAMABE

T E S I S

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

Presenta

Héctor Mauricio Barrantes González

Director de Tesis:

Dr. Jimmy Petean Humen

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 26 de Noviembre de 2018

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría y doctorado, sin el cual mi estancia en México no habría sido posible. Gracias también al CIMAT, por la ayuda económica brindada durante el último semestre de mis estudios. Quiero agradecer también a la Universidad de Costa Rica, por el apoyo económico durante mis estudios de maestría y doctorado en el CIMAT. Este apoyo me ayudó enormemente durante estos años en aspectos académicos y personales. Y me permitieron, permanecer durante estos años junto a mi familia.

Quiero agradecer a mi asesor Jimmy Petean Humen, por su apoyo durante este proceso de doctorado. Por su tiempo y su dedicación, por las conversaciones semanales, por su paciencia al ayudarme a comprender conceptos e ideas nuevas. Por su comprensión en los momentos en que tuve que enfrentar algunos problemas personales. Este trabajo no habría sido posible sin su ayuda. Para él, mi respeto, mi agradecimiento y mi admiración.

Muchas gracias a las personas que colaboraron en la revisión de esta tesis: Dr Raúl Quiroga Barranco, Dr Luis Hernández Lamoneda, Dr. Alejandro Betancourt, Dr Pablo Suárez Serrato. Su participación y sugerencias han sido muy valiosas para la escritura de este trabajo.

Quiero agradecer a todos mis profesores del CIMAT, quienes me brindaron la oportunidad de conocer diferentes áreas de estudio y perspectivas del quehacer matemático.

Agradezco a mi esposa Imelda Rojas Campos, quien ha sido mi apoyo incondicional durante estos años. Su compañia, su fuerza y su increíble paciencia en momentos difíciles, han sido imprescindibles durante este proceso.

Quiero agradecer a todas las personas que han sido parte de este proceso. Especialmente a Jorge Dávila Ortiz, con quien tuve valiosísimas charlas sobre materias que compartimos y sobre temas relacionados con esta tesis.

Muchas gracias a todos los trabajadores del CIMAT, que me atendieron siempre con amabilidad y disposición. En especial a las personas del Departamento de Servicios Escolares y las del Departamento de Biblioteca.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN

Dada una variedad Riemanniana cerrada (M,g), de dimensión n, definimos la clase conforme de g por

$$[g] := \{fg : f\colon M \to \mathbb{R}_{>0}\}.$$

El problema de Yamabe consiste en encontrar métricas de curvatura escalar constante en la clase conforme $[g]$. Consideramos el funcional de Hilbert-Einstein

$$\mathcal{S}(g) = \frac{\int_M \mathbf{s}_g \, dv_g}{(Vol(M,g))^{\frac{n-2}{n}}}, \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{s}_g$ denota la curvatura escalar de g y dv_g es la forma de volumen de la métrica g. Si escribimos $h \in [g]$ como $h = u^{p-2}g$, con $u \in H^1(M)$, $p = p_n = \frac{2n}{n-2}$ y $n \geq 3$, tenemos el **funcional de Yamabe**.

$$\mathcal{S}\left(u^{p-2}g\right) := Y_g(u) := \frac{\displaystyle\int_M a_n|\nabla_g u|_g^2 + \mathbf{s}_g u^2 \, dv_g}{\|u\|_p^2}, \tag{1.2}$$

donde $a_n := \frac{4(n-1)}{n-2}$. Observe que el funcional Y_g está definido sobre $H^1(M) - \{0\}$. Veremos que, una métrica $h = u^{p-2}g$ en $[g]$, con $u > 0$ en $H^1(M)$, tiene curvatura escalar constante $\mathbf{s}_h = \lambda$, si y sólo si la función u es un punto crítico del funcional de Yamabe. Y esto se cumple si y sólo si u es solución de la **ecuación de Yamabe**,

$$-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u = \lambda u^{p-1}, \tag{1.3}$$

Vamos a ver más adelante, que el Funcional de Yamabe está acotado inferiormente. Entonces, se define la **constante de Yamabe**, por

$$Y(M,[g]) := \inf_{\substack{u \,\in\, H^1(M)\\ u \neq 0}} \left(\frac{\int_M a_n|\nabla_g u|_g^2 + \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\|u\|_p^2}\right). \tag{1.4}$$

El problema de Yamabe surge en 1960, cuando H. Yamabe publicó un artículo [73] en el que demostraba que toda variedad Riemanniana cerrada (M, g) de dimensión finita, tiene una métrica conforme a g, con curvatura escalar constante que realiza el ínfimo de $\mathcal{S}\big|_{[g]}$. Sin embargo, en 1968, N. Trudinger [69] descubrió que la prueba de H. Yamabe contenía un error. Trudinger fue capaz de modificar la demostración de Yamabe, de tal forma que ésta funcionara siempre que se cumpliera la condición $Y(M,[g]) \leq 0$. Más precisamente, Trudinger demostró que existe una constante positiva $\alpha(M)$, tal que si $Y(M,[g]) < \alpha(M)$ entonces, el problema de Yamabe siempre tiene solución. Más tarde, en 1976, T. Aubin [8] extendió el resultado de Trudinger mostrando que $\alpha(M) = Y(\mathbf{S}^n, [g_0^n])$, donde $\mathbf{S}^n$ denota la esfera de dimensión n y g_0^n denota la métrica sobre $\mathbf{S}^n$ de curvatura seccional 1, llamada métrica redonda. Aubin también demostró en [8] que si (M, g) tiene dimensión $n \geq 6$ y no es localmente conformemente plana, entonces $Y(M,[g]) < Y(\mathbf{S}^n, g_0^n)$. Complementando el trabajo de Aubin, R. Schoen [62] demostró que si (M, g) tiene dimensión 3, 4 o 5 o si (M, g) es localmente conformemente plana, entonces $Y(M,[g]) < Y(\mathbf{S}^n, g_0^n)$, a no ser que (M, g) sea conforme a la esfera. De esta manera, queda demostrado que el problema de Yamabe siempre tiene una solución. Los detalles de lo mencionado anteriormente se pueden ver en [40].

En el caso $Y(M,[g]) \leq 0$, la solución de la ecuación de Yamabe es única, salvo homotecias. Esto no sucede cuando $Y(M,[g]) > 0$, lo cual se puede observar mediante la discusión de las soluciones sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$.

Para métricas de Einstein distintas de la métrica redonda sobre $\mathbf{S}^n$, M. Obata probó en [52] la unicidad de soluciones de la ecuación de Yamabe, es decir, en cada clase conforme existe una única métrica de curvatura escalar constante, salvo homotecias.

En general, hay otros casos en los que hay multiplicidad de soluciones al problema de Yamabe. D. Pollack probó en [59] que si $Y(M,[g]) > 0$ y $N \geq 1$ entero positivo, existe una clase conforme $[g_1]$ tal que $\|g - g_1\|_{C^0} < \frac{1}{N}$ y métricas $g_1, \ldots g_N$ en $[g_1]$, con curvatura escalar constante positiva. M. Berti y A. Malchiodi demostraron en [11] que si $k \geq 2$ y $n \geq 4k+3$, entonces existe una familia de métricas g_ε, de clase C^k sobre $\mathbf{S}^n$, tal que g_ε se acerca a g_0^n en la norma $C^k(\mathbf{S}^n)$ cuando ε se acerca a 0 y tal que la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n, g_\varepsilon)$, tiene una familia de soluciones no compacta. En [15] S. Brendle demostró, que si $n \geq 52$, entonces existe una métrica no conformemente plana g sobre $\mathbf{S}^n$ y una familia no compacta de soluciones, de clase C^∞, del problema de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n, g)$. Este resultado fue extendido por S. Brendle y F.C. Marques en [16], para $25 \leq n \leq 51$. Los dos resultados anteriores muestran que, en general, el espacio de soluciones no es compacto, para $n \geq 25$. Si (M, g) es conformemente plana y no conformemente equivalente a la esfera, R. Schoen probó que el conjunto de soluciones es compacto si ([43], [66]). Para variedades Riemannianas en General, R. Schoen probó que el conjunto de soluciones es compacto para $n = 3$ [63, 64]. En dimensiones 4 y 5, este resultado fue probado por O. Druet en [25]. En el caso $n \leq 24$, M.A. Khuri, F.C. Marques y R. Schoen probaron en [39], que para variedades spin, el conjunto de soluciones al problema de Yamabe es compacto. En [44] y [39], se puede ver una reseña histórica sobre la de compacidad y no compacidad del conjunto de soluciones al problema de Yamabe.

Otro caso de gran importancia donde hay multiplicidad de soluciones de la ecuación de Yamabe, es el de los productos Riemannianos $(M^m \times N^n, g+h)$, donde g y h son las métricas Riemannianas sobre M y N respectivamente. Ha sido de particular interés, el estudio de la ecuación de Yamabe sobre productos Riemannianos. En este caso la curvatura escalar de $g+h$ está dada por $\mathbf{s}_g + \mathbf{s}_h$ y si se buscan soluciones u que dependen solamente de uno de los factores; digamos de M, entonces la ecuación de Yamabe sobre $(M^m \times N^n, g+h)$ es

$$-a_{m+n}\Delta_g u + (\mathbf{s}_g + \mathbf{s}_h)\, u = \lambda u^{p_{m+n}-1} \tag{1.5}$$

El problema de Yamabe sobre productos Riemannianos ha sido estudiado por varios autores. Por ejemplo, R. Schoen [63] y O. Kobayashi [38] probaron, en el caso $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^1, g_0^n + \delta g_0^1)$, que las soluciones sólo dependen de $\mathbf{S}^1$ y que el número de éstas crece conforme crece el parámetro δ. En [55], J. Petean demostró la existencia de multiplicidad de soluciones sobre productos de la forma $(\mathbf{S}^m \times M, g_0^m + g)$, donde la métrica g sobre M tiene curvatura escalar constante y las soluciones sólo dependen de $\mathbf{S}^m$. Usando algunos teoremas de comparación de Sturm y estudiando las soluciones radiales de la ecuación de Yamabe sobre $\mathbf{S}^n$, el autor demostró que el número de soluciones positivas crece al menos linealmente, con respecto a $\mathbf{s}_g$. En [31] G. Henry y J. Petean, usando funciones isoparamétricas mostraron la existencia de soluciones no radiales, que dependen de uno de los factores del producto de esferas $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^k, g_0^n + \delta g_0^k)$ con $n, k \geq 2$. Los autores utilizaron teoría de bifurcación local para probar que existe una sucesión creciente de puntos de bifurcación, donde aparecen ramas de soluciones no triviales. L.L. De Lima, P. Piccione y M. Zedda [23], utilizaron teoría de bifurcación para probar la existencia de multiplicidad de métricas que son puntos de acumulación de soluciones al problema de Yamabe, sobre productos Riemannianos, $(M_0\times M_1, g_0+\lambda g_1)$, donde ambos factores tienen curvatura escalar constante y $\lambda > 0$. En [57], J. Petean consideró variedades Riemannianas cerradas, (M, g) y (N, h), donde $\delta > 0$ y la curvatura escalar $\mathbf{s}_h$ de h es constante y positiva. En este artículo, J. Petean demostró que para δ pequeño, hay al menos $Cat(M) + 1$ soluciones al problema de Yamabe, sobre $(M \times N, g + \delta h)$, donde $Cat(M)$ denota la categoría de Lusternik-Schnirelmann de M. Las soluciones obtenidas son funciones que dependen de M. Es importante mencionar que este es el primer resultado de multiplicidad de soluciones al problema Yamabe, en el que la curvatura escalar de g no es necesariamente constante.

Dado un producto Riemanniano $(M^m\times N^n, g+h)$, tal que las métricas g y h tienen curvatura escalar constante, escribimos $\lambda = \frac{\mathbf{s}_g+\mathbf{s}_h}{a_{m+n}}$ y notamos que, la ecuación (1.5) se escribe en la forma

$$-\Delta_g u + \lambda u = \lambda u^{q-1}. \tag{1.6}$$

donde $q = p_{m+n} < p_n = \frac{2n}{n-2}$ y $\lambda > 0$. Es natural entonces, estudiar la ecuación de tipo Yamabe subcrítica.

La motivación original para este trabajo, es estudiar la existencia de soluciones positivas de ecuaciones de tipo Yamabe, sobre ciertas variedades Riemannianas de dimensión 4, extendiendo los resultados anteriores en el caso de $\mathbf{S}^4$ a $\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^2$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$, los ejemplos de variedades simplemente conexas, compactas y homogéneas. No obstante, los resultados obtenidos son válidos sobre $\mathbf{S}^n\times\mathbf{S}^n$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, para $n \geq 2$. En el primer caso, utilizamos las funciones isoparamétricas, determinadas por la acción diagonal del grupo $O(n+1)$ sobre $\mathbf{S}^n\times\mathbf{S}^n$. En el segundo caso consideramos la acción de cohomogeneidad 1, del grupo $U(n)$ sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$.

Uno de los motivos para encontrar todas las soluciones de la ecuación de Yamabe, proviene de tratar de calcular la constante de Yamabe $Y(M, [g])$. En esta dirección, una pregunta importante que surgió en [3] y [6], es si todas las soluciones de la ecuación de Yamabe sobre ciertos productos, tales como productos de esferas o el produto de esferas con el espacio Euclideo, dependen solamente de uno de los factores.

En este trabajo probamos la existencia de multiplicidad de soluciones positivas de la ecuación subcrítica (1.6), que dependen no trivialmente de ambos factores del producto

Riemanniano $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$. Específicamente probamos el siguiente teorema:

Teorema 1.0.1. *Para cada $\delta > 0$ y cada entero positivo k, sea $q \in [2, p_{2n})$ y $\lambda_{k,\delta,q} := \frac{k(k+n-1)}{q-2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)$. Si $\lambda \in (\lambda_{k,\delta,q},\ \lambda_{k+1,\delta,q}]$, entonces la ecuación*

$$-\Delta_{g_0^n+\delta g_0^n} u + \lambda u = \lambda u^{q-1}.$$

tiene al menos k soluciones positivas sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$, invariantes por la acción diagonal de $O(n+1)$, que dependen no trivialmente de ambos factores.

En la prueba de este teorema, usamos teoría de bifurcación local, aplicada al espacio de funciones invariantes por la accion de $O(n+1)$, para demostrar la existencia de puntos de bifurcación en los que aparecen ramas de soluciones no triviales. Los puntos de bifurcación están determinados por autovalores del Laplaciano $\Delta_{g_0^n+\delta g_0^n}$, restringido a funciones invariantes. Cada uno de estos autovalores tiene asociado un espacio propio generado por un polinomio w_k de grado k, con k ceros, lo cual probamos mediante la teoría de comparación de Sturm. Finalmente, para demostrar la multiplicidad de soluciones no triviales, usamos la teoría de bifurcación global de Rabinowitz y la técnica blow-up.

Para entender mejor el comportamiento de las ramas de bifurcación, es importante estudiar la existencia de soluciones degeneradas de la ecuación (1.6). Una solución (u_0, λ_0) es degenerada si la linealización de la ecuación (1.6) en (u_0, λ_0)

$$-\Delta_g v - \lambda_0(1-(q-1)u_0^{q-2})v = 0$$

tiene una solución no trivial. Usando teoría de bifurcación local, para entender localmente las curvas de soluciones no triviales que aparecen en los puntos de bifurcación, mostramos que existe una solución degenerada, no trivial, de la ecuación (1.6).

Teorema 1.0.2. *Existe un $\lambda > 0$ tal que la ecuación*

$$-\Delta_{g_0^n+\delta g_0^n} u + \lambda u = \lambda u^{q-1}.$$

con $q \in [2, p_{2n})$, tiene una solución degenerada, no trivial, sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$, invariante por la acción diagonal de $O(n+1)$, que depende no trivialmente de ambos factores.

Luego consideramos la acción del grupo $U(n)$ sobre $(\mathbb{C}\mathbf{P}^n, g_{FS})$, donde g_{FS} es la métrica de Fubini-Study. Esta acción es de cohomogeneidad uno y las órbitas regulares son hipersuperficies isoparamétricas. Al restringirnos a estas hipersuperficies y usando técnicas similares a las del caso de $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$, demostramos la existencia de multiplicidad de soluciones de la ecuación (1.6) sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$.

Teorema 1.0.3. *Para cada entero positivo k, sea $\lambda_{k,q} = \frac{4k(k+n)}{q-1}$ y $q \in [2, p_{2n})$. Si $\lambda \in (\lambda_{k,q},\ \lambda_{k+1,q}]$, entonces la ecuación*

$$-\Delta_{g_{FS}} u + \lambda u = \lambda u^{q-1}.$$

tiene al menos k soluciones positivas sobre $(\mathbb{C}\mathbf{P}^n, g_{FS})$, invariantes por la acción de $U(n)$.

De manera similar al caso anterior, probamos que la ecuación (1.6) tiene una solución degenerada.

Teorema 1.0.4. *Existe un $\lambda > 0$ tal que la ecuación*

$$-\Delta_{g_{FS}} u + \lambda u = \lambda u^{q-1}.$$

con $q \in [2, p_{2n})$, tiene una solución degenerada no trivial, sobre $(\mathbb{C}\mathbf{P}^n, g_{FS})$, invariante por la acción de $U(n)$.

En la búsqueda de todas las soluciones de la ecuación de Yamabe, surge el interés por encontrar soluciones nodales, es decir, soluciones que cambian de signo. La existencia y multiplicidad de soluciones nodales sobre variedades Riemannianas ha sido estudiada por varios autores. En [7] B. Ammann y E. Humbert estudiaron la existencia de soluciones nodales de la ecuación de Yamabe, introduciendo el segundo invariante de Yamabe

$$Y^2(M, [g]) := \inf_{h \in [g]} \lambda_2(h) Vol(M, h)^{\frac{2}{n}},$$

donde $\lambda_2(h)$ es el segundo autovalor del Laplaciano conforme $L_h = a_n \Delta_h + \mathbf{s}_h$. Con esta notación, $Y(M, [g]) = Y^1(M, [g])$. Si u es una solución de la ecuación de Yamabe (1.3), que cambia de signo, entonces $h := |u|^{p_n - 2} g$ no es una métrica Riemanniana, pues h no es suave y se anula en el conjunto de ceros de u. B. Ammann y E. Humbert llamaron a h una *métrica generalizada*. Ellos probaron que $Y^2(M, [g])$ no puede ser realizado por una métrica Riemanniana, pero puede ser realizado por una métrica generalizada. Específicamente, $Y^2(M, [g])$ es realizado en los siguientes casos

1. $Y^2(M, [g]) > 0$, (M, g) es no localmente conformemente plana y $n \geq 11$.

2. $Y^2(M,[g]) = 0$, (M,g) es no localmente conformemente plana y $n \geq 9$.

Además, probaron que si $Y^2(M,[g])$ es no-negativo y es realizado por una métrica generalizada, entonces existe una solución nodal de la ecuación de Yamabe.

En [24] W.Y. Ding probó la existencia de un número infinito de soluciones nodales sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$ usando el hecho las órbitas bajo la acción del grupo $O(k) \times O(m)$, con $m+k = n+1$, son de dimensión mayor que cero. J. Petean [56] demostró la existencia de multiplicidad de soluciones nodales que dependen de uno de los factores del producto Riemanniano $(M \times N, g+h)$, donde (M,g) y (N,h) son variedades Riemannianas de curvatura escalar constante. En este mismo artículo J.Petean estudió separadamente el caso $(M \times \mathbf{S}^1, g + \delta g_0^1)$ con $\delta > 0$ y demostró que existen infinitas soluciones nodales que dependen sólo de $\mathbf{S}^1$. M.Clapp, J.C. Fernández [21] demostraron, usando métodos variacionales, que si Γ es un grupo compacto de isometrías de $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$ tal que cada órbita tiene dimensión positiva entonces el Problema de Yamabe tiene una cantidad infinita de soluciones nodales invariantes bajo la acción de Γ. Mediante el estudio de hipersuperficies isoparamétricas de $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$, J.C. Fernández y J Petean [34] probaron que para cualquier entero positivo k existe una solución nodal de la ecuación de Yamabe cuyo conjunto nodal tiene exactamente k componentes.

En este trabajo buscamos también soluciones nodales, de la ecuación de Yamabe (1.3) sobre el producto Riemanniano $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$ con $n \geq 2$ y $\delta > 0$. Estas soluciones, al igual que las soluciones positivas del Teorema 1.0.1, sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$, dependen no trivialmente de ambos factores. Específicamente vamos a probar el siguiente teorema

Teorema 1.0.5. *Para cualquier $\delta > 0$, la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$,*

$$- a_{2n} \Delta_{g_0^n + \delta g_0^n} u + n(n-1)\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) u = n(n-1)\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) |u|^{p_{2n}-2} u, \tag{1.7}$$

admite infinitas soluciones nodales que son invariantes bajo la acción de $O(n+1)$, que dependen no trivialmente de ambos factores.

Para probar este teorema consideramos nuevamente soluciones invariantes por la acción diagonal del grupo $O(n+1)$ y estudiamos la correspondiente ecuación diferencial ordinaria,

$$w''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)} w'(r) + \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\delta}} \left(|w(r)|^{p_{2n}-2} w(r) - w(r)\right) = 0 \tag{1.8}$$

con $r \in [0, \pi]$ y $w'(0) = w'(\pi) = 0$.
Denotamos por w_α, las soluciones que satisfacen $w_\alpha(0) = \alpha$ y $w'_\alpha(0) = 0$. Utilizando la dependencia continua sobre las condiciones iniciales, demostramos algunos lemas relacionados con el comportamiento y el número de ceros de de estas soluciones. Estos lemas serán útiles para probar el siguiente teorema,

Teorema 1.0.6. *Para cualquier $\lambda > 0$ y cualquier entero positivo k, existe $\alpha_k > 0$ tal que la solución w_{α_k} de (1.8) tiene exactamente k ceros sobre $(0, \pi)$ y $w'_{\alpha_k}(\pi) = 0$.*

Veremos que el Teorema 1.0.5 es consecuencia del teorema anterior.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. El capítulo (2) está dedicado a introducir la mayoría de conceptos básicos y resultados que serán utilizados posteriormente. Empezamos en la sección (2.1) con una breve descripción del Problema de Yamabe y la ecuación de Yamabe. En la sección (2.2) damos la solución explícita al problema de Yamabe en el caso de $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$, el cual es el primer ejemplo en el que no hay unicidad de soluciones de la ecuación de Yamabe. En la sección (2.3) introducimos el concepto de función isoparamétrica y de hipersuperficie isoparamétrica, los cuales serán fundamentales a lo largo del trabajo. Luego, hacemos un breve repaso histórico del desarrollo de la teoría de hipersuperficies isoparamétricas y la clasificación de estas. Luego, en la sección (2.4) enunciamos un teorema de comparación de Sturm, el cual es útil a la hora de comparar la oscilación alrededor de cero, de las soluciones respectivas, no triviales, de dos ecuaciones ordinarias, lineales, de segundo orden. En la sección (2.5), damos una breve introducción a la teoría de bifurcación. Definimos lo que es un punto de bifurcación de un operador entre espacios de Banach y enunciamos algunos teoremas que determinan si un punto es un punto de bifurcación.
Puesto que nos interesa el caso de bifurcación para autovalores simples, enunciamos el Teorema de bifurcación local de Crandall-Rabinowitz, el cual nos dice cómo el es comportamiento de las ramas de bifurcación cerca de los puntos de bifurcación que estas contienen. Luego enunciamos el teorema de bifurcación global de Rabinowitz, que será de utilidad para demostrar la existencia de multiplicidad de soluciones.

El capítulo (3) está dedicado al estudio de la ecuación de tipo Yamabe subcrítica (1.6) sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$. En la sección (3.1) utilizamos una función isoparamétrica definida sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$, invariante por la acción diagonal de $O(n+1)$, para obtener la ecuación diferencial ordinaria, correspondiente a la ecuación de tipo Yamabe linealizada, para funciones invariantes. La sección (3.2) contiene dos lemas, necesarios para estudiar la ecuación diferencial ordinaria linealizada. En la sección (3.3) demostramos el Teorema 1.0.1 utilizando teoría de bifurcación. Finalmente, en la sección (3.4) demostramos el Teorema 1.0.2 utilizando bifurcación local para estudiar el comportamiento de las ramas de bifurcación.

En el capítulo (4) buscamos soluciones positivas de la ecuación tipo Yamabe (1.6) sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, invariantes por la acción del grupo $U(n)$. En la sección (4.1) usamos el hecho de que $U(n)$ actúa sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ con cohomogeneidad 1, lo cual nos permite escribir la linealización de la ecuación (1.6), como una ecuación diferencial ordinaria. En la sección (4.2) estudiamos las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria linealizada. La sección (4.3) contiene la demostración del Teorema 1.0.3. Para demostrar este teorema usamos teoría de bifurcación. Por último, la sección (4.4) está dedicada a la demostración del Teorema 1.0.4 y algunos lemas relacionados.

En el capítulo (5) estudiamos la existencia de soluciones nodales de la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$. En la sección (5.1) escribimos la ecuación de Yamabe para funciones que son invariantes por la acción del grupo $O(n+1)$, como una ecuación diferencial ordinaria. La sección (5.2) contiene algunos lemas que describen el comportamiento de las soluciones de la ecuación ordinaria, que se anulan en $\frac{\pi}{2}$ o bien cuya derivada se anula en $\frac{\pi}{2}$. Finalmente, en la sección (5.3) demostramos el Teorema 1.0.6 del cual se sigue el Teorema 1.0.5.

2. PRELIMINARES

En este capítulo damos una breve descripción del problema de Yamabe y de los resultados que permiten establecer la existencia de soluciones. También describimos explícitamente las soluciones de la ecuación de Yamabe sobre la esfera $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$. Presentamos algunos aspectos importantes de teoría de bifurcación, funciones isoparamétricas y teoría de Sturm, que serán de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo.

Empezamos retomando algunas definiciones mencionadas anteriormente en la introducción.

2.1. Problema de Yamabe

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada, de dimensión $n \geq 3$. Consideremos una métrica h, en la clase conforme $[g]$. Si escribimos $h = u^{p-2}g$, con $u \in C^\infty_{>0}(M)$ y $p = p_n := \frac{2n}{n-2}$, entonces, la curvatura escalar de h está dada por

$$\mathbf{s}_h = u^{1-p}\Big(-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u\Big)$$

donde $a_n := \frac{4(n-1)}{n-2}$. (Se puede ver por ejemplo [12]). Entonces, el problema de encontrar una métrica $h \in [g]$ con curvatura escalar constante $\mathbf{s}_h = \lambda$, es equivalente a encontrar soluciones positivas de la ecuación

$$\lambda = u^{1-p}\Big(-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u\Big)$$

la cual es equivalente a

$$-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u = \lambda u^{p-1} \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) se llama **Ecuación de Yamabe**.

Consideremos ahora el **Funcional de Hilbert-Einstein**

$$\mathcal{S}(g) = \frac{\int_M \mathbf{s}_g dv_g}{\big(Vol(M, g)\big)^{\frac{n-2}{n}}} \tag{2.2}$$

donde dv_g denota la forma de volumen inducida por la métrica g. Restringimos el funcional de Hilbert-Einstein (2.2) a las métricas conformes $h = u^{p-2}g$ y usamos el hecho de que $dv_h = (u^{p-2})^{\frac{n}{2}}\, dv_g = u^p dv_g$. Entonces

$$\mathcal{S}(h) = \mathcal{S}\left(u^{p-2}g\right) = \frac{\displaystyle\int_M a_n|\nabla_g u|_g^2 + \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\left(\displaystyle\int_M u^p dv_g\right)^{\frac{2}{p}}}$$

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.1.1. *Definimos el* ***Funcional de Yamabe*** *por*

$$Y_g(u) = \frac{\displaystyle\int_M a_n|\nabla_g u|_g^2 + \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \tag{2.3}$$

Notemos que el funcional de Yamabe está definido sobre funciones en $C^\infty(M) - \{0\}$. De hecho, está definido sobre $H^1(M) - \{0\}$

Definición 2.1.2. *Una función $u \in C^\infty(M)$ es un* ***punto crítico*** *del Funcional de Yamabe (2.3), si para toda $\varphi \in C^\infty(M)$*

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} Y_g(u + t\varphi) = 0$$

Sea $\varphi \in C^\infty(M)$ y consideremos

$$F(t) := Y_g(u + t\varphi) = \frac{\displaystyle\int_M a_n|\nabla_g (u+t\varphi)|_g^2 + \mathbf{s}_g (u+t\varphi)^2 dv_g}{\left(\displaystyle\int_M (u+t\varphi)^p dv_g\right)^{\frac{2}{p}}}$$

Derivando F y evaluando en $t = 0$, se tiene que $F'(0) = 0$ si y sólo si

$$\int_M \left(-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u - Y_g(u)\frac{1}{\|u\|_p^{p-2}}u^{p-1}\right)\varphi dv_g = 0$$

entonces, u es un punto crítico de Y_g si y sólo si lo anterior vale para todo $\varphi \in C^\infty(M)$. Entonces u es un punto crítico de Y_g si y sólo si

$$-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u - \frac{Y_g(u)}{\|u\|_p^{p-2}}u^{p-1} = 0$$

o equivalentemente

$$-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u = \lambda u^{p-1}$$

donde $\lambda = \frac{Y_g(u)}{\|u\|_p^{p-2}}$. Luego, la métrica $h = u^{p-2}g$, con $u \in C^\infty_{>0}(M)$, tiene curvatura escalar constante $\mathbf{s}_h = \lambda$ si y sólo si

$$-a_n\Delta_g u + \mathbf{s}_g u = \lambda u^{p-1}$$

Entonces, tenemos que u es un punto crítico del Funcional de Yamabe Y_g si y sólo si u satisface la ecuación de Yamabe (2.1) con $\lambda = \frac{Y_g(u)}{\|u\|_p^{p-2}}$ y esto sucede si y sólo si la métrica $h = u^{p-2}g$, tiene curvatura escalar constante λ. Es decir, los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein, restringido a la clase conforme $[g]$, son las métricas en esta clase conforme, que tienen curvatura escalar constante.

Proposición 2.1.1. *Y_g está acotado inferiormente.*

Demostración. Observemos que

$$Y_g(u) = \frac{\displaystyle\int_M a_n|\nabla_g u|_g^2 + \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \geq \frac{\displaystyle\int_M \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \geq \left(\inf_M \mathbf{s}_g\right)\frac{\displaystyle\int_M u^2 dv_g}{\|u\|_p^2}.$$

□

Si $\mathbf{s}_g \geq 0$ entonces $\inf\limits_M \mathbf{s}_g \geq 0$ y como $\frac{\displaystyle\int_M u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \geq 0$ tenemos $Y_g(u) \geq 0$.
Supongamos ahora que $\inf\limits_M \mathbf{s}_g < 0$. Usando la desigualdad de Hölder

$$\int_M u^2 dv_g \leq \left(\int_M u^p dv_g\right)^{\frac{2}{p}} (Vol(M,g))^{\frac{2}{n}} = \|u\|_p^2 Vol(M,g)^{\frac{2}{n}}$$

por lo tanto

$$\frac{\displaystyle\int_M u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \leq (Vol(M,g))^{\frac{2}{n}}$$

y como $\inf_M \mathbf{s}_g < 0$ entonces, al multiplicar la desigualdad anterior por $\inf_M \mathbf{s}_g < 0$, se invierte la desigualdad y tenemos

$$Y_g(u) \geq \frac{\displaystyle\int_M \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \geq \left(\inf_M \mathbf{s}_g\right)\frac{\displaystyle\int_M u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \geq \left(\inf_M \mathbf{s}_g\right) Vol(M,g)^{\frac{2}{n}} \tag{2.4}$$

por lo tanto $Y_g(u)$ es acotado inferiormente.
De lo anterior, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.1.3. *Se define la* ***constante de Yamabe*** *de* (M, g) *por*

$$Y(M,[g]) = \inf_{h \in [g]} \mathcal{S}(h) = \inf_{\substack{u \in C^{\infty}(M) \\ u > 0}} Y_g(u) = \inf_{\substack{u \in C^{\infty}(M) \\ u > 0}} \left(\frac{\int_M a_n |\nabla_g u|_g^2 + \mathbf{s}_g u^2 dv_g}{\|u\|_p^2} \right) \tag{2.5}$$

A las métricas que realizan el ínfimo se les llama **métricas de Yamabe**.
Observemos que la definición (2.5) tiene sentido para $u \neq 0$ y dado que $C^{\infty}(M)$ es denso en $H^1(M)$ y $Y_g(|u|) = Y_g(u)$, entonces se puede tomar el ínfimo de Y_g sobre $H^1(M) - \{0\}$. Es decir

$$Y(M,[g]) = \inf_{\substack{u \in H^1(M) \\ u \neq 0}} Y_g(u)$$

Observemos que si $h \in [g]$ verifica $\mathcal{S}(h) = Y(M,[g])$, es decir $h \in [g]$ realiza el ínfimo de $\mathcal{S}$, entonces h tiene curvatura escalar constante. Por otro lado, si una función $u \in H^1(M)$ realiza el ínfimo entonces $|u|$ también lo realiza. Por lo tanto, podemos asumir que $u \geq 0$ y por regularidad elíptica tenemos que u es positiva. Los detalles se pueden ver en [40].

Proposición 2.1.2. *En una clase conforme no puede haber dos métricas tales que sus curvaturas escalares, tengan distinto signo.*

Demostración. Sea $h = u^{p-2} g \in [g]$, con $u \in H^1(M)$ positiva y supongamos que $\mathbf{s}_g > 0$. Entonces u satisface

$$-a_n \Delta_g u + \mathbf{s_g} u = \mathbf{s}_h u^{p-1}.$$

Integramos sobre M

$$-a_n \int_M \Delta_g u + \int_M \mathbf{s_g} u = \int_M \mathbf{s}_h u^{p-1}.$$

Por el teorema de divergencia sabemos que $\int_M \Delta_g u dv_g = 0$, entonces

$$0 < \int_M \mathbf{s_g} u = \int_M \mathbf{s}_h u^{p-1}$$

Por lo tanto no puede tenerse que $\mathbf{s}_h \leq 0$.
Similarmente se prueba que si $\mathbf{s}_g < 0$, entonces no puede haber una métrica $h \in [g]$ tal que $\mathbf{s}_h > 0$

□

Observación 2.1.1. *En el caso en que* $\mathbf{s}_g \equiv 0$ *y* $h = u^{p-2}g \in [g]$*, tenemos*

$$\int_M \mathbf{s}_h u^{p-1} = 0$$

Por lo tanto $\mathbf{s}_h \equiv 0$ *o* $\mathbf{s}_h$ *cambia de signo. Esto implica que si* $\mathbf{s}_h$ *es constante, entonces, necesariamente* $\mathbf{s}_h \equiv 0$*.*

La siguiente proposición nos dice que si la constante de Yamabe $Y(M,[g])$ se realiza, entonces de acuerdo con la proposición anterior, el signo de $Y(M,[g])$ determina el signo de la curvatura escalar de cualquier métrica en la clase conforme $[g]$.

Proposición 2.1.3. *Supongamos que existe una métrica en* $[g]$ *que realiza* $Y(M,[g])$*, entonces*

i) $Y(M,[g]) > 0$ *si y sólo si existe* $h \in [g]$ *con* $\mathbf{s}_h > 0$*.*

ii) $Y(M,[g]) = 0$ *si y sólo si existe* $h \in [g]$ *con* $\mathbf{s}_h = 0$*.*

iii) $Y(M,[g]) < 0$ *si y sólo si existe* $h \in [g]$ *con* $\mathbf{s}_h < 0$*.*

Demostración. Probamos (i). Suponga que $Y(M,[g]) > 0$. Sea $h = u^{p-2}g$ una métrica en $[g]$ que realiza $Y(M,[g])$. Entonces u satisface

$$-a_n \Delta_g u + \mathbf{s_g} u = \mathbf{s}_h u^{p-1}.$$

con $\mathbf{s}_h = \frac{Y(u)}{\|u\|_p^{p-2}}$. Como h realiza $Y(M,[g])$, esto significa $Y(u) = Y(M,[g]) > 0$. Por lo tanto $\mathbf{s}_h > 0$.
Inversamente, supongamos que existe $h \in [g]$ tal que $\mathbf{s}_h > 0$. Por hipótesis, hay una métrica $\overline{h} \in [g]$ que realiza $Y(M,[g])$. Por la proposición anterior $\mathbf{s}_{\overline{h}} > 0$. Entonces

$$Y(M,[g]) = \mathcal{S}(\overline{h}) = \frac{\int_M \mathbf{s}_{\overline{h}} dv_{\overline{h}}}{(Vol(M,\overline{h}))^{\frac{n-2}{n}}} = \mathbf{s}_{\overline{h}} (Vol(M,\overline{h}))^{\frac{2}{n}} > 0$$

Las afirmaciones (ii) y (iii) se prueban de manera análoga.

□

Ahora vamos a ver que si $Y(M,[g]) \leq 0$, hay unicidad de soluciones de la ecuación de Yamabe.

Proposición 2.1.4. *Si* $Y(M,[g]) \leq 0$*, existe una única métrica* $h \in [g]$ *con curvatura escalar constante, salvo homotecias.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{s}_g$ es constante igual a $\lambda \leq 0$. Sea $h = u^{p-2}g \in [g]$ tal que $\mathbf{s}_h = \lambda$. Entonces la función u satisface

$$-a_n\Delta_g u + \lambda u = \lambda u^{p-1}.$$

Si $\lambda = 0$, entonces u es constante, pues sobre una variedad cerrada no hay funciones armónicas no constantes.
Supongamos entonces que $\lambda < 0$. Como M es compacta, entonces hay un punto $x_0 \in M$ en el que u alcanza su máximo. Entonces $\Delta u(x_0) \leq 0$, esto significa que $u(x_0) \geq u^{p-1}(x_0)$. Como $p-1 \geq 1$ entonces $u(x_0) \leq 1$.
Similarmente, si u alcanza su mínimo en $x_1 \in M$, entonces $u(x_1) \geq 1$. Por lo tanto $u \equiv 1$ y esto implica que $h = g$. □

La proposición anterior no es cierta cuando $Y(M,[g]) > 0$. El caso de $(\mathbf{S}^n, [g_0^n])$ es un ejemplo.

2.2. El Problema de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$

En esta sección vamos a ver que la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$ tiene una familia de soluciones no compacta. Este es el primer ejemplo de multiplicidad de soluciones a la ecuación de Yamabe en el caso $Y(M,[g]) > 0$. En este caso la métrica g_0^n es minimizante y entonces

$$Y_n := Y(\mathbf{S}^n, [g_0^n]) = n(n-1)\left(Vol(\mathbf{S}^n, g_0^n)\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{2.6}$$

Sea $e_1, \dots e_n, e_{n+1}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $\pi \colon \mathbf{S}^n - \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ la proyección estereográfica

$$\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \tag{2.7}$$

La inversa está dada por $\pi^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{S}^n - \{e_{n+1}\}$

$$\pi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right).$$

Calculando la derivada de π^{-1} en la dirección e_1 obtenemos:

$$\pi_*^{-1}(e_1) \;=\; \frac{2}{(|y|^2+1)^2}\left(|y|^2+1-2y_1^2, -2y_1y_2, \dots, -2y_1y_n, 2y_1\right).$$

Similarmente la derivada de π^{-1} en la dirección e_2 es

$$\pi_*^{-1}(e_2) \quad = \quad \frac{2}{(|y|^2+1)^2}\left(2y_1y_2, |y|^2+1-2y_2^2, -2y_2y_3, \ldots, -2y_2y_n, 2y_2\right).$$

Entonces

$$g\left(\pi_*^{-1}(e_1), \pi_*^{-1}(e_1)\right) = \frac{4}{(|y|^2+1)^2} \quad \text{y} \quad g\left(\pi_*^{-1}(e_1), \pi_*^{-1}(e_2)\right) = 0.$$

En general

$$g\left(\pi_*^{-1}(e_i), \pi_*^{-1}(e_i)\right) = \frac{4}{(|y|^2+1)^2}, \qquad \forall i = 1 \ldots n,$$
$$g\left(\pi_*^{-1}(e_i), \pi_*^{-1}(e_j)\right) = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

por lo tanto

$$(\pi^{-1})^*(g_0^n) = \left(\frac{2}{|y|^2+1}\right)^2 \langle\cdot,\cdot\rangle = \left[\left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{\frac{4}{n-2}} \langle\cdot,\cdot\rangle, \tag{2.8}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la métrica Euclideana en $\mathbb{R}^n$. De esta forma obtenemos que la función

$$f(x) := \left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

satisface la ecuación de Yamabe (2.1) en $\mathbb{R}^n$, la cual toma la forma

$$-a_n \Delta f = n(n-1) f^{p-1}.$$

donde Δ denota el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$.
Si $\lambda > 0$, la homotecia $h_\lambda \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$h_\lambda(x) := \lambda x,$$

es un difeomorfismo conforme de $\mathbb{R}^n$. Éste induce el difeomorfismo conforme

$$H_\lambda := \pi^{-1} \circ h_\lambda \circ \pi \colon \mathbf{S}^n - \{e_{n+1}\} \to \mathbf{S}^n - \{e_{n+1}\},$$

que se extiende a un difeomorfismo conforme sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$ definiendo $H_\lambda(e_{n+1}) = e_{n+1}$. Observemos que

$$H_\lambda^*(g_0^n) = \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2|x|^2+1}\right)^2 \langle\ ,\ \rangle = \left[\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{\frac{4}{n-2}} \langle\ ,\ \rangle.$$

Llamemos f_λ a la función definida por

$$f_\lambda(x) := \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \tag{2.9}$$

entonces podemos escribir

$$(\pi^{-1}\circ h_\lambda)^*(g_0^n) = \left[\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{\frac{4}{n-2}} \langle\ ,\ \rangle = f_\lambda^{\frac{4}{n-2}}\langle\ ,\ \rangle = \left(\frac{f_\lambda}{f_1}\right)^{\frac{4}{n-2}} f_1^{\frac{4}{n-2}}\langle\ ,\ \rangle.$$

Por lo tanto $\frac{f_\lambda}{f_1}$ resuelve la ecuación de Yamabe (2.1). Notar que para $\lambda = 1$ tenemos la función $f_1(x) = \left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}$ la cual es precisamente el factor conforme de (2.8). Entonces $\frac{f_\lambda}{f_1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\frac{f_\lambda}{f_1}(x) = \left(\frac{\lambda(|x|^2+1)}{\lambda^2|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Considerando la proyección estereográfica (2.7), la expresión explícita de $\frac{f_\lambda}{f_1}$ sobre $\mathbf{S}^n$ está dada por

$$\frac{f_\lambda}{f_1}\circ\pi\colon \mathbf{S}^n - \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f_\lambda}{f_1}\circ\pi\right)(x) = \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2(1+x_{n+1})+1-x_{n+1}}\right).$$

Por construcción, para cada $\lambda > 0$, la métrica resultante $H_\lambda^* g_0^n = \left(\frac{f_\lambda}{f}\right)^{\frac{4}{n-2}} g_0^n$ es isométrica a g_0^n, por lo que tienen la misma curvatura escalar $n(n-1)$. Por lo tanto, las funciones $\frac{f_\lambda}{f}$ satisfacen

$$-a_n\Delta_{g_0^n}\left(\frac{f_\lambda}{f}\right) + n(n-1)\left(\frac{f_\lambda}{f}\right) = n(n-1)\left(\frac{f_\lambda}{f}\right)^{p-1}$$

Notar que

$$H_\lambda(e_{n+1}) = \frac{1}{\lambda} \to 0 \quad \text{y} \quad H_\lambda(-e_{n+1}) = \lambda \to \infty \quad (\text{si} \quad \lambda\to\infty)$$

Por lo tanto, las funciones $\frac{f_\lambda}{f}$ forman una familia no compacta de soluciones de la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$. De hecho, se puede demostrar que así se construyen todas las soluciones de la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n, g_0^n)$ y que son minimizantes del funcional de Yamabe (Ver [40]).

Las funciones f_λ del ejemplo anterior, son fundamentales en la prueba de que $Y(M,[g]) \leq Y_n := Y(\mathbf{S}^n,[g_0^n])$. Esto fue probado por T. Aubin en [8], usando las funciones f_λ como funciones test y el hecho de que estas se concentran en un punto, cuando λ es suficientemente pequeño. T. Aubin probó que si la desigualdad es estricta, es decir, si se cumple $Y(M,[g]) < Y_n$ entonces la constante de Yamabe siempre se realiza. Él también demostró que si (M,g) tiene dimensión $n \geq 6$ y no es localmente conformemente plana, entonces $Y(M,[g]) < Y(\mathbf{S}^n, g_0^n)$. R. Schoen [62], demostró que si (M,g) tiene dimensión 3, 4 o 5, o si (M,g) es localmente conformemente plana, entonces $Y(M,[g]) < Y(\mathbf{S}^n, g_0^n)$. Estos resultados concluyen la demostración de que la constante de Yamabe siempre se realiza, y por lo tanto, siempre hay al menos una solución al problema de Yamabe.

2.3. Hipersuperficies isoparamétricas.

A lo largo del trabajo usaremos los conceptos de función isoparamétrica y de hipersuperficie isoparamétrica. En esta sección introducimos estos conceptos y damos una breve reseña histórica sobre su clasificación en diferentes espacios. También consideramos acciones de cohomogeneidad uno sobre una variedad. Este tipo de acciones proporcionan ejemplos de funciones e hipersuperficies isoparamétricas.

Definición 2.3.1. *Dada una variedad Riemanniana (M,g) conexa. Una función suave $f\colon M \to [c,d] \subset \mathbb{R}$ no constante, se llama **isoparamétrica** si existe una función continua a y una función suave b tales que*

$$(i)\ \ |\nabla_g f|_g^2 = b \circ f \qquad y \qquad (ii)\ \ \Delta_g f = a \circ f \tag{2.10}$$

*La preimagen de los valores máximo y mínimo de f se llaman **variedades focales** y se denotan M_+ y M_- respectivamente y estas tienen codimensión mayor o igual que 2. Si $t \in (c,d)$ es un valor regular de f, las hipersuperficies $M_t := f^{-1}(t)$ se llaman **hipersuperficies isoparamétricas***

La condición (i) significa que las hipersuperficies M_t son paralelas y la condición (ii) significa que estas hipersuperficies tienen curvatura media constante.

Una introducción a las hipersuperficies isoparamétricas sobre variedades Riemannianas compactas, se puede ver en [71]. En este artículo, Q.M. Wang probó que dada una variedad Riemanniana cerrada y conexa, (M,g), y una función isoparamétrica

$f\colon M \to [c,d] \subset \mathbb{R}$, los únicos valores críticos de f son c y d. En este mismo artículo, Q.M. Wang también probó que las hipersuperficies focales $M_- := M_c := f^{-1}(c)$ y $M_+ := M_d := f^{-1}(d)$ son subvariedades de M.

Las hipersuperficies isoparamétricas han sido ampliamente estudiadas. En el caso de los espacios forma de dimensión n (esto es, una variedad Riemanniana (M,g) de dimensión n, completa, conexa y con curvatura seccional constante c. Si $c=0$ entonces $M=\mathbb{R}^n$, si $c=1$ entonces $M=\mathbf{S}^n$ y si $c=-1$ entonces $M=\mathbb{H}^n$, el espacio hiperbólico), E. Cartan probó en [17] que una hipersuperficie es isoparamétrica si y sólo si tiene curvaturas principales constantes. En el caso de $\mathbb{R}^n$, las hipersuperficies isoparamétricas son los encajes canónicos de $\mathbf{S}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ o $\mathbf{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, lo cual fue probado por T. Levi-Civita [42] y B. Segre [61]. En el caso de $\mathbb{H}^n$, E. Cartan probó en [17] que una hipersuperficie isoparamétrica es una de las siguientes: $\mathbb{H}^{n-1}$, $\mathbf{S}^{n-k}\times\mathbb{H}^{k-1}$, una esfera geodésica o una horoesfera.

La situación se vuelve más interesante en el caso de la esfera $\mathbf{S}^n$. E. Cartan, clasificó las hipersuperficies isoparamétricas en la esfera, con $l=1,2,3$ curvaturas principales distintas. Esta clasificación se puede ver en [18, Página 99]. Más tarde, H.F. Münzner probó en [49] y [50] que dada una hipersuperficie isoparamétrica $S \subset \mathbf{S}^n$ con l distintas curvaturas principales, existe un polinomio homogéneo $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de grado l que satisface ciertas ecuaciones, llamadas Ecuaciones de Cartan-Münzner. (Los detalles se pueden ver en [18, Página 115]). Usando estas ecuaciones, H.F Münzner probó que l sólo puede tomar los valores 1,2, 3, 4 o 6.

Las hipersuperficies isoparamétricas más comunes, son las órbitas regulares, de acciones de cohomogeneidad uno.

Definición 2.3.2. *Decimos que una variedad Riemanniana (M,g) es de* ***cohomogeneidad 1****, si admite una acción por isometrías de un grupo de Lie G compacto, con al menos una órbita de codimensión 1.*

Esto significa que el espacio de órbitas M/G tiene dimensión 1 y entonces M/G, salvo reescalamiento, es uno de los siguientes: $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$, $\mathbf{S}^1$ o $[-1,1]$. Esto fue probado por P.S. Mostert [48], cuando el grupo G es compacto. En el caso $M/G=[-1,1]$, si $\pi\colon M \to M/G$ es la función cociente, hay dos **órbitas singulares**, $\pi^{-1}(-1)$ y $\pi^{-1}(1)$. Las órbitas $\pi^{-1}(t)$, con $t \in (-1,1)$, se llaman **órbitas principales** y estas forman un conjunto denso en M. Si $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es suave, entonces $f := \varphi\circ\pi$ es isoparamétrica.

Para más detalles se puede ver el libro de M.M. Alexandrino y R. Bettiol, [2, Página 157] y las referencias ahí mencionadas.

Las órbitas regulares de una acción de un grupo de isometrías, que actúa sobre una variedad Riemanniana (M, g), con cohomogeneidad 1, son llamadas hipersuperficies isoparamétricas homogéneas. En el caso de $\mathbf{S}^n$, existen hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas. El primer ejemplo fue encontrado por H. Ozeki y M. Takeuchi en [53] y [54]. La clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas sobre la esfera es un problema difícil, el cual ha sido estudiado por muchos autores. Se puede ver por ejemplo [17, 49, 50, 1, 32, 26, 19, 46, 47]. La clasificación completa de las hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbf{S}^n$ fue anunciada recientemente por Q.S. Chi en [20].

En el caso de $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, Q.M. Wang [72], demostró que una hipersuperficie S en $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ es isoparamétrica si y sólo si $\pi^{-1}(M)$ es isoparamétrica en $\mathbf{S}^{2n+1}$, donde $\pi\colon \mathbf{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ es el mapa de Hopf. En este mismo artículo, Q.M Wang probó que hay hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, con curvaturas principales no constantes. M. Kimura probó en [36] que una hipersuperficie en $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ es homogénea si y sólo si, tiene curvaturas principales constantes. La clasificación de las hipersuperficies homogéneas en $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ fue lograda por R. Takagi en [67].

El estudio de las funciones isoparamétricas sobre variedades Riemannianas es de gran importancia, ya que éstas permiten reducir ecuaciones en derivadas parciales sobre la variedad, a ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden resultar más sencillas y por lo tanto puede ser de gran utilidad a la hora de buscar soluciones de una ecuación en derivadas parciales dada. Para nuestros propósitos, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión n y $f\colon M \to [c, d]$ una función isoparamétrica, i.e se cumplen las ecuaciones (2.10). Para cualquier función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función $u = \varphi \circ f$, con $\varphi\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ suave, resuelve la ecuación*

$$-\Delta_g u = h(u)$$

si y sólo si φ resuelve la ecuación

$$-b(t)\varphi''(t) - a(t)\varphi'(t) = h(\varphi(t)), \quad t \in [c, d]$$

Demostración. Es suficiente observar que

$$\begin{aligned}\Delta_g u &= \Delta_g(\varphi \circ f)\\ &= (\varphi'' \circ f)\left|\nabla_g f\right|_g^2 + (\varphi' \circ f)\,\Delta_g f\\ &= (\varphi'' \circ f)(b \circ f) + (\varphi' \circ f)(a \circ f)\end{aligned}$$

□

2.4. Teoría de Sturm

Como vimos en la proposición 2.3.1, las funciones isoparamétricas nos permiten convertir una ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria. Esta propiedad será fundamental a lo largo de este trabajo. Una vez que tenemos la ecuación ordinaria, queremos estudiar el comportamiento de los ceros de las soluciones de la ecuación ordinaria linealizada, en función de λ. Para ello usaremos el siguiente teorema de comparación de Sturm.

Teorema 2.4.1 (Sturm). *Sean u y v dos soluciones de las ecuaciones*

$$u''(t) + f(t)u'(t) + g(t)u(t) = 0 \quad t \in (a,b)$$

$$v''(t) + f(t)v'(t) + G(t)v(t) = 0, \quad t \in (a,b)$$

donde f, g y G son continuas. Sea (α,β) un subintervalo en el cual $u(t) \neq 0$ y $v(t) \neq 0$ y tal que $G(t) \geq g(t)$ para todo $t \in (a,b)$. Suponga también que

$$\frac{v'(\alpha)}{v(\alpha)} \leq \frac{u'(\alpha)}{u(\alpha)}$$

Entonces,

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \frac{u'(t)}{u(t)} \quad \textit{para todo} \quad t \in (\alpha,\beta) \tag{2.11}$$

La igualdad en (2.11) ocurre en algún $t \in (\alpha,\beta)$ si y sólo si $u \equiv v$. Si $u(\alpha) = 0$ entonces la fracción $\frac{u'(\alpha)}{u(\alpha)}$ se considera como infinito. Análogamente si $v(\alpha) = 0$.

Del teorema anterior se sigue que entre cada dos ceros consecutivos de u hay un cero de v y el i-ésimo cero de v es menor o igual que el i-ésimo cero de u.
La demostración se puede ver en [33, Página 229].

2.5. Teoría de bifurcación

En esta sección enunciamos algunos resultados de teoría de bifurcación que serán utilizados más adelante. Empezamos con algunos conceptos de cálculo diferencial en espacios de Banach. Se puede ver por ejemplo [4], [9].

Si X y Y son espacios de Banach, denotamos por $L(X, Y)$ al espacio de funciones lineales continuas de X en Y.

Definición 2.5.1. *Sean X, Y espacios de Banach y $U \subset X$ abierto. Decimos que un mapa $S\colon U \to Y$ es **Fréchet-diferenciable** en $u \in U$, con derivada $dS(u) \in L(X, Y)$, si*

$$S(u + v) = S(u) + dS(u)[v] + o(\|v\|), \quad \textit{cuando} \quad v \to 0$$

Decimos que S es Fréchet-diferenciable en U, si es Fréchet-diferenciable en todo punto de U.

En adelante, si un operador S es Fréchet-diferenciable diremos simplemente que S es **diferenciable**.
De la definición se sigue que, si un mapa S es diferenciable en u, entonces es continuo en u. Para encontrar la derivada de $S\colon U \subset X \to Y$, con U abierto, calculamos, para toda $v \in X$, el límite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{S(u + \epsilon v) - S(u)}{\epsilon} =: A_u v$$

Si $A_u \in L(X, Y)$, entonces S es diferenciable en u y $dS(u) = A_u$. Si $S : X \to Y$ es diferenciable tal que la derivada $dS : X \to L(X, Y)$ es continua, se dice que S es de clase C^1 y se denota $S \in C^1(X, Y)$ o $S \in C^1(X)$.

La **segunda derivada** de S es el mapa $d^2S : X \to L_2(X, Y)$

$$u \to d^2S(u)$$

donde $L_2(X, Y)$ es el conjunto de operadores bilineales continuos de X en Y. Si $u \to d^2S(u)$ es continuo, decimos que S es de clase C^2 y lo denotamos $S \in C^2(X, Y)$ o $S \in C^2(X)$.
Si X, Y y Z son espacios de Banach y $S\colon X \times Y \to Z$, consideramos los mapas

$$S_v\colon u \to S(u, v)$$

$$S_u\colon v \to S(u,v)$$

y definimos la derivada parcial de S con respecto a u en (u,v), por

$$\partial_u S(u,v) = dS_v(u)$$

Similarmente definimos la derivada parcial de S con respecto a v en (u,v), por

$$\partial_v S(u,v) = dS_u(v)$$

En particular tenemos $\partial_u S(u,v) \in L(X,Z)$ y $\partial_v S(u,v) \in L(Y,Z)$.

Si $S\colon X \times Y \to Z$ es diferenciable en $(u,v) \in X \times Y$, entonces S es parcialmente diferenciable y

$$\partial_u S(u,v)[h] = dS_v(u)[h] = dS(u,v)[h,0]$$
$$\partial_v S(u,v)[k] = dS_u(v)[k] = dS(u,v)[0,k]$$

En adelante usaremos la notación S'_u y S'_v para las derivadas parciales de S con respecto a la primera y segunda variable respectivamente. Con esta notación tenemos

$$\partial_u S(u,v)[h] = S'_u(u,v)[h] = dS(u,v)[h,0]$$
$$\partial_v S(u,v)[k] = S'_v(u,v)[k] = dS(u,v)[0,k]$$

Continuamos ahora, con una breve reseña de teoría de bifurcación.

Definición 2.5.2. *Sean X y Y espacios de Banach. Consideremos un operador $S\colon X \times \mathbb{R} \to Y$ tal que $S(0,\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto*

$$\Sigma_S = \{(u,\lambda) \in X \times \mathbb{R} : S(u,\lambda) = 0,\ u \neq 0\}$$

se llama el conjunto de ***soluciones no triviales*** *de la ecuación (2.12).*

La teoría de bifurcación estudia la existencia de valores λ_* en los cuales las soluciones no triviales de

$$S(u,\lambda) = 0 \tag{2.12}$$

se ramifican desde la solución trivial.

Definición 2.5.3. *Sean X, Y espacios de Banach y $S\colon X\times\mathbb{R}\to Y$ un mapa en $C^2(X\times\mathbb{R})$ tal que $S(0,\lambda)=0$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$. Un punto λ_0 se llama* ***punto de bifurcación*** *de $S(u,\lambda)=0$, si cada conjunto abierto que contiene a $(0,\lambda_0)$, contiene una solución no trivial (u,λ) de la ecuación (2.12).*

El principal propósito de la teoría de bifurcación es establecer condiciones para encontrar puntos de bifurcación y estudiar la estructura de Σ_S.

Como mencionamos anteriormente, denotamos por S'_u la derivada de S con respecto a la variable u. Similarmente $S''_{u,\lambda}$ denota la derivada de S'_u con respecto λ. Por otro lado, para un número $\lambda_0\in\mathbb{R}$, denotamos por $L_{\lambda_0}=S'_u(0,\lambda_0)$ la derivada de S con respecto a u en el punto $(0,\lambda_0)\in X\times\mathbb{R}$.

Observación 2.5.1.

Si para un número λ_0 se tiene que $L_{\lambda_0}\colon X\to Y$ es invertible, entonces por el teorema de la función implícita, existe un abierto $I:=(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$, con $\varepsilon>0$, un abierto U_0 alrededor de $0\in X$ y una función $f\colon I\to U_0$ de clase C^1, tal que $S(f(t),t)=0$ para todo $t\in I$. Luego, si $(u,t)\in U_0\times I$ tal que $S(u,t)=0$, entonces $u=f(t)$. Y como $S(0,t)=0$ para todo $t\in I$, tenemos que $f(t)=0$. Esto significa que, cerca de $(0,\lambda_0)$, la única solución de $S(u,\lambda)=0$ es la trivial. Por lo tanto λ_0 no es un punto de bifurcación.

En particular, si $S\colon X\times\mathbb{R}\to X$ es de la forma $S(u,\lambda)=\lambda u-Tu$, donde $T\colon X\to X$. Si $\lambda_0\notin Spec(T'(0))$, donde $Spec(T'(0))$ denota el espectro de $T'(0)$, entonces λ_0 no es un punto de bifurcación de $S(u,\lambda)=0$

Por otro lado, en general no es cierto que si L_{λ_0} no es invertible, entonces λ_0 es un punto de bifurcación. Se puede ver [4, Ejemplo 2.3].

Existe una teoría general de bifurcación (ver por ejemplo [4]), no obstante, nos vamos a centrar en la teoría de bifurcación para autovalores simples. Es decir, consideramos X, Y espacios de Banach y $S\colon X\times\mathbb{R}\to Y$ un mapa en $C^2(X\times\mathbb{R},Y)$, tal que $S(0,\lambda)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $L_{\lambda_0}=S'_u(0,\lambda_0)$, asumimos que $\ker(L_{\lambda_0})$ tiene dimensión uno.
El siguiente teorema, [22], nos da condiciones suficientes para determinar si un punto λ_0, en la situación anterior, es un punto de bifurcación de $S(u,\lambda)=0$.

Teorema 2.5.1 (Crandall-Rabinowitz)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $S\colon X\times\mathbb{R}\to Y$ un mapa en $C^2(X\times\mathbb{R},Y)$. Sea $\lambda_0\in\mathbb{R}$ y $L_{\lambda_0}=S'_u(0,\lambda_0)$. Suponga que*

1. *Existe* $u_0 \in X$, $u_0 \neq 0$ *tal que* $\ker(L_{\lambda_0}) = \langle u_0 \rangle$.

2. *Existe* $y_0 \in L(Y, \mathbb{R})$, $y_0 \neq 0$ *tal que* $R(L_{\lambda_0}) = \{y \in Y : y_0(y) = 0\}$, *donde* $R(L_{\lambda_0})$ *denota el rango de* L_{λ_0}

3. $S''_{u,\lambda}(0, \lambda_0)[u_0] \notin R(L_{\lambda_0})$.

Entonces, λ_0 *es un punto de bifurcación de* $S(u, \lambda) = 0$ *y cerca del punto* $(0, \lambda_0)$*, el conjunto de soluciones consiste de dos curvas: una es la solución trivial* $(0, \lambda)$ *y la otra es una curva de soluciones no triviales que se puede parametrizar por*

$$(u(t), \lambda(t)) = (tu_0 + \psi(t), \lambda(t)) \tag{2.13}$$

con $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ *y* $\lambda(0) = \lambda_0$

Denotemos $V = \ker L_{\lambda_0}$. Descomponiendo X como $X = V \oplus W$, con $W \neq \emptyset$, las condiciones (1) y (2) nos dicen que el estudio de la ecuación $S(u, \lambda) = 0$, se reduce a la ecuación de bifurcación

$$h(t, \lambda) := y_0 S(tu_0 + w(tu_0, \lambda)) = 0$$

donde $w \colon V_0 \times \Lambda_0 \to W_0$ es de clase C^2, V_0 y W_0 son abiertos alrededor de 0 en V y W respectivamente y Λ_0 abierto alrededor de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. [4, Lema 2.5]. La función w satisface $w(0, \lambda) = 0, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $w'_u(0, \lambda_0) = 0$.
Observemos que la función h es C^2 y por lo anterior, $(0, \lambda_0)$ es un punto crítico de h. La condición (3) garantiza que el Hessiano $Hessh(0, \lambda_0)$ de h en $(0, \lambda_0)$ es no singular y como $h''_{\lambda,\lambda}(0, \lambda) = 0$, el punto $(0, \lambda_0)$ es un punto crítico no degenerado de índice 1. Luego, por el lema de Morse [45], cerca del punto $(0, \lambda_0)$, el conjunto de soluciones consiste de dos curvas: una es la solución trivial $(0, \lambda)$ y la otra es una curva de soluciones no triviales que satisface 2.13
Los detalles de la demostración del teorema anterior, puede verse en [51, Teorema 3.2.2] o [4, Teorema 2.8].

Ahora vamos a enunciar el teorema de bifurcación global de P. Rabinowitz [51], [60], el cual será de suma importancia al analizar el comportamiento global de las ramas de bifurcación que aparecen en los puntos de bifurcación.

Teorema 2.5.2 (Rabinowitz)**.** *Sea* X *un espacio de Banach y* $S \colon D \subset X \times \mathbb{R} \to X$ *un mapa continuo de la forma* $S(u, \lambda) = u - \lambda K(u) - T(u)$*. Suponga además que*

1. $K\colon X \to X$ *es lineal y compacto.*

2. $T\colon D \to X$ *es compacto, de clase* C^1 *y* $T(0) = 0 = T'(0)$.

3. $(0, \lambda_0) \in D$ *y* $\frac{1}{\lambda_0}$, $\lambda_0 \neq 0$, *es un autovalor de* K *con multiplicidad impar.*

Sea $C = \overline{\Sigma_S}$ *la clausura de las soluciones no triviales de* $S(u, \lambda) = 0$ *y sea* C_0 *la componente conexa de* C *que contiene al punto de bifurcación* $(0, \lambda_0)$. *Entonces se cumple una de las siguientes*

1. C_0 *es no acotada en* $X \times \mathbb{R}$,

2. *Existe un punto de bifurcación* λ_* *de* $S(u, \lambda) = 0$, *con* $\lambda_* \neq \lambda_0$ *tal que* $(0, \lambda_*) \in C_0$.

3. ECUACIÓN DE TIPO YAMABE SOBRE $\mathbf{S}^N \times \mathbf{S}^N$

En este capítulo estudiamos la ecuación de tipo Yamabe subcrítica (1.6) sobre el producto Riemanniano $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$. Consideramos la acción diagonal del grupo $O(n+1)$ sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ y buscamos soluciones positivas de la que son invariantes bajo esta acción . Específicamente probamos el Teorema 1.0.1. Al final estudiamos el comportamiento local del conjunto de soluciones no triviales, cerca de ciertos puntos de bifurcación y probamos el Teorema 1.0.2.

Consideremos el producto Riemanniano $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$, donde g_0^n denota la métrica de curvatura seccional 1 sobre $\mathbf{S}^n$ y $\delta > 0$. Denotamos la métrica $g_0^n + \delta g_0^n$ por $G_\delta := g_0^n + \delta g_0^n$. La ecuación de Yamabe subcrítica sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, G_\delta)$, está dada por

$$- \Delta_{G_\delta} u + \lambda u = \lambda u^{q-1}, \tag{3.1}$$

donde $u\colon \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ es suave, $\lambda > 0$ y $2 < q < p_{2n} := \frac{4n}{2n-2}$. Note que la función constante $u = 1$ es solución de (3.1).

Consideremos ahora la acción diagonal de $O(n+1)$ sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$

$$O(n+1) \times \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$$
$$A \cdot (x, y) = (Ax, Ay).$$

Esta acción tiene dos órbitas singulares defieomorfas a $\mathbf{S}^n$. Las órbitas regulares son $O(n+1)/O(n-1)$. Por lo tando $O(n+1)$ actúa con cohomogeneidad 1 sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$. Denotamos por X_I el conjunto de funciones sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ que son invariantes bajo esta acción.

Consideremos el espacio de Banach

$$C^{2,\alpha}(X_I) := X_I \cap C^{2,\alpha}(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n)$$

Similarmente definimos

$$C^{0,\alpha}(X_I) := X_I \cap C^{0,\alpha}(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n),$$

Definimos ahora el espacio

$$C_+^{2,\alpha}(X_I) := \left\{u \in C^{2,\alpha}(X_I) : u > 0\right\}.$$

y definimos el operador $S : C_+^{2,\alpha}(X_I) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^{0,\alpha}(X_I)$ por

$$S(u,\lambda) = -\Delta_{G_\delta} u + \lambda(u - u^{q-1}).$$

Observe que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tenemos $S(1,\lambda) = 0$. Derivando S con respecto de u en $(1,\lambda)$ y evaluando en v tenemos

$$S_u'(1,\lambda)[v] = -\Delta_{G_\delta} v - \lambda(q-2)v.$$

Entonces

$$S_u'(1,\lambda)[v] = 0$$

si y sólo si

$$-\Delta_{G_\delta} v = \lambda(q-2)v. \tag{3.2}$$

Notemos que la ecuación (3.2) es un problema de autovalores. Recordemos que los autovalores de $-\Delta_{g_0^n}$ son de la forma $k(n+k-1)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Por otro lado, por [10, Proposición A.II.3, Página 114], sabemos que en general, si $(M \times N, g+h)$ es un producto Riemanniano, entonces los autovalores de Δ_{g+h} son de la forma $\lambda_i + \mu_j$, donde λ_i es un autovalor de Δ_g y μ_j es un autovalor de Δ_h, con $i, j = 0, 1, \ldots$. Entonces, los autovalores de $-\Delta_{G_\delta}$ están dados por

$$\begin{gathered}
0,\ \ n,\ \ 2(n+1),\ \ 3(n+2), \ldots \\
\frac{n}{\delta},\ \ \frac{2(n+1)}{\delta},\ \ \frac{3(n+1)}{\delta}, \ldots \\
n + \frac{n}{\delta},\ \ n + \frac{2(n+1)}{\delta},\ \ n + \frac{3(n+1)}{\delta}, \ldots \\
2(n+1) + \frac{n}{\delta},\ \ 2(n+1) + \frac{2(n+1)}{\delta},\ \ 2(n+1) + \frac{3(n+1)}{\delta}, \ldots
\end{gathered}$$

Lema 3.0.1. *Si $F \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es una función homogénea de grado m, entonces*

1. $\left|\nabla_{g_0^n} F\right|_{g_0^n}^2 = |\nabla F|^2 - m^2 F^2$

2. $\Delta_{g_0^n} F = \Delta F - m(m-1)F - nmF.$

La demostración del lema anterior se puede ver en [18, Página 112].

Consideremos la función $f\colon \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to [-1,1]$ definida por

$$f(x,y) = \langle x, y\rangle$$

Si fijamos $y \in \mathbf{S}^n$, la función $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \langle x, y\rangle$$

es homogénea de grado 1 y $F|_{\mathbf{S}^n} = f|_{\mathbf{S}^n\times\{y\}}$. Denotemos $f_y = f|_{\mathbf{S}^n\times\{y\}}$. Por el lema (3.0.1), tenemos

$$\left|\nabla_{g_0^n} f_y\right|^2_{g_0^n} = 1 - f_y^2, \quad \Delta_{g_0^n} f_y = -n f_y$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\nabla_{G_\delta} f|^2_{G_\delta} &= G_\delta\left(\nabla_{g_0^n} f + \frac{1}{\delta}\nabla_{g_0^n} f,\ \nabla_{g_0^n} f + \frac{1}{\delta}\nabla_{g_0^n} f\right)\\
&= (g_0^n + \delta g_0^n)\left(\nabla_{g_0^n} f + \frac{1}{\delta}\nabla_{g_0^n} f,\ \nabla_{g_0^n} f + \frac{1}{\delta}\nabla_{g_0^n} f\right)\\
&= \left|\nabla_{g_0^2} f\right|^2_{g_0^n} + \frac{1}{\delta}\left|\nabla_{g_0^2} f\right|^2_{g_0^n}\\
&= \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\left(1 - f^2\right)
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\Delta_{G_\delta} f = \Delta_{g_0^n} f + \frac{1}{\delta}\Delta_{g_0^n} f = -nf - n\frac{1}{\delta} f = -n\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) f$$

Entonces

$$\Delta_{G_\delta} f = -n\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) f = a \circ f, \qquad |\nabla_{G_\delta} f|^2_{G_\delta} = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\left(1 - f^2\right) = b \circ f \tag{3.3}$$

donde

$$a(t) := -n\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) t, \qquad b(t) := \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(1 - t^2)$$

Por lo tanto f es una función isoparamétrica.

Sabemos por [71], que una función isoparamétrica sobre una variedad cerrada y conexa, solamente tiene dos valores críticos. De hecho, se deduce de la expresión de la función $b(t)$, que los únicos valores críticos de f son su mínimo -1 y su máximo 1. Esto implica que sus variedades focales son $M_{-1} := f^{-1}(-1)$ y $M_1 := f^{-1}(1)$. Denotamos por $M_t := f^{-1}(t)$ con $t \in (-1,1)$, los conjuntos de nivel regulares de f, los cuales son hipersuperficies isoparamétricas.

Note que f es invariante bajo la acción de $O(n+1)$ sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$, es decir $f(A(x,y)) = f(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$. Entonces cada función $u\colon \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}$ invariante por la acción de $O(n+1)$, se puede escribir como $u = \varphi \circ f$ donde $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Dado que f es suave, entonces la regularidad de φ es la misma de u.

3.1. Ecuación de tipo Yamabe para funciones invariantes

En esta sección consideramos funciones definidas sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$, que son invariantes bajo la acción de $O(n+1)$ y utilizamos esta invarianza para escribir la ecuación (3.2) como una ecuación diferencial ordinaria.

Sea $u = \varphi \circ f \in X_I$, con φ suave. Entonces, por la Proposición 2.3.1, la ecuación (3.1), se escribe como

$$-(\varphi'' \circ f)\, |\nabla_{G_\delta} f|^2_{G_\delta} - (\varphi' \circ f)\Delta_{G_\delta} f + \lambda(\varphi \circ f) = \lambda(\varphi \circ f)^{q-1}$$

Usando las expresiones de $\Delta_{G_\delta} f$ y $|\nabla_{G_\delta} f|^2_{G_\delta}$ obtenidas en (3.3, y restringiendo f a M_t, obtenemos que u satisface la ecuación (3.1) si y sólo si φ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$-\left(1+\frac{1}{\delta}\right)(1-t^2)\varphi''(t) + nt\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\varphi'(t) + \lambda\varphi(t) = \lambda\varphi(t)^{q-1} \tag{3.4}$$

o bien

$$-(1-t^2)\varphi''(t) + nt\varphi'(t) + \frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\left(\varphi(t) - \varphi(t)^{q-1}\right) = 0 \tag{3.5}$$

con $t \in [-1,1]$.

Haciendo el cambio de variable $h(r) = \varphi(\cos(r))$ en la ecuación 3.7 tenemos

$$h''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}h'(r) + \frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\left(h(r) - h(r)^{q-1}\right) = 0 \tag{3.6}$$

con $r \in [0,\pi]$ y las condiciones $h'(0) = 0 = h'(\pi)$. Entonces $u = h(\arccos f)$ es una solución C^2 de la ecuación (3.1).
Similarmente, $v = \varphi \circ f \in X_I$ es solución de la ecuación (3.2) si y sólo si φ es solución de

$$(1-t^2)\varphi''(t) - nt\varphi'(t) + \frac{\lambda(q-2)}{1+\frac{1}{\delta}}\varphi(t) = 0 \tag{3.7}$$

Haciendo el cambio de variable $w(r) = \varphi(\cos(r))$ en la ecuación 3.7 tenemos

$$w''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}w'(r) + \frac{\lambda(q-2)}{1+\frac{1}{\delta}}w(r) = 0 \tag{3.8}$$

con $r \in [0,\pi]$ y las condiciones iniciales $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$. La solución w además debe satisface $w'(\pi) = 0$. Entonces $\varphi(t) = w(\arccos(t))$ resuelve la ecuación (3.7), entonces $v = \varphi \circ f$ es una solución C^2 de la ecuación (3.2).

3.2. Existencia de soluciones de la ecuación ordinaria linealizada

En esta sección probamos que existen soluciones de la ecuación ordinaria (3.8) y que estas soluciones son polinomios en coseno, definidas en $[0,\pi]$. Luego, utilizando el teorema de Sturm, estudiamos el número de ceros de estas soluciones en $(0,\pi)$.

Lema 3.2.1.
Para cada entero positivo k y $\lambda = \lambda_k = \frac{k(k+n-1)}{q-2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)$, la solución de (3.8) es de la forma $w_k = p_k(\cos(r))$, con $r \in [0,\pi]$, donde p_k es un polinomio de grado k.

Demostración. Definamos

$$L_\mu(w) := w''(r) + (n-1)\,\frac{\cos(r)}{\sin(r)}w'(r) + \mu w(r) \tag{3.9}$$

Entonces, para cada entero $m \geq 1$ tenemos

$$L_\mu(\cos^m(r)) = (\mu - m(n+m-1))\cos^m(r) + m(m-1)\cos^{m-2}(r)$$

Sea k un entero positivo fijo y $\mu_k := k(n+k-1)$. Consideremos $m \leq k$. Evaluando $\cos^m(r)$ en (3.9) con $\mu = \mu_k$, tenemos

$$L_{\mu_k}(\cos^m(r)) = (\mu_k - \mu_m)\cos^m(r) + m(m-1)\cos^{m-2}(r)$$

Calculemos la expresión de $L_{\mu_k}(\cos^m(r))$ para $m = 1, 2, \ldots, k-1, k$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Si } m = 1, & L_{\mu_k}(\cos(r)) = (\mu_k - \mu_1)\cos(r) \\
\text{Si } m = 2, & L_{\mu_k}(\cos^2(r)) = (\mu_k - \mu_2)\cos^2(r) + 2 \\
\text{Si } m = 3, & L_{\mu_k}(\cos^3(r)) = (\mu_k - \mu_3)\cos^3(r) + 6\cos(r) \\
\vdots & \vdots \\
\text{Si } m = k-2, & L_{\mu_k}(\cos^{k-2}(r)) = (\mu_k - \mu_{k-2})\cos^{k-2}(r) + (k-2)(k-3)\cos^{k-4}(r) \\
\text{Si } m = k-1, & L_{\mu_k}(\cos^{k-1}(r)) = (\mu_k - \mu_{k-1})\cos^{k-1}(r) + (k-1)(k-2)\cos^{k-3}(r) \\
\text{Si } m = k, & L_{\mu_k}(\cos^k(r)) = k(k-1)\cos^{k-2}(r)
\end{array}$$

Sea $w_k(r)$ un polinomio de grado k en $\cos(r)$, que es solución de (3.8) con $\mu = \mu_k$ y con coeficientes $A_k, \ldots, A_1, A_0$.

$$w_k(r) := p_k(\cos(r)) = A_k\cos^k(r) + A_{k-1}\cos^{k-1}(r) + A_{k-2}\cos^{k-2}(r) + \cdots + A_2\cos^2(r) + A_1\cos(r) + A_0$$

Vamos a determinar los valores de $A_k, \ldots, A_1, A_0$. Como w_k es solución de (3.8), entonces w_k satisface $L_{\mu_k}(w_k(r)) = 0$, es decir

$$\begin{aligned}
A_k L_{\mu_k}\left(\cos^k(r)\right) + A_{k-1}L_{\mu_k}\left(\cos^{k-1}(r)\right) + A_{k-2}L_{\mu_k}\left(\cos^{k-2}(r)\right)& \\
\cdots + A_2 L_{\mu_k}\left(\cos^2(r)\right) + A_1 L_{\mu_k}(\cos(r)) + A_0 L_{\mu_k}(1) &= 0
\end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones de $L_{\mu_k}(\cos^m(r))$, $m = 0, 1, \ldots, k$, en la igualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
k(k-1)A_k\cos^{k-2}(r) + A_{k-1}\Big((\mu_k - \mu_{k-1})\cos^{k-1}(r) + (k-1)(k-2)\cos^{k-3}(r)\Big)& \\
+A_{k-2}\Big((\mu_k - \mu_{k-2})\cos^{k-2}(r) + (k-2)(k-3)\cos^{k-4}(r)\Big)& \\
+A_{k-3}\Big((\mu_k - \mu_{k-3})\cos^{k-3}(r) + (k-3)(k-4)\cos^{k-5}(r)\Big)& \\
+\cdots + A_3\Big((\mu_k - \mu_3)\cos^3(r) + 6\cos(r)\Big) + A_2\Big((\mu_k - \mu_2)\cos^2(r) + 2\Big)& \\
+A_1(\mu_k - \mu_1)\cos(r) + A_0\mu_k &= 0
\end{aligned}$$

Agrupamos

$$\begin{aligned} &\Big(k(k-1)A_k + (\mu_k - \mu_{k-2})A_{k-2}\Big)\cos^{k-2}(r) + (\mu_k - \mu_{k-1})A_{k-1}\cos^{k-1}(r) \\ &\quad + \Big((k-1)(k-2)A_{k-1} + (\mu_k - \mu_{k-3})A_{k-3}\Big)\cos^{k-3}(r) \\ &\qquad + \Big((k-2)(k-3)A_{k-2} + (\mu_k - \mu_{k-4})A_{k-4}\Big)\cos^{k-4}(r) \\ &+ \;\cdots\; + \Big(20A_5 + (\mu_k - \mu_3)A_3\Big)\cos^3(r) + \Big(12A_4 + (\mu_k - \mu_2)A_2\Big)\cos^2(r) \\ &\qquad\qquad + \Big(6A_3 + (\mu_k - \mu_1)A_1\Big)\cos(r) \\ &\qquad\qquad\quad + 2A_2 + \mu_k A_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

De lo anterior obtenemos que $A_{k-1} = 0$ y en general todos los términos de la suma anterior, que son de la forma A_{k-m} con m impar, son iguales a 0.
Entonces, si k es par, en la ecuación (3.10) nos quedan solamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} k(k-1)A_k + (\mu_k - \mu_{k-2})A_{k-2} &= 0 \\ (k-2)(k-3)A_{k-2} + (\mu_k - \mu_{k-4})A_{k-4} &= 0 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ 12A_4 + (\mu_k - \mu_2)A_2 &= 0 \\ 2A_2 + \mu_k A_0 &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo hacia atrás obtenemos

$$A_2 = \frac{-\mu_k}{2}A_0$$

$$A_4 = \frac{\mu_k(\mu_k - \mu_2)}{2 \cdot 12}A_0$$

$$A_6 = \frac{-\mu_k(\mu_k - \mu_2)(\mu_k - \mu_4)}{2 \cdot 12 \cdot 30}A_0$$

y en general, para los m pares tales que $0 \leq m \leq k$, $m = 2l$

$$A_{k-2l} = \frac{(-1)^l \mu_k(\mu_k - \mu_2)(\mu_k - \mu_4)\cdots(\mu_k - \mu_{k-2l})}{2 \cdot 12 \cdot 30 \cdots (\mu_k - \mu_{k-(2l-1)})(\mu_k - \mu_{k-2l})}A_0$$

Por otro lado, como w_k es solución de la ecuación (3.8), w_k satisface la condición inicial $w_k(0) = 1$, de lo cual tenemos

$$A_k + A_{k-2} + \cdots + A_2 + A_0 = 1 \tag{3.11}$$

Sustituyendo cada A_j, $j = 2, 4, 6 \dots, k-2, k$ por su expresión en términos de A_0 obtenemos el valor de A_0 y luego los valores de $A_2, A_4 \dots, A_k$.

En el caso en que k es impar, en la ecuación (3.10) nos quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} k(k-1)A_k + (\mu_k - \mu_{k-2})A_{k-2} &= 0 \\ (k-2)(k-3)A_{k-2} + (\mu_k - \mu_{k-4})A_{k-4} &= 0 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ 20A_5 + (\mu_k - \mu_3)A_3 &= 0 \\ 6A_3 + (\mu_k - \mu_1)A_1 &= 0 \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso anterior, (con A_1 en lugar de A_0), obtenemos el valor de A_1 y luego los valores de $A_k, A_{k-2}, \dots, A_5, A_3$.

$\square$

Observación 3.2.1.

Note que si $\mu = \mu_k = \frac{\lambda(q-2)}{1+\frac{1}{\delta}}$, entonces $\lambda = \frac{\mu_k}{q-2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) = \frac{k(n+k-1)}{q-2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) = \lambda_k$. Entonces, las soluciones de (3.8) correspondientes a μ_k son las mismas que corresponden a λ_k.

Observación 3.2.2.

Siguiendo el método de la demostración del lema anterior, vamos a calcular las expresiones de w_1, w_2 y w_3.
Por ejemplo para $k = 3$ tenemos $\mu_3 = 3(n+2)$. Sea w_3 la solución de la ecuación (3.8, correspondiente a μ_3

$$w_3(r) = A_3 \cos^3(r) + A_2 \cos^2(r) + A_1 \cos(r) + A_0$$

Como $L_{\mu_3}(w_3(r)) = 0$ entonces

$$A_3 L_{\mu_3}\left(\cos^3(r)\right) + A_2 L_{\mu_2}\left(\cos^2(r)\right) + A_1 L_{\mu_1}\left(\cos(r)\right) + A_0 L_{\mu_3}\left(1\right) = 0$$

de lo cual obtenemos

$$6A_3 \cos(r) + A_2\left((\mu_3 - \mu_2)\cos^2(r) + 2\right) + A_1\left(\mu_3 - \mu_1\right)\cos(r) + \mu_3 A_0 = 0$$

por lo tanto $A_2 = 0$ y $A_0 = 0$. Entonces tenemos

$$6A_3 + (\mu_3 - \mu_1)A_1 = 0 \tag{3.12}$$

Como $A_2 = 0$ y $A_0 = 0$ entonces

$$w_3(r) = A_3 \cos^3(r) + A_1 \cos(r)$$

y dado que $w_3(r)$ es solución de (3.8) y $w_3(0) = 1$, entonces

$$A_3 + A_1 = 1 \tag{3.13}$$

De las ecuaciones (3.12), (3.13) y usando los valores $\mu_3 = 3(n+2)$, $\mu_1 = n$ obtenemos $A_1 = -\frac{3}{n}$ y $A_3 = \frac{n+3}{n}$. Por lo tanto la solución w_3 es

$$w_3(r) = \frac{n+3}{n}\cos^3(r) - \frac{3}{n}\cos(r)$$

De manera similar, obtenemos

$$w_2(r) = \frac{n+1}{n}\cos^2(r) - \frac{1}{n}, \qquad w_1(r) = \cos(r)$$

En general todas las soluciones de (3.8) pueden ser obtenidas de esta forma.

Lema 3.2.2. *La solución w_k de (3.8) correspondiente a $\lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{q-2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$, tiene exactamente k ceros en el intervalo $(0, \pi)$.*

Demostración. Usamos indución sobre k. Para $k = 1, 2, 3$ tenemos las expresiones explícitas de las soluciones w_1, w_2 y w_3 las cuales tienen 1, 2 y 3 ceros respectivamente en $(0, \pi)$.

Sean $m < l$ enteros positivos tales que w_m y w_l son soluciones de (3.8) asociadas a los autovalores λ_m y λ_l respectivamente. Es decir w_m y w_l satisfacen

$$w_m''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}w_m'(r) + \mu_m w_m(r) = 0$$

$$w_l''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}w_l'(r) + \mu_l w_l(r) = 0$$

Como $\mu_m = m(n+m-1) < l(l+n-1) = \mu_l$ entonces, por el teorema de comparación de Sturm 2.4.1, entre cada dos ceros de w_m hay al menos un cero de w_l, por lo que w_l tiene al menos el mismo número de ceros que w_m y si tiene exactamente el

mismo número, entonces w_l y w_m tienen el mismo signo después del último cero.
Supongamos que w_k tiene k ceros en $(0, \pi)$. Observe que si k es par entonces w_k es un polinomio en $\cos(r)$ con exponentes pares, por lo tanto es simétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$ lo cual implica que $w_k(\pi) = 1$. Observe que si k es impar entonces w_k es un polinomio en $\cos(r)$ con exponentes impares, por lo tanto es antisimétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$ y entonces $w_k(\pi) = -1$.
Por el comentario anterior, cuando nos movemos de k a $k+1$, las soluciones correspondientes cambian de signo en $r = \pi$, por lo que w_{k+1} debe tener un cero más que w_k. Entonces, por inducción, w_{k+1} tiene al menos $k+1$ ceros en $(0, \pi)$. Pero w_{k+1} es un polinomio en $\cos(r)$ y como $\cos(r)$ es inyectivo en $(0, \pi)$, se concluye que w_{k+1} tiene a lo sumo $k+1$ ceros en $(0, \pi)$.

$\square$

3.3. *Multiplicidad de soluciones positivas de la ecuación tipo Yamabe sobre* $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$

Esta sección está dedicada a la demostración del Teorema 1.0.1. Para ello, escribimos la ecuación de tipo Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$ como un operador $S(u, \lambda)$ y utilizando los resultados de la sección anterior y el Teorema 2.5.1, mostramos la existencia de puntos de bifurcación de $S(u, \lambda) = 0$ y estudiamos el comportamiento del conjunto de soluciones no triviales, cerca de los puntos de bifurcación. Finalmente, mediante el Teorema (2.5.2) de bifurcación global de Rabinowitz y la técnica blow-up, probamos la existencia de multiplicidad de soluciones.

Demostración del Teorema 1.0.1.
Usamos teoría de bifurcación. Recordemos que X_I es el conjunto de funciones sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ invariantes bajo la acción de $O(n+1)$.
Retomamos algunos conceptos que introdujimos al principio de este capítulo. Consideremos el espacio de Banach

$$C^{2,\alpha}(X_I) := X_I \cap C^{2,\alpha}(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n)$$

Igual que en la página (37), identificamos el espacio $C^{2,\alpha}(X_I)$ con el conjunto de funciones

$$\left\{ w \in C^{2,\alpha}([0,\pi]) : w'(0) = w'(\pi) = 0 \right\}.$$

y buscamos soluciones positivas de la ecuación (3.5).
Similarmente definimos

$$C^{0,\alpha}\left(X_I\right) := X_I \cap C^{0,\alpha}\left(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n\right),$$

el cual identificamos con el espacio $C^{0,\alpha}([0,\pi])$.
Definimos ahora el espacio

$$C^{2,\alpha}_{+}\left(X_I\right) := \left\{ u \in C^{2,\alpha}\left(X_I\right) : u > 0 \right\}.$$

Denotamos $G_\delta = g_0^n + \delta g_0^n$ y definimos el operador

$$S : C^{2,\alpha}_{+}\left(X_I\right) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^{0,\alpha}\left(X_I\right)$$

$$S(u,\lambda) = -\Delta_{G_\delta} u + \lambda(u - u^{q-1}).$$

Observe que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tenemos $S(1,\lambda) = 0$. Vamos a estudiar soluciones (u,λ) de $S(u,\lambda) = 0$ que se bifurcan desde la curva $(1,\lambda)$.
Derivando S con respecto de u en $(1,\lambda)$ y evaluando en v tenemos

$$S'_u(1,\lambda)[v] = -\Delta_{G_\delta} v - \lambda(q-2)v.$$

Entonces

$$S'_u(1,\lambda)[v] = 0$$

si y sólo si

$$-\Delta_{G_\delta} v = \lambda(q-2)v$$

Entonces, como vimos en la página (37), una función $v = \varphi \circ f \in C^{2,\alpha}_{+}\left(X_I\right)$ satisface la ecuación $S'_u(1,\lambda)[v] = 0$ si y sólo si φ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$-\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(1-t^2)\varphi''(t) + nt\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\varphi' = \lambda(q-2)\varphi(t)$$

con $t \in [-1,1]$. Haciendo el cambio de variable $w(r) = \varphi(\cos(r))$ la ecuación anterior, es equivalente a

$$w''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}w'(r) + \frac{\lambda(q-2)}{1+\frac{1}{\delta}}w(r) = 0 \tag{3.14}$$

con las condiciones $w'(0) = 0$, $w(0) = 1$. Observe que $w'(\pi) = 0$
Para cada entero positivo k, y $\lambda_k = \dfrac{k(n+k-1)}{q-2}\left(1+\dfrac{1}{\delta}\right)$, denotemos

$$L_k = S'_u(1, \lambda_k)$$

Por el Lema 3.2.1, sabemos que si $\lambda = \lambda_k$, entonces la solución correspondiente de (3.14) es de la forma $w_k(r) = p_k(\cos(r))$, donde p_k es un polinomio de grado k. Por lo tanto

$$\ker(L_k) = \langle w_k \rangle$$

Es decir, $\ker(L_k)$ tiene dimensión 1.
Note que mediante integración por partes, si $x \in C^{2,\alpha}(X_I)$ entonces

$$0 = \int_0^\pi L_k(w_k)\ x\ dr = \int_0^\pi L_k(x)\ w_k\ dr.$$

Esto implica que el rango $R(L_k)$ de L_k, es

$$R(L_k) = \left\{ y \in C^{0,\alpha}([0,\pi]) : \int_0^\pi y w_k\ dr = 0 \right\}.$$

Por otro lado, derivando S'_u con respecto de λ en $(1, \lambda_k)$ y evaluando en w_k tenemos

$$S''_{u,\lambda}(1, \lambda_k)[w_k] = (q-2) w_k,$$

y como $\int_0^\pi w_k^2\ dr \neq 0$ tenemos que

$$S''_{u,\lambda}(1, \lambda_k)[w_k] \notin R(L_k)$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.5.1, los números λ_k, son los puntos de bifurcación de $S(u, \lambda) = 0$ y cerca de $(1, \lambda_k)$, el espacio de soluciones consiste de dos curvas: una es la curva de soluciones triviales $\lambda \mapsto (1, \lambda)$, y la otra es una curva de soluciones no triviales, la cual se parametriza por

$$(u, \lambda) = (u(s), \lambda(s)) \ \text{ con } \ u(s) = 1 + s w_k + o(s^2), \ \text{ y } \ \lambda(0) = \lambda_k \tag{3.15}$$

Note que si $u \neq 1$ es una solución no trivial de la ecuación 3.1, y si h es la correspondiente solución de (3.6), entonces $h - 1$ tiene un número finito de ceros en $(0, \pi)$. Entonces, hay un abierto alrededor de h, donde todas las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (3.6) tiene el mismo número de ceros que $h - 1$.

Sea C la clausura del conjunto de soluciones no triviales, positivas de $S(u, \lambda) = 0$ en $C^{2,\alpha}(X_I)$. Sea C_k la componente conexa de C que contiene al punto $(1, \lambda_k)$. Localmente, las soluciones no triviales en C_k satisfacen (3.15) y como la solución w_k de la ecuación (3.14), la cual genera $\ker(L_k)$, tiene exactamente k ceros en $(0, \pi)$, entonces, por el Lema 3.2.2, se sigue que $(u(s), \lambda(s)) \in C_k$ y si $u(s) \neq 1$, entonces $u(s) - 1$ tiene exactamente k-ceros en $(0, \pi)$, para s pequeño. En particular $(1, \lambda_i)$ no pertecece a C_k si $i \neq k$.

Afirmación 1: C_k es no compacta

Demostración. Para probar esta afirmación vamos a usar el Teorema 2.5.1 de bifurcación global de Rabinowitz. Para ello escribimos la ecuación (3.1) en la forma adecuada para aplicar dicho teorema.
Dada una solución $u\colon \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ de la ecuación (3.1) hacemos $w = u - 1$. Entonces, u es una solución de (3.1) si y sólo si w satisface

$$- \Delta_{G_\delta} w + \lambda(w+1) = \lambda(w+1)^{q-1}. \tag{3.16}$$

Sea $K\colon C^{2,\alpha}(X_I) \to C^{2,\alpha}(X_I)$ el inverso del operador

$$-\Delta_{G_\delta} + Id\colon C^{4,\alpha}(X_I) \to C^{2,\alpha}(X_I).$$

El operador K es lineal y compacto. Consideremos la región

$$D := \left\{(w, \eta) \in C^{2,\alpha}(X_I) \times \mathbb{R} : w > -1, \eta > 1\right\},$$

Definimos $T\colon D \to C^{2,\alpha}(X_I)$ por

$$T(w, \eta) = \frac{\eta - 1}{q - 2} K\left((w+1)^{q-1} - (q-1)w - 1\right).$$

Observemos que T es un operador compacto y para cada $\eta > 1$ tenemos $T(0, \eta) = 0, \quad T'_w(0, \eta) = 0$. Ahora definimos $F\colon D \to C^{2,\alpha}(X_I)$ por

$$F(w, \eta) = w - \eta K(w) - T(w, \eta)$$

Note que $F(0, \eta) = 0$ para cada η. Y si aplicamos $-\Delta_{G_\delta} + Id$ a la ecuación $F(w, \eta) = 0$, vemos que $F(w, \eta) = 0$ si y sólo si

$$-\Delta_{G_\delta} w - \frac{\eta - 1}{q - 2}\left((w+1)^{q-1} - (w+1)\right) = 0.$$

Por lo tanto, $F(w, \eta) = 0$ si y sólo si w es una solución de la ecuación (3.16) para $\lambda = \frac{\eta-1}{q-2}$.

Sea $\eta_k = \lambda_k(q-2)+1$. Similarmente, como antes, sea B la clausura de las soluciones no triviales (w, η) de $F(w, \eta) = 0$ en D y sea B_k la componente conexa de B que contiene al punto $(0, \eta_k)$. Entonces, por el Teorema de bifurcacion global de Rabinowitz 2.5.2, [4, Teorema 4.8], se sigue que o B_k es no compacta o B_k contiene otro punto $(0, \eta_j)$ con $j \neq k$, con η_j punto de bifurcación de $F(w, \eta)$=0. Pero ya vimos que la segunda condición no se cumple, por lo tanto B_k es no compacta. Pero

$$C_k = \left\{ \left(w+1, \frac{\eta-1}{q-2} \right) : (w, \eta) \in B_k \right\}$$

y por lo tanto C_k es no compacta.

$\square$

Note que $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, G_\delta)$ tiene curvatura de Ricci positiva y por [14, Teorema 6.1], existe $\rho > 0$ tal que si $\lambda < \rho$ la ecuación (3.1) sólo tiene la solución trivial.

Afirmación 2: Para cualquier λ_0 y $0 < \rho < \lambda_0$, el conjunto

$$A := \{(u, \lambda) \in C^{2,\alpha}(X_I) \times \mathbb{R} : S(u, \lambda) = 0,\ \lambda \in [\rho, \lambda_0]\},$$

es compacto.

Demostración. Primero vamos a probar que existe $\Lambda > 0$ tal que si $(u, \lambda) \in A$ entonces $u \leq \Lambda$, (ver por ejemplo la prueba en [65, Teorema 2.1, página 200]). Sea (u_j, λ_j) una sucesión en A y sea x_j el punto de $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ en el que u_j alcanza su máximo m_j y tal que $m_j \to \infty$. Entonces, como $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ es compacta, tomando una subsucesión podemos asumir que $x_j \to x_0 \in \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ y $\lambda_j \to \lambda \in [\rho, \lambda_0]$.
Tomando un sistema de coordenadas normal centrado en x_0 y renormalizando u_j, podemos obtener una función positiva u, la cual es el límite de la función u_j renormalizada, y tal que u es solución de la ecuación

$$\Delta u + \lambda u^{p-1} = 0$$

en $\mathbb{R}^{2n}$. Pero como $p < p_{2n}$ es subcrítico, esta solución no existe, por [29].

Entonces, consideramos nuevamente el operador compacto $K\colon C^{2,\alpha}(X_I) \to C^{2,\alpha}(X_I)$ de la prueba de la afirmación (1) (el inverso de $-\Delta_{G_\delta}+Id$) y observamos que $S(u, \lambda) = 0$ si y sólo si $u = K(\lambda u^{p-1} - (\lambda-1)u)$, esto implica que A es compacto Esto concluye la prueba de la afirmación (2).

$\square$

Ahora, si existe $\lambda_* > \lambda_k$ tal que no existe $u \neq 0$ tal que $(u, \lambda_*) \in C_k$, entonces, como C_k es conexa, tenemos que $C_k \subset C_+^{2,\alpha}(X_I) \times [\rho, \lambda_*]$. Pero entonces la afirmación (2) implicaría que C_k es compacta, lo cual contradice la afirmación (1). Entonces, para cualquier $\lambda > \lambda_k$ existe $u \neq 0$ tal que $(u, \lambda) \in C_k$. Como $C_k \cap C_j = \emptyset$ si $j \neq k$, esto prueba el Teorema 1.0.1.

$\square$

3.4. Soluciones degeneradas de la ecuación tipo Yamabe sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$

En esta sección estudiamos la existencia de soluciones degeneradas, invariantes bajo la acción de $O(n+1)$, de la ecuación (3.1), las cuales nos ayudan a obtener información sobre el comportamiento de las ramas de soluciones no triviales, vistas en la sección anterior, que aparecen en los puntos de bifurcación. Utilizando el teorema de bifurcación local de Crandall-Rabinowitz, tenemos que, cerca de los puntos de bifurcación, las curvas de soluciones no triviales se parametrizan por $(u(s), \lambda(s))$. Para encontrar soluciones degeneradas, mostramos primero que la función λ correspondiente a un punto de bifurcación λ_*, verifica $\lambda'(0) \neq 0$. Entonces λ alcanza un mínimo en algún $s_0 \neq 0$ y obtenemos que $u(s_0)$ es una solución degenerada de la ecuación (3.1).

Consideremos nuevamente la ecuación (3.1) sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, G_\delta)$

$$-\Delta_{G_\delta} u + \lambda u = \lambda u^{q-1}, \tag{3.17}$$

donde $\lambda > 0$, $2 < q < p_{2n} = \frac{4n}{2n-2}$, $\delta > 0$ y $G_\delta = g_0^n + \delta g_0^n$.

Definición 3.4.1. *Decimos que una solución (u_0, λ_0) de la ecuación (3.17) es* ***degenerada*** *si la ecuación linealizada en (u_0, λ_0)*

$$-\Delta_{G_\delta} v + \lambda(1 - (q-1)u^{q-2})v = 0$$

tiene una solución no trivial.

Hacemos la sustitución $w = u - 1$ en la ecuación (3.17) y tenemos

$$-\Delta_{G_\delta} w + \lambda(w+1) = \lambda(w+1)^{q-1}. \tag{3.18}$$

Definimos el operador

$$F\colon C^{2,\alpha}(X_I) \times \mathbb{R} \to C^{0,\alpha}(X_I)$$
$$F(w,\lambda) = \Delta_{G_\delta} w - \lambda\big(w + 1 - (w+1)^{q-1}\big).$$

Recordemos que X_I denota el conjunto de funciones sobre $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$ que son invariantes por la acción del grupo $O(n+1)$. Mientras que

$$C^{2,\alpha}(X_I) := X_I \cap C^{2,\alpha}(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n)$$

Notemos que $F(0,\lambda) = 0$ para todo λ. Derivamos F en $(0,\lambda)$ con respecto de w

$$F'_w(0,\lambda)[v] = \Delta_{G_\delta} v + (q-2)\lambda v$$

Entonces

$$F'_w(0,\lambda)[v] = 0$$

si y sólo si

$$-\Delta_{G_\delta} v = (q-2)\lambda v$$

Note que esta ecuación es la misma ecuación (3.2) de la (34). Entonces, procediendo como en la sección anterior, tenemos que, para cada entero positivo k hay un autovalor de $-\Delta_{G_\delta}$

$$\lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{q-2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

y hay una función $\varphi_k = p_k \circ f$, donde p_k es un polinomio de grado k con k ceros simples en $(-1,1)$, tal que

$$\ker F'_w(0,\lambda_k) = \langle \varphi_k \rangle$$

Luego, los puntos λ_k son puntos de bifurcación de $F(w,\lambda) = 0$.

Dado que estamos en el caso de bifurcación para autovalores simples, por el Teorema 2.5.1 de Crandall-Rabinowitz, tenemos que cerca de $(0,\lambda_k)$, hay una curva de soluciones no triviales de $F(w,\lambda) = 0$, que se parametriza por $(w(s),\lambda(s))$ con $w(s) = s\varphi_k + \psi(s)$ donde $\varphi_k = p_k \circ f$ y p_k es un polinomio de grado k con k ceros simples en $(-1,1)$ y tal que

$$\lambda(0) = \lambda_k, \quad \psi(0) = 0 = \psi'(0) \tag{3.19}$$

Observación 3.4.1.

En lo que sigue de esta sección, todas las integrales que aparecen, están definidas sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$.

Lema 3.4.1. *Si $(w(s), \lambda(s))$ es la rama de soluciones no triviales de $F(w, \lambda) = 0$, que aparece en el punto $(0, \lambda_1)$, entonces $\lambda'(0) = 0$.*

Demostración. Sea $k \geq 1$. Sustituyendo $w(s) = s\varphi_k + \psi(s)$ en la ecuación (3.18) tenemos

$$\Delta_{G_\delta}\big(s\varphi_k + \psi(s)\big) - \lambda(s)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1 - \big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-1}\big) = 0.$$

Derivamos con respecto de s

$$\begin{aligned} \Delta_{G_\delta}\big(\varphi_k + \psi'(s)\big) - \lambda'(s)\Big[s\varphi_k + \psi(s) + 1 - (s\varphi_k + \psi(s) + 1)^{q-1}\Big] & \\ -\lambda(s)\Big[\varphi_k + \psi'(s) - (q-1)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-2}(\varphi_k + \psi'(s))\Big] &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando en $s = 0$ y usando las condiciones en (4.13) obtenemos

$$\Delta_{G_\delta}\varphi_k + (q-2)\lambda_k\varphi_k = 0.$$

Derivamos nuevamente con respecto de s

$$\begin{aligned} &\Delta_{G_\delta}\psi''(s) - \lambda''(s)\big[s\varphi_k + \psi(s) + 1 - (s\varphi_k + \psi(s) + 1)^{q-1}\Big] \\ &\quad - 2\lambda'(s)\Big[\varphi_k + \psi'(s) - (q-1)\,(s\varphi_k + \psi(s) + 1)^{q-2}\,(\varphi_k + \psi'(s))\Big] \\ &\quad - \lambda(s)\Big[\psi''(s) - (q-1)(q-2)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-3}\big(\varphi_k + \psi'(s)\big)^2 \\ &\quad -(q-1)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-2}\,(\psi''(s))\Big] \\ &\quad = 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Evaluando en $s = 0$ obtenemos

$$\Delta_{G_\delta}\psi''(0) + (q-2)\lambda_k\psi''(0) + (q-1)(q-2)\lambda_k\varphi_k^2 + 2(q-2)\lambda'(0)\varphi_k = 0 \tag{3.21}$$

Multiplicando por φ_k e integrando sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$, obtenemos

$$\lambda'(0) = \frac{-(q-1)\lambda_k \displaystyle\int \varphi_k^3}{2\displaystyle\int \varphi_k^2}$$

En el caso $k=1$, se tiene de la observación (3.2.2), que $p_1(t) = t$, por lo que

$$\varphi_1 = p_1 \circ f = f.$$

Entonces

$$\lambda'(0) = \frac{-(q-1)\lambda_1 \displaystyle\int f^3}{2\displaystyle\int f^2}$$

Para probar que $\lambda'(0) = 0$, basta probar que la integral en el numerador es igual a 0. Observemos que $f^3 = \alpha \circ f$ donde $\alpha(t) = t^3$ entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{G_\delta} f^3 &= \Delta_{G_\delta}(\alpha \circ f) \\
&= \alpha'(f)\Delta_{G_\delta} f + \alpha''(f)\left|\nabla_{G_\delta} f\right|^2_{G_\delta} \\
&= 3f^2\left(-n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f\right) + 6f\left(1+\frac{1}{\delta}\right)(1-f^2) \\
&= -3n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f^3 + 6\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f - 6\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f^3 \\
&= -(3n+6)\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f^3 + 6\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f
\end{aligned}$$

Por el teorema de divergencia

$$0 = \int \Delta_{G_\delta} f^3 = -(3n+6)\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int f^3 + 6\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int f$$

Entonces

$$\int f^3 = \frac{2}{n+2}\int f$$

Similarmente, por el teorema de divergencia

$$0 = \int \Delta_{G_\delta} f = -n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int f$$

entonces $\displaystyle\int f = 0$. Esto implica que $\displaystyle\int f^3 = 0$ y por lo tanto $\lambda'(0) = 0$.

□

De acuerdo con el lema anterior, la función $\lambda(s)$ correspondiente al primer punto de bifurcación, tiene un punto crítico en $s = 0$. Vamos a ver ahora que este punto crítico es un mínimo y por lo tanto, la rama de soluciones no triviales que aparece en λ_1, se abre hacia la derecha.

Lema 3.4.2. *Sea $(w(s), \lambda(s))$ es la rama de soluciones no triviales de $F(w, \lambda) = 0$, que aparece en el punto $(0, \lambda_1)$, Entonces $\lambda''(0) > 0$*

Demostración. Ya vimos que para $k = 1$ se tiene $\lambda'(0) = 0$. Queremos determinar el signo de $\lambda''(0)$. Derivamos nuevamente (3.20) con respecto de s

$$\begin{aligned}
&\Delta_{G_\delta}\psi'''(s) - \lambda'''(s)\Big[s\varphi_k + \psi(s) + 1 - \big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-1}\Big] \\
&-3\lambda''(s)\Big[\varphi_k + \psi'(s) - (q-1)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-2}\left(\varphi_k + \psi'(s)\right)\Big] \\
&-3\lambda'(s)\Big[\psi''(s) - (q-1)(q-2)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-3}\big(\varphi_k + \psi'(s)\big)^2 \\
&\qquad\qquad -(q-1)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-2}\left(\psi''(s)\right)\Big] \\
&-\lambda(s)\Big[\psi'''(s) - (q-1)(q-2)(q-3)\big(\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-4}\big(\varphi_k + \psi'(s)\big)^3 \\
&\qquad -2(q-1)(q-2)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-3}\left(\varphi_k + \psi'(s)\right)\left(\psi''(s)\right) \\
&\qquad\qquad -(q-1)(q-2)\left(s\varphi_k + \psi(s) + 1\right)^{q-3}\left(\varphi_k + \psi'(s)\right)\left(\psi''(s)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad -(q-1)\left(s\varphi_k + \psi(s) + 1\right)^{q-2}\left(\psi'''(s)\right)\Big] = 0
\end{aligned}$$

Evaluando la ecuación anterior en $s = 0$ y usando el hecho de que $\lambda'(0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\Delta_{G_\delta}\psi'''(0) + 3(q-2)\lambda''(0)\varphi_k + (q-2)\lambda_k\psi'''(0) \\
&\quad + (q-1)(q-2)(q-3)\lambda_k\varphi_k^3 + 3(q-1)(q-2)\lambda_k\varphi_k\psi''(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Multiplicando por φ_k e integrando

$$3(q-2)\lambda''(0)\int \varphi_k^2 + (q-1)(q-2)(q-3)\lambda_k \int \varphi_k^4 + 3(q-1)(q-2)\lambda_k \int \varphi_k^2\psi''(0) = 0 \tag{3.23}$$

Considerando $k = 1$, tenemos que $\varphi_1 = f$. Sustituyendo en la expresión (3.23), obtenemos

$$3(q-2)\lambda''(0)\int f^2 + (q-1)(q-2)(q-3)\lambda_1 \int f^4 + 3(q-1)(q-2)\lambda_1 \int f^2\psi''(0) = 0 \tag{3.24}$$

Vamos a hallar una expresión para $\psi''(0)$, en términos de f . Supongamos que $\psi''(0)$ es de la forma

$$\psi''(0) = Af^2 + B$$

donde A y B son constantes por determinar. Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{G_\delta}\psi''(0) &= A\Delta_{G_\delta} f^2 \\
&= A\left(2f\Delta_{G_\delta} f + 2\left|\nabla_{G_\delta}\right|^2_{G_\delta}\right) \\
&= A\left[-2n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f^2 + 2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left(1-f^2\right)\right] \\
&= -2A\left(1+\frac{1}{\delta}\right)(n+1)f^2 + 2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)A
\end{aligned}$$

Ahora, note que la ecuación (3.21) con $k = 1$, $(\varphi_1 = f)$ y $\lambda'(0) = 0$, se transforma en

$$\Delta_{G_\delta}\psi''(0) + (q-2)\lambda_1\psi''(0) + (q-1)(q-2)\lambda_1 f^2 = 0 \tag{3.25}$$

Sustituyendo las expresiones de $\Delta_{G_\delta}\psi''(0)$ y $\lambda_1 = \frac{n}{q-2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)$ en 3.25, obtenemos

$$-2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)(n+1)Af^2 + 2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)A + n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left(Af^2+B\right) + (q-1)n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f^2 = 0$$

ésta es equivalente a

$$-2(n+1)Af^2 + 2A + nAf^2 + nB + (q-1)nf^2 = 0$$

agrupamos

$$\Big(-2(n+1)A + nA + n(q-1)\Big)f^2 + nB + 2A = 0$$

de lo cual tenemos que los valores de A y B están dados por

$$A = \frac{n(q-1)}{n+2}, \qquad B = \frac{-2(q-1)}{n+2}.$$

Por lo tanto la función $\psi''(0)$ está dada por

$$\psi''(0) = \frac{n(q-1)}{n+2}f^2 - \frac{2(q-1)}{n+2}$$

Sustituyendo esta expresión de $\psi''(0)$ en (3.24), obtenemos

$$\begin{aligned}3(q-2)\lambda''(0)\int f^2 &+ (q-1)(q-2)(q-3)\lambda_1\int f^4\\ &+3(q-1)(q-2)\lambda_1\int f^2\left(\frac{n(q-1)}{n+2}f^2-\frac{2(q-1)}{n+2}\right)=0\end{aligned}$$

esta igualdad es equivalente a

$$\begin{aligned}3(q-2)\lambda''(0)\int f^2 &+ (q-1)(q-2)(q-3)\lambda_1\int f^4\\ &+\frac{3n(q-1)^2(q-2)\lambda_1}{n+2}\int f^4-\frac{6(q-1)^2(q-2)\lambda_1}{n+2}\int f^2=0\end{aligned}$$

Agrupamos

$$\begin{aligned}\left(3(q-2)\lambda''(0)-\frac{6(q-1)^2(q-2)\lambda_1}{n+2}\right)\int f^2&\\ +\frac{(q-1)(q-2)\lambda_1}{n+2}\Big((n+2)(q-3)+3n(q-1)\Big)\int f^4=0&\end{aligned}\tag{3.26}$$

Ahora, queremos expresar la integral $\displaystyle\int f^4$ en términos de la integral $\int f^2$. Para ello notamos que $f^4=\alpha\circ f$ donde $\alpha(t)=t^4$ entonces

$$\begin{aligned}\Delta_{G_\delta}f^4 &= \Delta_{G_\delta}(\alpha\circ f)\\ &= \alpha'(f)\Delta_{G_\delta}f+\alpha''(f)\big|\nabla_{G_\delta}f\big|^2_{G_\delta}\\ &= 4f^3\left(-n\left(1+\frac{1}{\delta}\right)f\right)+12f^2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)(1-f^2)\\ &= 4\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\Big(-(n+3)f^4+3f^2\Big)\end{aligned}$$

Por el teorema de divergencia sabemos que

$$0=\int\Delta_{G_\delta}f^4=\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int\Big(-(n+3)f^4+3f^2\Big)$$

Por lo que

$$\int f^4=\frac{3}{n+3}\int f^2$$

Sustituyendo en (3.26) se tiene

$$\left(3(q-2)\lambda''(0) - \frac{6(q-1)^2(q-2)\lambda_1}{n+2}\right)\int f^2 + \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\Big((n+2)(q-3)+3n(q-1)\Big)\int f^2 = 0$$

Factorizamos $\int f^2$ en la expresión anterior

$$\left[3(q-2)\lambda''(0) - \frac{6(q-1)^2(q-2)\lambda_1}{n+2} + \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\Big((n+2)(q-3)+3n(q-1)\Big)\right]\int f^2 = 0$$

entonces, usando el hecho de que $2 < q < \frac{2n}{n-1}$,

$$\begin{aligned}
3(q-2)\lambda''(0) &= \frac{6(q-1)^2(q-2)\lambda_1}{n+2} - \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\Big((n+2)(q-3)+3n(q-1)\Big)\\
&= \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\Big(2(n+3)(q-1)-(n+2)(q-3)-3n(q-1)\Big)\\
&= \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\Big((-n+6)(q-1)-(n+2)(q-3)\Big)\\
&= \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\Big(2(2-n)q+4n\Big)\\
&\geq \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\left(2(2-n)\left(\frac{2n}{n-1}\right)+4n\right)\\
&> \frac{3(q-1)(q-2)\lambda_1}{(n+2)(n+3)}\left(\frac{4n}{n-1}\right)\\
&> 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda''(0) > 0$ para $2 < q < p_{2n} = \frac{2n}{n-1}$. □

Dado que, en el primer punto de bifurcación λ_1, tenemos $\lambda'(0) = 0$ y $\lambda''(0) > 0$, vamos a analizar el comportamiento de la curva de soluciones no triviales que aparece en el segundo punto de bifurcación λ_2.

Lema 3.4.3. *Si $(w(s), \lambda(s))$ es la rama de soluciones no triviales de $F(w,\lambda) = 0$, que aparece en el punto $(0, \lambda_2)$, entonces $\lambda'(0) \neq 0$.*

Demostración. Procedemos de manera análoga al lema (3.4.1). Sustituimos $w(s) = s\varphi_k + \psi(s)$ en la ecuación (3.18) tenemos

$$\Delta_{G_\delta}\big(s\varphi_k + \psi(s)\big) - \lambda(s)\big(s\varphi_k + \psi(s) + 1 - \big(s\varphi_k + \psi(s) + 1\big)^{q-1}\big) = 0$$

Derivando dos veces con respecto a s y evaluando en $s = 0$, obtenemos

$$\Delta_{G_\delta}\psi''(0) + (q-2)\lambda_k\psi''(0) + (q-1)(q-2)\lambda_k\varphi_k^2 + 2(q-2)\lambda'(0)\varphi_k = 0$$

Multiplicando por φ_k e integrando obtenemos

$$\lambda'(0) = \frac{-(q-1)\lambda_k \displaystyle\int \varphi_k^3}{2\displaystyle\int \varphi_k^2}$$

En el caso $k = 2$ se tiene

$$\varphi_2 = \frac{n+1}{n} f^2 - \frac{1}{n}.$$

Entonces

$$\lambda'(0) = \frac{-(q-1)\lambda_1 \displaystyle\int \left(\frac{n+1}{n} f^2 - \frac{1}{n}\right)^3}{2\displaystyle\int \left(\frac{n+1}{n} f^2 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

Puesto que la integral en el denominador es positiva, vamos a desarrollar la integral del numerador, la cual denotamos por I. Usamos también la notación $V := Vol\,(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, G_\delta)$. Entonces

$$\begin{aligned} I &:= \int \left(\frac{n+1}{n} f^2 - \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= \left[\frac{(n+1)^3}{n^3}\int f^6 - \frac{3(n+1)^2}{n^3}\int f^4 + \frac{3(n+1)}{n^3}\int f^2 - \frac{1}{n^3}V\right] \end{aligned} \tag{3.27}$$

Anteriormente habíamos calculado el laplaciano de f^2

$$\Delta_{G_\delta} f^2 = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\left(-2(n+1)f^2 + 2\right)$$

Por el teorema de divergencia

$$0 = \int \Delta_{G_\delta} f^2 = \int \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\left(-2(n+1)f^2 + 2\right)$$

Entonces obtenemos

$$\int f^2 = \frac{1}{n+1} V$$

También habíamos calculado el Laplaciano de f^4, el cual está dado por

$$\Delta_{G_\delta} f^4 = 4\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\left(-(n+3)f^4 + 3f^2\right)$$

Usando el teorema de divergencia igual que antes obtenemos

$$\int f^4 = \frac{3}{n+3}\int f^2 = \frac{3}{n+3} \cdot \frac{1}{n+1} V$$

Similarmente

$$\int f^6 = \frac{5}{n+5}\int f^4 = \frac{5}{n+5}\frac{3}{n+3}\int f^2 = \frac{5}{n+5} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{1}{n+1} V$$

Sustituyendo las expresiones de las integrales anteriores en (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{V}{n^3}\left[\frac{15(n+1)^3}{(n+5)(n+3)(n+1)} - \frac{9(n+1)^2}{(n+3)(n+1)} + \frac{3(n+1)}{n+1} - 1\right] \\
&= \frac{V}{n^3}\left[\frac{15(n+1)^2}{(n+5)(n+3)} - \frac{9(n+1)}{(n+3)} + 2\right] \\
&= \frac{V}{n^3(n+5)(n+3)}\left[15(n+1)^2 - 9(n+1)(n+5) + 2(n+5)(n+3)\right] \\
&= \frac{V}{n^3(n+5)(n+3)}\left[15(n^2+2n+1) - 9(n^2+6n+5) + 2(n^2+8n+15)\right] \\
&= \frac{V}{n^3(n+5)(n+3)}\left[15n^2 + 30n + 15 - 9n^2 - 54n - 45 + 2n^2 + 16n + 30)\right] \\
&= \frac{V}{n^3(n+5)(n+3)}\left(8n(n-1)\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda'(0) \neq 0$.

□

Ya podemos demostrar el Teorema 1.0.2.

Demostración del Teorema 1.0.2. Como $g_0^n + \delta g_0^n$ tiene curvatura de Ricci positiva, entonces por [14, Teorema 6.1], sabemos que existe un valor $\rho > 0$, tal que si $\lambda < \rho$ entonces la ecuación (3.17),

$$F(w, \lambda) = 0$$

tiene sólo la solución trivial.

Recordemos que el operador F está definido por

$$F(w,\lambda) = \Delta_{G_\delta} w - \lambda(w + 1 - (w+1)^{q-1})$$

Una función $O(n+1)$-invariante, $w = \varphi \circ f$ satisface la ecuación $F(w,\lambda) = 0$ si y sólo si φ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$-(1-t^2)\varphi''(t) + nt\varphi'(t) + \frac{\lambda}{(1+\frac{1}{\delta})}\Big(\varphi(t) + 1 - (\varphi(t)+1)^{q-1}\Big) = 0 \qquad (3.28)$$

con $t \in [-1,1]$.

Consideremos el conjunto

$$B := \{(w,\lambda) : F(w,\lambda) = 0,\ \lambda \in [\rho, \lambda_2]\},$$

Denotamos por C la clausura del conjunto de soluciones no triviales de $F(w,0) = 0$. Sea C_2 la componente conexa de C que contiene el punto $(0,\lambda_2)$. Por el Teorema 2.5.1, sabemos que cerca de $(0,\lambda_2)$, la soluciones no triviales en C_2 se parametrizan por $(w(s),\lambda(s))$, con $w(s) = s\varphi_k + o(s^2)$ y $\lambda(0) = \lambda_2$. Por el Lema 3.4.3, tenemos que $\lambda'(0) \neq 0$. Esto implica que existen valores $\lambda < \lambda_2$, para los cuales la ecuación $F(w,\lambda) = 0$ tiene soluciones no triviales. Entonces la función λ tiene un mínimo $\lambda_* \in [\rho,\lambda_2)$. Observe que $C_2 \cap B$ está contenido en B, lo cual muestra que B es no vacío.
Por el mismo argumento en la página (46), en la demostración de la afirmación (2) del Teorema 1.0.1, tenemos que el conjunto B es compacto.
Sea (λ_i) una sucesión en $[\rho,\lambda_2)$ que converge a λ_* con una solución w_i de $F(w,\lambda) = 0$. Es decir, la sucesión (w_i,λ_i) satisface $F(w_i,\lambda_i) = 0$. Como B es compacto entonces la sucesión (w_i,λ_i) converge a un punto $(w_*,\lambda_*) \in B$. Por lo tanto, (w_*,λ_*) es una solución de la ecuación $F(w,\lambda) = 0$.
Como $\lambda'(0) \neq 0$, existen valores $\lambda < \lambda_2$, para los cuales la ecuación $F(w,\lambda) = 0$ tiene soluciones no triviales, tales que la correspondiente solución de la ecuación ordinaria (3.28) tiene exactamente dos ceros en $(-1,1)$. Sea W_2 el conjunto de funciones $w = \varphi \circ f \in C^{2,\alpha}(X_1)$ tales que φ tiene exactamente 2 ceros en $(-1,1)$.

Dado que las soluciones de la ecuación ordinaria (3.28) correspondientes a las soluciones no triviales de $F(w,\lambda) = 0$, que aparecen en el punto $(0,\lambda_1)$, tienen solamente un cero en $(-1,1)$ y λ_1 es el único punto de bifurcación menor que λ_2, entonces, por el argumento en la página (3.3), tenemos que $w_* \in W_2$. Por lo tanto w_* es una solución no trivial de $F(w, \lambda) = 0$.

Vamos a probar ahora, que (w_*, λ_*) es una solución degenerada de $F(w, \lambda) = 0$. Supongamos por contradicción que (w_*, λ_*) es no degenerada. En este caso, la derivada de F como función de ambas variables (w, λ), con respecto a w en (w_*, λ_*), está dada por

$$F'_w \colon C^{2,\alpha}(X_I) \times \mathbb{R} \to C^{2,\alpha}(X_I)$$

$$F'_w(w_*, \lambda_*)[v, \lambda] = \Delta_{G_\delta} v - \lambda_*(1 - (q-1)w_*^{q-2})v$$

Si (w_*, λ_*) fuera no degenerada, la ecuación

$$\Delta_{G_\delta} v - \lambda_*(1 - (q-1)w_*^{q-2})v = 0$$

tendría sólo la solución trivial $v \equiv 0$. Esto significa que el operador F es un difeomorfismo local en la dirección de w, en el punto w_*. Entonces, hay valores $\lambda < \lambda_*$ para los cuales la ecuación $F(w, \lambda) = 0$ tiene soluciones no triviales, cuya correspondiente solución de la ecuación (3.28) tiene dos ceros. Lo cual contradice el hecho de que λ_* es el mínimo valor para el cual existen soluciones existen.

Por lo tanto, la solución (w_*, λ_*) es una solución degenerada de $F(w, \lambda) = 0$. Entonces, definiendo $u_* := w_* + 1$, tenemos que (u_*, λ_*) es una solución degenerada de la ecuación (3.1). Esto finaliza la prueba del Teorema 1.0.2.

□

4. ECUACIÓN TIPO YAMABE SOBRE $\mathbb{C}\mathbf{P}^N$

En este capítulo vamos a estudiar la ecuación subcrítica de tipo Yamabe sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$.

$$-\Delta_{g_{FS}}u + \lambda u = \lambda u^{q-1}. \tag{4.1}$$

donde $u\colon \mathbb{C}\mathbf{P}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ es suave, $\lambda > 0$, $2 < q < p_{2n} := \frac{4n}{2n-2}$ y g_{FS} es la métrica de Fubini-Study. Dado que la métrica g_{FS} es de Einstein, entonces, por [52], en el caso crítico $q = p_{2n} - 1$ y $\lambda = -\frac{S_{g_{FS}}}{a_{2n}}$, la única solución positiva de la ecuación (4.1) es la solución constante $u \equiv 1$.

Denotamos por Z_I al conjunto de funciones suaves sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, invariantes bajo la acción de $U(n)$. Consideremos el espacio de Banach

$$C_+^{2,\alpha}(Z_I) := Z_I \cap C_+^{2,\alpha}\left(\mathbb{C}\mathbf{P}^n\right)$$

donde $C_+^{2,\alpha}\left(\mathbb{C}\mathbf{P}^n\right)$ es el conjunto de funciones en $C^{2,\alpha}\left(\mathbb{C}\mathbf{P}^n\right)$ mayores o iguales que 0. Similarmente denotamos

$$C_+^{0,\alpha}(Z_I) := Z_I \cap C_+^{0,\alpha}\left(\mathbb{C}\mathbf{P}^n\right)$$

Definimos el operador

$$S : C_+^{2,\alpha}\left(Z_I\right) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^{0,\alpha}\left(Z_I\right)$$
$$S(u,\lambda) = -\Delta_{g_{FS}}u + \lambda(u - u^{q-1}).$$

Observe que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tenemos $S(1,\lambda) = 0$. Derivando S con respecto de u en $(1,\lambda)$ y evaluando en v tenemos

$$S'_u(1,\lambda)[v] = -\Delta_{g_{FS}}v - \lambda(q-2)v.$$

Entonces

$$S'_u(1,\lambda)[v] = 0$$

si y sólo si

$$-\Delta_{g_{FS}} v = (q-2)\lambda v. \tag{4.2}$$

Sabemos por [10, Página 173], que los autovalores de $-\Delta_{g_{FS}}$ sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ están dados por $4k(k+n)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces los autovalores del problema (4.2) están dados por

$$\lambda_k := \frac{4k(k+n)}{q-2}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4.1. Ecuación de tipo Yamabe sobre para funciones invariantes.

En esta sección vamos a escribir la ecuación (4.2) como una ecuación diferencial ordinaria. Para ello, consideramos funciones sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, invariantes bajo la acción de $U(n)$.

Consideremos la acción de cohomogeneidad uno de $U(n)$ sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$. El espacio de órbitas es isométrico a $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sea $f \colon \mathbb{C}\mathbf{P}^n \to [0, \frac{\pi}{2}]$ la función cociente. Las órbitas singulares de esta acción son $p_0 = f^{-1}(0)$, donde $p_0 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ es un punto fijo bajo la acción de $U(n)$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1} = f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Las órbitas regulares $M_r := f^{-1}(r)$ con $r \in (0, \frac{\pi}{2})$, son difeomorfas a $\mathbf{S}^{2n-1}$. Para más detalles se puede ver el [2].

Puesto que la función cociente f es una submersión Riemanniana, entonces es una función distancia [58, Lema 3.2.8], definida en un abierto de $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, es decir $\left|\nabla_{g_{FS}} f\right|_{g_{FS}} = 1$. Por otro lado, por [28, Proposición 4.16], el Laplaciano de la función f, sobre $(\mathbb{C}\mathbf{P}^n, g_{FS})$ está dado por

$$\Delta_{g_{FS}} f = \frac{2n\cos^2(f) - 1}{\cos(f)\sin(f)}.$$

Si $u \in C^{2,\alpha}(Z_I)$ es una una solución de (4.1), entonces $u = \varphi \circ f$, donde $\varphi \colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ y u es C^2 si φ es C^2 y $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(\pi/2)$. Observe que,

$$\Delta_{g_{FS}} u = (\varphi'' \circ f)\left|\nabla_{g_{FS}} f\right|^2_{g_{FS}} + (\varphi' \circ f)\Delta_{g_{FS}} f = (\varphi'' \circ f) + (\varphi' \circ f)\Delta_{g_{FS}} f$$

Entonces, por la Proposición 2.3.1, u es solución de (4.1) si y sólo si φ es solución

$$-\varphi''(r) - \left(\frac{2n\cos^2(r) - 1}{\cos(r)\sin(r)}\right)\varphi'(r) + \lambda\varphi(r) = \lambda\varphi(r)^{q-1} \tag{4.3}$$

Similarmente, $v = \varphi \circ f \in C^{2,\alpha}(Z_I)$ es una una solución de (4.2), donde φ es C^2, si y sólo si φ satisface

$$\varphi''(r) + \left(\frac{2n\cos^2(r) - 1}{\cos(r)\sin(r)}\right)\varphi'(r) + \lambda(q-2)\varphi(r) = 0 \tag{4.4}$$

con $r \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(\pi/2)$.

4.2. Existencia de soluciones de la ecuación ordinaria linealizada.

En esta sección demostramos dos lemas. El primero de ellos muestra que para cada entero positivo k, la ecuación (4.4) tiene una solución correspondiente al autovalor λ_k y que esta solución es un polinomio en cos^2. El segundo lema muestra que todos los ceros de esta solución están contenidos en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y son simples.

Deotemos $\lambda_k = \frac{4k(k+n)}{q-2}$.

Lema 4.2.1. *Para cada entero positivo k, la solución de (4.4), con $\lambda = \lambda_k$ es de la forma*

$$\varphi_k(r) := p_k(\cos^2(r)),$$

donde p_k es un polinomio de grado k y $r \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Demostración. Definamos el operador

$$L_\mu(\varphi) := \varphi''(r) + \left(\frac{2n\cos^2(r) - 1}{\cos(r)\sin(r)}\right)\varphi'(r) + \mu\varphi. \tag{4.5}$$

Entonces, para cada entero $m \geq 1$

$$L_\mu(\cos^{2m} t) = (\mu - 4m(m+n))\cos^{2m}(r) + 4m^2\cos^{2m-2}(r).$$

Para cada entero positivo k el autovalor correspondiente a k es $\mu_k = 4k(k+n)$. Sea $1 \leq m \leq k$. Evaluando $\cos^{2m}(r)$ en (4.5) con $\mu = \mu_k$, tenemos

$$L_{\mu_k}(\cos^{2m}(r)) = (\mu_k - \mu_m)\cos^{2m}(r) + 4m^2\cos^{2m-2}(r).$$

Calculemos la expresión de $L_{\mu_k}\left(\cos^{2m}(r)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, k-1, k$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Si } m = 1, & L_{\mu_k}(\cos^2(r)) = (\mu_k - \mu_1)\cos^2(r) + 4 \\
\text{Si } m = 2, & L_{\mu_k}(\cos^4(r)) = (\mu_k - \mu_2)\cos^4(r) + 4 \cdot 2^2 \cos^2(r) \\
\text{Si } m = 3, & L_{\mu_k}(\cos^6(r)) = (\mu_k - \mu_3)\cos^6(r) + 4 \cdot 3^2 \cos^4(r) \\
\vdots & \vdots \\
\text{Si } m = k-2, & L_{\mu_k}(\cos^{2k-4}(r)) = (\mu_k - \mu_{k-2})\cos^{2k-4}(r) + 4(k-2)^2 \cos^{2k-6}(r) \\
\text{Si } m = k-1, & L_{\mu_k}(\cos^{2k-2}(r)) = (\mu_k - \mu_{k-1})\cos^{2k-2}(r) + 4(k-1)^2 \cos^{2k-4}(r) \\
\text{Si } m = k, & L_{\mu_k}(\cos^{2k}(r)) = 4k^2 \cos^{2k-2}(r)
\end{array}$$

Definamos ahora

$$\varphi_k(r) := p_k(\cos^2(r)) = A_k \cos^{2k}(r) + A_{k-1}\cos^{2k-2}(r) + \cdots + A_2 \cos^4(r) + A_1 \cos^2(r) + A_0$$

La función $\varphi_k(r)$ es un polinomio en $\cos^2(r)$ que es solución de (4.4) con $\mu = \mu_k$, donde $A_k, \ldots, A_1, A_0$ son constantes por determinar.

Como φ_k es solución de la ecuación (4.4), φ_k satisface $L_{\mu_k}(\varphi_k(r)) = 0$, es decir

$$\begin{aligned}
A_k L_{\mu_k}\left(\cos^{2k}(r)\right) + A_{k-1} L_{\mu_k}\left(\cos^{2k-2}(r)\right) + A_{k-2} L_{\mu_k}\left(\cos^{2k-2}(r)\right) & \\
\cdots + A_2 L_{\mu_k}\left(\cos^4(r)\right) + A_1 L_{\mu_k}\left(\cos^2(r)\right) + A_0 L_{\mu_k}(1) &= 0
\end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones respectivas de $L_{\mu_k}(\cos^{2m})$, para $m = 1, 2, \ldots, k$, tenemos

$$\begin{aligned}
A_k\Big(4k^2 \cos^{2k-2}(r)\Big) + A_{k-1}\Big((\mu_k - \mu_{k-1})\cos^{2k-2}(r) + 4(k-1)^2 \cos^{2k-4}(r)\Big) & \\
+ A_{k-2}\Big((\mu_k - \mu_{k-2})\cos^{2k-4}(r) + 4(k-2)^2 \cos^{2k-6}(r)\Big) & \\
+ \cdots + A_3\Big((\mu_k - \mu_3)\cos^6(r) + 4 \cdot 3^2 \cos^4(r)\Big) + A_2\Big((\mu_k - \mu_2)\cos^4(r) + 4 \cdot 2^2 \cos^2(r)\Big) & \\
+ A_1\Big((\mu_k - \mu_1)\cos^2(r) + 4\Big) + A_0 \mu_k &= 0
\end{aligned}$$

Agrupamos

$$\begin{aligned}
\Big(4k^2A_k+(\mu_k-\mu_{k-1})A_{k-1}\Big)\cos^{2k-2}(r)+\Big(4(k-1)^2A_{k-1}+(\mu_k-\mu_{k-2})A_{k-2}\Big)\cos^{2k-4}(r)&\\
+\Big(4(k-2)^2A_{k-2}+(\mu_k-\mu_{k-3})A_{k-3}\Big)\cos^{2k-6}(r)&\\
+\cdots+\Big(4\cdot 3^2A_3+(\mu_k-\mu_2)A_2\Big)\cos^4(r)+\Big(4\cdot 2^2A_2+(\mu_k-\mu_1)A_1\Big)\cos^2(r)&\\
+4A_1+\mu_kA_0 &= 0
\end{aligned}$$

Entonces tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
4k^2A_k+(\mu_k-\mu_{k-1})A_{k-1} &= 0\\
4(k-1)^2A_{k-1}+(\mu_k-\mu_{k-2})A_{k-2} &= 0\\
\vdots &= \vdots\\
4\cdot 3^2A_3+(\mu_k-\mu_2)A_2 &= 0\\
4\cdot 2^2A_2+(\mu_k-\mu_1)A_1 &= 0\\
4A_1+\mu_kA_0 &= 0
\end{aligned}$$

De la última ecuación tenemos

$$A_1=-\frac{1}{4}\mu_kA_0.$$

De lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{\mu_k(\mu_k-\mu_1)}{4^2\cdot 2^2}A_0\\
A_3 &= -\frac{\mu_k(\mu_k-\mu_1)(\mu_k-\mu_2)}{4^3\cdot 2^2\cdot 3^2}A_0\\
A_4 &= \frac{\mu_k(\mu_k-\mu_1)(\mu_k-\mu_2)(\mu_k-\mu_3)}{4^4\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}A_0\\
\vdots &= \qquad\ldots\\
A_{k-2} &= (-1)^{k-2}\frac{\mu_k(\mu_k-\mu_1)(\mu_k-\mu_2)\cdots(\mu_k-\mu_{k-3})}{4^{k-2}\cdot((k-2)!)^2}A_0\\
A_{k-1} &= (-1)^{k-1}\frac{\mu_k(\mu_k-\mu_1)(\mu_k-\mu_2)\cdots(\mu_k-\mu_{k-2})}{4^{k-1}\cdot((k-1)!)^2}A_0\\
A_k &= (-1)^{k}\frac{\mu_k(\mu_k-\mu_1)(\mu_k-\mu_2)\cdots(\mu_k-\mu_{k-1})}{4^{k}\cdot(k!)^2}A_0
\end{aligned}$$

Por otro lado, como φ_k es solución de la ecuación (4.4), entonces φ_k satisface la condición inicial $\varphi_k(0) = 1$, de lo cual tenemos

$$A_k + A_{k-1} + \cdots + A_2 + A_1 + A_0 = 1 \tag{4.6}$$

Sustituyendo cada A_j, con $j = 1, 2, \ldots, k$, por su expresión en términos de A_0, obtenemos

$$\begin{aligned}\Bigg[(-1)^k \frac{\mu_k(\mu_k - \mu_1)(\mu_k - \mu_2)\cdots(\mu_k - \mu_{k-1})}{4^k \cdot (k!)^2} \\ + (-1)^{k-1} \frac{\mu_k(\mu_k - \mu_1)(\mu_k - \mu_2)\cdots(\mu_k - \mu_{k-2})}{4^{k-1} \cdot ((k-1)!)^2} \\ + \cdots + \frac{\mu_k(\mu_k - \mu_1)}{4^2 \cdot 2^2} - \frac{1}{4}\mu_k\Bigg] A_0 &= 1\end{aligned}$$

De esta expresión obtenemos el valor de A_0 y luego los valores de $A_1, \ldots, A_k$ y obtenemos así un polinomio $\varphi_k(r) = p_k(\cos^2(r))$ con coeficientes racionales (donde p_k es un polinomio de grado k) que resuelve la ecuación (4.4)

□

Observación 4.2.1. *Por ejemplo, para $k = 1, 2$, los polinomios φ_1 y φ_2 están dados respectivamente por*

$$\varphi_1(r) = \frac{n+1}{n}\cos^2(r) - \frac{1}{n}$$
$$\varphi_2(r) = \frac{1}{n(n+1)}\Big((n+2)(n+3)\cos^4(r) - 4(n+2)\cos^2(r) + 2\Big)$$

A continuación probamos que cada polinomio p_k, encontrado en el lema anterior, tiene k ceros simples en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Para ello usamos inducción sobre k y el teorema de comparación de Sturm.

Lema 4.2.2. *El polinomio $\varphi_k(r) = p_k(\cos^2(r))$ tiene k ceros simples en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Demostración. Para $k = 1, 2$, los polinomios φ_1 y φ_2 tienen 1 y 2 ceros simples, respectivamente, en $(0, \frac{\pi}{2})$. Suponga que también es cierto para k y probemos que se cumple para $k+1$. Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ los ceros de φ_k en $(0, \frac{\pi}{2})$.
Como φ_k y φ_{k+1} son soluciones de (4.4) se tiene

$$\varphi_k''(r) + \left(\frac{2n\cos^2(r) - 1}{\cos(r)\sin(r)}\right)\varphi_k'(r) + 4k(n+k)\varphi_k(r) = 0,$$

$$\varphi_{k+1}''(r) + \left(\frac{2n\cos^2(r) - 1}{\cos(r)\sin(r)}\right)\varphi_{k+1}'(r) + 4(k+1)(n+k+1)\varphi_{k+1}(r) = 0$$

Note que

$$4(k+1)(n+k+1) > 4k(n+k),$$

y como

$$\varphi_k(0) = 1, \quad \varphi_k'(0) = 0, \quad \varphi_{k+1}(0) = 1, \quad \varphi_{k+1}'(0) = 0,$$

tenemos

$$\frac{\varphi_{k+1}'(0)}{\varphi_{k+1}(0)} \leq \frac{\varphi_k'(0)}{\varphi_k(0)}$$

Entonces, por el Teorema de Sturm 2.4.1, entre cada dos ceros de φ_k hay al menos un cero de φ_{k+1} y el i-ésimo cero de φ_{k+1} es menor que el i-ésimo cero de φ_k, por lo tanto φ_{k+1} tiene al menos k ceros simples: uno en cada intervalo $(0, r_1)$, $(r_1, r_2), \ldots, (r_{k-1}, r_k)$.

Para ver que φ_{k+1} tiene un cero simple en $(r_k, \frac{\pi}{2})$, note que $\varphi_{k+1}(r_k) \neq 0$ pues el k-ésimo cero de φ_{k+1} ocurre antes que r_k. Por lo que, a la derecha de r_k tenemos

$$\frac{\varphi_{k+1}'(r_k)}{\varphi_{k+1}(r_k)} < \frac{\varphi_k'(r_k)}{\varphi_k(r_k)} = +\infty$$

Entonces, por el Teorema 2.4.1,

$$\frac{\varphi_{k+1}'(r)}{\varphi_{k+1}(r)} < \frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)} \tag{4.7}$$

para todo $r \in \left(r_k, \frac{\pi}{2}\right)$. Notar también que, como $\varphi_{k+1}(r)$ y $\varphi_k(r)$ son de la forma $\varphi_{k+1}(r) = p_{k+1}\left(\cos^2(r)\right)$ y $\varphi_k(r) = p_k\left(\cos^2(r)\right)$, donde p_{k+1} y p_k son polinomios de grado $k+1$ y k respectivamente, entonces

$$\varphi_{k+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \varphi_k'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Supongamos por contradicción que φ_{k+1} no se anula en $\left(r_k, \frac{\pi}{2}\right)$ y supongamos también que $\varphi_k'(r_k) < 0$. Como r_k es el último cero de φ_k entonces φ_k permanece negativa y decreciente en todo $\left(r_k, \frac{\pi}{2}\right)$ y por la suposición anterior, φ_{k+1} también permanece

negativa en $\left(r_k, \frac{\pi}{2}\right)$.
Escribamos

$$q(r) := \frac{2n\cos^2(r) - 1}{\cos(r)\sin(r)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'\right)\right)' &= \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)'\left(\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'\right) + \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'\right)' \\
&= \frac{\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}^2}\left(\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'\right) \\
&\qquad + \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k''\varphi_{k+1} + \varphi_k'\varphi_{k+1}' - \varphi_k'\varphi_{k+1}' - \varphi_k\varphi_{k+1}''\right) \\
&= \left(\frac{\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}}\right)^2 + \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k''\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}''\right) \\
&= \left(\frac{\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}}\right)^2 + \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\Big[\left(-q(r)\varphi_k' - \mu_k\varphi_k\right)\varphi_{k+1} \\
&\qquad -\varphi_k\left(-q(r)\varphi_{k+1}' - \mu_{k+1}\varphi_{k+1}\right)\Big] \\
&= \left(\frac{\varphi_k'\varphi_{k+1} - \varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}}\right)^2 + \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}q(r)\left(\varphi_k\varphi_{k+1}' - \varphi_k'\varphi_{k+1}\right) \\
&\quad + \varphi_k^2(\mu_{k+1} - \mu_k)
\end{aligned}$$

El primer y tercer término de la derecha son ambos positivos. Veamos el segundo término.
Por la desigualdad (4.7) se tiene

$$\varphi_k\varphi_{k+1}' - \varphi_k'\varphi_{k+1} < 0.$$

Por otro lado, note que

$$q(r) < 0 \ \text{ si } \ \cos(r) < \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{y} \quad q(r) > 0 \ \text{ si } \ \cos(r) > \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{4.8}$$

Sea $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\cos(r_0) = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Como la función coseno es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$q(r) < 0 \quad \text{si} \quad r > r_0 \quad \text{y} \quad q(r) > 0 \quad \text{si} \quad r < r_0$$

Entonces tenemos dos casos: $r_k > r_0$ o $r_k < r_0$.
Supongamos que $r_k < r_0$. Integramos de r_0 a $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k'\varphi_{k+1}-\varphi_k\varphi_{k+1}'\right)\right)\Big|_{r_0}^{\frac{\pi}{2}} &= \int_{r_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\varphi_k'\varphi_{k+1}-\varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}}\right)^2 dr\\ &+\int_{r_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}q(r)\left(\varphi_k\varphi_{k+1}'-\varphi_k'\varphi_{k+1}\right)dr\\ &+\int_{r_0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_k^2(\mu_{k+1}-\mu_k)dr\end{aligned}$$

Por hipótesis $\varphi_{k+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=\varphi_k'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k'\varphi_{k+1}-\varphi_k\varphi_{k+1}'\right)\right)(r_0) &= \int_{r_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\varphi_k'\varphi_{k+1}-\varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}}\right)^2 dr\\ &+\int_{r_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}q(r)\left(\varphi_k\varphi_{k+1}'-\varphi_k'\varphi_{k+1}\right)dr\\ &+\int_{r_0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_k^2(\mu_{k+1}-\mu_k)dr\end{aligned}$$

Notemos que el lado izquierdo de la igualdad es negativo. Por otro lado , por hipótesis tanto φ_k como φ_{k+1} permanecen negativas en $\left(r_0,\frac{\pi}{2}\right)$, de lo cual obtenemos $\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}>0$. También se cumple $\varphi_k\varphi_{k+1}'-\varphi_k'\varphi_{k+1}<0$ en $\left(r_0,\frac{\pi}{2}\right)$ por la desigualdad (4.7) y además $q(r)<0$ en $\left(r_0,\frac{\pi}{2}\right)$. Se sigue que el lado derecho de la igualdad anterior es positivo. Lo cual es una contradicción.
Supongamos ahora que $r_k > r_0$. De manera análoga al caso anterior, tenemos que en $\left(r_k,\frac{\pi}{2}\right)$ se cumplen las desigualdades $\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}>0$, $\varphi_k\varphi_{k+1}'-\varphi_k'\varphi_{k+1}<0$ y $q(r)>0$. Integramos la igualdad anterior de r_k a $\frac{\pi}{2}$. Usamos las condiciones $\varphi_k(r_k)=0$ y $\varphi_{k+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=\varphi_k'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left(\varphi_k'\varphi_{k+1}-\varphi_k\varphi_{k+1}'\right)\right)'\Big|_{r_k}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \int_{r_k}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\varphi_k'\varphi_{k+1}-\varphi_k\varphi_{k+1}'}{\varphi_{k+1}}\right)^2 dr\\ &\quad+\int_{r_k}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}q(r)\left(\varphi_k\varphi_{k+1}'-\varphi_k'\varphi_{k+1}\right)dr\\ &\quad+\int_{r_k}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_k^2(\mu_{k+1}-\mu_k)dr\\ &\quad>0\end{aligned}$$

lo cual no puede ser. Por lo tanto φ_{k+1} debe tener un cero a la derecha de r_k. □

4.3. Multiplicidad de soluciones de la ecuación de tipo Yamabe sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$.

Esta sección está dedicada a la demostración del Teorema 1.0.3. Usamos los lemas de la sección anterior, para probar que cada autovalor λ_k es un punto de bifurcación. Luego utilizamos la teoría de bifurcación local y global para estudiar el conjunto de soluciones no triviales que aparece en cada punto de bifurcación.

Demostración del Teorema 1.0.3. Usamos teoría de bifurcación. Recordemos la notación introducida al principio del capítulo.

Denotamos por Z_I al conjunto de funciones suaves sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ invariantes bajo la acción de $U(n)$. Consideremos el espacio de Banach

$$C^{2,\alpha}_+(Z_I) := Z_I \cap C^{2,\alpha}_+(\mathbb{C}\mathbf{P}^n)$$

el cual identificamos con el espacio

$$\left\{\varphi \in C^{2,\alpha}_+\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) : \varphi'(0) = 0 = \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Similarmente consideramos el espacio de Banach

$$C^{0,\alpha}_+(Z_I) := Z_I \cap C^{0,\alpha}_+(\mathbb{C}\mathbf{P}^n)$$

el cual identificamos con el espacio $C^{0,\alpha}_+\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:
Definimos el operador

$$S : C^{2,\alpha}_+(Z_I) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^{0,\alpha}(Z_I)$$

$$S(u, \lambda) = -\Delta_{g_{FS}} u + \lambda(u - u^{q-1}).$$

Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tenemos $S(1, \lambda) = 0$. Vamos a estudiar soluciones no triviales (u, λ) de $S(u, \lambda) = 0$ que se bifurcan desde la curva $(1, \lambda)$.
Derivando S con respecto de u en $(1, \lambda)$ tenemos

$$S'_u(1, \lambda)[v] = -\Delta_{g_{FS}} v - \lambda(q - 2)v.$$

Entonces $S'_u(1, \lambda)[v] = 0$ si y sólo si

$$-\Delta_{G_\delta} v - \lambda(q-2)v = 0. \tag{4.9}$$

Para cada entero positivo k, y $\lambda_k := \dfrac{4k(n+k)}{q-2}$, denotemos

$$L_k = S'_u(1, \lambda_k)$$

Por el lema (4.2.1), sabemos que si $\lambda = \lambda_k$, entonces la solución correspondiente de (3.14) es de la forma $\varphi_k(r) = p_k(\cos^2(r))$, donde p_k es un polinomio de grado k. Por lo tanto

$$\ker(L_k) = \langle \varphi_k \rangle$$

Es decir, $\ker(L_k)$ tiene dimensión 1. Note que mediante integración por partes, si $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{C}\mathbf{P}^n)$ tenemos

$$0 = \int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n} L_k(\varphi_k)\ w\ dv_{g_{FS}} = \int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n} L_k(w)\ \varphi_k\ dv_{g_{FS}}.$$

Esto implica que el rango $R(L_k)$ de L_k, es

$$R(L_k) = \left\{ y \in C^{0,\alpha}(\mathbb{C}\mathbf{P}^n) : \int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n} y\varphi_k\ dv_{g_{FS}} = 0 \right\}.$$

Por otro lado, derivando S'_u con respecto de λ en $(1, \lambda_k)$ y evaluando en φ_k tenemos

$$S''_{u,\lambda}(1, \lambda_k)[\varphi_k] = (q-2)\varphi_k,$$

y como $\int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n} \varphi_k^2\ dv_{g_{FS}} \neq 0$ tenemos que

$$S''_{u,\lambda}(1, \lambda_k)[\varphi_k] \notin R(L_k).$$

Por lo tanto, por el Teorema (2.5.1, los puntos e bifurcación de $S(u, \lambda) = 0$ son los puntos λ_k. Más aún, por el Teorema (2.5.1, cerca de $(1, \lambda_k)$, el espacio de soluciones consiste de dos curvas: una es la curva de soluciones triviales $\lambda \mapsto (1, \lambda)$, y la otra es una curva de soluciones no triviales, la cual se parametriza por

$$(u, \lambda) = (u(s), \lambda(s)) \ \text{ con } \ u(s) = 1 + s\varphi_k + o(s^2), \ \text{ y } \ \lambda(0) = \lambda_k \tag{4.10}$$

Note que si $u \neq 1$ es una solución no trivial de la ecuación 4.1, y si φ es la correspondiente solución de (4.3), entonces $\varphi - 1$ tiene un número finito de ceros en $(0, \pi/2)$. Entonces, hay un abierto alrededor de φ, donde todas las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (4.3) tiene el mismo número de ceros que $\varphi - 1$.

El resto de la demostración es idéntica a la demostración del Teorema 1.0.1.

$\square$

4.4. Soluciones degeneradas de la ecuación tipo Yamabe sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$

En esta sección probamos la existencia de soluciones degeneradas de la ecuación (4.1).

Consideramos nuevamente la ecuación (4.1) sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ dada por

$$-\Delta_{g_{FS}} u + \lambda u = \lambda u^{q-1} \tag{4.11}$$

donde $u\colon \mathbb{C}\mathbf{P}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ es suave, $\lambda > 0$, $2 < q < \frac{2n}{n-1}$ y g_{FS} es la métrica de Fubini-Study. Haciendo la sustitución $w = u - 1$ obtenemos

$$-\Delta_{g_{FS}} w + \lambda(w+1) = \lambda(w+1)^{q-1} \tag{4.12}$$

Definimos el operador

$$H : C^{2,\alpha}_{+}(Z_I) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^{0,\alpha}(Z_I)$$

$$H(w,\lambda) = \Delta_{g_{FS}} w - \lambda\big((w+1) - (w+1)^{q-1}\big)$$

Note que $H(0,\lambda) = 0$ para todo λ. Derivamos en $(0,\lambda)$ con respecto de w

$$H'_w(0,\lambda)[v] = \Delta_{g_{FS}} v + (q-2)\lambda v$$

Entonces

$$H'_w(0,\lambda)[v] = 0$$

si y sólo si

$$\Delta_{g_{FS}} v + (q-2)\lambda v = 0$$

Note que esta es la misma ecuación (4.9). Entonces, para cada entero positivo k, los puntos

$$\lambda_k := \frac{4k(k+n)}{q-2}$$

son los puntos de bifurcación de $H(w,\lambda)=0$.

Denotamos por C la clausura del conjunto de soluciones no triviales de $H(w,\lambda)=0$. De acuerdo con el lema (4.2.1), el autoespacio asociado a λ_k tiene dimensión 1 y está generado por un polinomio φ_k de grado k en $\cos^2(r)$. Por el teorema de Crandall-Rabinowitz ([22]), cerca de $(0,\lambda_k)$, la componente conexa de C que contiene al punto $(0,\lambda_k)$ se parametriza por $(w(s),\lambda(s))$, con $w(s)=s\varphi_k+\psi(s)$

$$\lambda(0)=\lambda_k, \quad \psi(0)=0=\psi'(0) \tag{4.13}$$

Lema 4.4.1. *Sea $(w(s),\lambda(s))$ la curva de soluciones no triviales de $H(w,\lambda)=0$, que aparece en el punto de bifurcación $(0,\lambda_1)$. Entonces $\lambda'(0)\neq 0$.*

Demostración. Mediante un cálculo análogo al del Lema 3.4.1 de la página, obtenemos

$$\lambda'(0)=\frac{-(q-1)\lambda_k\displaystyle\int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n}\varphi_k^3 dv_{g_{FS}}}{2(q-2)\displaystyle\int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n}\varphi_k^2 dv_{g_{FS}}}$$

Para probar el lema, basta con analizar la integral en el numerador con $k=1$. De la observación (4.2.1), tenemos que φ_1 está dado por

$$\varphi_1(r)=\frac{n+1}{n}\cos^2(r)-\frac{1}{n}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n}\varphi_1^3 dv_{g_{FS}} &= \int_{S^{2n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{n+1}{n}\cos^2(r)-\frac{1}{n}\right)^3\sin^{2n-1}(r)\cos(r)\,dr\,dv_{g_0^{2n-1}}\\ &= Vol\left(S^{2n-1},g_0^{2n-1}\right)\frac{1}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((n+1)\cos^2(r)-1\right)^3\sin^{2n-1}(r)\cos(r)\,dr\end{aligned}$$

Denotemos por I la integral del lado derecho

$$\begin{aligned}I &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((n+1)\cos^2(r)-1\right)^3\sin^{2n-1}(r)\cos(r)\,dr\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(n+1)^3\cos^6(r)-3(n+1)^2\cos^4(r)+3(n+1)\cos^2(r)-1\right]\sin^{2n-1}(r)\cos(r)\,dr\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[(n+1)^3\left(1-\sin^2(r)\right)^3-3(n+1)^2\left(1-\sin^2(r)\right)^2\\ &\qquad +3(n+1)(1-\sin^2(r))-1\Big]\sin^{2n-1}(r)\cos(r)\,dr\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $t = \sin(r)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \Big[(n+1)^3\left(1-t^2\right)^3 - 3(n+1)^2\left(1-t^2\right)^2 + 3(n+1)(1-t^2)(r) - 1\Big]t^{2n-1}dt \\
&= \int_0^1 \Big[(n+1)^3\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right) - 3(n+1)^2\left(1-2t^2+t^4\right) \\
&\qquad +3(n+1)(1-t^2) - 1\Big]t^{2n-1}dt \\
&= \int_0^1 \Big[(n+1)^3\left(t^{2n-1}-3t^{2n+1}+3t^{2n+3}-t^{2n+5}\right) \\
&\qquad -3(n+1)^2\left(t^{2n-1}-2t^{2n+1}+t^{2n+3}\right) \\
&\qquad\qquad +3(n+1)(t^{2n-1}-t^{2n+1}) - t^{2n-1}\Big]dt \\
&= \int_0^1 \Big[\left((n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1\right)t^{2n-1} \\
&\qquad + \left(-3(n+1)^3 + 6(n+1)^2 - 3(n+1)\right)t^{2n+1} \\
&\qquad\qquad + \left(3(n+1)^3 - 3(n+1)^2\right)t^{2n+3} - (n+1)^3 t^{2n+5}\Big]dt \\
&= \int_0^1 \Big[n^3 t^{2n-1} - 3n^2(n+1)t^{2n+1} + 3n(n+1)^2 t^{2n+3} - (n+1)^3 t^{2n+5}\Big]dt \\
&= \frac{n^3}{2n} - \frac{3n^2(n+1)}{2n+2} + \frac{3n(n+1)^2}{2n+4} - \frac{(n+1)^3}{2n+6} \\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{3n^2}{2} + \frac{3n(n+1)^2}{2n+4} - \frac{(n+1)^3}{2n+6} \\
&= \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\Big(-2n^2(n+2)(n+3) + 3n(n+1)^2(n+3) - (n+3)(n+2) \\
&= \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\left(-7n-2\right) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

De lo anterior tenemos

$$
\int_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n} \varphi_1^3 dv_{g_{FS}} = \frac{1}{n^3} Vol\left(S^{2n-1}, g_0^{2n-1}\right) I > 0
$$

por lo tanto $\lambda'(0) \neq 0$

$\square$

Ahora vamos a demostrar el Teorema 1.0.4.

Demostración del Teorema 1.0.4.

Procedemos de manera análoga a la demostración del Teorema 1.0.2. Como la métrica

g_{FS} tiene curvatura de Ricci positiva, entonces por [14, Teorema 6.1], sabemos que existe un valor $\eta > 0$, tal que si $\lambda < \eta$ entonces la ecuación $H(w, \lambda) = 0$ tiene sólo la solución trivial.

Consideremos el conjunto

$$D := \{(w, \lambda) : H(w, \lambda) = 0, \ \lambda \in [\eta, \lambda_1]\},$$

Sea C la clausura del conjunto de soluciones no triviales de $H(w, 0) = 0$. Sea C_1 la componente conexa de C que contiene el punto $(0, \lambda_1)$. Por el Teorema de Crandall-Rabinowitz, 2.5.1, sabemos que cerca de $(0, \lambda_1)$, la soluciones no triviales en C_2 se parametrizan por $(w(s), \lambda(s))$, con $w(s) = s\varphi_k + o(s^2)$ y $\lambda(0) = \lambda_1$ y por el Lema 4.4.1, tenemos que $\lambda'(0) \neq 0$. Esto implica que existen valores $\lambda \in [\eta, \lambda_1)$, para los cuales la ecuación $H(w, \lambda) = 0$ tiene soluciones no triviales. Entonces la función λ tiene un mínimo $\lambda_* \in [\eta, \lambda_1)$. Observe que $C_1 \cap D \subset D$, lo cual muestra que B es no vacío. Note también que D es compacto.

Sea (λ_j) una sucesión en $[\eta, \lambda_1)$ que converge a λ_* con una solución w_j de $F(w, \lambda) = 0$ con $\lambda = \lambda_j$. Es decir, la sucesión (w_j, λ_j) satisface $H(w_j, \lambda_j) = 0$. Como D es compacto entonces la sucesión (w_j, λ_j) converge a un punto $(w_*, \lambda_*) \in D$. Por lo tanto, (w_*, λ_*) es una solución de la ecuación $H(w, \lambda) = 0$.

Como $\lambda_* < \lambda_1$ y λ_1 es el primer punto de bifurcación de $H(w, \lambda) = 0$, entonces w_* es una solución no trivial.

Probamos ahora que (w_*, λ_*) es una solución degenerada de $H(w, \lambda) = 0$. Supongamos por contradicción que (w_*, λ_*) es no degenerada. La derivada de H, con respecto a w en (w_*, λ_*), está dada por

$$H'_w \colon C^{2,\alpha}(Z_I) \times \mathbb{R} \to C^{2,\alpha}(Z_I)$$

$$H'_w(w_*, \lambda_*)[v, \lambda] = \Delta_{g_{FS}} v - \lambda_*(1 - (q-1)w_*^{q-2})v$$

Si (w_*, λ_*) fuera no degenerada, la ecuación

$$\Delta_{g_{FS}} v - \lambda_*(1 - (q-1)w_*^{q-2})v = 0$$

tendría sólo la solución trivial $v \equiv 0$. Esto significa que el operador H es un difeomorfismo local en la dirección de w, en el punto w_*. Entonces, hay valores $\lambda < \lambda_*$ para los cuales la ecuación $H(w, \lambda) = 0$ tiene soluciones no triviales. Lo cual contradice el hecho de que λ_* es el mínimo valor de λ, para el cual hay soluciones no triviales

Por lo tanto, la solución (w_*, λ_*) es una solución degenerada de $H(w, \lambda) = 0$. Entonces, tomando $u_* := w_* + 1$, tenemos que (u_*, λ_*) es una solución degenerada de la ecuación (4.1). Esto finaliza la prueba del Teorema 1.0.4.

$\square$

5. SOLUCIONES NODALES DE LA ECUACIÓN DE YAMABE SOBRE $\mathbf{S}^N \times \mathbf{S}^N$

En este capítulo estudiamos las existencia y multiplicidad de soluciones nodales, es decir, soluciones que cambian de signo, de la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$, que son invariantes bajo la acción de $O(n+1)$. Específicamente vamos a probar el Teorema 1.0.5.

5.1. Ecuación de tipo Yamabe para funciones invariantes

Consideremos nuevamente la función $f\colon \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \langle x, y\rangle$$

Denotamos $G_\delta = g_0^n + \delta g_0^n$. Recordemos que, por las ecuaciones

$$\Delta_{G_\delta} f = -n\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) f, \qquad |\nabla_{G_\delta} f|^2_{G_\delta} = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(1 - f^2)$$

obtenidas en la página (35), la función f es isoparamétrica y los únicos valores críticos de f son su mínimo -1 y su máximo 1.

Cada función $u\colon \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}$, invariante bajo la acción de $O(n+1)$, se puede escribir como $u = \varphi \circ f$, donde $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Como f es suave, la regularidad de u es igual a la regularidad de φ.

Por la Proposición 2.3.1, u es solución de la ecuación

$$-\Delta_{G_\delta} u + \lambda u = \lambda |u|^{p-2} u \ \text{ sobre } \ \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n \tag{5.1}$$

si y sólo si

$$-(1-t^2)\varphi''(t) + nt\varphi'(t) + \frac{\lambda}{1+\frac{1}{\delta}}\varphi(t) = \frac{\lambda}{1+\frac{1}{\delta}}|\varphi|^{p-2}\varphi. \tag{5.2}$$

con $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(\pi)$. Haciendo el cambio de variable $w(r) = \varphi(\cos(r))$ entonces $w'(0) = w'(\pi) = 0$ y φ resuelve la ecuación anterior si y sólo si

$$w''(r) + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}w'(r) + \frac{\lambda}{1+\frac{1}{\delta}}\left(|w(r)|^{p-2}w(r) - w(r)\right) = 0 \qquad (5.3)$$

con $r \in [0, \pi]$.

Para cualquier $\alpha > 0$ denotamos por w_α la solución con condiciones iniciales

$$w_\alpha(0) = \alpha, \qquad w'_\alpha(0) = 0.$$

Si $w'_\alpha(\pi) = 0$ entonces $\varphi_\alpha(t) = w_\alpha(\arccos(r))$ es una función C^2 la cual resuelve la ecuación (5.2). Entonces $u = \varphi_\alpha \circ f$ resuelve la ecuación (5.1).

Introducimos la función de energía asociada a w_α

$$E_\alpha(r) := \frac{1}{2}(w'_\alpha(r))^2 + \mu\left(\frac{|w_\alpha(r)|^p}{p} - \frac{w_\alpha^2(r)}{2}\right)$$

Note que para todo $r \in (0, \pi)$ se tiene

$$E'_\alpha(r) = -(n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}(w'_\alpha(r))^2$$

por lo tanto E_α es decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ y creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. En particular tenemos

$$E_\alpha(r) \leq E_\alpha(0) \qquad (5.4)$$

para todo $r \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Lema 5.1.1. *Si $\alpha > 0$ es tal que $E_\alpha(0) \leq 0$ entonces $w_\alpha(r) > 0$, para todo $r \in (0, \frac{\pi}{2})$.*

Demostración. Observe que si $w_\alpha(r_0) = 0$, para algún $r_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, entonces

$$E_\alpha(r_0) = \frac{1}{2}(w'_\alpha(r_0))^2 \geq 0$$

y $E_\alpha(r_0) = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$.
Ahora, si $\alpha > 0$, entonces

$$E_\alpha(r_0) = \frac{1}{2}(w'_\alpha(r_0))^2 > 0$$

lo cual contradice (5.4)

□

Observación 5.1.1.

Evaluando la función de energía en $r = 0$ tenemos

$$E_\alpha(0) = \frac{1}{2}(w'_\alpha(0))^2 + \mu\left(\frac{|w_\alpha(0)|^p}{4} - \frac{w_\alpha^2(0)}{2}\right) = \mu\left(\frac{\alpha^p}{p} - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{p}\left(\alpha^{p-2} - \frac{p}{2}\right)$$

Entonces $E_\alpha(0) < 0$ si y sólo si $\alpha \in \left(0, \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)$ y de acuerdo con el lema anterior, si $\alpha \in \left(0, \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)$ entonces $w_\alpha > 0$ en $(0, \frac{\pi}{2})$. Esto implica que si w_α tiene algún cero en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, entonces $\alpha > \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$.

5.2. *Soluciones simétricas y antisimétricas*

En esta sección vamos a ver algunos lemas relacionados con la ecuación (5.3). Fijemos $p = p_{2n}$ en la ecuación (5.3).

Lema 5.2.1. *Sea $\alpha > 0$ tal que la solución w_α de (5.3) satisface $w'_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, entonces*

$$w_\alpha(\pi - r) = w_\alpha(r)$$

para todo $r \in [0, \pi)$ y por lo tanto $w'_\alpha(\pi) = 0$

Demostración. Definamos $h(r) := w_\alpha(\pi - r)$ con $r \in [0, \pi)$. Note que $h(r)$ es solución de la ecuación (5.3). Además

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = w_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ y } h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = w'_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Entonces, por unicidad de soluciones se tiene $h = w_\alpha$. De lo anterior tenemos

$$0 = w'_\alpha(0) = -w'_\alpha(\pi)$$

Por lo tanto $w'_\alpha(\pi) = 0$. □

Lema 5.2.2. *Sea $\alpha > 0$ tal que la solución w_α de (5.3) satisface $w_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Entonces $w_\alpha(\pi - r) = -w_\alpha(r)$ para todo $r \in [0, \pi)$ y por lo tanto $w'_\alpha(\pi) = 0$.*

Demostración. Sea $h(r) := -w_\alpha(\pi - r)$ con $r \in [0, \pi)$. Note que h es una solucion de la ecuación (5.3). Como

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = w_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ y } h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = w'_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Se sigue de la unicidad de soluciones que $h = w_\alpha$, lo cual prueba el lema.

□

Lema 5.2.3. *Sea $\alpha_0 > 0$ tal que la solución w_{α_0} de (5.3) tiene exactamente k-ceros en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $w_{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ la solución w_α tiene k ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Demostración. Sean $r_1, \ldots, r_k$ los k ceros de w_{α_0} en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tales que $0 < r_1 < ... < r_k < \frac{\pi}{2}$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $w'_{\alpha_0}(r) \neq 0$ para cualquier $i = 1, ..., k$ y cualquier $r \in [r_i - \delta, r_i + \delta]$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos asumir que para cada $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ tenemos $w_\alpha > 0$ en $[0, r_1 - \delta]$, $w'_\alpha < 0$ en $[r_1 - \delta, r_1 + \delta]$, $w_\alpha < 0$ en $[r_1 + \delta, r_2 - \delta]$, $w'_\alpha > 0$ en $[r_2 - \delta, r_2 + \delta]$, y así sucesivamente. Se sigue que w_α tiene exactamente k ceros en $(0, \frac{\pi}{2})$. $\square$

Lema 5.2.4. *Sea $\alpha_0 > 0$ tal que la solución w_{α_0} de la ecuación (5.3) tiene exactamente k-ceros en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $w_{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ la solución w_α tiene o exactamente k ceros o exactamente $k+1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Demostración. Como $w_{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\alpha_0 \neq 0$ tenemos que $w'_{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $w'_{\alpha_0}(r) \neq 0$ si $r \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$. Escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que si $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ entonces, $w'_\alpha(r) \neq 0$ para todo $r \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$ y tal que w_α tiene exactamente un cero en $\left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$.
Podemos asumir que ε es suficientemente pequeño tal que para cualquier $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, la solución w_α tiene exactamente k ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2} - \delta\right)$.
Sean $r_1, \ldots, r_k$ los k ceros de w_α en $\left(0, \frac{\pi}{2} - \delta\right)$, tales que $0 < r_1 < ... < r_k < \frac{\pi}{2} - \delta$. Sea r_{k+1} el cero de w_α en $\left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$. Si $r_{k+1} \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces w_α tiene $k+1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Si $r_{k+1} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$, entonces w_α tiene k ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Por lo tanto w_α tiene k o $k+1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

5.3. Multiplicidad de soluciones nodales de la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, g_0^n + \delta g_0^n)$.

En esta sección demostramos los Teoremas 1.0.5 y 1.0.6. Observe que cuando

$$\lambda = \frac{s_{G_\delta}}{a_{2n}} = \frac{n(n-1)(2n-2)(1+\frac{1}{\delta})}{4(2n-1)} \quad \text{y} \quad p = \frac{4n}{2n-2},$$

la ecuación (5.1) es la ecuación de Yamabe sobre $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, G_\delta)$. Por lo tanto el Teorema 1.0.5 se sigue del Teorema 1.0.6.

Demostración del Teorema 1.0.6. Note que estamos considerando la ecuación (5.3) con $p = p_{2n} < p_n$. Sea $i > k$ un entero positivo. Por [34, Teorema 3.1] existe un $\alpha_* > 1$ tal que la solución w_{α_*} tiene al menos i ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Definimos el conjunto

$$A_0 := \left\{\alpha \in (1, \alpha_*] : w_\alpha \geq 0 \text{ en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Observe que,

$$\frac{p}{2} = \frac{4n}{2(2n-2)} = \frac{n}{n-1} > 1$$

entonces

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} > 1$$

y por el lema 5.1.1 y la observación (5.1.1), si $\alpha \in \left(1, \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right]$, la correspondiente solución w_α es no negativa en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Entonces, tenemos $\left(1, \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right] \subset A_0$. Esto implica que $A_0 \neq \emptyset$.
Además A_0 es acotado superiormente, entonces tiene un supremo. Denotamos el supremo de A_0 por

$$a_0 := \sup A_0$$

Si existe $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $w_{a_0}(r_0) = 0$, entonces r_0 sería un mínimo de w_{a_0} y por lo tanto tendríamos $w'_{a_0}(r_0) = 0$. Entonces, por unicidad de soluciones tendríamos que $w_{a_0} \equiv 0$, lo cual es una contradición. Entonces w_{a_0} es estrictamente positiva en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Más aún, como a_0 es el supremo de A_0 tenemos $w_{a_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, lo cual, por el lema (5.2.2) implica que w_{a_0} es antisimétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$ y $w'_{a_0}(\pi) = 0$. Luego, por antisimetría se sigue que w_{a_0} tiene exactamente un cero en $[0, \pi]$.

Definimos ahora el conjunto

$$A_1 := \left\{\alpha \in (1, \alpha_*] : \ w_\alpha \text{ tiene exactamente un cero en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Si $\alpha \in (a_0 < \alpha < \alpha_*]$, como a_0 es el supremo de A_0, entonces w_α tiene al menos un cero en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y por el lema (5.2.4) existe $\widetilde{\alpha}$ (lo suficientemente cerca de a_0) tal que $w_{\widetilde{\alpha}}$ tiene exactamente un cero en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Esto implica que A_1 es no vacío.
Note también que A_1 es acotado. Denotamos el supremo de A_1 por

$$a_1 := \sup A_1$$

Como $a_1 > a_0$, entonces w_{a_1} tiene al menos un cero en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. y como a_1 es el supremo de A_1 tenemos que $w_{a_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Esto implica que w_{a_1} tiene exactamente un cero en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Luego, por el lema (5.2.2) tenemos que $w'_{\alpha_1}(\pi) = 0$ y por lo tanto w_{a_1} tiene exactamente 3 ceros en $[0, \pi]$.

Ahora, para cada entero j tal que $2 \leq j < i$ definimos

$$A_j := \left\{\alpha \in (1, \alpha_*] : w_\alpha \text{ tiene exactamente } j \text{ ceros en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Supongamos que A_j es no vacío y

$$\sup A_j =: a_j > a_{j-1} > \cdots > a_1$$

Entonces, $w_{a_j}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y por el lema (5.2.2) tenemos que $w'_{\alpha_j}(\pi) = 0$ y por lo tanto w_{a_j} tiene exactamente $2j + 1$ ceros en $[0, \pi]$.

Consideremos ahora el caso $j + 1$. Si $j + 1 < i$, definimos

$$A_{j+1} := \left\{\alpha \in (1, \alpha_*] : w_\alpha \text{ tiene exactamente } j+1 \text{ ceros en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Sea $\alpha \in (a_j, \alpha_*]$. Como a_j es el supremo de A_j, entonces w_α tiene al menos $j + 1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y por el lema (5.2.4) existe $\widehat{\alpha}$, cerca de a_j, tal que $w_{\widehat{\alpha}}$ tiene exactamente $j + 1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Esto implica que A_{j+1} es no vacío y $a_{j+1} > a_j$. Note también que A_{j+1} es acotado. Denotamos el supremo de A_{j+1} por

$$a_{j+1} := \sup A_{j+1}$$

Y como a_{j+1} es el supremo de A_{j+1}, se tiene $w_{a_{j+1}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Entonces, por el lema (5.2.2) tenemos que $w_{a_{j+1}}$ es antisimétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto $w'_{a_{j+1}}(\pi) = 0$ y $w_{a_{j+1}}$ tiene exactamente $2(j + 1) + 1$ ceros en $[0, \pi]$.
Por inducción vemos que $\forall j \geq 2$ se cumple $A_j \neq \emptyset$ y $a_j > a_{j-1}$. Esto implica que para cualquier $0 \leq j < i$ existe $a_j > 1$ tal que $w_{a_j}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y w_{a_j} tiene exactamente j ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces, por el lema (5.2.2) tenemos $w'_{a_j}(\pi) = 0$ y w_{a_j} tiene exactamente $2j + 1$ ceros en $[0, \pi]$.

Esto prueba el teorema en el caso en que k es impar.

Por otro lado, como w_{a_j} tiene un cero menos que $w_{a_{j+1}}$ en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $w'_{a_j}(\frac{\pi}{2})$ y $w'_{a_{j+1}}(\frac{\pi}{2})$ tienen signos opuestos, lo cual implica que existe un $a \in (a_j, a_{j+1})$ tal que $w'_a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Sea

$$b_j = \text{ínf}\left\{a \in (a_j, a_{j+1}) : \; w'_a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}$$

Entonces $w'_{b_j}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y para cualquier $a \in (a_j, b_j)$ tenemos que $w'_a\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tiene el mismo signo que $w'_{a_j}(\frac{\pi}{2})$. Por la definición de a_j sabemos que para cualquier $a > a_j$, la solución w_a tiene al menos $j+1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y si a es suficientemente cercano a a_j entonces w_a tiene exactamente $j+1$ zeroes. Observe que si $a \in (a_j, b_j)$, entonces el signo de $w'_a\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no cambia, entonces se sigue que w_a tiene exactamente $j+1$ ceros para todo $a \in (a_j, b_j)$ y el lema 5.2.3 implica que w_{b_j} también tiene exactamente $j+1$ ceros en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces, por el lema 5.2.1, $w'_{b_j}(\pi) = 0$ y w_{b_j} tiene exactamente $2(j+1)$ ceros en $(0, \pi)$. Esto prueba el teorema cuando k es par.

Por lo tanto, hemos terminado la prueba del teorema.

$\square$

Bibliografía

[1] U. Abresch, *Isoparametric hypersurfaces with four or six distinct principal curvatures*, Math. Ann, 264 (1983), 283-302.

[2] M. M. Alexandrino and R. G. Bettiol, *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*, Springer International Publishing Switzerland. 2015. DOI 10.1007/978-3-319-16613-1.

[3] K. Akutagawa, L. Florit, J. Petean, *On Yamabe constants of Riemannian products*, Comm. Anal. Geom. 15 (2007) 947-969.

[4] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press. 2007

[5] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *A multiplicity result for the Yamabe problem on* $\mathbf{S}^n$, J. Funct. Anal. 168, 529-561 (1999).

[6] B. Ammann, M. Dahl, E. Humbert, *Smooth Yamabe invariant and surgery*, J. Differential Geometry, 94, (2013), 1–58.

[7] B. Ammann, E. Humbert, *The second Yamabe invariant*, J. Funct. Anal. 235 (2006) 377-412.

[8] T. Aubin, *Équations différentielles non-linéaires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 55 (1976), 3:269-296.

[9] M. Badiale and E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer-Verlag London Limited 2011

[10] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics 194, (1971).

[11] M. Berti and A. Malchiodi, *Non-compactness and multiplicity results for the Yamabe problem on* $\mathbf{S}^n$, J. Funct. Anal. 180, 210-241 (2001)

[12] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, (1987).

[13] R. Bettiol and P. Piccione, *Bifurcation and local rigidity of homogeneous solutions to the Yamabe problem on spheres* P. Calc. Var. (2013) 47: 789. https://doi.org/10.1007/s00526-012-0535-y

[14] M. F. Bidaut-Véron and L. Véron, *Nonlinear elliptic equations on compact Riemann- ian manifolds and asymptotics of Emden equations*, Invent. Math., 106 (1991), 489-539.

[15] S. Brendle, *Blow-up phenomena for the Yamabe equation*, Journal Amer. Math. Soc. 21 (2008), 951-979.

[16] S. Brendle and F. C. Marques. *Blow-up phenomena for the Yamabe equation*. II. J. Differ. Geom. 81(2), 225-250 (2009).

[17] É. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Math. 17. (1938). 177-191.

[18] T.E. Cecil and P.J. Ryan, *Geometry of Hypersurfaces*, Springer-Verlag New York (2015), ISSN 1439-7382.

[19] T. Cecil, Q. S. Chi, G. Jensen, *Isoparametric hypersurfaces with four different principal curvatures*, Ann. Math. 166 (2007), 1-76.

[20] Q.S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures IV*, arXiv :1605 .00976, 2016.

[21] M. Clapp, J.C. Fernández, *Multiplicity of nodal solution to the Yamabe problem.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. 56:145 (2017), 611-623

[22] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal., 8 (1971), 321-340.

[23] L.L. De Lima, P. Piccione, M. Zedda, *On bifurcation of solutions of the Yamabe problem on product manifolds.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 29 (2012) 261-277.

[24] Y. Ding, *On a conformally invariant elliptic equation on* $\mathbb{R}^n$. Comm. Math. Phys. 107 (1986), no. 2, 331-335.

[25] O. Druet, *Compactness for Yamabe metrics in low dimensions.* Int. Math. Res. Not. 23, 1143-1191 (2004)

[26] D. Ferus, H. Karcher, H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflachen*, Math. Z. 177 (1981), 479-502.

[27] G.B. Folland, *How to Integrate a Polynomial Over a Sphere*, Amer. Math. Monthly 108 (2001) 446-448.

[28] F. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry.* Springer. Third edition. Berling Heidelberg. 2004.

[29] B. Gidas and J. Spruck. *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 34, 1981, pp. 525-598.

[30] E. Hebey, M. Vaugon, *Meilleures constantes dans le theoreme dinclusion de Sobolev et multiplicite pour les problemes de Nirenberg et Yamabe*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 377-407.

[31] G. Henry and J. Petean, *Isoparametric hypersurfaces and metrics of constant scalar curvature*, Asian Journal of Mathematics, 18 (2014), 1:53-68.

[32] W. Y. Hsiang, H. B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry 5 (1971), 1-38.

[33] E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.

[34] J.C. Fernández y J. Petean, *Low energy nodal solutions to the Yamabe equation*, arXiv:1807.06114.

[35] Q. Jin, Y. Y. Li and H. Xu, *Symmetry and asymmetry: the method of moving spheres*, Advances in Differential Equations 13 (2008), 601-640.

[36] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Tran. Amer. Math. Soc. 296 (1986) 137-149.

[37] M.A. Krasnoselski, *Topological Methods in the theory of nonlinear integral equations*, Translated by A.H Armstrong; translation edited by J. Burlak. Macmillan, New York, 1964

[38] O. Kobayashi, *On the large scalar curvature*, Research Report 11, Dept. Math., Keio Univ. (1985).

[39] M.A. Khuri, F.C. Marques, R. Schoen, *A compactness theorem for the Yamabe problem*, J. Differ. Geom. 81(1), 143-196 (2009)

[40] J. M.Lee y T. Parker, *The Yamabe Problem*, Bulletin AMS, V 17, N 1 (1987), 37-91.

[41] N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover, First edition, 1972.

[42] T. Levi-Civita, *Famiglie di superficie isoparametrische nell ordinario spacio euclideo*, Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur 26 (1937), 355-362.

[43] Y.Y. Li and L. Zhu, *Yamabe type equations on three-dimensional Riemannian manifolds*, Commun. Contemp. Math. 1, 1-50 (1999)

[44] F.C. Marques, *Compactness and non-compactness for Yamabe-type problems*. In: Nolasco de Carvalho A., Ruf B., Moreira dos Santos E., Gossez JP., Monari Soares S., Cazenave T. (eds) Contributions to Nonlinear Elliptic Equations and Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol 86. (2015), Birkhäuser, Cham.

[45] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963.

[46] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with (g,m) = (6, 2)*, Ann. Math. 177, (2013), 1:53-110.

[47] R. Miyaoka, *Errata of "Isoparametric hypersurfaces with (g,m) =(6, 2)"*, Ann. of Math. (2), 183, (2016), 3:1057-1071.

[48] P.S. Mostert, *On a compact Lie group acting on a manifold*, Ann. of Math. 65 (1957), 447-455.

[49] H.F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I*, Math. Ann. 251 (1980) 57-71;

[50] H.F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II*, Math. Ann. 256 (1981) 215-232.

[51] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, New York University Lecture Notes, New York, 1974.

[52] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., No. 6, 247-258, 1971.

[53] H. Ozeki, M. Takeuchi, *On some types of isoparametrics hypersurfeces in sphere I*, Tohoku Math. Journ. 27, (1975), 515-559.

[54] H. Ozeki, M. Takeuchi, *On some types of isoparametrics hypersurfeces in sphere II*, Tohoku Math. Journ. 28, (1976), 7-55.

[55] J. Petean, *Metrics of constant scalar curvatures conformal to a Riemannian products*, Proceedings of the American Mathematical Society. Vol 138, Number 8, August 2010, Pages 2897-2905, 2010.

[56] J. Petean, *On nodal solutions of the Yamabe equation on products*, Journal of Geometry and Physics. 59 (2009), no. 10, 1395-1401.

[57] J. Petean, *Multiplicity results for the Yamabe equation by Lusternik-Schnirelmann theory*, J. Func. Anal. 2018. https//doi.org/10.1016/j.jfa.2018.08.011

[58] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Third Edition. Springer. 2016.

[59] D. Pollack, *Nonuniqueness and high energy solutions for a conformally invariant scalar equation*, Comm. Anal. Geom. 1 (1993), 347-414.

[60] P. H. Rabinowitz, *A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications*, Contributions to Nonlinear Function Analysis, Academic Press, 1971, p.11-36.

[61] B. Segre, *Famiglie di ipersuperficie superficie isoparametrische negli spazi euclidei ad un qualunque numero di demesioni*, Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur 27 (1938), 203-207.

[62] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature.* Journal of Differential Geometry 20 (1984), 2:479-495.

[63] R.Schoen, *Variational Theory for the total Scalar Curvature Functional for Riemannian Metrics and Related Topics*, Lectures Notes in Mathematics 1365, Springer-Verlag, Berlin (1987), 120-154.

[64] R.M. Schoen, *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class*, Differential geometry (ed. by H. Blaine Lawson, Jr., and Keti Tenenblat), Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 52, Longman Scientific & Technical, 1991, 311-320.

[65] R. Schoen and S. T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press Somerville, Massachusetts, U.S.A. 2010.

[66] R. Schoen and D. Zhang, *Prescribed scalar curvature on the n-sphere*, Calc. Var. and PDE 4, 1-25, (1996).

[67] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. 10, 495-506 (1973).

[68] R. Takagi, T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, in Differential Geometry in honor of K. Yano (Kinokuniya, Tokyo, 1972), pp. 469-481.

[69] N. S. Trüdinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 22 (1968), 265-274.

[70] F. Urbano, *On hypersurfaces of* $S^2 \times S^2$, arXiv :1606 .07595v1[math .DG], 2016

[71] Q. M. Wang, *Isoparametric functions on Riemannian Manifolds I*, Math. Ann. 277, (1987), 639646.

[72] Q. M. Wang, Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces, Proc. of the 1980 Beijing Symp. on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. 1, 2, 3 (Beijing 1980) 1509-1523, Science Press, Beijing 1982.

[73] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Mathematical Journal 12 (1960), 21-37.