

Regiones de dependencia analítica en el  
parámetro espectral de las eigenfunciones y un  
teorema de descomposición para el operador  
generalizado de Sturm-Liouville

Sergio Enrique Yarza Acuña



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. El caso de orden 2</b>	<b>7</b>
1.1. La teoría de dispersión clásica . . . . .	7
1.2. Perturbaciones de las soluciones en el caso de orden 2 . . . . .	13
1.2.1. Un enfoque usando el teorema de comparación de Sturm . . . . .	13
1.2.2. El enfoque clásico . . . . .	16
1.2.3. Perturbación de los coeficientes de cambio de base . . . . .	18
1.3. La factorización de Aktosun . . . . .	19
<b>2. El caso de orden 3</b>	<b>21</b>
2.1. Algunas observaciones . . . . .	29
2.2. El caso $n = 4$ . . . . .	31
<b>3. El operador de orden <math>n</math></b>	<b>37</b>
3.1. Las soluciones de Green y sus regiones de dependencia analítica . . . . .	37
3.2. Potenciales con decaimiento exponencial . . . . .	47
3.3. Los wronskianos y las $L^2$ -eigenfunciones . . . . .	55
3.4. Funciones rápidamente decrecientes . . . . .	61
<b>4. Teorema generalizado de Aktosun y una aplicación</b>	<b>69</b>
4.1. Teorema generalizado de Aktosun . . . . .	69
4.2. Un algoritmo para encontrar eigenvalores del operador $L$ . . . . .	75
<b>5. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>A. Wronskianos y la forma normal del operador</b>	<b>81</b>
<b>B. El método de evolución diferencial y algunos resultados obtenidos del algoritmo</b>	<b>85</b>



# Agradecimientos

A mi familia en general, principalmente a mi esposa, Oyuki, que ha sido partícipe de este proyecto de principio a fin, incluyendo todos sus altibajos. También a mis dos hijos, Matilde y Matías, que son mi motor diario para ésta y muchas otras cosas. Al resto de mi familia también, tanto la consanguínea como la adoptiva, por haber estado siempre pendientes de mi proceso doctoral.

A mi asesor, Dr. Fausto Antonio Ongay Larios, por haberme guiado sabiamente por más de diez años, en un proceso que empezó desde la maestría, y también por las muchas pláticas que tuvimos, algunas más académicas que otras, pero siempre enriquecedoras, sin lugar a dudas.

A mis sinodales, que con sus comentarios e innumerables charlas indudablemente ayudaron a enriquecer este trabajo.

En general, a toda la comunidad CIMAT-DEMAT, por haber sido parte integral del proceso, y por los siete años que fui parte de ella y que sin duda han forjado mi carácter y mi forma de analizar el mundo.

A la Universidad Autónoma de Nayarit por ser mi sostén económico y sitio de trabajo, siendo siempre paciente con la obtención de mi título, pero también ejerciendo presión cada cierto tiempo para que finalmente lo consiguiera.

A todas las personas no mencionadas anteriormente, que de alguna u otra manera me apoyaron, platicaron conmigo o nunca dejaron de creer en mí.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que me otorgó durante cuatro años para cursar mi doctorado.



# Introducción

En 1967, Gardner, Greene, Kruskal y Miura [1] encontraron un método para resolver el problema de valores iniciales para la ecuación KdV

$$q_t + \frac{3}{2}q_{xxx} + \frac{1}{4}q^2q_x = 0 \quad (1)$$

usando la teoría de de dispersión inversa desarrollada en aquellos días para el operador de Schrödinger en una dimensión

$$L(t) = - \left( \frac{d}{dx} \right)^2 - q(x, t). \quad (2)$$

El punto clave de este descubrimiento es que la evolución del potencial  $q$  dominada por (1) corresponde a una evolución lineal de los *datos de dispersión*  $S(L)$ . Por lo tanto existe un esquema de solución

$$\begin{array}{ccccc} q(\cdot, 0) & \leftrightarrow & L(0) & \rightarrow & S[L(0)] \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ q(\cdot, \pm) & \leftrightarrow & L(t) & \leftarrow & S[L(t)] \end{array}$$

que linealiza el flujo en (1).

Describimos ahora en más detalle la conexión entre las ecuaciones (1) y (2) así como la implementación del esquema. Ciertas eigenfunciones normalizadas  $f(x, k)$  de  $L$ , especificadas por su comportamiento asintótico, juegan un papel central, de la siguiente manera. Supongamos que  $q(x)$  decrece rápidamente cuando  $|x| \rightarrow \infty$ ; entonces  $f(x, k)$  es la única solución de

$$f_{xx} + fq + k^2f = 0, \quad k \in \mathbb{R} \quad (3)$$

con

$$f(x, k) \rightarrow e^{ikx} \text{ cuando } x \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $f$  necesariamente tiene la forma

$$f(x, k) \rightarrow a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}, \quad (5)$$

para ciertos coeficientes  $a$  y  $b$  que dependen de  $k$  y de  $q$ . La función  $q \mapsto b$  esencialmente es la parte alta del esquema de solución. La teoría de dispersión inversa muestra cómo recuperar el potencial  $q$  dada la función  $b$  (junto con ciertos datos discretos que mencionamos en el capítulo 1). Este procedimiento de recuperación es esencialmente la parte baja del mismo esquema.

**Observación** A lo largo de este trabajo, utilizamos expresiones como las que aparecen en (4) y (5), que pueden parecer confusas porque se expresa un límite con respecto a la variable  $x$  como una función que aún depende de  $x$ . En general, a menos que explícitamente se indique algo distinto, cuando se vea una expresión de la forma:

$$f(x, k) \rightarrow g(x, k) \text{ cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad (6)$$

se debe entender que

$$f(x, k) = g(x, k) + o(1) \quad (7)$$

para  $x$  suficientemente grande. Intuitivamente, (6) quiere decir que para  $x$  suficientemente grande,  $f(x, k)$  es muy parecida a  $g(x, k)$ . Esta notación es conveniente y frecuente en los artículos sobre teoría de dispersión.

La ecuación KdV entra de la siguiente manera. Supongamos que  $q(x, t)$ ,  $r(x, t)$  y  $s(x, t)$  son funciones suaves que, junto con sus derivadas, son rápidamente decrecientes cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Consideremos el problema de determinar  $f(x, t, k)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus 0$ , tal que

$$f_{xx} + qf + k^2 f = 0,$$

$$f_t - (k^2 + s)f_x + (ik^3 + r)f = 0, \quad (8)$$

$$f(x, t, k) \rightarrow e^{ikx} \text{ cuando } x \rightarrow -\infty.$$

Este problema está sobredeterminado y tiene solución si y sólo si  $q$ ,  $r$  y  $s$  satisfacen ciertas condiciones de compatibilidad. Cuando  $r$  y  $s$  son encontradas en términos de  $q$ , estas condiciones de compatibilidad *son equivalentes a la ecuación KdV* para  $q$ . Insertando la segunda de las ecuaciones (8) en

$$f(x, t, k) \rightarrow a(k, t)e^{ikx} + b(k, t)e^{-ikx} \text{ cuando } x \rightarrow \infty, \quad (9)$$

obtenemos

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = -2ik^3 b, \quad (10)$$

que son las evoluciones lineales simples obtenidas por Gardner, Greene, Kruskal y Miura. Por lo tanto para resolver la ecuación KdV con valor inicial  $q(x, 0)$  primero calculamos  $S(L(0)) \sim b(\cdot, 0)$ , luego evolucionamos esto en el tiempo a  $b(k, t) = b(k, 0)e^{-2ik^3 t}$ , y finalmente calculamos  $S^{-1}[b(\cdot, t)] = f(\cdot, t)$ .



La relación asintótica (9) puede pensarse como una relación entre la eigenfunción  $f$  y una segunda eigenfunción  $\tilde{f}$  normalizada en  $\infty$ . La existencia de estos conjuntos de eigenfunciones (soluciones de Jost) es crucial para la teoría de dispersión inversa para ecuaciones de segundo orden desarrollada por Gelfand-Levitan, Marchenko, Faddeev y otros.

Las ecuaciones (8) son equivalentes a una ecuación de la forma

$$D_t L = [H, L], \quad (11)$$

i.e.,  $H$  y  $L$  forman un par de Lax [2], en donde

$$H = D - qD - (Dq), \quad D = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}. \quad (12)$$

La *jerarquía KdV* es la sucesión de ecuaciones (11) obtenidas cuando  $H$  toma valores entre operadores diferenciales de órdenes impares con ciertas propiedades (decaimiento de los potenciales  $q_j$ ). Para cualquier operador diferencial ordinario de orden  $n$  de la forma

$$L_n = D^n + \sum_{k=0}^{n-2} q_k D^k \quad (13)$$

existe una jerarquía similar de ecuaciones

$$\begin{aligned} D_t L &= [H_{n,k}, L], \quad k \neq 0 \quad \text{mód } n \\ H_{n,k} &= D^k + \sum_{j=0}^{k-2} h_{n,j} D^j, \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $h_{n,k}$  son ciertos polinomios en los  $q_k$  y sus derivadas. Por ejemplo, la ecuación Boussinesq corresponde a escoger  $n = 3, k = 2$ . Estas jerarquías fueron estudiadas sistemáticamente por primera vez por Gelfand y Dikii [3] y desde entonces han sido objeto de una gran cantidad de interpretaciones algebraicas y desarrollo.

En esta tesis estudiamos el problema de eigenvalores del operador

$$L = D^n + q_{n-2} D^{n-2} + q_{n-3} D^{n-3} + \dots + q_0, \quad (14)$$

que es parte esencial de la implementación de la parte alta del esquema de solución encontrado por Gardner *et al.* para resolver las ecuaciones presentes en la jerarquía KdV. Pensaremos a  $L$  como un operador cuyo dominio es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , y por un eigenvalor y su eigenfunción asociada de  $L$  entendemos un número  $\lambda \in \mathbb{C}$  y una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tales que  $Lf = \lambda f$  y  $f \neq 0$ . Aunque la teoría de dispersión directa e inversa de los operadores de segundo orden es bien conocida, éste no es el caso para  $n \geq 3$ .

Uno de los principales obstáculos en el estudio del operador  $L$  es que, a diferencia del operador de segundo orden, este operador no es autoadjunto en

general. Esto hace que la mayor parte de las herramientas conocidas y poderosas sobre los espectros no sean aplicables para esta familia de operadores.

Este problema fue estudiado en sus orígenes por Beals *et al.* en [4] y [5]. En dichos artículos el problema se transforma en una versión matricial y en una versión tensorial, respectivamente. La ecuación de Bousinessq para la propagación de ondas, está asociada al operador de orden 3, el cual ha sido estudiado en detalle por Deift *et al.* en [6].

También es de mencionar que muchos esfuerzos se han hecho para crear soluciones numéricas para el problema de eigenvalores de  $L$ . Listas importantes (pero incompletas) de ellos se pueden encontrar en [7] para el caso autoadjunto, y en [8] para el caso en el que los soportes de los potenciales  $q_i$  son compactos. Sin embargo, muy poco se ha hecho para el caso en que  $L$  no es autoadjunto y además los potenciales no tienen soporte compacto.

Básicamente, la idea en el caso clásico ( $n = 2$ ) es definir dos bases de soluciones de la ecuación de eigenvalores

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) + q_0(x)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k), \quad (15)$$

donde  $k^2 = \lambda$ , por su comportamiento asintótico (una hacia  $-\infty$  y otra hacia  $\infty$ ), y encontrar la matriz de cambio de base, llamada aquí *matriz de transición*, que depende de  $k$ . Posteriormente, se calcula el wronskiano de dos funciones: una de cada base, de tal manera que haya una región en el plano  $k$  en la que ambas funciones decaigan exponencialmente por su misma definición: una hacia  $-\infty$  y la otra hacia  $\infty$ . Por la forma del operador  $L$ , dicho wronskiano no depende más que de  $k$ , y su expresión queda en términos de los elementos de la matriz de transición. Un cero de este wronskiano en  $k_0$  corresponde a un eigenvalor  $k_0^2$ , con eigenfunción cualquiera de las dos funciones escogidas, ya que dadas las condiciones asintóticas, ambas están en  $L^2(\mathbb{R})$ , pero para garantizar que corresponde a puntos del espectro discreto, dichos ceros deben ser aislados. Por ello es importante hallar condiciones que garanticen que las eigenfunciones dependen de manera analítica del parámetro espectral, y en general, esto sólo ocurre para valores particulares de dicho parámetro; es a las regiones donde esto se cumple que nos referimos como “regiones de analiticidad”.

Este enfoque no tiene una generalización directa para órdenes mayores que 2, entre otras razones porque las soluciones que forman las dos bases no tienen regiones comunes de analiticidad, lo que hace que el wronskiano de varias de ellas no pueda relacionarse tan inmediatamente con el espectro discreto del operador.

Dos de los objetivos centrales de este trabajo implican generalizar esta caracterización del espectro discreto del operador de orden  $n$ : por un lado, mostrar que hay una biyección entre los ceros de ciertos wronskianos de soluciones y los eigenvalores del operador, y por el otro, que estos wronskianos se pueden calcular en términos de la matriz de transición.

En el caso de orden 2, existe otro resultado importante para este trabajo, que no es tan clásico como lo comentado arriba, y que fue encontrado por T. Aktosun [9] en 1992. A grandes rasgos dice que si dividimos el eje real y nos fijamos en el problema de dispersión en cada intervalo, entonces las matrices de

transición que se encuentran factorizan a la matriz de transición del potencial no particionado. El otro objetivo central de este trabajo es generalizar este teorema de descomposición de Aktosun al caso de orden arbitrario.

La meta del primer capítulo es mostrar las técnicas que queremos generalizar: Desarrollamos el análisis clásico para el caso de orden 2, se definen las bases de soluciones por su comportamiento asintótico, se obtienen ciertas propiedades de simetría relacionadas con ellas, y se define la matriz de transición. También, calculamos el wronskiano de dos de estas soluciones y explicamos la correspondencia entre los ceros de dicho wronskiano y los eigenvalores del operador. Se mencionan algunos ejemplos y también algunos resultados interesantes. También se proponen varios análisis de perturbación. Por último, enunciamos y explicamos algunas consecuencias del teorema de factorización de Aktosun.

El segundo capítulo inicia el análisis para el caso de orden superior; aquí seguimos el estudio hecho por Kaup [10] del problema de orden 3, en el que básicamente se intenta hacer una generalización del problema de orden 2, aunque como se verá, ésta no es del todo directa, pues se empiezan a encontrar ciertos problemas de analiticidad de las soluciones. Después de este análisis, discutimos los problemas de generalizar el análisis de Kaup a orden 4 y orden 5, con el objetivo de ilustrar los problemas que surgen al tratar de aplicar las mismas técnicas a operadores de órdenes mayores.

El tercer capítulo es en cierto modo el núcleo de este trabajo, y contiene la mayor parte de las contribuciones teóricas: Se desarrolla un análisis del problema espectral del operador de orden  $n$ . Se encuentran expresiones para las soluciones de las bases en forma de función de Green y se encuentra una región donde todas las soluciones de las bases son analíticas. Se caracteriza cierta parte del espectro discreto como ceros de wronskianos de soluciones y se da una expresión para dichos wronskianos en términos de la matriz de transición. Por último, se hace una comparación con el único trabajo que encontramos en la literatura, y que se ha hecho en esta misma dirección [4], y se analizan algunas conexiones entre ambos enfoques.

El capítulo 4 contiene la otra aportación importante de este trabajo, la versión generalizada del teorema de Aktosun. Como una consecuencia bastante directa del teorema de Aktosun, desarrollamos un algoritmo numérico para aproximar a los eigenvalores del operador de orden  $n$ . Algunos resultados numéricos también son mostrados.

Por último, se presentan varias conclusiones sobre este trabajo.



# Capítulo 1

## El caso de orden 2

En este capítulo desarrollamos el análisis clásico del problema espectral siguiendo principalmente el estudio de Novikov [11] y Newell [12]. El objetivo de este capítulo es exponer de manera clara las técnicas y resultados que queremos generalizar al caso de orden  $n$ . Un análisis mucho más completo, incluyendo demostraciones de los comportamientos asintóticos de las soluciones y el problema inverso de dispersión, en el cual aquí no profundizamos, se puede encontrar en el artículo de Deift y Trubowitz [13].

### 1.1. La teoría de dispersión clásica

El operador  $L$  cuando  $n = 2$  tiene la forma

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x), \quad (1.1)$$

al cual lo pensamos como un operador cuyo dominio es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , y queremos encontrar sus eigenfunciones y eigenvalores, i.e., parejas  $(\lambda_k, f_k)$  donde  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  y  $f_k \in L^2(\mathbb{R})$ , tales que  $Lf_k = \lambda_k f_k$  y  $f_k \neq 0$ .

En la mayor parte de la literatura se hacen dos suposiciones sobre el potencial  $q_0$ : una es que es una función real-valuada, y la otra es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|q_0(x)|dx < \infty. \quad (1.2)$$

La primera suposición implica que  $L$  es autoadjunto, y por lo tanto su espectro es real, y la segunda suposición implica que el origen no es un punto de acumulación para el espectro discreto de  $L$  [14]. Es un hecho conocido además (véase por ejemplo [14]) que dadas estas dos condiciones, el espectro discreto de  $L$  es de hecho negativo. Es también sabido [13] que el espectro continuo, correspondiente a funciones que cumplen  $Lf = \lambda f$  pero que no están en  $L^2(\mathbb{R})$ , cubre todo el eje real positivo; en lo que sigue trabajaremos bajo las hipótesis (1.1) y (1.2).

La ecuación espectral a resolver tiene entonces la forma

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + q_0(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad (1.3)$$

o bien, para simplificar notación y en concordancia con la mayoría de las referencias

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) + q_0(x)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k), \quad (1.4)$$

donde hemos hecho la sustitución  $\lambda = k^2$ .

Empezamos el análisis de la ecuación (1.4) estudiando el espectro continuo, i.e., tomando  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Como ya mencionamos, usando que  $q_0$  satisface (1.2), se demuestra que se pueden encontrar dos soluciones de la ecuación (1.4) por su comportamiento asintótico cuando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ \varphi_1(x, k) &\rightarrow e^{-ikx}, \\ x &\rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

y otras dos soluciones definidas de manera análoga cuando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \psi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ \psi_1(x, k) &\rightarrow e^{-ikx}, \\ x &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Estas soluciones tienen propiedades de simetría:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, -k) &= \varphi_1(x, k) \\ \psi_0(x, -k) &= \psi_1(x, k), \end{aligned} \quad (1.5)$$

y, ya que  $q_0$  es real-valuada, además se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, -k) &= \overline{\varphi_j(x, k)} \\ \psi_j(x, -k) &= \overline{\psi_j(x, k)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

para  $j = 0, 1$ .

Como los conjuntos de soluciones  $\{\varphi_0, \varphi_1\}$  y  $\{\psi_0, \psi_1\}$ , forman cada uno una base para el espacio de soluciones de (1.4), debe existir una matriz de cambio de base  $\Lambda(k)$  tal que

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x, k) \\ \varphi_1(x, k) \end{bmatrix} = \Lambda(k) \begin{bmatrix} \psi_0(x, k) \\ \psi_1(x, k) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Usando (1.6), se obtiene que  $\Lambda(k)$  tiene la forma

$$\Lambda(k) = \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ b(-k) & a(-k) \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

donde  $\varphi_0(x, k) = a(k)\psi_0(x, k) + b(k)\psi_1(x, k)$ .

Recordemos ahora que el wronskiano de  $n$  funciones  $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ , denotado  $W(f_1, \dots, f_n)$ , se define como:

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

donde  $|A| = \det(A)$  y  $f^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j} f$ . El wronskiano nos permite verificar por ejemplo cuándo un conjunto de funciones es linealmente independiente, lo que ocurre precisamente cuando es distinto de cero; en particular, un resultado sobre el que gira mucho de este trabajo es que cuando tomamos  $n$  soluciones de una ecuación de la forma

$$\left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{d^n}{dx^n} \psi(x, k) + q_{n-2}(x) \left(\frac{1}{i}\right)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \psi(x, k) + \dots + q_0(x) \psi(x, k) = k^n \psi(x, k), \quad (1.10)$$

su wronskiano es independiente de  $x$ . Una prueba de esta propiedad se da en el apéndice A, y está fuertemente ligada a que la ecuación (1.10) no contiene el término  $(n-1)$ -ésimo. Una consecuencia de esta propiedad es que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W(\varphi_0, \varphi_1) = \lim_{x \rightarrow \infty} W(\varphi_0, \varphi_1), \quad (1.11)$$

o bien,

$$\begin{vmatrix} e^{ikx} & e^{-ikx} \\ ik e^{ikx} & -ik e^{-ikx} \end{vmatrix} = |\Lambda(k)| \begin{vmatrix} e^{ikx} & e^{-ikx} \\ ik e^{ikx} & -ik e^{-ikx} \end{vmatrix}, \quad (1.12)$$

de donde  $|\Lambda(k)| = 1$ .

Por completez, mencionamos que en la mayoría de las referencias ([9], [11], [13]), se le da la siguiente interpretación física al espectro continuo: Si dividimos por  $a(k)$  a  $\varphi_0$ , vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(k)} \varphi_0(x, k) &\rightarrow \frac{1}{a(k)} e^{ikx}, x \rightarrow -\infty \\ \frac{1}{a(k)} \varphi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx} + \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx}, x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

es decir, la función  $\frac{1}{a(k)} \varphi_0$  se ve como una onda incidente más una onda reflejada del lado derecho de la recta real y como una onda transmitida del lado izquierdo de la recta real. Por esta razón, se acostumbra definir  $r(k) := \frac{b(k)}{a(k)}$  y  $t(k) := \frac{1}{a(k)}$ , el coeficiente de reflexión por la derecha y el coeficiente de transmisión,

respectivamente. De manera análoga, se define  $l(k) = \frac{b(-k)}{a(k)}$ , el coeficiente de transmisión por la izquierda. Esta interpretación, de hecho, es la que le ha dado el nombre de “Teoría de dispersión” a esta área.

Pasemos ahora al estudio del espectro discreto. Para hacer esto, es conveniente primero dar una expresión alternativa para las funciones  $\varphi$ 's y  $\psi$ 's. Es también algo estándar (véase [11]) encontrar que estas soluciones satisfacen las siguientes ecuaciones integrodiferenciales:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, k) &= e^{ikx} - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x \left( e^{ik(x-s)} - e^{-ik(x-s)} \right) q_0(s) \varphi_0(s, k) ds, \\
\varphi_1(x, k) &= e^{-ikx} - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x \left( e^{ik(x-s)} - e^{-ik(x-s)} \right) q_0(s) \varphi_1(s, k) ds, \\
\psi_0(x, k) &= e^{ikx} + \frac{i}{2k} \int_x^{\infty} \left( e^{ik(x-s)} - e^{-ik(x-s)} \right) q_0(s) \psi_0(s, k) ds, \\
\psi_1(x, k) &= e^{-ikx} + \frac{i}{2k} \int_x^{\infty} \left( e^{ik(x-s)} - e^{-ik(x-s)} \right) q_0(s) \psi_1(s, k) ds,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

pero una prueba formal de la equivalencia de (1.13) y (1.4) será dada en la sección 4.1. Multiplicando  $\varphi_0$  y  $\psi_0$  por  $e^{-ikx}$  y  $\varphi_1$  y  $\psi_1$  por  $e^{ikx}$ , (1.13) se convierte en

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, k) e^{-ikx} &= 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x \left( 1 - e^{-i2k(x-s)} \right) q_0(s) \varphi_0(s, k) e^{-iks} ds, \\
\varphi_1(x, k) e^{ikx} &= 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x \left( e^{i2k(x-s)} - 1 \right) q_0(s) \varphi_1(s, k) e^{iks} ds, \\
\psi_0(x, k) e^{-ikx} &= 1 + \frac{i}{2k} \int_x^{\infty} \left( 1 - e^{-i2k(x-s)} \right) q_0(s) \psi_0(s, k) e^{-iks} ds, \\
\psi_1(x, k) e^{ikx} &= 1 + \frac{i}{2k} \int_x^{\infty} \left( e^{i2k(x-s)} - 1 \right) q_0(s) \psi_1(s, k) e^{iks} ds,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

y estas últimas expresiones son más útiles que las correspondientes en (1.13), ya que con ellas podemos caracterizar las regiones del plano  $k$  en las que estas soluciones son analíticas, simplemente usando como criterio que la integral en la ecuación integrodiferencial correspondiente converja. De esta manera, uno encuentra que las regiones de analiticidad de estas soluciones son:



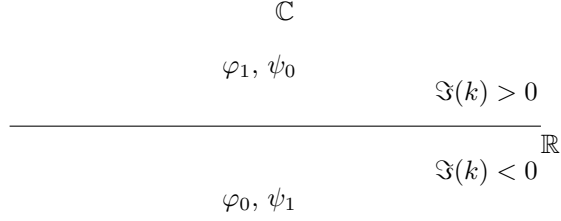


Figura 1: Regiones de analiticidad para las  $\varphi_j$  y las  $\psi_j$

Ahora bien, observemos que

$$\begin{aligned}
W(\varphi_0(x, k), \psi_1(x, k)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} W(\varphi_0(x, k), \psi_1(x, k)) \\
&= \begin{vmatrix} a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} & e^{-ikx} \\ ik a(k)e^{ikx} - kb(k)e^{-ikx} & -ike^{-ikx} \end{vmatrix} \\
&= -2ika(k),
\end{aligned} \tag{1.15}$$

donde en el segundo paso se han utilizado (1.7) y (1.8). Esta relación es fundamental para nuestro estudio por lo siguiente: Supongamos que  $a(\kappa_0) = 0$  para algún  $\kappa_0$  en el semiplano inferior complejo. En esa región,  $\varphi_0$  es una función que decrece exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y  $\psi_1$  es una función que decrece exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces, dado que  $a(\kappa_0) = 0$ , tenemos que  $\varphi_0(x, \kappa_0) = c\psi_1(x, \kappa_0)$ . Estas condiciones cuando  $|x| \rightarrow \infty$  claramente implican que esta función es de cuadrado integrable, y por lo tanto,  $\varphi_0(x, \kappa_0)$  es una eigenfunción de  $L$ , con eigenvalor  $\kappa_0^2$ . En el caso en que  $q_0$  es real, entonces sabemos que  $\kappa_0^2$  es real y negativo, así que los ceros de  $a(k)$  se encuentran sobre el semieje imaginario negativo. Hemos encontrado entonces una correspondencia entre los eigenvalores de  $L$  y los ceros del coeficiente  $a$ .

Una observación importante es que el coeficiente  $a(k)$  es analítico en el semiplano inferior complejo, como consecuencia de que  $\varphi_0$  y  $\psi_1$  también lo son, y esta propiedad es fundamental para relacionar los ceros de este coeficiente con el espectro discreto de  $L$ , dado que la analiticidad nos garantiza que los ceros son aislados. Este punto será un argumento central en el resto de este trabajo.

El último concepto necesario para el estudio del caso de orden 2 es el de las constantes de normalización. Lo que se hace es que para cada eigenvalor  $\kappa_j$  consideramos la eigenfunción específica  $f_j$  que satisface

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_j(x) = e^{i\kappa_j x}, \tag{1.16}$$

y definimos la constante de normalización  $b_j$  como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_j(x) = b_j e^{-i\kappa_j x}. \tag{1.17}$$

El problema directo clásico de dispersión se puede describir entonces de la siguiente manera: dado  $q_0$ , determinar el conjunto  $S(q_0) = \{r(k), \{\kappa_j\}, \{b_j\}\}$ , conocido como los datos de dispersión de  $q_0$ .

**Observación** El problema inverso, claro está, consiste en determinar  $q_0$  a partir de los datos de dispersión. Una explicación totalmente constructiva y formal de la resolución del problema inverso clásico se puede consultar en [11]. Nosotros no lo mencionamos aquí porque en nuestro trabajo no estudiamos el problema inverso para el operador de orden  $n$ .

A continuación, damos un ejemplo de un potencial donde podemos encontrar los datos de dispersión de manera explícita.

**Ejemplo** Consideremos el potencial

$$q_0(x) = \begin{cases} -Q & \text{si } x \in [0, R] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.18)$$

En este potencial en particular se facilitan los cálculos porque como tiene soporte compacto, las funciones  $\varphi_j$  son puramente exponenciales a la izquierda del soporte, y las funciones  $\psi_j$  lo son a la derecha del soporte. Definamos una base de soluciones de la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x, k) + q_0(x)f(x, k) = k^2f(x, k) \quad (1.19)$$

para cada uno de los intervalos  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, R]$  y  $[R, \infty)$ . Como es de esperar, en  $(-\infty, 0]$  tomamos como base  $\{\varphi_0, \varphi_1\}$  y en  $[R, \infty)$  tomamos  $\{\psi_0, \psi_1\}$ , en tanto que en  $[0, R]$  tomamos la base  $\{e^{i\sqrt{Q+k^2}x}, e^{-i\sqrt{Q+k^2}x}\}$ , ya que en este intervalo hay que resolver la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x, k) - Qf(x, k) = k^2f(x, k). \quad (1.20)$$

Para encontrar el elemento  $a(k)$  de la matriz  $\Lambda(k)$  procederemos ahora como sigue: Como  $\varphi_0$  es solución de la ecuación, podemos usar  $\varphi_0(-R, k) = e^{-ikR}$  y  $\varphi_0'(-R, k) = ike^{-ikR}$  (donde el apóstrofe representa derivada con respecto a  $x$ ) como condiciones iniciales para la ecuación (1.20). Esto resulta en dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= A(k) + B(k) \\ ik &= iA(k)\sqrt{k^2 + Q} - iB(k)\sqrt{k^2 + Q}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k}{\sqrt{k^2 + Q}} \right) \\ B(k) &= \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{k^2 + Q}}. \end{aligned}$$

De manera similar, resolvemos ahora la ecuación en el intervalo  $[R, \infty)$  para obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned} a(k)e^{ikR} + b(k)e^{ikR} &= e^{-iR\sqrt{k^2+Q}} \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{k^2+Q}} \right) \\ &+ \frac{1}{2}e^{iR\sqrt{k^2+Q}} \left( 1 + \frac{k}{\sqrt{k^2+Q}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -ib(k)e^{-ikR}k + ia(k)e^{ikR}k &= -ie^{-iR\sqrt{k^2+Q}}\sqrt{k^2+Q} \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{k^2+Q}} \right) \\ &+ \frac{1}{2}ie^{iR\sqrt{k^2+Q}}\sqrt{k^2+Q} \left( 1 + \frac{k}{\sqrt{k^2+Q}} \right). \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente

$$a(k) = e^{-ikR} \left( \cos(R\sqrt{k^2+Q}) + i \frac{2k^2+Q}{2k\sqrt{k^2+Q}} \text{sen}(R\sqrt{k^2+Q}) \right) \quad (1.21)$$

$$b(k) = e^{-ikR} i \frac{Q}{2k\sqrt{k^2+Q}} \text{sen}(R\sqrt{k^2+Q}). \quad (1.22)$$

Esto nos da los coeficientes  $a(k)$  y  $b(k)$ , y por lo tanto,  $r(k)$ . Ahora, para encontrar los eigenvalores, sustituimos  $k = -i\sqrt{Q} \cos \theta$  en (1.21), para encontrar que:

$$a(\theta) = e^{-\sqrt{Q}R \cos \theta} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 2\theta} (\text{sen}(R\sqrt{Q} \text{sen} \theta + 2\theta)). \quad (1.23)$$

Por último, encontramos los ceros de  $a$  buscando las intersecciones de las gráficas  $y = \sqrt{Q}R \text{sen} \theta$  e  $y_n = n\pi - 2\theta$  para  $n = 1, 2, \dots$

## 1.2. Perturbaciones de las soluciones en el caso de orden 2

En esta sección mostramos tres análisis del efecto sobre el espectro discreto cuando el potencial  $q_0$  sufre una perturbación. Como se verá más adelante, sólo uno de ellos tiene una generalización directa al caso de orden  $n$ .

### 1.2.1. Un enfoque usando el teorema de comparación de Sturm

El primer enfoque que presentamos para estudiar el efecto de una perturbación nos dice qué tanto podemos perturbar sin aumentar el número de eigenvalores. Aunque el análisis se hace con base en técnicas usuales de la teoría clásica

de Sturm-Liouville, es pertinente mencionar que, hasta donde sabemos, el resultado explícito es una contribución original de esta tesis. Primero, supongamos que  $q_0 = -Q\chi_{[0,R]}$  con  $Q \geq 0$ . De (1.23), tenemos:

$$a(\theta) = e^{-\sqrt{Q}R \cos \theta} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 2\theta (\text{sen}(R\sqrt{Q}\text{sen}\theta + 2\theta))}.$$

Ahora bien, para saber cuántos ceros tiene  $a(k)$ , o, equivalentemente, cuántos eigenvalores tiene  $L$ , necesitamos investigar para cuántos valores de  $n$  las funciones  $y_n = n\pi - 2\theta$  tienen intersección en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  con la función  $y\sqrt{Q}R\text{sen}\theta$ . Una determinada función  $y_n$  no se interseca con la función  $y$  en el intervalo especificado si y sólo si

$$n\pi - \pi \geq \sqrt{Q}R, \quad (1.24)$$

ya que  $n\pi - \pi$  es el mínimo de la función  $y_n$  y  $\sqrt{R}L$  es el máximo de la función  $y$  en el intervalo de interés. Entonces, si

$$n \geq \frac{\sqrt{Q}R}{\pi} + 1, \quad (1.25)$$

$y_n$  no se interseca con  $y$  en  $(0, \frac{\pi}{2})$ . esto nos dice que el número de eigenvalores de nuestro operador es el mayor entero menor que  $\frac{\sqrt{Q}R}{\pi} + 1$ . Nótese que cualquier potencial de este tipo entonces tiene al menos un eigenvalor asociado.

Combinando este resultado con el siguiente teorema, podemos entonces acotar el número de eigenvalores para cualquier potencial negativo de soporte compacto.

**Teorema 1** Sean  $q_1$  y  $q_2$  de soporte compacto, tales que  $q_i(x) \leq 0$ . Supongamos que  $N_1$  y  $N_2$  son el número de eigenvalores asociados a  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente. Si  $q_1(x) \leq q_2(x) \forall x$ , entonces  $N_1 \geq N_2$ .

Este teorema es una consecuencia inmediata de que el número de eigenvalores del operador  $L$  coincide con el número de ceros de la función  $\varphi_0(x, 0)$  (véase [15]) y del siguiente

**Lema 1** Sean  $q_1$  y  $q_2$  de soporte compacto, tales que  $q_1(x) \leq q_2(x) \leq 0 \forall x$ . Sean  $\psi_{01}, \psi_{02}$  las funciones  $\psi_0$  correspondientes a  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente y  $N_1$  y  $N_2$  los ceros de  $\psi_{01}(x, 0)$  y  $\psi_{02}(x, 0)$  respectivamente. Entonces,  $N_1 \geq N_2$ .

**Prueba.** Las funciones  $\psi_{01}(x, 0)$  y  $\psi_{02}(x, 0)$  son iguales a 1 a la derecha del soporte de  $q_1$  y constantes a la izquierda, por lo que todos sus ceros deben caer en el soporte de  $q_1$ . Supongamos que  $x_1$  es una cota superior del soporte de  $q_1$ . Veamos que entre  $x_1$  y el último cero de  $\psi_{02}(x, 0)$  debe haber un cero de  $\psi_{01}(x, 0)$ :

Por simplicidad, definamos  $f_i(x) = \psi_{0i}(x, 0)$ . Sea  $y_1$  el último cero de  $f_2$ , y supongamos que  $f_1$  no tiene ceros en  $(y_1, x_1)$ . Entonces, tenemos que  $f_1(x_1) =$

$f_2(x_1) = 1, f_1'(x_1) = f_2'(x_1) = 0, f_2'(y_1) > 0$  y  $f_2, f_1 > 0$  en  $(y_1, x_1)$ . Recordando que

$$-f_i'' + q_i f_i = 0, \quad (1.26)$$

multiplicamos la ecuación que resuelve  $f_1$  por  $f_2$  y viceversa, y restamos las ecuaciones resultantes, obteniendo

$$f_2'' f_1 - f_1'' f_2 = (q_2 - q_1) f_1 f_2, \quad (1.27)$$

o bien,

$$(f_2' f_1 - f_1' f_2)' = (q_2 - q_1) f_1 f_2. \quad (1.28)$$

Integrando ambos lados de la ecuación entre  $y_1$  y  $x_1$  se tiene

$$[f_2' f_1 - f_1' f_2]_{y_1}^{x_1} = \int_{y_1}^{x_1} (q_2 - q_1) f_1 f_2 dx. \quad (1.29)$$

Ahora, dadas nuestras hipótesis, el lado izquierdo de la ecuación es negativo y el lado derecho es positivo, por lo que  $f_1$  debe tener un cero entre  $y_1$  y  $x_1$ .

Para terminar la demostración, probaremos que entre cada dos ceros consecutivos de  $f_2$  debe haber uno de  $f_1$ . Para ello supondremos que tenemos dos ceros consecutivos de  $f_2$ , en  $x_1$  y  $x_2$ , con  $x_1 < x_2$ , y ningún cero de  $f_1$  en  $(x_1, x_2)$ . Supondremos que  $f_1, f_2 > 0$  en  $(x_1, x_2)$ , pero los otros casos son totalmente análogos. Ahora tenemos entonces que  $f_2'(x_1) > 0$  y  $f_2'(x_2) < 0$ . Imitando el desarrollo anterior, pero al final integrando entre  $x_1$  y  $x_2$ , llegamos a

$$[f_2' f_1 - f_1' f_2]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (q_2 - q_1) f_1 f_2 dx, \quad (1.30)$$

donde nuevamente el lado izquierdo es negativo y el lado derecho positivo. Esto concluye la demostración. ■

El Teorema 1 junto con el análisis de los potenciales cuadrados (como el potencial definido en (1.18)) nos permite acotar tanto por arriba como por abajo el número de eigenvalores de un potencial de soporte compacto, simplemente colocándolo entre dos potenciales cuadrados. Por ejemplo, supongamos que queremos saber cuántos eigenvalores están asociados al potencial  $q(x) = -\text{sen}x\chi_{(0,\pi)}(x)$ . A este potencial lo podemos acotar superiormente con el potencial  $-\chi_{(0,\pi)}(x)$ . Este potencial, usando el análisis al inicio de esta sección, tiene exactamente un eigenvalor. No hace falta acotar inferiormente  $q(x)$  porque como ya mencionamos, cualquier potencial cuadrado tiene al menos un eigenvalor, así que cualquier elección de un potencial con estas características nos ayudaría a concluir que  $q(x)$  tiene exactamente un eigenvalor.

Estas conclusiones también nos dicen qué tanto podemos perturbar a un potencial sin que su número de eigenvalores aumente o disminuya. Sin embargo, este enfoque no es directamente aplicable a operadores de órdenes mayores porque no existe un teorema como el de comparación de Sturm para algún orden distinto al segundo. Una posible razón de esto es que mientras la primer y segunda derivadas de una función tienen una interpretación geométrica muy bien entendida (monotonía y concavidad), no ocurre lo mismo con las siguientes derivadas.

### 1.2.2. El enfoque clásico

Revisamos ahora una teoría ya existente en la dirección del análisis del caso directo cuando existe una perturbación en el potencial. Los detalles técnicos se pueden consultar en [12], pero aquí damos una idea de dicho enfoque.

Supongamos que le sumamos una perturbación  $\delta q$  al potencial  $q_0$ , y que esto induce una perturbación  $\delta\psi(x, k)$  en cualquier solución  $\psi(x, k)$  a la ecuación espectral original, i.e.

$$-\frac{d^2}{dx^2}(\psi(x, k) + \delta\psi(x, k)) + (q_0 + \delta q)(\psi(x, k) + \delta\psi(x, k)) = k^2(\psi(x, k) + \delta\psi(x, k)), \quad (1.31)$$

de donde, si despreciamos el término  $\delta q \delta\psi$  obtenemos

$$-\frac{d^2}{dx^2}\delta\psi(x, k) + \delta q\psi(x, k) + q_0\delta\psi(x, k) = k^2\delta\psi(x, k). \quad (1.32)$$

En particular, estudiemos la perturbación causada en  $\varphi_0$ , y llamémosle  $\delta\varphi_0$ . Podemos reescribir la ecuación (1.32) como

$$-\frac{d^2}{dx^2}\delta\varphi_0(x, k) + q_0\delta\varphi_0(x, k) - k^2\delta\varphi_0(x, k) = -\delta q\varphi_0(x, k). \quad (1.33)$$

Usando el método de variación de parámetros con las soluciones de la ecuación homogénea asociada a (1.33)  $\psi_0$  y  $\psi_1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\varphi_0(x, k) &\approx \frac{1}{2ik}\psi_0(x, k) \int_{-\infty}^x \delta q(s)\varphi_0(s, k)\psi_1(s, k)ds \\ &\quad - \frac{1}{2ik}\psi_1(x, k) \int_{-\infty}^x \delta q(s)\varphi_0(s, k)\psi_0(s, k)ds. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  llegamos a

$$\delta a(k) \approx \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \delta q(x)\varphi_0(x, k)\psi_1(x, k)dx, \quad (1.34)$$

$$\delta b(k) \approx -\frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \delta q(x)\varphi_0(x, k)\psi_0(x, k)dx. \quad (1.35)$$

Recordando que existe una biyección entre los ceros de  $a(k)$  y los eigenvalores del operador de Sturm-Liouville, esta estimación puede ser de gran ayuda en el estudio de perturbación que estamos desarrollando.

Veamos qué tan buena es la aproximación propuesta con un ejemplo sencillo:

Tomemos  $q_0 = 0$ , de tal manera que  $\varphi_0(x, k) = e^{ikx}$ ,  $\psi_0(x, k) = e^{ikx}$ ,  $\psi_1(x, k) = e^{-ikx}$ ,  $a(k) = 1$ ,  $b(k) = 0$  y el operador no tiene eigenvalores en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Hagamos entonces  $\delta q_0(x) = -\epsilon \chi_{(0,1)}$ , con  $\epsilon \ll 1$ . Usando (1.34), obtenemos que

$$\delta a(k) \approx -\frac{1}{2ik}\epsilon, \quad (1.36)$$

de donde

$$a(k) \approx 1 - \frac{1}{2ik}\epsilon. \quad (1.37)$$

Entonces, la aproximación al cero de  $a(k)$  es:

$$\kappa_1 \approx -\frac{i\epsilon}{2}. \quad (1.38)$$

Para ver qué tan buena es esta aproximación, podemos encontrar  $a(k)$  de manera explícita (como en (1.23)):

$$a(k) = e^{-ik} \left( \cos(\sqrt{k^2 + \epsilon}) + i \frac{2k^2 + \epsilon}{2k\sqrt{k^2 + \epsilon}} \text{sen}(\sqrt{k^2 + \epsilon}) \right). \quad (1.39)$$

Sustituyendo  $k = -i\sqrt{\epsilon} \cos \theta$  en esta última expresión obtenemos

$$a(\theta) = e^{-\sqrt{\epsilon}L \cos \theta} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 2\theta} \text{sen}(\sqrt{\epsilon} \text{sen} \theta + 2\theta). \quad (1.40)$$

Para obtener ceros de  $a$ , se buscan entonces los puntos donde las funciones  $y_1 = n\pi - 2\theta$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y la función  $y_2 = \sqrt{\epsilon} \text{sen} \theta$  se intersecan en el intervalo  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Ahora, como  $\sqrt{\epsilon} \approx 0$ , sólo tenemos intersección para el caso  $n = 1$ , cerca del punto  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , donde  $y_2 \approx \sqrt{\epsilon}$ . Resolviendo entonces la ecuación

$$\pi - 2\theta_0 = \sqrt{\epsilon}, \quad (1.41)$$

obtenemos que  $\theta_0 \approx \frac{\pi - \sqrt{\epsilon}}{2}$ . Sustituyendo esto para obtener  $k_0$  encontramos

$$k_0 \approx -i\sqrt{\epsilon} \cos \frac{\pi - \sqrt{\epsilon}}{2} \approx -i\frac{\epsilon}{2}. \quad (1.42)$$

Como vemos, en este caso particular la aproximación clásica es tan buena como la linealización del seno.

Aunque en un principio esta aproximación parece buena, este enfoque desprecia el término  $\delta q \delta \psi$ , lo que es bastante natural si uno supone que un pequeño cambio en la ecuación original produce un pequeño cambio en la solución. Sin embargo, por ejemplo, con la ecuación de orden 3 este enfoque no funciona porque no podemos despreciar de la misma manera al término  $\delta q_1 \delta \psi'$ , ya que éste involucra ya a la derivada de la solución, que podría ser bastante variable aunque la solución no lo sea.

### 1.2.3. Perturbación de los coeficientes de cambio de base

Para el tercer enfoque, haremos uso de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x \left(1 - e^{-i2k(x-s)}\right) q_0(s)\varphi_0(s, k)e^{-iks} ds, \\
 \varphi_1(x, k)e^{ikx} &= 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x \left(e^{i2k(x-s)} - 1\right) q_0(s)\varphi_1(s, k)e^{iks} ds, \\
 \psi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 + \frac{i}{2k} \int_x^{\infty} \left(1 - e^{-i2k(x-s)}\right) q_0(s)\psi_0(s, k)e^{-iks} ds, \\
 \psi_1(x, k)e^{ikx} &= 1 + \frac{i}{2k} \int_x^{\infty} \left(e^{i2k(x-s)} - 1\right) q_0(s)\psi_1(s, k)e^{iks} ds,
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

que pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x q_0(s)\varphi_0(s, k)e^{-iks} ds \\
 &\quad + e^{-i2kx} \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x e^{iks} q_0(s)\varphi_0(s, k) ds,
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, k)e^{ikx} &= 1 + \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x q_0(s)\varphi_1(s, k)e^{iks} ds \\
 &\quad - e^{i2kx} \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^x e^{-iks} q_0(s)\varphi_1(s, k) ds.
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\tag{1.46}$$

Tomando el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  en (1.44), y recordando que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_0(x, k)e^{-ikx} = a(k) + b(k)e^{-2ikx},$$

obtenemos entonces que

$$a(k) = 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} q_0(s)\varphi_0(s, k) ds \tag{1.47}$$

$$b(k) = \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks} q_0(s)\varphi_0(s, k) ds. \tag{1.48}$$

Las ecuaciones (1.47) y (1.48) proveen una buena forma de estudiar la perturbación que sufren los coeficientes de cambio de base cuando hay cambios en el potencial: Supongamos que tenemos dos potenciales,  $q_{00}$  y  $q_{01}$ , y que  $a_0(k)$ ,  $b_0(k)$  y  $a_1(k)$ ,  $b_1(k)$  son sus correspondientes coeficientes de cambio de base. Entonces, usando (1.47) y (1.48), obtenemos que



$$|a_1(k) - a_0(k)| \leq \frac{C_a}{|k|} \|q_1 - q_0\|_1 \quad (1.49)$$

$\forall k \in \mathbb{C}$ , y

$$|b_1(k) - b_0(k)| \leq \frac{C_a}{|k|} \|q_1 - q_0\|_1 \quad (1.50)$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ .

Ahora bien, en particular, el coeficiente  $a(k)$  está directamente relacionado con los eigenvalores de  $L$ , ya que sus ceros son las raíces cuadradas de dichos eigenvalores. Entonces, (1.49) y (1.50) dan una idea de qué tanto se perturban los eigenvalores cuando perturbamos a los potenciales.

Este enfoque es el que generalizaremos para el caso de orden  $n$ .

### 1.3. La factorización de Aktosun

Para terminar con el primer capítulo, enunciaremos el teorema de Aktosun ([9]), en su versión original. En el último capítulo, damos una versión generalizada de este teorema para el estudio del operador de orden  $n$ :

**Teorema 2** *Dados un potencial  $q_0(x)$  y un conjunto  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N+1}\} \subset \mathbb{R}$ , donde  $x_0 = -\infty$ ,  $x_{N+1} = \infty$  y  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ , definamos  $q_{0,j}(x) = q_0(x)\chi_{(x_{j-1}, x_j]}(x)$  si  $j = 1, \dots, N$  y  $q_{0,N+1}(x) = q_0(x)\chi_{(x_N, x_{N+1})}$ . Sea  $\Lambda_j(k)$  la matriz definida en (1.7) asociada al potencial  $q_{0,j}(x)$ . Entonces*

$$\Lambda(k) = \prod_{j=1}^{N+1} \Lambda_j(k) = \Lambda_1(k)\Lambda_2(k)\dots\Lambda_{N+1}(k). \quad (1.51)$$

La presentación original de la factorización de Aktosun es un poco diferente, principalmente porque Aktosun trabaja en mayor parte con la matriz de dispersión, y no con la de cambio de base. La razón de esto es que la matriz de dispersión, como ya se mencionó en este capítulo tiene una interpretación física muy natural. Un enfoque más matemático del resultado de Aktosun es que podemos ver al cambio de base correspondiente al potencial completo  $q_0$  como una composición de cambios de base correspondiente a los potenciales  $q_{0,j}$ , de tal manera que la matriz que indica el cambio de base se puede factorizar como en el teorema.

En aplicaciones, el teorema de Aktosun puede ser de gran utilidad, por lo siguiente: Calcular las matrices de cambio de base para potenciales compactos es relativamente más fácil que para potenciales cuyo soporte no es compacto, ya que en el primer caso se puede tratar a la ecuación espectral (1.4) como una ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales, las cuales incluso en caso de no tener una solución explícita, pueden resolverse de forma numérica. De esta manera, podemos encontrar las matrices de cambio de base para los distintos elementos de la partición de  $q_0$ , y por lo tanto, podemos encontrar también

la matriz de cambio de base para el potencial original. Tomando en cuenta que de la matriz de cambio de base podemos obtener los datos de dispersión, a excepción de las constantes de normalización, vemos la importancia del teorema de Aktosun.

## Capítulo 2

### El caso de orden 3

En este capítulo mostramos los resultados presentados por Kaup en [10] para el caso de orden 3, y comentamos sobre las dificultades de generalizarlo a órdenes mayores. De dicho análisis aquí sólo se presentan los resultados que son, en cierto modo, una generalización de las técnicas clásicas utilizadas en el caso de orden 2.

En el caso de orden 3, tenemos que

$$L = -\frac{1}{i} \frac{d^3}{dx^3} + \frac{1}{i} q_1(x) \frac{d}{dx} + q_0, \quad (2.1)$$

de donde la ecuación espectral toma la forma

$$-\frac{1}{i} \frac{d^3}{dx^3} \psi(x, k) + \frac{1}{i} q_1(x) \frac{d}{dx} \psi(x, k) + q_0 \psi(x, k) = k^3 \psi(x, k). \quad (2.2)$$

Una observación importante es que para este caso, las condiciones que hacen adjunto al operador  $L$  son bastante más restrictivas:  $q_1$  debe ser una función real, y satisfacer que  $\text{Im}(q_0) = -i \frac{q_1}{2}$ . Por esta razón, la única suposición que haremos sobre los potenciales es la de que ambos son integrables, como en el artículo de Kaup.

Como en el caso de orden 2, definimos dos conjuntos de soluciones por su comportamiento cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ \varphi_1(x, k) &\rightarrow e^{ikzx}, \\ \varphi_2(x, k) &\rightarrow e^{ikz^2x}, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty, \\ \psi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ \psi_1(x, k) &\rightarrow e^{ikzx}, \\ \psi_2(x, k) &\rightarrow e^{ikz^2x}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde  $z = e^{i \frac{2\pi}{3}}$ , una raíz cúbica primitiva de la unidad. También tenemos una simetría análoga a (1.10):

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x, z^m k) &= \varphi_{j+m}(x, k), \\
\psi_j(x, z^m k) &= \psi_{j+m}(x, k),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $j, k \in \mathbb{Z}_3$ .

De nuevo, es útil para describir las regiones de analiticidad de estas soluciones expresarlas como soluciones de ecuaciones integrodiferenciales:

$$\begin{aligned}
\psi_0(x, k) &= e^{ikx} + \frac{i}{3k^2} \int_x^\infty e^{ik(x-s)} \left( q_0(s) + kq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s) \right) \psi_0(s, k) ds \\
&+ \frac{i}{3k^2} \int_x^\infty z e^{ikz(x-s)} \left( q_0(s) + kzq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s) \right) \psi_0(s, k) ds \\
&+ \frac{i}{3k^2} \int_x^\infty z^2 e^{ikz^2(x-s)} \left( q_0(s) + kz^2q_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s) \right) \psi_0(s, k) ds,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, k) &= e^{ikx} - \frac{i}{3k^2} \int_{-\infty}^x e^{ik(x-s)} \left( q_0(s) + kq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s) \right) \varphi_0(s, k) ds \\
&- \frac{i}{3k^2} \int_{-\infty}^x z e^{ikz(x-s)} \left( q_0(s) + kzq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s) \right) \varphi_0(s, k) ds \\
&- \frac{i}{3k^2} \int_{-\infty}^x z^2 e^{ikz^2(x-s)} \left( q_0(s) + kz^2q_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s) \right) \varphi_0(s, k) ds.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Las expresiones análogas para el resto de las soluciones pueden encontrarse sustituyendo (2.3) en (2.4) y (2.5).

Para encontrar la región de analiticidad de cada función multiplicamos (2.4) y (2.5) por  $e^{-ikx}$ :

$$\begin{aligned}
\psi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 + \frac{i}{3k^2} \int_x^\infty \left( (q_0(s) + kq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s)) \right. \\
&+ z e^{ik(z-1)(x-s)} (q_0(s) + kzq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s)) \\
&+ z^2 e^{ik(z^2-1)(x-s)} (q_0(s) + kz^2q_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s)) \Big) \\
&\times \psi_0(s, k) e^{-iks} ds,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 - \frac{i}{3k^2} \int_{-\infty}^x \left( (q_0(s) + kq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s)) \right. \\
&\quad - ze^{ik(z-1)(x-s)}(q_0(s) + kzq_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s)) \\
&\quad \left. - z^2e^{ik(z^2-1)(x-s)}(q_0(s) + kz^2q_1(s) - \frac{1}{i}q_1'(s)) \right) \\
&\quad \times \varphi_0(s, k)e^{-iks} ds.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

**Observación** De las expresiones (2.4) y (2.5) se sigue que para que las integrales sean convergentes para algún  $k \in \mathbb{C}$ , el primer requerimiento natural es que  $q_1$ ,  $q_1'$  y  $q_0$  sean elementos de  $L^1(\mathbb{R})$ .

Si se satisfacen estas condiciones de convergencia entonces las ecuaciones (2.6) y (2.7) nos dan las regiones de convergencia para las  $\varphi_j$  y  $\psi_j$  para  $q_0$  y  $q_1$  en general.

Por ejemplo, la región de analiticidad de  $\varphi_0$  es la intersección de los semiplanos:

$$H_1 = \{k \in \mathbb{C} | \Re(ik(z-1)) < 0\} \tag{2.8}$$

y

$$H_2 = \{k \in \mathbb{C} | \Re(ik(z^2-1)) < 0\}, \tag{2.9}$$

Esto es debido a que si  $k \in H_1$  ( $H_2$ ), entonces la segunda (tercera) integral en (2.6) converge porque el término  $e^{ik(z-1)(x-s)}$  ( $e^{ik(z^2-1)(x-s)}$ ) tiende a cero cuando  $s \rightarrow -\infty$ .

Las siguientes figuras ilustran esta observación:

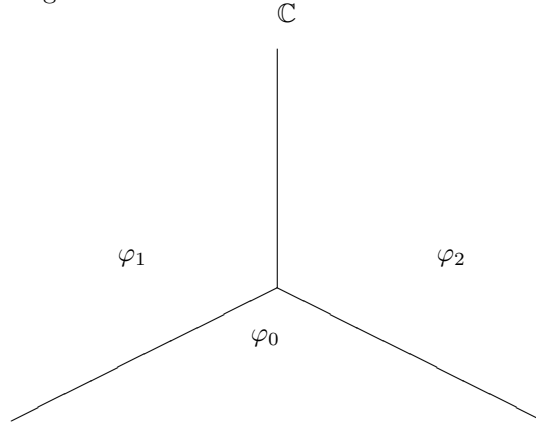


Figura 2: Regiones de analiticidad de las  $\varphi_j$ . El ángulo entre cada rayo es de  $\frac{3\pi}{4}$ .

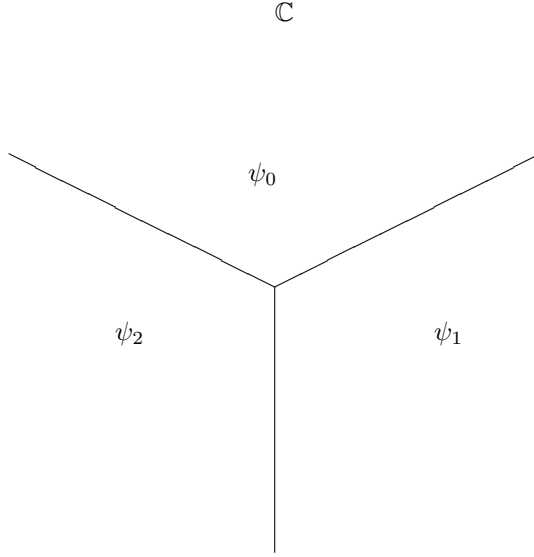


Figura 3: Regiones de analiticidad de las  $\psi_j$ , El ángulo entre cada rayo es de  $\frac{3\pi}{4}$ .

Como antes, los conjuntos  $\{\varphi_j\}$  y  $\{\psi_j\}$  forman cada uno una base de soluciones para la ecuación espectral (2.2), de tal manera que uno puede definir los coeficientes  $a_{mn}(k)$  como sigue:

$$\varphi_m(x, k) = \sum_{n=0}^2 a_{mn}(k) \psi_n(x, k), \quad (2.10)$$

o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x, k) \\ \varphi_1(x, k) \\ \varphi_2(x, k) \end{bmatrix} = A(k) \begin{bmatrix} \psi_0(x, k) \\ \psi_1(x, k) \\ \psi_2(x, k) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

donde  $A_{mn} = a_{mn}$ .

Comparando el comportamiento asintótico del wronskiano  $W(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ , se llega a que  $\det(A(k)) = 1$ . Más aún, de (2.3), se obtiene:

$$a_{mn}(z^r k) = a_{m+r, n+r}(k) \quad (2.12)$$

(donde las sumas  $m+r$  y  $n+r$  son evaluadas mod 3).

Una observación importante es que, en cierto sentido la definición de  $A(k)$  en (2.11) es solamente una definición algebraica en abstracto. Por ejemplo, si  $k > 0$ , entonces  $\varphi_2(x, k)$ , que es analítica en  $\mathbb{R}^+$ , es una combinación lineal de  $\psi_1(x, k)$  (que también es analítica en  $\mathbb{R}^+$ ), y de  $\psi_0(x, k)$  y  $\psi_2(x, k)$  (que no son analíticas en  $\mathbb{R}^+$ ). Por lo tanto, al menos hasta este punto, no sabemos mucho sobre las propiedades analíticas de los coeficientes  $a_{mn}$ .

Continuando con el análisis hecho en [10], definimos las soluciones adjuntas:

$$\begin{aligned}\varphi_n^A(x, k) &= \frac{iz(1-z)}{3kz^n} W(\psi_{n+2}(x, k), \psi_{n+1}(x, k)), \\ \psi_n^A(x, k) &= \frac{iz(1-z)}{3kz^n} W(\varphi_{n+2}(x, k), \varphi_{n+1}(x, k)) \quad ,\end{aligned}\quad (2.13)$$

para  $n = 0, 1, 2$ , que satisfacen la ecuación adjunta

$$\frac{1}{i}\psi_{xxx}^A - \frac{q_1}{i}\psi_x^A + (q_0 - k^3 - \frac{q_1'}{i})\psi^A = 0. \quad (2.14)$$

Otra vez, observemos que (2.13) parece en principio sólo una definición formal, ya que las Figuras 2 y 3 nos indican que cada  $\varphi_n^A$  y cada  $\psi_n^A$  sólo tienen garantizada la analiticidad a lo largo de una línea para  $q_1$  y  $q_0$  en general. Sin embargo, al analizar más detenidamente estas nuevas funciones, por ejemplo, usando la solución en representación de Green para (2.2), uno observa que  $\varphi_n^A$  ( $\psi_n^A$ ) es analítica en la misma región que  $\varphi_n$  ( $\psi_n$ ), y viceversa. De hecho, uno puede calcular directamente la relación entre los coeficientes de dispersión de la ecuación (2.2) y los de (2.14):

$$\varphi_m^A = \sum_{n=0}^2 z^{n-m} a_{nm}(k) \psi_n^A, \quad (2.15)$$

para  $m=0,1,2$ .

Ahora, el objetivo de introducir las soluciones adjuntas es que ahora podemos definir seis nuevas funciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\chi_{n+2} &= \frac{iz^2}{3kz^n} W(\varphi_{n+1}^A, \psi_n^A), \\ \theta_{n+2} &= \frac{iz^2}{3kz^n} W(\varphi_n^A, \psi_{n+1}^A),\end{aligned}\quad (2.16)$$

para  $n = 0, 1, 2$ , las cuales satisfacen (2.2) si  $\varphi_n^A$  y  $\psi_n^A$  satisfacen (2.14). Como consecuencia cada  $\chi_n$  y cada  $\theta_n$  pueden expresarse como combinaciones lineales de los  $\varphi_n$ 's y de los  $\psi_n$ 's. De hecho, usando (2.13), (2.15) y el comportamiento asintótico de (2.16) cuando  $x \rightarrow -\infty$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\chi_{n+2} &= a_{n+1, n+1} \varphi_{n+2} - a_{n+2, n+1} \varphi_{n+1}, \\ \theta_{n+2} &= a_{nn} \varphi_{n+2} - a_{n+2, n} \varphi_n.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Ahora, usando (2.16) y las regiones de analiticidad de  $\psi_n^A$  y  $\varphi_n^A$ , obtenemos las regiones en las que  $\chi_n$  y  $\theta_n$  son analíticas:

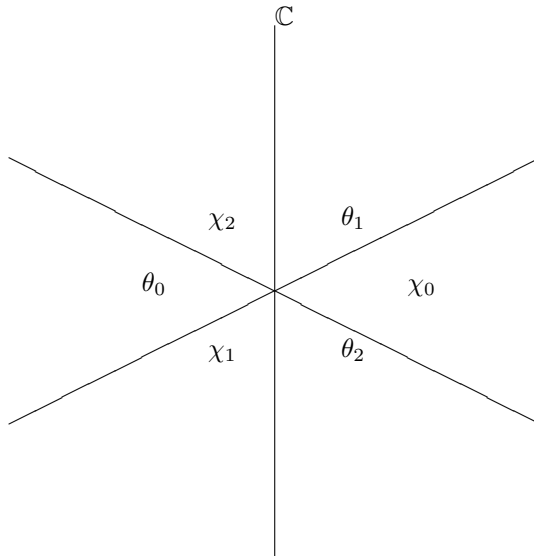


Figura 4: Regiones de analiticidad de las  $\chi_n$ 's y las  $\theta_n$ 's. Los ángulos entre cada rayo son de  $\frac{\pi}{3}$

Para continuar este análisis, etiquetaremos las regiones definidas en la figura 4 como sigue:

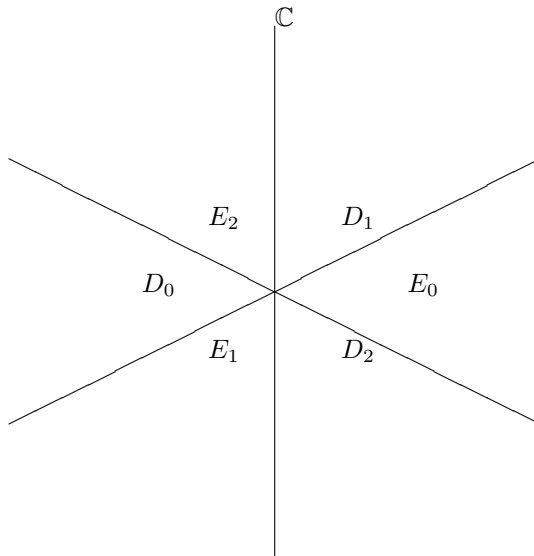


Figura 5

Lo que se ha logrado después de esta descripción es que ahora, en cada una de las regiones de la figura 5, tenemos tres soluciones de (2.2) que son analíticas y linealmente independientes, de tal manera que en cada región podemos expresar cualquier solución de (2.2) como una combinación lineal de las tres soluciones que son analíticas en dicha región.



Para facilitar la notación, definimos los coeficientes  $b_{mn}(k)$  de la siguiente manera

$$\sum_{r=0}^2 a_{mr}(k)b_{rn}(k) = \delta_n^m. \quad (2.18)$$

Es decir, la matriz  $(b_{mn})$  es la inversa de la matriz de dispersión  $a_{mn}$ ; esto es:

$$\psi_m = \sum_{n=0}^2 b_{mn}\varphi_n. \quad (2.19)$$

Entonces, por ejemplo, usando (2.10), (2.17) y (2.19), se obtienen las siguientes expresiones para  $\psi_0$  en cada región:

$$\begin{aligned} E_2 : \psi_0 &= \psi_0, \\ D_1 : \psi_0 &= \psi_0, \\ E_0 : \psi_0 &= \frac{1}{b_{11}}(\chi_0 + b_{01}\psi_1), \\ D_2 : \psi_0 &= \frac{\varphi_0}{a_{00}} - \frac{a_{02}}{a_{00}b_{11}}\theta_2 + \frac{b_{01}}{b_{11}}\psi_1, \\ E_1 : \psi_0 &= \frac{\varphi_0}{a_{00}} - \frac{a_{01}}{a_{00}b_{22}}\chi_1 + \frac{b_{02}}{b_{22}}\psi_2, \\ D_0 : \psi_0 &= \frac{1}{b_{22}}(\theta_0 + b_{02}\psi_2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Análogamente, para  $\varphi_0$  obtenemos:

$$\begin{aligned} D_2 : \varphi_0 &= \varphi_0, \\ E_1 : \varphi_0 &= \varphi_0, \\ D_0 : \varphi_0 &= \frac{1}{a_{11}}(\theta_0 + a_{01}\varphi_1), \\ E_2 : \varphi_0 &= \frac{\psi_0}{b_{00}} - \frac{b_{02}}{b_{00}a_{11}}\chi_2 + \frac{a_{01}}{a_{11}}\varphi_1, \\ D_1 : \varphi_0 &= \frac{\psi_0}{b_{00}} - \frac{b_{01}}{b_{00}a_{22}}\theta_1 + \frac{a_{02}}{a_{22}}\varphi_2, \\ E_0 : \varphi_0 &= \frac{1}{a_{22}}(\chi_0 + a_{02}\varphi_2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

El punto importante es que en el lado derecho de cada expresión en (2.20) sólo estamos usando las funciones que son analíticas en la región correspondiente. Por supuesto, podemos encontrar expresiones similares para las funciones  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  usando (2.3).

Más aún, podemos también encontrar expresiones similares para las funciones  $\chi_0$  y  $\theta_0$ :

$$\begin{aligned}
E_0 : \chi_0 &= \chi_0, \\
D_2 : \chi_0 &= \frac{b_{11}}{a_{00}}\varphi_0 - \frac{a_{02}}{a_{00}}\theta_2, \\
E_1 : \chi_0 &= \frac{\varphi_0}{b_{22}} + \frac{b_{12}b_{21}}{a_{00}b_{22}}\varphi_0 - \frac{a_{02}}{b_{22}}\psi_2 + \frac{a_{02}b_{21}}{a_{00}b_{22}}\chi_1, \\
D_0 : \chi_0 &= \frac{\theta_0}{a_{11}b_{22}} - \frac{b_{01}}{a_{11}}\varphi_1 - \frac{a_{02}}{b_{22}}\psi_2 - \frac{a_{12}b_{21}}{a_{11}b_{22}}\theta_0, \\
E_2 : \chi_0 &= \frac{\psi_0}{a_{11}} - \frac{b_{01}}{a_{11}}\varphi_1 + \frac{a_{12}a_{21}}{b_{00}a_{11}}\psi_0 + \frac{b_{01}a_{12}}{b_{00}a_{11}}\chi_2, \\
D_1 : \chi_0 &= \frac{a_{22}}{b_{00}}\psi_0 - \frac{b_{01}}{b_{00}}\theta_1,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
D_0 : \theta_0 &= \theta_0, \\
E_2 : \theta_0 &= \frac{a_{11}}{b_{00}}\psi_0 - \frac{b_{02}}{b_{00}}\chi_2, \\
D_1 : \theta_0 &= \frac{\psi_0}{a_{22}} + \frac{a_{12}a_{21}}{b_{00}a_{22}}\psi_0 - \frac{b_{02}}{a_{22}}\varphi_2 + \frac{b_{02}a_{21}}{b_{00}a_{22}}\theta_1, \\
E_0 : \theta_0 &= \frac{\chi_0}{b_{11}a_{22}} - \frac{a_{01}}{b_{11}}\psi_1 - \frac{b_{02}}{a_{22}}\varphi_2 - \frac{b_{12}a_{21}}{b_{11}a_{22}}\chi_0, \\
D_2 : \theta_0 &= \frac{\varphi_0}{b_{11}} - \frac{a_{01}}{b_{11}}\psi_1 + \frac{b_{12}b_{21}}{a_{00}b_{11}}\varphi_0 + \frac{a_{01}b_{12}}{a_{00}b_{11}}\theta_2, \\
E_1 : \theta_0 &= \frac{b_{22}}{a_{00}}\varphi_0 - \frac{a_{01}}{a_{00}}\chi_1.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Es importante tomar en cuenta la siguiente observación: En (2.22), hemos escrito varias expresiones en las que una misma función aparece en dos términos diferentes; por ejemplo, en  $E_1$ , hay dos términos que contienen a  $\varphi_0$ . Esto ha sido hecho a propósito, ya que el primer término es una expresión que es analítica en  $E_1$ , excepto en los polos que  $b_{22}$  pudiera tener en  $E_1$ . Esto no ocurre con la suma de los dos términos que contienen a  $\varphi_0$ , cuyo resultado es  $b_{11}\varphi_0$ , ya que  $b_{11}$  sólo es analítica en  $D_2$  y  $E_0$ , pero no necesariamente en  $E_1$ . El resto de las expresiones presentan separaciones similares.

Terminamos esta sección describiendo brevemente cómo es utilizado este análisis para caracterizar el espectro del operador  $L$  (véase [10] para más detalles): Primero, usando (2.10), (2.19), y las propiedades analíticas de  $\varphi_n$  y  $\psi_n$ , se puede demostrar que ciertos componentes de las matrices  $\{a_{mn}(k)\}$  y  $\{b_{mn}(k)\}$  están acotados para determinados valores de  $\arg(k)$ . La razón entre estos coeficientes no diagonales y el correspondiente coeficiente diagonal acotado formarán los llamados “coeficientes de reflexión”. Estos coeficientes de reflexión constituyen el “espectro continuo”, y, usando las simetrías (2.12), uno nota que sólo hay ocho distintas de estas cantidades, definidas por

$$\begin{aligned}
\rho_1(k) &= \frac{a_{01}}{a_{00}}(izk), & \tilde{\rho}_1(k) &= \frac{a_{10}}{a_{00}}(izk), \\
\rho_2(k) &= \frac{a_{02}}{a_{00}}(iz^2k), & \tilde{\rho}_2(k) &= \frac{a_{20}}{a_{00}}(iz^2k), \\
\sigma_1(k) &= \frac{b_{10}}{b_{00}}(-izk), & \tilde{\sigma}_1(k) &= \frac{b_{01}}{b_{00}}(-izk), \\
\sigma_2(k) &= \frac{b_{20}}{b_{00}}(-iz^2k), & \tilde{\sigma}_2(k) &= \frac{b_{02}}{b_{00}}(-iz^2k),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

donde  $k > 0$ . Estos coeficientes no son totalmente independientes entre sí, por ejemplo, usando (2.12):

$$\tilde{\rho}_2(k) = \frac{a_{20}}{a_{00}}(iz^2k) = \frac{a_{22}}{a_{00}}(iz^2k) \cdot \frac{a_{20}}{a_{22}}(iz^2k) = \frac{a_{00}(izk)}{a_{00}(iz^2k)} \cdot \rho_1(k). \tag{2.25}$$

A pesar de esto, estos coeficientes forman el espectro continuo de  $L$ .

Los eigenvalores, por otro lado, corresponden a los ceros de la función  $a_{00}(k)$  que se encuentren en la región  $\{k \in \mathbb{C} \mid -\frac{5}{6}\pi < \arg(k) < -\frac{1}{6}\pi\}$ , y los ceros de la función  $b_{00}(k)$  que se encuentren en la región  $\{k \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{6}\pi < \arg(k) < \frac{5}{6}\pi\}$ . Con esto completamos el análisis espectral para la ecuación de tercer orden.

## 2.1. Algunas observaciones

Como se puede ver, esta generalización del análisis de dispersión no es totalmente directa, y por lo tanto no es completamente claro si el análisis hecho para el caso  $n = 2$  puede extenderse al caso  $n = 3$ . En particular, como ya se observó, no existe, a priori, una región de analiticidad para todos los elementos de la matriz de cambio de base. De hecho, resulta que en general,  $b_{00}$  es analítica en el tercio de plano superior, mientras que  $a_{00}$  es analítica en el tercio de plano inferior (las regiones  $E_2$  y  $D_1$ , y  $E_1$  y  $D_2$  respectivamente). En el siguiente capítulo, discutimos algunas condiciones suficientes que nos permiten lidiar con este tipo de problemas.

Por otro lado, es importante notar que la relación entre el espectro discreto y el wronskiano de algunas soluciones no es tan obvia en el análisis hecho en [10] como lo es en el caso de orden 2. Aquí explicamos la relación:

Supongamos por ejemplo que  $k \in E_1$ . En esta región, tenemos tres soluciones de (2.2) que son analíticas:  $\varphi_0$ ,  $\chi_1$  y  $\psi_2$ , las cuales tienen el siguiente comportamiento asintótico cuando  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$\varphi_0(x, k) \rightarrow \begin{cases} e^{ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ a_{00}(k)e^{ikx} + a_{01}(k)e^{izkx} + a_{02}(k)e^{iz^2kx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\chi_1(x, k) \rightarrow \begin{cases} a_{00}(k)e^{izkx} - a_{10}(k)e^{ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ b_{22}(k)e^{izkx} - b_{12}(k)e^{iz^2kx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\psi_2(x, k) \rightarrow \begin{cases} b_{20}(k)e^{ikx} + b_{21}(k)e^{izkx} + b_{22}(k)e^{iz^2kx}, & x \rightarrow -\infty \\ e^{iz^2kx}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{2.28}$$

Dado que son soluciones de (2.2), su wronskiano debe de ser independiente de  $x$  (véase el apéndice A), de tal manera que podemos calcularlo ya sea cuando  $x \rightarrow -\infty$  o cuando  $x \rightarrow \infty$ . Usando (2.26), (2.27) y (2.28), uno observa que:

$$W(\varphi_0(x, k), \chi_1(x, k), \psi_2(x, k)) = -3\sqrt{3}k^3 a_{00}(k)b_{22}(k). \quad (2.29)$$

Como conclusión, si  $a_{00}(k_0) = 0$  para algún  $k_0 \in E_1$ , entonces las funciones  $\varphi_0(x, k_0)$ ,  $\chi_1(x, k_0)$  y  $\psi_2(x, k_0)$  no son linealmente independientes. Esto es, existen constantes  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que  $\psi_2(x, k_0) = \alpha\varphi_0(x, k_0) + \gamma\chi_1(x, k_0)$ . Como consecuencia,  $\psi_2(x, k_0)$  decae exponencialmente cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , de donde  $\psi_2(x, k_0)$  es una  $L^2$ -eigenfunción de  $L$  con eigenvalor  $k_0^3$  (en el sentido de que es una función de cuadrado integrable, distinta de la función cero, y que  $L(\psi_2(x, k_0)) = k_0^3\psi_2(x, k_0)$ ).

Análogamente, cuando  $k \in D_2$ , el comportamiento asintótico de las tres soluciones analíticas de (2.2) es:

$$\varphi_0(x, k) \rightarrow \begin{cases} e^{ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ a_{00}(k)e^{ikx} + a_{01}(k)e^{izkx} + a_{02}(k)e^{iz^2kx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\psi_1(x, k) \rightarrow \begin{cases} b_{10}(k)e^{ikx} + b_{11}(k)e^{izkx} + b_{12}(k)e^{iz^2kx}, & x \rightarrow -\infty \\ e^{izkx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\theta_2(x, k) \rightarrow \begin{cases} a_{00}(k)e^{iz^2kx} - a_{20}(k)e^{ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ b_{11}(k)e^{iz^2kx} - b_{21}(k)e^{izkx}, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.32)$$

y su wronskiano tiene la forma:

$$W(\varphi_0(x, k), \chi_1(x, k), \psi_2(x, k)) = -3\sqrt{3}k^3 a_{00}(k)b_{11}(k), \quad (2.33)$$

y de la misma manera, si  $a_{00}(k_0) = 0$  para algún  $k_0 \in D_2$ , entonces existen constantes  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que  $\psi_1(x, k_0) = \alpha\varphi_0 + \beta\theta_2$ , y obtenemos una  $L^2$ -eigenfunción de  $L$  con eigenvalor  $k_0^3$ .

De una manera similar, se puede ver que los ceros de  $b_{00}$  en las regiones  $E_2$  y  $D_1$  definen  $L^2$ -eigenfunciones de  $L$ . Es más, buscar ceros de otros wronskianos en las restantes regiones, es redundante por las simetrías (2.12). Entonces, como en el caso  $n = 2$ , hay una correspondencia entre los eigenvalores de  $L$  y los ceros de wronskianos de soluciones, y estos wronskianos son expresables en términos de los elementos de la matriz de cambio de base.

**Observación** Hay que recordar que queremos asociar los  $L^2$ -eigenvalores de  $L$  con los ceros de algunos wronskianos, como lo acababamos de hacer. Puesto que estamos hablando del espectro discreto, necesitamos garantizar que estos ceros sean aislados. Cumplimos este requisito asegurando que los wronskianos sean analíticos. Por lo tanto, en lo que sigue, buscaremos calcular los wronskianos en regiones donde todas las funciones en el wronskiano sean analíticas.

## 2.2. El caso $n = 4$

En esta sección discutimos la posibilidad de aplicar el análisis visto en las secciones anteriores para el caso  $n > 3$ .

Supongamos que  $n = 4$ , de tal manera que  $L$  tiene la forma

$$\frac{d^4}{dx^4} - q_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{q_1(x)}{i} \frac{d}{dx} + q_0(x), \quad (2.34)$$

y la ecuación espectral asociada es:

$$\frac{d^4}{dx^4} \psi(x, k) - q_2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x, k) + \frac{q_1(x)}{i} \frac{d}{dx} \psi(x, k) + q_0(x) \psi(x, k) = k^4 \psi(x, k). \quad (2.35)$$

Como antes, podemos definir dos conjuntos de soluciones de (2.35) por su comportamiento asintótico: Las  $\varphi_j$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ \varphi_1(x, k) &\rightarrow e^{izkx}, \\ \varphi_2(x, k) &\rightarrow e^{iz^2kx}, \\ \varphi_3(x, k) &\rightarrow e^{iz^3kx}, \\ x &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

donde  $z = i$ , una raíz cuarta de 1, y las  $\psi_j$ :

$$\begin{aligned} \psi_0(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ \psi_1(x, k) &\rightarrow e^{izkx}, \\ \psi_2(x, k) &\rightarrow e^{iz^2kx}, \\ \psi_3(x, k) &\rightarrow e^{iz^3kx}, \\ x &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como  $z^4 = 1$ , tenemos las simetrías:

$$\begin{aligned} \psi_j(x, z^m k) &= \psi_{j+m}(x, k), \\ \varphi_j(x, z^m k) &= \varphi_{j+m}(x, k), \end{aligned}$$

donde la suma  $j + m$  es evaluada mod 4.

Usando la función de Green para  $\frac{d^4}{dx^4} - k^4$ , obtenemos las siguientes expresiones integrales para  $\psi_0$ :

$$\begin{aligned}
\psi_0(x, k) &= e^{ikx} + \frac{i}{4k^3} \int_x^\infty \left( e^{ik(x-s)}(k^2 q_2 + 2ikq'_2 - q''_2 + kq_1 - \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \right. \\
&+ e^{izk(x-s)}(k^2 z^3 q_2 + 2ikz^2 q'_2 - zq''_2 + kz^2 q_1 - z\frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&+ e^{iz^2 k(x-s)}(k^2 z^2 q_2 + 2ikq'_2 - z^2 q''_2 + kq_1 - z^2 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&\left. + e^{iz^3 k(x-s)}(k^2 z q_2 + 2ikz^2 q'_2 - z^3 q''_2 + kz^2 q_1 - z^3 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \right) \psi_0(s, k) ds,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

y para  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, k) &= e^{ikx} + \frac{i}{4k^3} \int_{-\infty}^x \left( e^{ik(x-s)}(k^2 q_2 + 2ikq'_2 - q''_2 + kq_1 - \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \right. \\
&+ e^{izk(x-s)}(k^2 z^3 q_2 + 2ikz^2 q'_2 - zq''_2 + kz^2 q_1 - z\frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&+ e^{iz^2 k(x-s)}(k^2 z^2 q_2 + 2ikq'_2 - z^2 q''_2 + kq_1 - z^2 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&\left. + e^{iz^3 k(x-s)}(k^2 z q_2 + 2ikz^2 q'_2 - z^3 q''_2 + kz^2 q_1 - z^3 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \right) \varphi_0(s, k) ds.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Otra vez, multiplicando (2.2) y (2.3) por  $e^{-ikx}$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 + \frac{i}{4k^3} \int_x^\infty \left( (k^2 q_2 + 2ikq'_2 - q''_2 + kq_1 - \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \right. \\
&+ e^{ik(z-1)(x-s)}(k^2 z^3 q_2 + 2ikz^2 q'_2 - zq''_2 + kz^2 q_1 - z\frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&+ e^{ik(z^2-1)(x-s)}(k^2 z^2 q_2 + 2ikq'_2 - z^2 q''_2 + kq_1 - z^2 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&+ e^{ik(z^3-1)(x-s)}(k^2 z q_2 + 2ikz^2 q'_2 - z^3 q''_2 + kz^2 q_1 - z^3 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \left. \right) \\
&\times \psi_0(s, k)e^{-iks} ds,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 + \frac{i}{4k^3} \int_{-\infty}^x \left( (k^2 q_2 + 2ikq'_2 - q''_2 + kq_1 - \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \right. \\
&+ e^{ik(z-1)(x-s)}(k^2 z^3 q_2 + 2ikz^2 q'_2 - zq''_2 + kz^2 q_1 - z\frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&+ e^{ik(z^2-1)(x-s)}(k^2 z^2 q_2 + 2ikq'_2 - z^2 q''_2 + kq_1 - z^2 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \\
&+ e^{ik(z^3-1)(x-s)}(k^2 z q_2 + 2ikz^2 q'_2 - z^3 q''_2 + kz^2 q_1 - z^3 \frac{q_1}{i} + q_0)(s) \left. \right) \\
&\times \varphi_0(s, k)e^{-iks} ds.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como antes, si  $q_2, q_2', q_2'', q_1, q_1'$  y  $q_0$  son integrables, entonces las integrales en (2.38) y (2.39) son finitas, y podemos encontrar las regiones en las que las soluciones son analíticas:

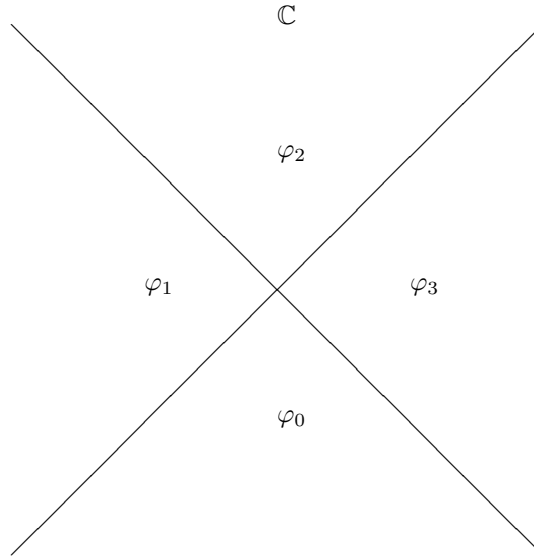


Figura 6: Regiones de analiticidad de las  $\varphi_j$

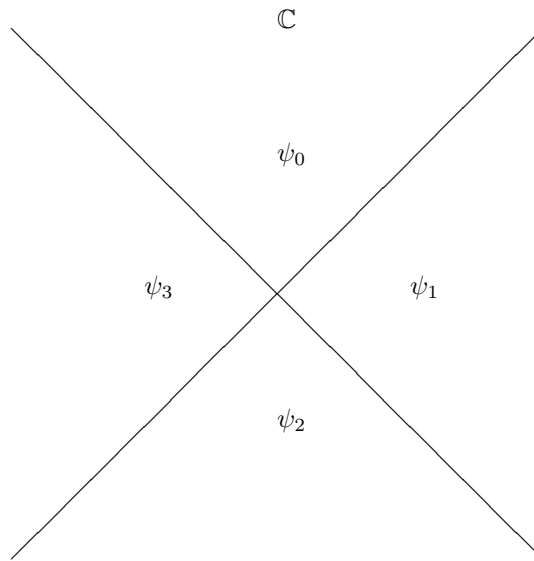


Figura 7: Regiones de analiticidad de las  $\psi_j$

Ahora, encontramos un problema cuando tratamos de aplicar el mismo desarrollo que usamos para el caso  $n = 3$ : Aunque es cierto que si tenemos tres soluciones  $\alpha(x, k), \beta(x, k), \gamma(x, k)$  de (2.35) entonces la función  $W(\alpha(x, k), \beta(x, k), \gamma(x, k))$  es una solución de la ecuación adjunta

$$f^{(4)} - q_2 f'' + \left(\frac{q_1}{i} - 2q_1'\right) f' + (q_0 - k^4 + \frac{q_1'}{i} - q_2'') f = 0 \quad (2.40)$$

y viceversa, si  $\alpha^A(x, k)$ ,  $\beta^A(x, k)$  y  $\gamma^A(x, k)$  satisfacen la ecuación adjunta, entonces  $W(\alpha^A(x, k), \beta^A(x, k), \gamma^A(x, k))$  satisfacen (2.35)-, no podemos definir las soluciones adjuntas como en (2.16), ya que para cualesquiera tres  $\varphi_j$ , o cualesquiera tres  $\psi_j$ , el wronskiano correspondiente no sería necesariamente analítico, dado que las regiones de analiticidad de las tres funciones tendrían intersección vacía. La intersección en general ni siquiera sería una línea, como en el caso  $n = 3$ .

Una posible salida para este problema sería calcular el wronskiano de dos  $\varphi_j$  y una  $\psi_j$  o viceversa. Por ejemplo, podríamos calcular el wronskiano de las funciones  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  y  $\psi_2$ . Formalmente, la función resultante inicialmente sólo tendría su analiticidad garantizada a lo largo de una línea, pero, usando que es solución de la ecuación adjunta, podríamos ser capaces de probar que es analítica en una región más grande. Después de eso, podríamos definir algunas nuevas soluciones de la ecuación original sacando wronskianos de las soluciones adjuntas como lo hicimos en el caso  $n = 3$ , hasta que en cada región tengamos cuatro soluciones de (2.35) que son analíticas en esa región.

Sin embargo, esta línea de razonamiento falla completamente para el caso  $n > 4$ : De hecho, si hacemos  $n = 5$ , y definimos los conjuntos de soluciones  $\{\varphi_j\}_{j=0}^4$  y  $\{\psi_j\}_{j=0}^4$  análogamente a los casos anteriores, sus regiones de analiticidad correspondientes serían:

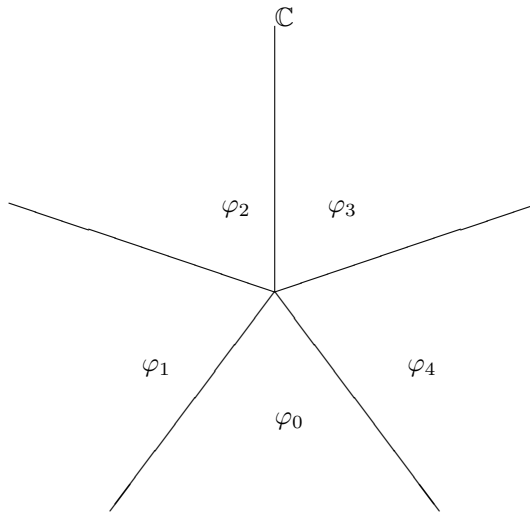


Figura 8: Regiones de analiticidad de las  $\varphi_j$  para  $n = 5$



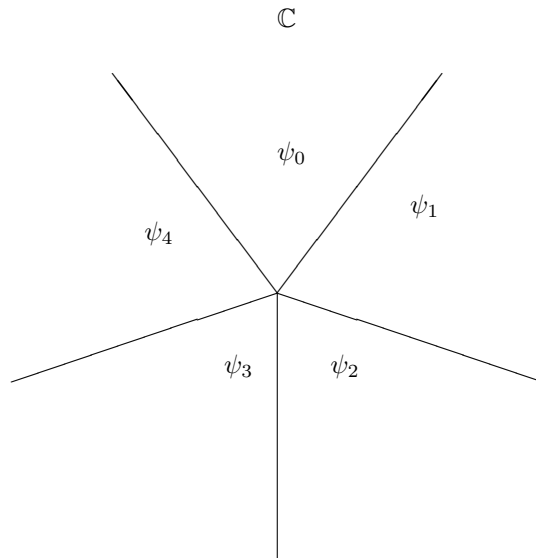


Figura 9: Regiones de analiticidad de las  $\psi_j$  para  $n = 5$

Por lo tanto, incluso si calculamos wronskianos de funciones de ambas bases, la función resultante no sería analítica en general, dado que la intersección de las regiones de analiticidad de cualesquiera cinco soluciones será vacía. Como conclusión, el enfoque estudiado en este capítulo no parece el apropiado para estudiar los casos de órdenes mayores.



## Capítulo 3

# El operador de orden $n$

En este capítulo, se exponen los resultados obtenidos en relación a las regiones de dependencia analítica de las soluciones de la ecuación espectral para el operador de orden  $n$ , así como un análogo del método de los wronskianos para caracterizar al espectro discreto del operador. Como se verá, sin embargo, esta caracterización no es total más que en cierta clase de potenciales.

El trabajo [16] está basado en el material de este capítulo.

### 3.1. Las soluciones de Green y sus regiones de dependencia analítica

En esta sección, obtenemos una fórmula integral general para las soluciones de la ecuación espectral del operador de orden  $n$ , que, como en los casos de orden 2 y 3, nos ayudará a definir las regiones de analiticidad de nuestras bases de soluciones.

Empezamos entonces con el análisis espectral del operador

$$L = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{d^n}{dx^n} + q_{n-2}(x) \left(\frac{1}{i}\right)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + q_0(x), \quad (3.1)$$

donde  $n \geq 3$ , cuya ecuación espectral correspondiente tiene la forma

$$\left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{d^n}{dx^n} \psi(x, k) + q_{n-2}(x) \left(\frac{1}{i}\right)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \psi(x, k) + \dots + q_0(x) \psi(x, k) = k^n \psi(x, k). \quad (3.2)$$

Como en el capítulo anterior, definimos un conjunto de soluciones  $\varphi_j$  por su comportamiento asintótico cuando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\rightarrow e^{ikx}, \\
\varphi_1 &\rightarrow e^{izkx}, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\varphi_{n-1} &\rightarrow e^{iz^{n-1}kx}, \\
x &\rightarrow -\infty,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de 1, y otro conjunto de soluciones  $\psi_j$  por su comportamiento asintótico cuando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &\rightarrow e^{ikx}, \\
\psi_1 &\rightarrow e^{izkx}, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\psi_{n-1} &\rightarrow e^{iz^{n-1}kx}, \\
x &\rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando que  $z^n = 1$ , encontramos las simetrías:

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x, z^m k) &= \varphi_{j+m}(x, k), \\
\psi_j(x, z^m k) &= \psi_{j+m}(x, k),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde la suma  $j + m$  es evaluada módulo  $n$ .

Lo primero que obtendremos es un análogo general de las soluciones de Green encontradas en [10]. Para esto, estableceremos una fórmula explícita para la función de Green del operador  $(\frac{1}{i})^n \frac{d^n}{dx^n} - k^n$ :

**Teorema 3** Sean  $T_n = (\frac{1}{i})^n \frac{d^n}{dx^n} - k^n$  y  $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Entonces,

$$G(x, s) := \frac{i}{nk^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} H(x-s) \tag{3.6}$$

es la función de Green de  $T_n$ , donde  $H(x) = \chi_{[0, \infty)}(x)$  y  $x, s \in \mathbb{R}$ .

Para probar este teorema, necesitamos primero probar el siguiente:

**Lema 2** Si  $m < n$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}G(x, s) &= \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d^m}{dx^m} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\ &+ \frac{mi}{nk^{n-1}} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s),\end{aligned}$$

en el sentido de funciones generalizadas.

**Prueba.** Procedemos por inducción en  $m$ . Para  $m = 1$ , usando la regla del producto, y que  $\frac{d}{dx}H(x-s) = \delta(x-s)$  en el sentido generalizado, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x, s) &= \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d}{dx} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\ &+ \frac{i}{nk^{n-1}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s).\end{aligned}$$

Supongamos que el lema es válido para  $m - 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}G(x, s) &= \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\ &+ \frac{(m-1)i}{nk^{n-1}} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s).\end{aligned}$$

Diferenciando una vez más, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}G(x, s) &= \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d^m}{dx^m} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\ &+ \frac{mi}{nk^{n-1}} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s) \\ &+ \frac{(m-1)i}{nk^{n-1}} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta'(x-s).\end{aligned}$$

Comparando esta última ecuación con la que aparece en el lema, vemos que sólo falta probar que si  $m < n$ , entonces

$$F(x, s) := \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta'(x-s) = 0 \quad \forall k. \quad (3.7)$$

Calculemos explícitamente las derivadas en la última expresión:

$$\begin{aligned} F(x, s) &= i^{m-2} k^{m-2} \left( e^{ik(x-s)} + z^{m-1} e^{ikz(x-s)} + z^{2(m-1)} e^{ikz^2(x-s)} \right. \\ &\quad \left. + \dots + z^{(n-1)(m-1)} e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) \delta'(x-s). \end{aligned}$$

Usando la expansión en serie de la función exponencial, y que  $x\delta'(x) = -\delta(x)$  y  $x^n\delta'(x) = 0$  si  $n > 1$  en el sentido generalizado (véase, por ejemplo [17]), obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x, s) &= i^{m-2} k^{m-2} (1 + z^{m-1} + z^{2(m-1)} + \dots + z^{(n-1)(m-1)}) \delta'(x-s) \\ &\quad - i^{m-1} k^{m-1} (1 + z^m + z^{2m} + \dots + z^{(n-1)m}) \delta(x-s). \end{aligned}$$

Sólo resta verificar que  $a(m) := 1 + z^m + z^{2m} + \dots + z^{(n-1)m} = 0$  si  $m < n$ .

La prueba es sencilla, y la dividimos en dos posibles casos: Si  $m$  y  $n$  son primos relativos, entonces se sigue trivialmente que  $a(m) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ . Si  $m$  y  $n$  no son primos relativos, sea  $d = \text{mcd}(m, n)$ . Entonces,

$$a(m) = \frac{n}{d} \sum_{j=0}^{\frac{n}{d}-1} z^{dj}. \quad (3.8)$$

Pero  $(z^{dj})^{\frac{n}{d}} = z^{jn} = (z^n)^j = 1$ , de tal manera que  $z^{dj}$  es una raíz  $\frac{n}{d}$ -ésima de 1  $\forall j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{d}\}$ . Como  $(i \neq j) \bmod n \Rightarrow z^i \neq z^j$ , entonces el conjunto  $\{z^j | j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{d} - 1\}\}$  es el conjunto de todas las raíces  $\frac{n}{d}$ -ésimas de 1, de donde  $\sum_{j=0}^{\frac{n}{d}-1} z^{dj} = 0$ . Esto completa la prueba. ■

**Prueba del teorema 3.** Usando el lema 2, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} G(x, s) &= \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d^n}{dx^n} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\ &\quad + \frac{i}{k^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s) \\ &\quad + \frac{(n-1)i}{nk^{n-1}} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta'(x-s). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Analicemos cada uno de los términos en el lado de derecho de (3.9):

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d^n}{dx^n} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\
&= \frac{i}{nk^{n-1}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{ik(x-s)} + ze^{ikz(x-s)} + z^2 e^{ikz^2(x-s)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + z^{n-1} e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) H(x-s) \\
&= \frac{i^{n+1}k}{n} \left( e^{ik(x-s)} + ze^{ikz(x-s)} + z^2 e^{ikz^2(x-s)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + z^{n-1} e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) H(x-s) \\
&= \frac{i^{n+1}k}{n} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) H(x-s) \\
&= i^n k^n G(x, s),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $(z^j)^n = (z^n)^j = 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{k^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s) \\
&= \frac{i}{k^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( e^{ik(x-s)} + ze^{ikz(x-s)} + z^2 e^{ikz^2(x-s)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + z^{n-1} e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) \delta(x-s) \\
&= i^n \left( e^{ik(x-s)} + e^{ikz(x-s)} + e^{ikz^2(x-s)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) \delta(x-s) \\
&= i^n \left( \sum_{j=0}^{n-1} e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta(x-s) \\
&= i^n n \delta(x-s),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $x^m \delta(x) = 0 \forall m > 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-1)i}{nk^{n-1}} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \right) \delta'(x-s) \\
&= \frac{(n-1)i}{nk^{n-1}} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left( e^{ik(x-s)} + ze^{ikz(x-s)} + z^2 e^{ikz^2(x-s)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + z^{n-1} e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) \delta'(x-s) \\
&= \frac{(n-1)i^{n-1}}{nk} \left( e^{ik(x-s)} + z^{n-1} e^{ikz(x-s)} + z^{2(n-1)} e^{ikz^2(x-s)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + z^{(n-1)^2} e^{ikz^{n-1}(x-s)} \right) \delta'(x-s) \\
&= \frac{(n-1)i^{n-1}}{nk} (1 + z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z) \delta'(x-s) \\
&\quad - \frac{(n-1)i^n}{n} (1 + 1 + 1 + \dots + 1) \delta(x-s) \\
&= -i^n (n-1) \delta(x-s),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es calculada expandiendo las exponenciales y usando que  $x\delta(x) = \delta'(x)$ , como se comentó en la prueba del lema. Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
T_n G(x, s) &= \left( \frac{1}{i} \right)^n \frac{d^n}{dx^n} G(x, s) - k^n G(x, s) \\
&= k^n G(x, s) + n\delta(x-s) - (n-1)\delta(x-s) - k^n G(x, s) \\
&= \delta(x-s).
\end{aligned}$$

■

Usando la expresión de Green (3.6) para  $T_n$  podemos obtener una expresión integral para  $\psi_0$ :

$$\psi_0(x, k) = e^{ikx} - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j=0}^{n-1} z^j e^{ikz^j(x-s)} \left( - \sum_{l=0}^{n-2} \left( \frac{1}{i} \right)^l q_l(s) \frac{d^l}{dx^l} \psi_0(s, k) \right) ds, \tag{3.10}$$

o bien, usando la regla del producto:

$$\psi_0(x, k) = e^{ikx} - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ikz^j(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) \psi_0(s, k) ds, \tag{3.11}$$

donde  $j = 0, \dots, n-1$ ,  $l = 0, \dots, n-2$ ,  $m = 0, \dots, l$ , que es una expresión más manejable para nuestros fines. De manera similar, podemos encontrar una expresión semejante para  $\varphi_0$ :



$$\varphi_0(x, k) = e^{ikx} + \frac{i}{nk^{n-1}} \int_{-\infty}^x \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ikz^j(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) \varphi_0(s, k) ds, \quad (3.12)$$

y para las demás  $\psi_j$  y  $\varphi_j$  podemos encontrar expresiones análogas usando (3.5).

Finalmente, como antes, multiplicamos (3.11) y (3.12) por  $e^{-ikx}$ :

$$\begin{aligned} & \psi_0(x, k) e^{-ikx} \\ = & 1 - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) \psi_0(s, k) e^{-iks} ds, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x, k) e^{-ikx} \\ = & 1 + \frac{i}{nk^{n-1}} \int_{-\infty}^x \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) \varphi_0(s, k) e^{-iks} ds, \end{aligned} \quad (3.14)$$

y usamos estas expresiones para encontrar las regiones de analiticidad de las  $\varphi_j$  y las  $\psi_j$ . A diferencia de los análisis hechos en los capítulos anteriores, por lo complicado de las combinaciones de integrales en (3.13) y (3.14), haremos ahora un análisis cuidadoso de cómo estas regiones son determinadas en el caso general.

Gracias a la simetría del problema, basta con analizar la función  $\psi_0(x, k) e^{-ikx}$  y encontrar su región de analiticidad para determinar las restantes. Para esto, supondremos que todas las funciones  $\{q_j^{(m)} | j = 0, \dots, n-1, m \leq j\}$  son integrables, y que para alguna  $y$ ,  $\|\psi_0(x, k) e^{-ikx}\|_{L^\infty((y, \infty))} < \infty$ . Bajo estas hipótesis, la convergencia de las integrales en el lado derecho de (3.13) depende únicamente del crecimiento asintótico de las exponenciales  $e^{ik(z^j-1)(x-s)}$ . Como consecuencia, una región donde podemos garantizar que  $\psi_0(x, k)$  es analítica es la intersección de los conjuntos  $\{k \in \mathbb{C} | \Re(ik(1-z^j)) < 0\}$ :

$$K := \bigcap_{j=1}^{n-1} \{k \in \mathbb{C} | \Re(ik(1-z^j)) < 0\}. \quad (3.15)$$

(Obsérvese que no hay un conjunto correspondiente a  $j = 0$ , ya que la integral correspondiente no tiene término exponencial). Daremos ahora una descripción precisa del conjunto  $K$ :

### Proposición 1

$$K = \{k \in \mathbb{C} | \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} < \arg k < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\}. \quad (3.16)$$

**Prueba.** Sea  $k = u + iv \in K$ . Tenemos que, para  $j = 1, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned}
& \Re(ik(1 - z^j)) < 0 \\
\Leftrightarrow & \Re(i(u + iv)(1 - (\cos \frac{2\pi j}{n} + i \sin \frac{2\pi j}{n}))) < 0 \\
\Leftrightarrow & \Re((iu - v)(1 - \cos \frac{2\pi j}{n} - i \sin \frac{2\pi j}{n})) < 0 \\
\Leftrightarrow & \Re(iu - iu \cos \frac{2\pi j}{n} + u \sin \frac{2\pi j}{n} - v + v \cos \frac{2\pi j}{n} + iv \sin \frac{2\pi j}{n}) < 0 \\
\Leftrightarrow & u \sin \frac{2\pi j}{n} - v + v \cos \frac{2\pi j}{n} < 0 \\
\Leftrightarrow & u \sin \frac{2\pi j}{n} < (1 - \cos \frac{2\pi j}{n})v \\
\Leftrightarrow & v > \frac{\sin \frac{2\pi j}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi j}{n}} u.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la línea que acota al conjunto  $\{k | \Re(ik(1 - z^j)) < 0\}$  es

$$v = \frac{\sin \frac{2\pi j}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi j}{n}} u, \quad (3.17)$$

cuya pendiente es

$$\frac{\sin \frac{2\pi j}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi j}{n}} = \cot \frac{\pi j}{n}, \quad (3.18)$$

que es una función decreciente de  $j$  para  $j = 1, \dots, n-1$ . Por lo tanto,  $K$  está acotada por las líneas correspondientes a  $j = 1$  y  $j = n-1$ , y puesto que

$$\cot \frac{\pi j}{n} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi j}{n} \right) \quad (3.19)$$

la prueba está completa. ■

Usando las simetrías (3.5) la región de analiticidad de  $\psi_j$  es  $z^{-j}K$ . Similarmente, la región de analiticidad de  $\varphi_0$  es  $-K$  y para  $\varphi_j$  es  $-z^{-j}K$ .

Este es el conjunto más pequeño en donde podemos asegurar la analiticidad de  $\psi_0$ , ya que lo hemos obtenido buscando que  $k$  sea tal que cada término contenido en la ecuación integral (3.13) decrezca cuando  $x \rightarrow \infty$  en lugar de buscar que ninguno de los términos exponenciales en (3.13) sea una función creciente cuando  $x \rightarrow \infty$ . Esto es porque si uno de los términos exponenciales es una función oscilatoria, la integral correspondiente convergería debido a las condiciones de integrabilidad sobre los  $q_j^{(m)}$ 's.

Estos razonamientos indicarían que la región de analiticidad de  $\psi_0$  es cerrada, de tal manera que podemos concluir que la región de analiticidad de  $\psi_0$  es una vecindad abierta de  $\text{cl}(K)$  y por lo tanto ocurren algunas cancelaciones entre las integrales en (3.13). Sin embargo, la naturaleza precisa de dichas cancelaciones depende de los  $q_j^{(m)}$ 's, así que en lo que sigue,  $K$  denotará la región donde podemos garantizar que  $\psi_0$  es analítica. Por simetría, estas observaciones son válidas también para las  $\psi_j$  y las  $\varphi_j$ .

En el último teorema de esta sección probamos la existencia de las soluciones asintóticas que hemos estado considerando.

**Teorema 4** *Supongamos que las funciones  $q_j^{(m)}$ ,  $m \leq j$  son integrables y que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q_j^{(m)}(x) = 0$ . Si  $k \in K$  entonces  $\exists y \in \mathbb{R}$  tal que la ecuación*

$$f(x) = 1 - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) f(s) ds, \quad (3.20)$$

tiene solución en  $L^\infty(y, \infty)$ .

**Prueba.** Sea

$$C \leq \frac{n|k|^{n-1}}{2 \sum_{j,l,m} \frac{|k|^m}{\Re(ik(z^j-1))}}. \quad (3.21)$$

Por hipótesis, podemos escoger  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall j, m \ x \geq y \Rightarrow |q_j^{(m)}(x)| \leq C$ .

Probaremos el teorema demostrando que la aplicación

$$Tf(x) = 1 - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) f(s) ds, \quad (3.22)$$

es una contracción en  $L^\infty(y, \infty)$ .

Primero, sea  $f \in L^\infty(y, \infty)$ , entonces,

$$\begin{aligned} & |Tf(x)| \\ &= \left| 1 - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) f(s) ds \right| \\ &\leq 1 + \left| \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) f(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Si  $x \geq y$ , entonces

$$\begin{aligned} & |Tf(x)| \\ &\leq 1 + \left| \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) f(s) ds \right| \\ &\leq 1 + \left| \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} C \|f\|_{L^\infty((y, \infty))} ds \right|. \end{aligned}$$

Como  $k \in K$ , por la proposición 1, tenemos que  $\Re(ik(z^j - 1)) > 0$ , de donde las exponenciales en la integral son decrecientes y entonces esta última converge. Por lo tanto,  $Tf \in L^\infty(y, \infty)$

Ahora, sean  $f, g \in L^\infty(y, \infty)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Tf(x) - Tg(x) &= \\ &= -\frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) (f(s) - g(s)) ds, \end{aligned}$$

ahora, si  $x \geq y$ , vemos que

$$\begin{aligned} &|Tf(x) - Tg(x)| \\ &= \left| \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) (f(s) - g(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{n|k|^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m e^{\Re(ik(z^j-1)(x-s))} C \|f - g\|_{L^\infty((y,\infty))} ds. \end{aligned}$$

De nuevo, como  $k \in K$ , tenemos que  $\Re(ik(z^j - 1)) > 0$ , de donde

$$\begin{aligned} &|Tf(x) - Tg(x)| \\ &\leq \frac{C \|f - g\|_{L^\infty((y,\infty))}}{n|k|^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m e^{\Re(ik(z^j-1)(x-s))} ds \\ &\leq \frac{C \|f - g\|_{L^\infty((y,\infty))}}{n|k|^{n-1}} \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m \frac{e^{\Re(ik(z^j-1)(x-s))}}{-\Re(ik(z^j-1))} \Big|_x^\infty \\ &= \frac{C \|f - g\|_{L^\infty((y,\infty))}}{n|k|^{n-1}} \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m \frac{1}{\Re(ik(z^j-1))}. \end{aligned}$$

Usando (3.21) entonces

$$\|Tf - Tg\|_{L^\infty((y,\infty))} \leq \frac{\|f - g\|_{L^\infty((y,\infty))}}{2}, \quad (3.23)$$

lo que concluye la prueba. ■

Como consecuencia de este teorema, podemos obtener una generalización de las regiones de analiticidad obtenidas en los casos  $n = 2, 3$  y  $4$ .

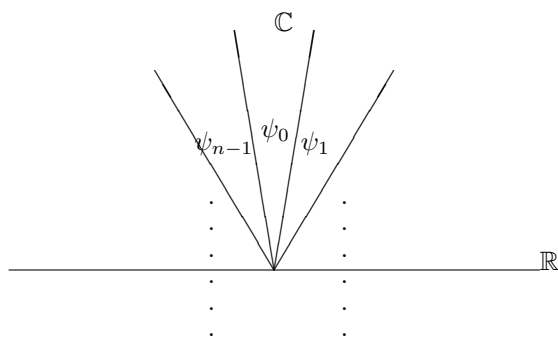


Figura 10: Regiones de analiticidad de las  $\psi_j$  para cualquier  $n$

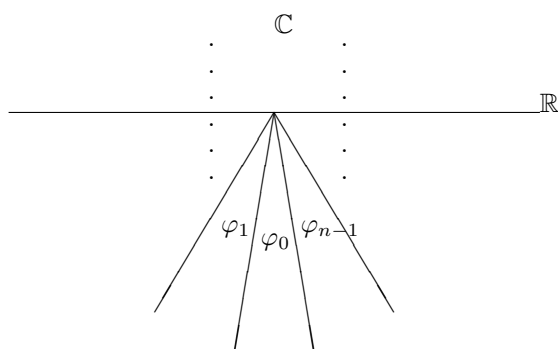


Figura 11: Regiones de analiticidad de las  $\varphi_j$  para cualquier  $n$ .

### 3.2. Potenciales con decaimiento exponencial

De los resultados de la sección anterior se puede concluir claramente que para el caso en que  $n \geq 5$  el wronskiano de más de tres de las funciones  $\psi_j$  y  $\varphi_j$  no es analítico en general porque no existen tres de estas funciones que sean analíticas en la misma región. Por lo tanto, daremos restricciones que nos aseguren que las regiones de analiticidad de dichas soluciones no son ajenas.

La prueba del teorema 4 muestra que si queremos obtener soluciones con buen comportamiento asintótico, debemos imponer restricciones al decaimiento de los potenciales. La siguiente clase de funciones es adecuada para nuestros propósitos:

**Definición 1** Sea  $k_0 > 0$ ; una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene **decaimiento exponencial del tipo  $k_0$**  si existen  $x_0, C_0 > 0$  tal que

$$|x| > x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq C_0 e^{-k_0|x|}. \quad (3.24)$$

**Proposición 2** Supongamos que las funciones  $\{q_j^{(m)} \mid j = 1, \dots, n-2, 0 \leq m \leq j\}$  tienen decaimiento exponencial del tipo  $k_0$ , y sean  $x_0, C_0 > 0$  tales que

$$|x| > x_0 \Rightarrow |q_j^{(m)}(x)| \leq C_0 e^{-k_0|x|} \quad (3.25)$$

para  $j = 1, \dots, n-2$  y  $0 \leq m \leq j$ . Sea

$$K_0 = \bigcap_{j=1}^{n-1} \{k \in \mathbb{C} | \Re(ik(z^j - 1)) + k_0 > 0\} \setminus \{0\}. \quad (3.26)$$

Si  $k \in K_0$ , entonces existe  $y \in \mathbb{R}$  tal que la ecuación (3.20) tiene una solución en  $L^\infty((y, \infty))$ .

**Prueba.** La prueba es similar a la del teorema 4: Escogemos  $y > x_0$  de tal manera que

$$\frac{C_0}{n|k|^{n-1}} \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m \frac{e^{-k_0 y}}{\Re(ik(z^j - 1)) + k_0} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

Probaremos el teorema demostrando que la aplicación

$$Tf(x) = 1 - \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) f(s) ds, \quad (3.28)$$

es una contracción en  $L^\infty(y, \infty)$ .

Sean  $f, g \in L^\infty(y, \infty)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Tf(x) - Tg(x) &= \\ &= -\frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) (f(s) - g(s)) ds, \end{aligned}$$

ahora, si  $x \geq y$ , vemos que

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tg(x)| &= \\ &= \left| \frac{i}{nk^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) (f(s) - g(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{n|k|^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m e^{\Re(ik(z^j-1))(x-s)} |q_l^{(l-m)}(s)| |f(s) - g(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{n|k|^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m e^{\Re(ik(z^j-1))(x-s) - k_0 s} C_0 |f(s) - g(s)| ds \\ &\leq \frac{C_0 \|f - g\|_{L^\infty((y, \infty))}}{n|k|^{n-1}} \int_x^\infty \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m e^{\Re(ik(z^j-1))(x-s) - k_0 s} ds \\ &\leq \frac{C_0 \|f - g\|_{L^\infty((y, \infty))}}{n|k|^{n-1}} \sum_{j,l,m} \binom{l}{m} |k|^m \frac{e^{-k_0 y}}{\Re(ik(z^j - 1)) + k_0}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de que  $k \in K_0$ , y por lo tanto  $\Re(ik(z^j - 1) + k_0) > 0$ , lo que hace que al integrar el límite superior valga 0. Finalmente, usando (3.27), se obtiene que:

$$\|Tf - Tg\|_{L^\infty((y, \infty))} \leq \frac{\|f - g\|_{L^\infty((y, \infty))}}{2}, \quad (3.29)$$

■

Lo importante para nuestros propósitos es que la región  $K_0$  definida en la proposición 2 es una vecindad abierta de la región  $\tilde{K}$  del teorema 4; esto es porque  $k \in K \Rightarrow \Re(ik(z^j - 1)) > 0$ , y entonces  $\Re(ik(z^j - 1)) + k_0 > 0$ , ya que  $k_0$  es positivo. Como consecuencia, existe una región abierta en la que todas las soluciones en las bases son analíticas.

$K_0$  es la región de analiticidad de  $\psi_0$ ,  $z^{-j}K_0$  es la región de analiticidad de  $\psi_j$  y  $-z^{-j}K_0$  la de  $\varphi_j$ .

Para construir al conjunto  $K$  (véase (3.15)), se consideran las  $n - 1$  líneas del tipo

$$\Re(ik(z^j - 1)) = 0. \quad (3.30)$$

Todas las ecuaciones que definen la frontera de  $K$  son homogéneas (tienen lado derecho igual a 0), así que todas las líneas correspondientes se intersecan unas con otras en el origen. Como consecuencia,  $K$  sólo está limitado por dos líneas:  $\Re(ik(z - 1)) = 0$  y  $\Re(ik(z^n - 1)) = 0$ .

Esto no es cierto para  $K_0$  en general. La frontera de  $K_0$  está dada por las líneas

$$\Re(ik(z^j - 1)) + k_0 = 0, \quad (3.31)$$

de tal manera que la pendiente de cada línea se preserva, pero ya no se intersecan todas en un mismo punto.

Por ejemplo, para  $n = 3$  tenemos sólo dos líneas del tipo (3.30), así que para potenciales con decaimiento exponencial,  $K_0$  es similar a  $K$  pero su vértice ya no está en el origen, sino en un punto en el semieje imaginario negativo.

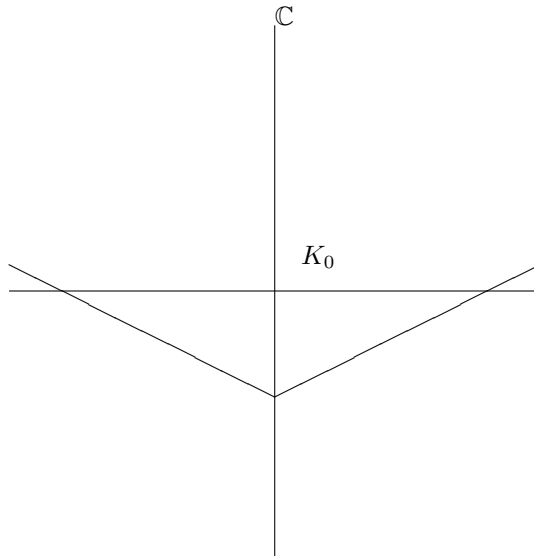


Figura 12: El conjunto  $K_0$  para  $n = 3$

Sin embargo, para  $n = 4$ , tenemos tres líneas del tipo (3.30); entonces,  $K_0$  tiene la siguiente forma: Para  $\Re(k)$  suficientemente grande, la línea que acota a  $K_0$  es  $\Re(ik(z-1)) + k_0 = 0$ . Luego, se interseca con la línea  $\Re(ik(z^2-1)) + k_0 = 0$ , que se convierte en la frontera de  $K_0$ , hasta que se interseca a su vez con la recta  $\Re(ik(z^3-1)) + k_0 = 0$ .

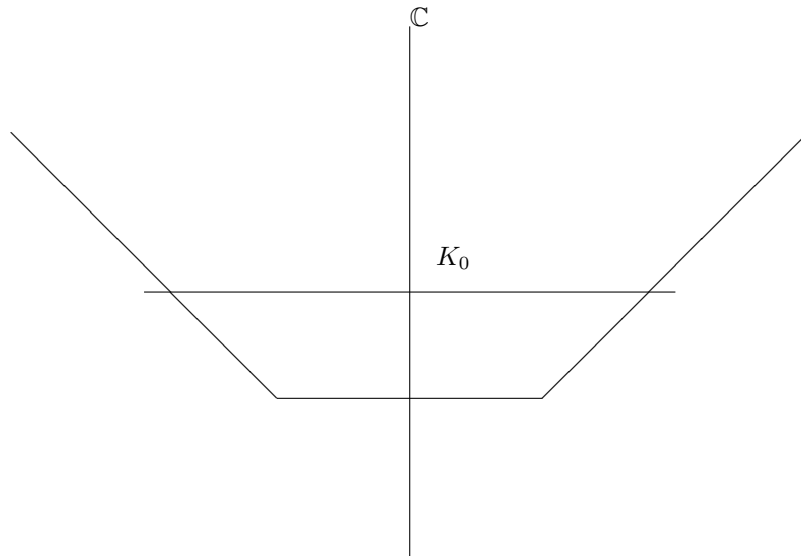


Figura 13: El conjunto  $K_0$  para  $n = 4$



El siguiente lema describe las propiedades principales del conjunto  $K_0$ :

**Lema 3**  $K_0$  es una región convexa simétrica con respecto al eje imaginario.

**Prueba.**  $K_0$  es la intersección de semiplanos de la forma.

$$\hat{H}_j = \{k; \Re(ik(z^j - 1)) + k_0 > 0\}. \quad (3.32)$$

Como cualquier intersección de semiplanos es un conjunto convexo, entonces  $K_0$  es convexo.

Ahora, consideraciones elementales muestran que estos semiplanos son simplemente traslaciones por la cantidad  $-\frac{k_0}{1 - \cos \frac{2\pi j}{n}}$  de los semiplanos considerados en la sección anterior. Usando algunas identidades trigonométricas y definiendo  $k = u + iv$ , encontramos que las fronteras de estos semiplanos están dadas por:

$$v = u \cot \frac{\pi j}{n} - k_0 \csc^2 \frac{\pi j}{n} \quad (3.33)$$

o, haciendo  $\alpha_j = \cot \frac{\pi j}{n}$

$$v = \alpha_j u - (\alpha_j^2 + 1) \frac{k_0}{2}. \quad (3.34)$$

Como ya se dijo, en contraste con el caso estudiado en la sección anterior, sus fronteras no se intersecan en un solo punto; sin embargo, si llamamos a esta línea  $L_j$ , y sin pérdida de generalidad suponemos que  $k_0 = 1$ , entonces la intersección  $L_j \cap L_l$  es el punto

$$\left( \frac{\alpha_j + \alpha_l}{2}, \frac{\alpha_j \alpha_l - 1}{2} \right). \quad (3.35)$$

También, la fórmula (3.33) muestra que las líneas  $L_{n-j}$  y  $L_j$  son reflexiones una de la otra con respecto al eje imaginario; por lo tanto, es suficiente analizar las intersecciones para  $j \leq [\frac{n}{2}]$ . Nótese también que existe una diferencia entre el caso par y el impar, porque en el caso par una de las rectas es la línea horizontal  $v = -\frac{1}{2}$ . Más aún, (3.33) y el comportamiento de la función  $\csc^2$  muestran que conforme  $j$  aumenta desde 1 hasta  $[\frac{n}{2}]$ , la intersección de  $L_j$  con el eje imaginario se va recorriendo hacia abajo.

Entonces, cerca del eje imaginario, el conjunto  $\bigcap_{j=1}^{n-1} \hat{H}_j$  está acotado por la línea  $L_m$  (donde  $m = [\frac{n}{2}]$ ). Usando la fórmula (3.35) podemos ver que la primer intersección de la línea  $L_m$  con cualquier otra de las líneas  $L_j$  hacia la derecha del eje imaginario es con  $L_{m-1}$ . En general, resulta que si  $L_j$  es la línea que acota al conjunto, la siguiente intersección a la derecha es con la línea  $L_{j-1}$ . Entonces, la simetría del conjunto es consecuencia de la simetría de las líneas mencionada en el párrafo anterior. ■

**Observación** Cuando aplicamos las rotaciones necesarias para obtener las regiones de analiticidad del resto de las soluciones en las bases, obtenemos una región que contiene al origen en la cual todas las funciones  $\psi_j$  y  $\varphi_j$  son analíticas.

Definiendo

$$\mathbb{K} = \bigcap_{j=1}^{n-1} z^{-j} K_0, \quad (3.36)$$

es claro todas las funciones  $\psi_j$  son analíticas en  $\mathbb{K}$ . Otra posible descripción para este conjunto es la de que es el único componente conexo que contiene al origen del conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j,m=1}^{n-1} \{k \in \mathbb{C} | \Re(ikz^m(z^j - 1)) + k_0 = 0\}. \quad (3.37)$$

Nótese que si consideramos la línea  $R = \Re(ikz^m(z^j - 1)) + k_0 = 0$ , y le aplicamos cualquiera de las rotaciones  $z^l R$ , obtenemos una línea de la forma  $\Re(ikz^{m+l}(z^j - 1)) + k_0 = 0$ , que es también un borde de  $\mathbb{K}$ . Entonces, el conjunto  $\mathbb{K}$  es acotado, dado que el conjunto  $\bigcap_{l=1}^{n-1} z^l R$  forma un  $n$ -gono regular centrado en el origen.

En el siguiente teorema damos una descripción más precisa del conjunto  $\mathbb{K}$ .

**Teorema 5** *Supongamos que los potenciales  $q_j$  y sus derivadas  $q_j^{(m)}$ ,  $m \leq j$ , tienen decaimiento exponencial del tipo  $k_0$ . Entonces las soluciones  $\psi_j, \varphi_j$  tienen una región común, centrada en el origen del plano  $k$ , donde todas las funciones son analíticas excepto por un posible polo en el origen.*

*Para  $n = 2l$  la frontera de esta región es un  $n$ -gono, con apotema  $\frac{k_0}{2}$ , y orientado de tal manera que dos de sus vértices caen sobre el eje real. Para  $n = 2l + 1$  la frontera es un  $2n$ -gono con apotema  $\frac{k_0}{2} \csc \frac{\pi l}{n}$ , orientado de tal manera que dos de sus vértices caen sobre el eje imaginario.*

**Prueba.** Combinando el lema anterior con la relación de simetrías (3.5), es claro que la región de analiticidad para una base dada se puede obtener rotando o reflejando el sector donde  $\varphi_0$  es analítica con una región fundamental para la acción del grupo simétrico; esta región fundamental puede suponerse simétrica con respecto al eje imaginario. Por lo tanto, es suficiente considerar las intersecciones (3.36) para  $\Re k \geq 0$ : Analizamos el sector de ángulo  $\frac{2\pi}{n} \{k | \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \leq \arg(k) \leq \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\}$ .

Primero analizaremos el caso par. Supongamos que  $n = 2l$ . Como se mencionó en el lema, la línea  $L_l = \{u + iv | v = -\frac{k_0}{2}\}$  es la primera que interseca al eje imaginario por debajo del origen, y se interseca con  $L_{l-1}$  en el punto  $(\frac{\cot \pi(l-1)n}{2}, -\frac{k_0}{2})$ . Esta es la primer intersección de  $L_l$  con cualquiera de las líneas del lado derecho del eje imaginario. Un cálculo sencillo muestra que la línea que pasa por el origen haciendo un ángulo de  $\frac{\pi}{n}$  con el semieje imaginario negativo interseca a  $L_l$  exactamente donde ésta se interseca con  $L_{l-1}$ . De esta manera, restringidos a la región fundamental descrita en el párrafo anterior,  $\mathbb{K}$  está acotado por la línea  $L_l$  (figura 13.1). Tomando en cuenta las simetrías presentes, se sigue que la frontera de  $\mathbb{K}$  es un  $n$ -gono. De este mismo argumento obtenemos que el apotema es simplemente  $\frac{k_0}{2}$ .

Ahora, analicemos el caso impar. Supongamos que  $n = 2l + 1$ . De nuevo, recordando la prueba del lema anterior, tenemos que  $L_l$  y  $L_{l+1}$  son las primeras líneas que intersecan al eje imaginario por debajo del origen, y que la primera línea que interseca a  $L_l$  al lado derecho del eje imaginario es  $L_{l-1}$ . La frontera de la región fundamental interseca a  $L_l$  cuando  $\Re k = \frac{k_0}{2} \csc \frac{\pi l}{n} \csc \frac{\pi(l+1)}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ , y a  $L_{l-1}$  cuando  $\Re k = \frac{k_0}{2} \csc \frac{\pi(l-1)}{n} \csc \frac{\pi l}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ . De la elección de  $l$  se sigue que  $\cot \frac{\pi(l-1)}{n} > \cot \frac{\pi(l+1)}{n}$ , de tal manera que la línea que limita a la región fundamental interseca primero a  $L_l$ . Esto quiere decir que  $L_l$  acota a  $\mathbb{K}$  en la mitad derecha de la región fundamental. Con un razonamiento análogo se puede concluir que  $L_{l+1}$  acota a  $\mathbb{K}$  en la mitad izquierda de la región fundamental. Como consecuencia de las simetrías del problema, se sigue que la frontera de  $\mathbb{K}$  es un  $2n$ -gono (véase la figura 13.2).

Para calcular el apotema, analicemos el triángulo formado por el eje imaginario, la frontera de la región fundamental y la línea  $L_l$ . Es un triángulo isósceles, ya que dos de sus ángulos internos son iguales  $\frac{\pi l}{n}$ . Los lados iguales miden  $\frac{k_0}{2} \csc^2 \frac{\pi l}{n}$ . La altura del triángulo es entonces  $\frac{k_0}{2} \csc \frac{\pi l}{n}$ . Esto completa la prueba. ■

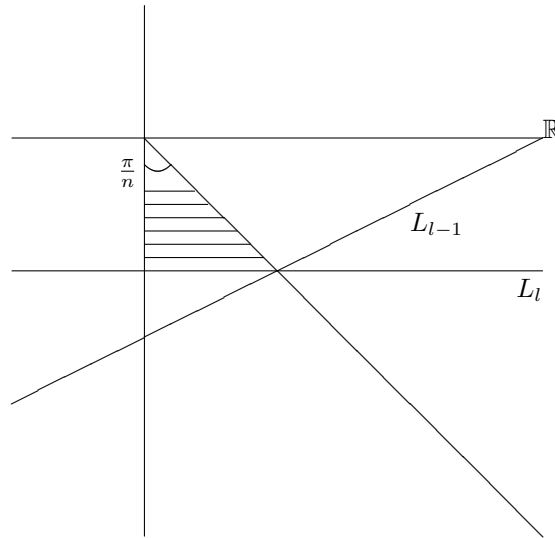


Figura 13.1: La región fundamental para  $n$  par.

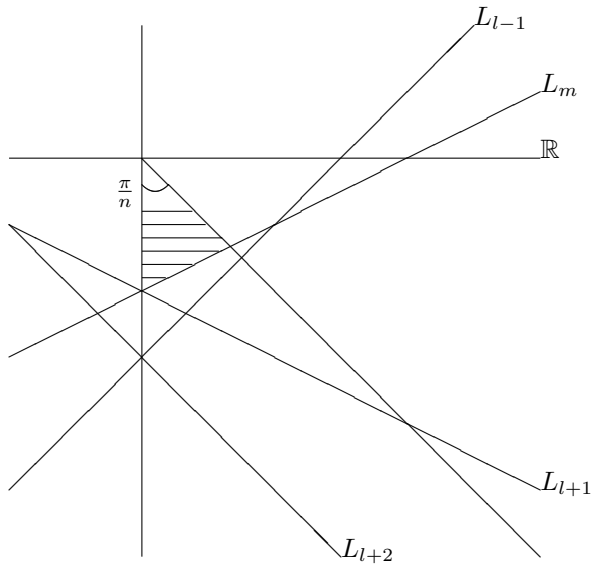


Figura 13.2: La región fundamental para  $n$  impar.

Las siguientes figuras ilustran al conjunto  $\mathbb{K}$  para ambos casos

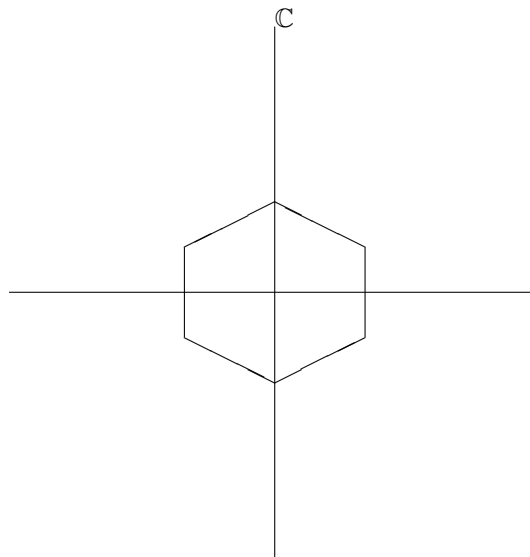


Figura 14: El conjunto  $\mathbb{K}$  para  $n = 3$ .

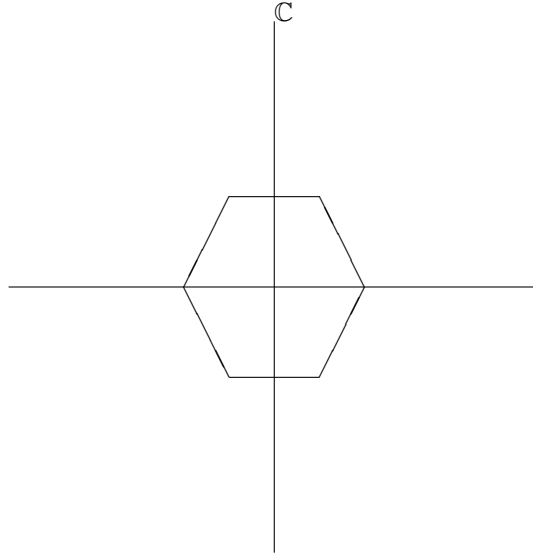


Figura 15: El conjunto  $\mathbb{K}$  para  $n = 6$ .

### 3.3. Los wronskianos y las $L^2$ -eigenfunciones

En esta sección nos enfocamos en la existencia de los  $L^2$ -eigenvalores, en cómo calcularlos y en qué regiones lo podemos hacer utilizando una generalización de lo hecho en los órdenes 2 y 3.

Recordemos que la idea es calcular wronskianos de soluciones que decaigan exponencialmente ya sea cuando  $x \rightarrow \infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Por ejemplo,  $\varphi_0(x, k)$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$  si y sólo si  $\Re(ik) > 0$ ; similarmente,  $\psi_0(x, k)$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$  si y sólo si  $k$  está en el semiplano superior  $\mathbb{C}^+$ . Las simetrías (3.5) implican que, en general  $\varphi_j(x, k)$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$  si  $k \in z^{-j}\mathbb{C}^-$  (el semiplano inferior) y  $\psi_j(x, k)$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$  si  $k \in z^{-j}\mathbb{C}^+$ .

Como para cada  $j$ ,  $\varphi_j$  y  $\psi_j$  decaen exponencialmente en semiplanos opuestos, para casi cada  $k$ , existe un conjunto de  $n$  funciones con decaimiento exponencial, ya sea cuando  $x \rightarrow \infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$ ; esto puede ser falso únicamente si  $k$  cae en las líneas que separan a estos semiplanos, es decir, si es elemento del conjunto

$$\mathcal{R} := \cup_{j=0}^{n-1} z^{-j}\mathbb{R}. \quad (3.38)$$

Sea  $\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$  su complemento. Los conjuntos  $\mathcal{R}$  y  $\Theta$  entonces definen una partición del plano  $k$ . Para una mejor descripción de dicha partición, sea  $\mathcal{R}_0 = \mathbb{R}^-$ , y llamemos a los restantes rayos en  $\mathcal{R}$  como  $\mathcal{R}_j$  en sentido contrario a las manecillas del reloj; sea  $\Theta_j$  el componente conexo de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$  acotado por  $\mathcal{R}_j$  y  $\mathcal{R}_{j+1}$ , como se muestra en las siguientes figuras para  $n = 3$  y  $n = 4$ :

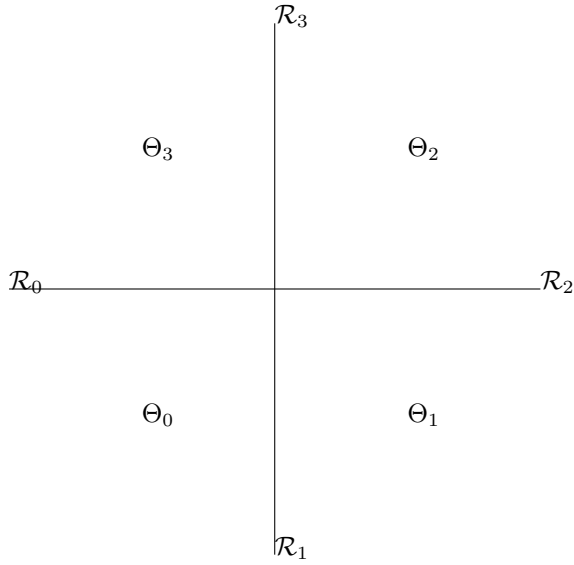


Figura 16: Los conjuntos  $\mathcal{R}_j$  y  $\Theta_j$  para  $n = 4$ .

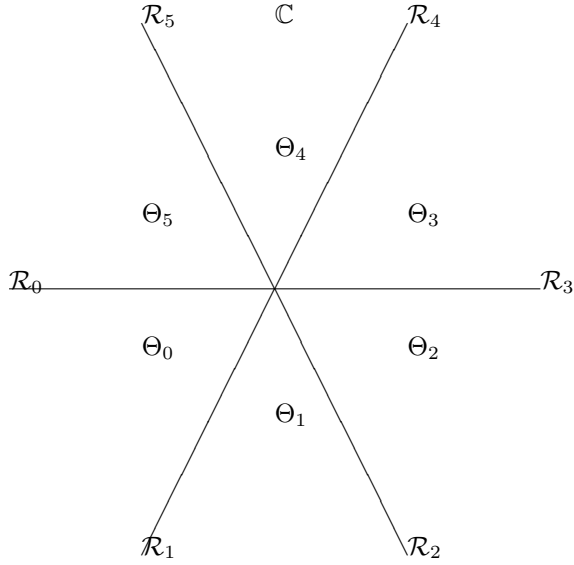


Figura 17: Los conjuntos  $\mathcal{R}_j$  y  $\Theta_j$  para  $n = 3$ .

Las figuras ilustran el hecho de que en general, si  $n$  es par, tenemos  $n$  conjuntos  $\Theta_j$ , mientras que para  $n$  impar, obtenemos  $2n$  conjuntos  $\Theta_j$ , y obtenemos algo similar para los rayos  $\mathcal{R}_j$ .

Nótese que como  $\Theta_0 \subset \mathbb{C}^-$ ,  $\varphi_0(x, k)$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$  si  $k \in \Theta_0$ . También, los conjuntos  $z^{-j}\mathbb{C}^-$  y  $\Theta_0$  son disjuntos si la rotación correspondiente a  $z^{-j}$  es mayor o igual que  $\pi$ .

Ahora, fijemos un  $k \in \Theta_0$ , y consideremos el caso par:  $n = 2m$ . Aquí las funciones que decaen exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$  para  $k \in \Theta_0$  son  $\{\varphi_j\}_{j=0}^{m-1}$ ,

mientras que las funciones  $\{\psi_j\}_{j=m}^{n-1}$  decaen exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$  para  $k \in \Theta_0$ . Entonces, si  $n$  es par, las funciones  $\varphi_0, \dots, \varphi_{\frac{n}{2}-1}, \psi_{\frac{n}{2}}, \dots, \psi_{n-1}$  forman una base de soluciones analíticas en  $\Theta_0 \cap \mathbb{K}$ , que está dividida equitativamente entre las bases originales. Como probaremos más adelante, los ceros del wronskiano

$$w(k) := W(\varphi_0, \dots, \varphi_{\frac{n}{2}-1}, \psi_{\frac{n}{2}}, \dots, \psi_{n-1}) \quad (3.39)$$

corresponden a eigenvalores de  $L$ . De manera general, las funciones que decaen exponencialmente para  $k \in \Theta_j$  son

$$\begin{aligned} \{\varphi_l(x, z^j k)\}_{l=0}^{m-1} &= \{\varphi_{l+j}(x, k)\}_{l=0}^{m-1}, \\ \{\psi_l(x, z^j k)\}_{l=m}^{n-1} &= \{\psi_{l+j}(x, k)\}_{l=m}^{n-1}, \end{aligned}$$

y el wronskiano de estas funciones para  $k \in \Theta_j \cap \mathbb{K}$  es  $w(z^j k)$ . Por lo tanto, cuando  $n$  es par, es suficiente con buscar el  $L^2$ -espectro en el conjunto  $\Theta_0 \cap \mathbb{K}$ .

Por otro lado, cuando  $n = 2m + 1$ , son las funciones  $\{\varphi_j\}_{j=0}^m$  las que decaen exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$ , mientras que las funciones  $\{\psi_j\}_{j=m+1}^{n-1}$  decaen exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$  para  $k \in \Theta_0$ , mostrando otra diferencia más entre los casos par e impar:

En los conjuntos  $\Theta_{2j}$  hay  $m + 1$  funciones del conjunto  $\{\varphi_j\}$  y  $m$  funciones del conjunto  $\{\psi_j\}$  que decaen exponencialmente, pero en los conjuntos  $\Theta_{2j+1}$ , son  $m$  funciones del conjunto  $\{\varphi_j\}$  y  $m + 1$  funciones de  $\{\psi_j\}$ . Entonces, si  $j$  es par, las funciones que decaen exponencialmente en  $\Theta_j$  son

$$\begin{aligned} \{\varphi_l(x, z^j k)\}_{l=0}^m &= \{\varphi_{l+j}(x, k)\}_{l=0}^m, \\ \{\psi_l(x, z^j k)\}_{l=m+1}^{n-1} &= \{\psi_{l+j}(x, k)\}_{l=m+1}^{n-1}, \end{aligned}$$

de manera tal que su wronskiano para  $k \in \Theta_j \cap \mathbb{K}$  no es más que una rotación por  $z^j$  del wronskiano  $W(\varphi_0, \dots, \varphi_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_{n-1})$  para  $k \in \Theta_0 \cap \mathbb{K}$ . Pero si  $j$  es impar, entonces las funciones que decaen exponencialmente en  $\Theta_j$  son  $\{\varphi_l(x, z^j k)\}_{l=1}^m = \{\varphi_{l+j}(x, k)\}_{l=1}^m$ ,  $\{\psi_l(x, z^j k)\}_{l=m+1}^{n-1} = \{\psi_{l+j}(x, k)\}_{l=m+1}^{n-1} \cup \{\psi_j(x, k)\}$ , así que el wronskiano de estas funciones es ahora una rotación por  $z^j$  del wronskiano  $W(\psi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_{n-1})$  para  $k \in \Theta_{2n-1} \cap \mathbb{K}$ . Por lo tanto, si  $n$  es impar, sólo necesitamos buscar los  $L^2$  eigenvalores en  $\Theta_0 \cap \mathbb{K}$  y  $\Theta_{2n-1} \cap \mathbb{K}$ .

Ahora consideremos de nueva cuenta la matriz de cambio de base. Para  $k \in \mathbb{K}$ , tenemos que todas las  $\varphi_j$  y las  $\psi_j$  son analíticas, y cada uno de ambos conjuntos de funciones forman una base para el espacio de soluciones de (3.2). Entonces, existe una matriz de cambio de base  $\Lambda(k)$  tal que

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x, k) \\ \varphi_1(x, k) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x, k) \end{bmatrix} = \Lambda(k) \begin{bmatrix} \psi_0(x, k) \\ \psi_1(x, k) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x, k) \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Usando (3.5), se encuentra que  $\Lambda(k)$  satisface

$$\Lambda_{jl}(z^r k) = \Lambda_{j+r, l+r}(k). \quad (3.41)$$

Podemos ahora enunciar el siguiente:

**Teorema 6** Si  $n = 2m$  y  $\kappa \in \Theta_0 \cap \mathbb{K}$  es un cero del determinante de la submatriz de  $\Lambda(k)$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{mm} & \Lambda_{m, m+1} & \cdots & \Lambda_{m, n-1} \\ \Lambda_{m+1, m} & \Lambda_{m+1, m+1} & \cdots & \Lambda_{m+1, n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Lambda_{n-1, m} & \Lambda_{n-1, m+1} & \cdots & \Lambda_{n-1, n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

entonces  $\kappa^n$  es un eigenvalor de  $L$ .

Similarmente, si  $n = 2m + 1$  y  $\kappa \in \Theta_0 \cap \mathbb{K}$  es un cero del determinante de la submatriz de  $\Lambda(k)$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{m+2, m+2} & \Lambda_{m+2, m+3} & \cdots & \Lambda_{m+2, n-1} \\ \Lambda_{m+3, m+2} & \Lambda_{m+3, m+3} & \cdots & \Lambda_{m+3, n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Lambda_{n-1, m+2} & \Lambda_{n-1, m+3} & \cdots & \Lambda_{n-1, n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

entonces  $\kappa^n$  es un eigenvalor de  $L$ . Si  $\kappa \in \Theta_{2n-1} \cap \mathbb{K}$  es un cero del determinante de la submatriz de  $\Lambda(k)$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1, m+2} & \cdots & \Lambda_{1, n-1} \\ \Lambda_{m+2, 1} & \Lambda_{m+2, m+2} & \cdots & \Lambda_{m+2, n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Lambda_{n-1, 1} & \Lambda_{n-1, m+2} & \cdots & \Lambda_{n-1, n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

entonces  $\kappa^n$  es un eigenvalor de  $L$ .

**Prueba.** Probaremos el caso  $n = 2m$ , ya que el otro es análogo. Como se dijo antes, en  $\Theta_0 \cap \mathbb{K}$  los ceros de  $W(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}, \psi_m, \dots, \psi_{n-1})$  corresponden al  $L^2$ -espectro de  $L$ : Como el operador está en forma normal, dicho wronskiano no depende de  $x$ , así que podemos calcularlo, por ejemplo, cuando  $x \rightarrow -\infty$ :



$$\begin{aligned}
& W(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}, \psi_m, \dots, \psi_{n-1}) \\
& \rightarrow \begin{vmatrix} e^{ikx} & \dots & e^{\beta_{m-1,k}x} & \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{mj} e^{\beta_{j,k}x} & \dots \\ ik e^{ikx} & \dots & \beta_{m-1,k} e^{\beta_{m-1,k}x} & \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{mj} \beta_{j,k} e^{\beta_{j,k}x} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ (ik)^{n-1} e^{ikx} & \dots & \beta_{m-1,k}^{n-1} e^{\beta_{m-1,k}x} & \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{mj} \beta_{j,k}^{n-1} e^{\beta_{j,k}x} & \dots \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} e^{ikx} & \dots & e^{\beta_{m-1,k}x} & \sum_{j=m}^{n-1} \Lambda_{mj} e^{\beta_{j,k}x} & \dots \\ ik e^{ikx} & \dots & \beta_{m-1,k} e^{\beta_{m-1,k}x} & \sum_{j=m}^{n-1} \Lambda_{mj} \beta_{j,k} e^{\beta_{j,k}x} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ (ik)^{n-1} e^{ikx} & \dots & \beta_{m-1,k}^{n-1} e^{\beta_{m-1,k}x} & \sum_{j=m}^{n-1} \Lambda_{mj} \beta_{j,k}^{n-1} e^{\beta_{j,k}x} & \dots \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} \Lambda_{mm} & \Lambda_{m,m+1} & \dots & \Lambda_{m,n-1} \\ \Lambda_{m+1,m} & \Lambda_{m+1,m+1} & \dots & \Lambda_{m+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{n-1,m} & \Lambda_{n-1,m+1} & \dots & \Lambda_{n-1,n-1} \end{vmatrix} W(e^{ikx}, e^{izkx}, \dots, e^{iz^{n-1}kx}),
\end{aligned}$$

donde  $\beta_{j,k} = ikz^j$ . De esta manera, los ceros del wronskiano  $W(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}, \psi_m, \dots, \psi_{n-1})$  son los ceros del determinante de la submatriz. Ahora, si  $\kappa$  es un cero de este determinante, entonces es un cero del wronskiano, de modo que existe un conjunto de constantes  $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$  tal que

$$\begin{aligned}
& c_0 \varphi_0(x, \kappa) + c_1 \varphi_1(x, \kappa) + \dots + c_{m-1} \varphi_{m-1}(x, \kappa) \\
& = c_m \psi_m(x, \kappa) + c_{m+1} \psi_{m+1}(x, \kappa) + \dots + c_{n-1} \psi_{n-1}(x, \kappa).
\end{aligned}$$

Esta ecuación describe una solución de la ecuación espectral que decae exponencialmente tanto cuando  $x \rightarrow -\infty$  como cuando  $x \rightarrow \infty$ , de tal modo que corresponde a una  $L^2$ -eigenfunción de  $L$  con eigenvalor  $\kappa^n$ . ■

Aunque el Teorema 6 es el mejor resultado general que hemos podido obtener, éste puede hacerse más fuerte tomando en cuenta la siguiente consideración: En general, no se necesita que todas las funciones sean analíticas, de hecho sólo necesitamos aquéllas que decaen exponencialmente en la región de interés. Por lo tanto, en lugar de considerar  $\Theta_0 \cap \mathbb{K}$ , podemos tomar la intersección de las regiones de analiticidad de  $\varphi_0, \dots, \varphi_{\frac{n}{2}-1}, \psi_{\frac{n}{2}}, \dots, \psi_{n-1}$  con  $\Theta_0$ . De los resultados obtenidos anteriormente, esta región está dada por

$$S = \left( \bigcap_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \right) \cap \left( \bigcap_{j=\frac{n}{2}}^{n-1} z^{-j} K_0 \right) \cap \Theta_0, \quad (3.45)$$

que es un conjunto más grande que  $\Theta_0 \cap \mathbb{K}$ . De hecho, en los casos  $n = 3$  y  $n = 4$ , que probablemente sean los más importantes para las aplicaciones, se puede probar la siguiente:

**Proposición 3** *Supongamos que  $n < 5$ , y que las funciones  $q_j^{(m)}$ ,  $m \leq j$  tienen decaimiento exponencial del tipo  $k_0$ . Entonces, el conjunto*

$$S = \left( \bigcap_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \right) \cap \left( \bigcap_{j=\frac{n}{2}}^{n-1} z^{-j} K_0 \right) \cap \Theta_0, \quad (3.46)$$

*contiene una banda infinita centrada en la semirrecta que hace un ángulo de  $\frac{7\pi}{6}$  con el eje real positivo para  $n = 3$ , y  $\frac{5\pi}{4}$  para  $n = 4$ .*

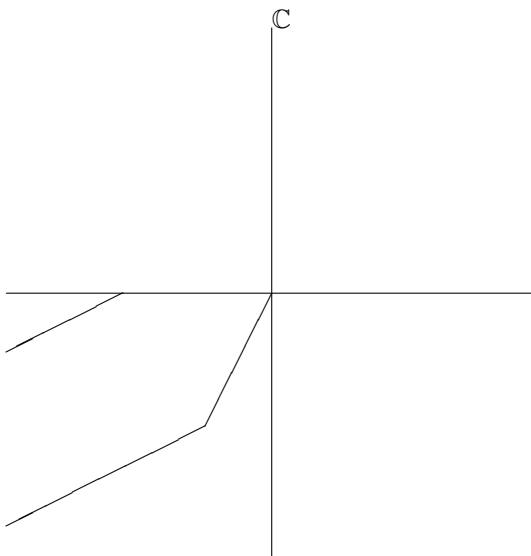


Figura 18: El conjunto  $S$  para  $n = 3$ .

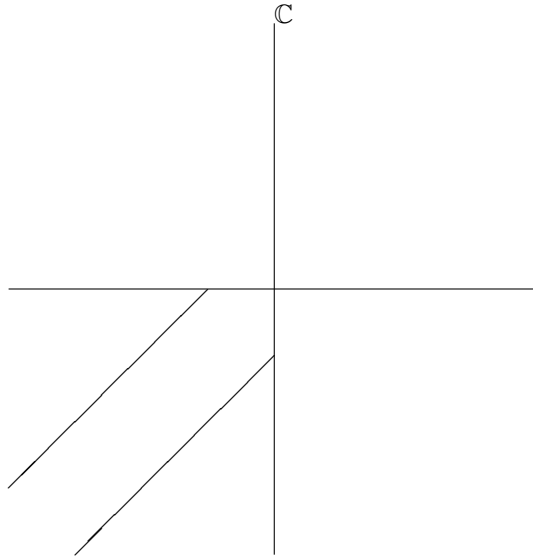


Figura 21: El conjunto  $S$  para  $n = 4$ .

**Observación** Sin embargo, para  $n \geq 5$  el mismo argumento no es cierto en general, y no se puede garantizar la existencia de tal banda infinita. De hecho, para  $n = 5$  el argumento previo arroja una región como la de la siguiente figura:

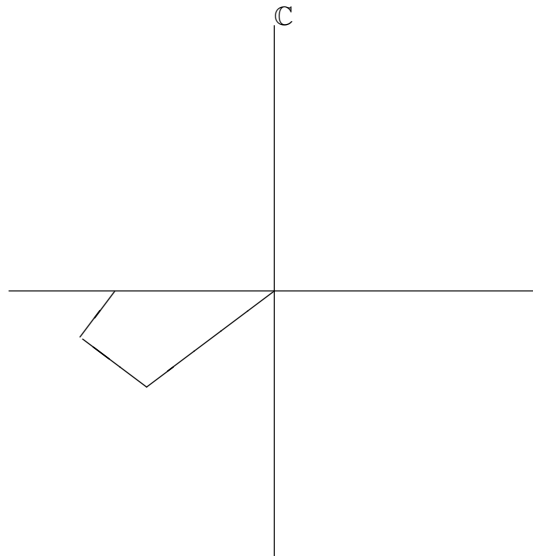


Figura 22: El conjunto  $S$  para  $n = 5$ .

### 3.4. Funciones rápidamente decrecientes

En esta sección, se muestran algunas relaciones entre los métodos propuestos en este trabajo y la teoría desarrollada por R. Beals y sus colaboradores

(véanse [4], [5]). Para establecer esta conexión, primero necesitamos introducir la siguiente definición:

**Definición 2** *Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es **rápidamente decreciente** si*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\alpha|x|} |f(x)| = 0 \quad (3.47)$$

$\forall \alpha > 0$ .

Nótese que esta definición nos dice que toda función rápidamente decreciente tiene decaimiento exponencial del tipo  $k_0$  para cualquier elección de  $k_0$ . Esto quiere decir que para el caso en el que todas las funciones  $\{q_j^{(m)}\}$  son rápidamente decrecientes, el conjunto  $\mathbb{K}$  se convierte en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

En el resto de la sección supondremos que todas las funciones  $q_j^{(m)}$  son rápidamente decrecientes.

El enfoque desarrollado en [4] es como sigue:

Primero, la ecuación espectral  $L\psi = k^n \psi$  es reducida al sistema de primer orden

$$Dv = J_k v + qv \quad (3.48)$$

donde  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ ,  $v_1 = \psi$ , y

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k^n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -q_0 & -q_1 & \dots & -q_{n-2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Entonces se define

$$\Sigma = \Sigma(n) = \{k \in \mathbb{C} : \Re(iz^j k) = \Re(iz^l k) \text{ para algún } 0 \leq j < l < n\}. \quad (3.51)$$

Para el caso  $n = 2$  se tiene que  $\Sigma(2) = \mathbb{R}$ , y para el caso  $n > 2$  se tiene que una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  radianes convierte a  $\Sigma(n)$  en la unión de las  $n$  líneas que pasan por el origen y por las raíces  $2n$ -ésimas de 1 (véanse [4] y [5]). Por ejemplo,

para el caso  $n = 2$ , tenemos que  $z = -1$ , y tomando  $j = 0$  y  $l = 1$ , se obtiene que  $k = a + ib \in \Sigma(2)$  si  $\Re(ik) = \Re(-ik)$ , o bien,  $\Re(i(a + ib)) = \Re(-i(a + ib))$ , de donde  $b = 0$  y entonces  $k$  debe ser real.

La definición de  $\Sigma(n)$  permite definir un ordenamiento asociado a las raíces  $n$ -ésimas de 1  $\forall k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ :

$$\Re(i\alpha_1 k) > \Re(i\alpha_2 k) > \dots > \Re(i\alpha_n k), \quad (3.52)$$

donde  $\alpha_j = z^l$  para algún  $l$ . Este ordenamiento depende de la componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$  que contiene a  $k$ .

Para  $n > 2$ , numeramos los rayos en  $\Sigma$  y las componentes  $\Omega$  de  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$  en el sentido antihorario, tomando a  $\Sigma_0$  como la parte negativa del eje imaginario, y  $\Omega_j$  es la componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$  entre  $\Sigma_{j-1}$  y  $\Sigma_j$ .

Cuando  $q = 0$ , la solución matricial de (3.48), que corresponde a las soluciones puramente exponenciales de  $L\psi = k^n\psi$ , tiene la forma

$$\phi(x, k) = A_k e^{ikxJ(k)}, \quad (3.53)$$

donde

$$J(k) := \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

y

$$A_k := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 k & \alpha_2 k & \dots & \alpha_n k \\ (\alpha_1 k)^2 & (\alpha_2 k)^2 & \dots & (\alpha_n k)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_1 k)^{n-1} & (\alpha_2 k)^{n-1} & \dots & (\alpha_n k)^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & \dots & \\ & & & k^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\equiv d_k A(k). \quad (3.56)$$

y  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  son las raíces de la unidad en el orden adociado a  $k$ . En lo que sigue denotaremos a la matriz diagonal  $J(k)$  y a la matriz de Vandermonde  $A(k)$  por  $J$  y  $A$ ; ambas dependen únicamente del sector  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ .

Nótese que  $A_k$  diagonaliza a  $J_k$ :

$$A_k^{-1} J_k A_k = kJ. \quad (3.57)$$

La ecuación (3.57) es equivalente a

$$J_k A_k = k A_k J, \quad (3.58)$$

lo cual puede establecerse por un cálculo directo, o bien, diferenciando (3.53) con respecto a  $x$  en  $x = 0$  y usando que  $\phi$  es solución de (3.48) cuando  $q = 0$ .

Con esta notación, el problema se convierte en: dado  $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ , encuentra (si es posible) una solución matricial  $\psi(\cdot, k)$  de (3.48) con las propiedades asintóticas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x, k) e^{-ikxJ} = A_k, \quad (3.59)$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \|\psi(x, k) e^{-ikxJ}\| < \infty. \quad (3.60)$$

Resulta conveniente reescribir este problema suponiendo que  $\psi$  tiene la forma

$$\psi(x, k) = m(x, k) e^{ikxJ}, \quad (3.61)$$

lo que convierte el problema en

$$\begin{cases} D_x m = J_k m - k m J + q m, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} m(x, k) = A_k, \\ m(\cdot, k) \text{ es acotada,} \end{cases} \quad (3.62)$$

y el problema correspondiente normalizado en  $\infty$ :

$$\begin{cases} D_x \tilde{m} = J_k \tilde{m} - k \tilde{m} J + q \tilde{m}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{m}(x, k) = A_k, \\ \tilde{m}(\cdot, k) \text{ es acotada,} \end{cases} \quad (3.63)$$

donde  $D_x$  representa derivación con respecto a  $x$ .

Una solución  $m(\cdot, k)$  de (3.62) o (3.63) es llamada una matriz fundamental para  $L$  y  $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ . Se prueba entonces que existe a lo más una matriz fundamental para cada  $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ .

Nótese que el determinante de una matriz fundamental es independiente de  $x$ , puesto que

$$D_x(\det m) = D_x(\det \psi) = \text{tr}(J_k + q) \cdot \det \psi = 0 \quad (3.64)$$

y entonces  $\det m(\cdot, k) \equiv \det A_k$

Tomando  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  como la base estándar de vectores para  $\mathbb{C}^n$  considerado como un espacio de vectores columna:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^t, \dots \quad (3.65)$$

Entonces  $m_j = m e_j$  y  $\tilde{m}_j = \tilde{m} e_j$  son las  $j$ -ésimas columnas de las matrices  $m$ ,  $\tilde{m}$ . Ambas satisfacen la ecuación diferencial

$$D_x m_j = (J_k - \alpha_j k I + q) m_j \quad (3.66)$$

con condiciones asintóticas

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} m_j(x, k) = A_k e_j, \quad m_j(\cdot, k) \text{ es acotada;} \quad (3.67)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{m}_j(x, k) = A_k e_j, \quad \tilde{m}_j(\cdot, k) \text{ es acotada.} \quad (3.68)$$

Considérense los productos cuña con valores en el álgebra exterior  $\Lambda(\mathbb{C}^n) = \bigoplus \Lambda^j(\mathbb{C}^n)$ :

$$\begin{aligned} f_j(\cdot, k) &= m_1(\cdot, k) \wedge m_2(\cdot, k) \wedge \dots \wedge m_k(\cdot, k), \\ g_j(\cdot, k) &= \tilde{m}_j(\cdot, k) \wedge \tilde{m}_{j+1}(\cdot, k) \wedge \dots \wedge \tilde{m}_n(\cdot, k), \end{aligned}$$

y  $A^{(j)} : \Lambda^j(\mathbb{C}^n) \rightarrow \Lambda^j(\mathbb{C}^n)$  como la única función lineal asociada a la transformación lineal  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que

$$A^{(j)}(u_1 \wedge \dots \wedge u_j) = \sum_{j=1}^j u_1 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge A u_j \wedge u_{j+1} \wedge \dots \wedge u_k, \quad (3.69)$$

de modo que las ecuaciones para  $m_j$  y  $\tilde{m}_j$  implican que

$$D f_j = [J_k^{(j)} - (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) k I + q^{(j)}] f_j, \quad (3.70)$$

$$D g_j = [J_k^{(n-j+1)} - (\alpha_j + \dots + \alpha_n) k I + q^{(n-j+1)}] g_j, \quad (3.71)$$

con condiciones asintóticas

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_j(x, k) = A_k e_1 \wedge \dots \wedge A_k e_j, \quad (3.72)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_j(x, k) = A_k e_j \wedge \dots \wedge A_k e_n. \quad (3.73)$$

De manera análoga al problema matricial, una familia fundamental de tensores para  $L$  y  $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$  es un conjunto de soluciones  $\{f_j, g_j\}$  al problema (3.70), (3.71), (3.72) and (3.73),  $1 \leq j \leq n$ . Se prueba entonces que existe una única familia fundamental de tensores para cada  $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ .

La conexión con nuestro enfoque aparece cuando se sigue de la definición de las funciones  $\Delta_j(k)$ :

**Teorema 7** *Existen funciones escalares  $\Delta_j(k)$ ,  $0 \leq j \leq n$ , holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ , y con extensiones suaves a  $\bar{\Omega} \setminus 0$ , tales que en  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_j(x, k) &= \Delta_j(k) A_k e_1 \wedge \dots \wedge A_k e_j; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g_{j+1}(x, k) &= \Delta_j(k) A_k e_{k+1} \wedge \dots \wedge A_k e_n. \end{aligned}$$

Probemos que estas funciones  $\Delta_j$  son determinantes de submatrices de  $\Lambda(k)$ .

Primero, definimos la función  $h_\Omega : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$  de tal manera que  $\alpha_j = z^{h_\Omega(j)}$ . Como se ha comentado,  $h_\Omega$  depende únicamente del componente conexo de  $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ , y para simplificar la notación la llamaremos simplemente  $h$ . Usando (3.67) y (3.68), se obtiene que

$$m_j(x, k) = \begin{bmatrix} \varphi_{h(j)}(x, k)e^{-ikz^{h(j)}x} \\ \varphi'_{h(j)}(x, k)e^{-ikz^{h(j)}x} \\ \vdots \\ \varphi_{h(j)}^{(n-1)}(x, k)e^{-ikz^{h(j)}x} \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$\tilde{m}_j(x, k) = \begin{bmatrix} \psi_{h(j)}(x, k)e^{-ikz^{h(j)}x} \\ \psi'_{h(j)}(x, k)e^{-ikz^{h(j)}x} \\ \vdots \\ \psi_{h(j)}^{(n-1)}(x, k)e^{-ikz^{h(j)}x} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Definimos

$$\Phi_j(x, k) = \begin{bmatrix} \varphi_{h(j)}(x, k) \\ \varphi'_{h(j)}(x, k) \\ \vdots \\ \varphi_{h(j)}^{(n-1)}(x, k) \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

$$\Psi_j(x, k) = \begin{bmatrix} \psi_{h(j)}(x, k) \\ \psi'_{h(j)}(x, k) \\ \vdots \\ \psi_{h(j)}^{(n-1)}(x, k) \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

de modo que, por el Teorema 7,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_1 e^{-ik\alpha_1 x} \wedge \dots \wedge \Phi_j e^{-ik\alpha_j x} = \Delta_j(k) A_k e_1 \wedge \dots \wedge A_k e_j. \quad (3.78)$$

Usando de nuevo (3.68) y la definición (3.77), vemos que el lado derecho de (3.78) es

$$\Delta_j(k) A_k e_1 \wedge \dots \wedge A_k e_j = \Delta_j(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_1 e^{-ik\alpha_1 x} \wedge \dots \wedge \Psi_j e^{-ik\alpha_j x}, \quad (3.79)$$



pero

$$\begin{aligned}
\Phi_1 e^{-ik\alpha_1 x} \wedge \dots \wedge \Phi_j e^{-ik\alpha_j x} &= \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_{h(0),h(m)} \Psi_m e^{-ik\alpha_1 x} \wedge \dots \wedge \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_{h(j),h(m)} \Psi_m e^{-ik\alpha_j x} \\
&= \sum_{\sigma \in \text{Comb}(n,j)} |\Lambda_{h(\sigma(1)), \dots, h(\sigma(j))}(k)| \Psi_{\sigma(1)} e^{-ik\alpha_{\sigma(1)} x} \wedge \dots \wedge \Psi_{\sigma(j)} e^{-ik\alpha_{\sigma(j)} x}, \quad (3.80)
\end{aligned}$$

donde  $\text{Comb}(n, j)$  es el conjunto de todas las combinaciones ordenadas de  $j$  elementos del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ , y  $\Lambda_{j_l, j_{l+1}, \dots, j_m}(k)$  es la submatriz de  $\Lambda(k)$  formada por los renglones y las columnas  $j_l, j_{l+1}, \dots, j_m$  de  $\Lambda(k)$ . Usando el orden previamente definido, se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_j e^{-ik\alpha_j x} = 0 \quad (3.81)$$

si  $j > l$ , de modo que el único elemento en la suma (3.80) es

$$|\Lambda_{h(1), \dots, h(j)}(k)| \Psi_1 e^{-ik\alpha_1 x} \wedge \Psi_2 e^{-ik\alpha_2 x} \wedge \dots \wedge \Psi_j e^{-ik\alpha_j x}. \quad (3.82)$$

Tomando el límite cuando  $x \rightarrow \infty$ , vemos que

$$\Delta_j(k) = |\Lambda_{h(1), \dots, h(j)}(k)|, \quad (3.83)$$

de tal manera que las funciones  $\Delta_j$  de hecho son determinantes de submatrices de  $\Lambda$ .

En particular, entonces, para potenciales rápidamente decrecientes (y por lo tanto, para potenciales que sean elementos de la clase de Schwartz), el teorema 6 caracteriza a todos los eigenvalores de  $L$ . Es decir, el teorema 6 es más fuerte que el teorema 7 en el sentido de que caracteriza de manera completa al espectro de  $L$  en un conjunto más amplio de potenciales.



## Capítulo 4

# Teorema generalizado de Aktosun y una aplicación

En este capítulo, probamos una versión generalizada del teorema de Aktosun para el operador de orden  $n$ . Asimismo, proponemos un algoritmo para calcular eigenvalores del operador que hace uso de dicho teorema. Después de eso, se muestran algunos resultados obtenidos de dicho algoritmo.

### 4.1. Teorema generalizado de Aktosun

En el resto de la sección, utilizaremos el siguiente resultado, donde  $\Lambda(k)$  representa, como antes, la matriz de cambio de base asociada a los potenciales  $q_j$ :

**Proposición 4** Si  $k \in \mathbb{K}$ , entonces  $\det(\Lambda(k)) = 1$ .

**Prueba.** Como ya se ha mencionado, todas las funciones  $\varphi_j$  son analíticas en  $\mathbb{K}$ . Por lo tanto, el wronskiano  $W(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$ , es analítico, y puesto que  $L$  se encuentra en forma normal, debe ser independiente de  $x$ . Cuando  $x \rightarrow -\infty$ , se obtiene que

$$W(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{vmatrix} e^{ikx} & \dots & e^{iz^{n-1}kx} \\ ik e^{ikx} & \dots & iz^{n-1}k e^{iz^{n-1}kx} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (ik)^{n-1} e^{ikx} & \dots & (iz^{n-1}k)^{n-1} e^{iz^{n-1}kx} \end{vmatrix}, \quad (4.1)$$

y cuando  $x \rightarrow \infty$

$$W(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) =$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{0j} e^{iz^j kx} & \dots & \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{n-1,j} e^{iz^j kx} \\ \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{0j} (iz^j k) e^{iz^j kx} & \dots & \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{n-1,j} (iz^j k) e^{iz^j kx} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{0j} (iz^j k)^{n-1} e^{iz^j kx} & \dots & \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{n-1,j} (iz^j k)^{n-1} e^{iz^j kx} \end{vmatrix}, \\
& = |\Lambda(k)| \begin{vmatrix} e^{ikx} & e^{izkx} & \dots & e^{iz^{n-1}kx} \\ ik e^{ikx} & izk e^{izkx} & \dots & iz^{n-1}k e^{iz^{n-1}kx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (ik)^{n-1} e^{ikx} & (izk)^{n-1} e^{izkx} & \dots & (iz^{n-1}k)^{n-1} e^{iz^{n-1}kx} \end{vmatrix}, \quad (4.2)
\end{aligned}$$

de tal forma que  $|\Lambda(k)| = 1$ . ■

Antes de enunciar el teorema de descomposición, consideremos lo siguiente: Primero,  $L$  está totalmente determinado por la función vectorial de sus potenciales,  $Q(x) = (q_{n-2}(x), \dots, q_0(x))$ ; por lo tanto, tiene sentido referirse al problema de eigenvalores asociado a este vector  $Q$ . Dado  $Q$  de esta manera, suponiendo que satisface (como lo estamos haciendo) que las funciones  $\{q_j^{(m)}\}$  tienen decaimiento exponencial, podemos asociar a este problema dos conjuntos bien definidos de soluciones, y por lo tanto tenemos una matriz de cambio de base  $\Lambda = \Lambda(Q)$ , como la definida en (3.40). Tomando esto en cuenta, podemos enunciar el siguiente

**Teorema 8** *Dada una partición  $\{y_j\}_{j=2}^{N-1}$  del eje real, sean  $y_1 = -\infty$  e  $y_N = \infty$ . Sean  $I_j = (y_{j-1}, y_j]$ , y  $Q_j(x) = Q(x)\chi_{I_j}(x)$ . Definimos  $\Lambda_j(k) = \Lambda(Q_j(x))$ . Entonces, si  $k \in \mathbb{K}$ ,*

$$\Lambda(k) = \prod_{j=2}^N \Lambda_{N-j+2}(k) = \Lambda_N \cdot \dots \cdot \Lambda_2(k). \quad (4.3)$$

**Prueba.** Sean  $x_0 = -\infty$ ,  $x_{N+1} = \infty$ ,  $x_j = y_j$ ,  $j = 2, \dots, N-1$  y  $x_1 \in (x_0, x_2)$  y  $x_N \in (x_{N-1}, x_{N+1})$ . Los puntos  $x_1$  y  $x_N$  son definidos de esta forma porque los haremos tender a infinito sin alterar la partición original. Ahora sean  $\{\gamma_{mj}\}_{m=0}^{n-1}$   $n$  soluciones linealmente independientes de (3.2) para  $Q_j(x)$ . Entonces, existe  $C_j$  tal que

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x, k) \\ \psi_1(x, k) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x, k) \end{bmatrix} = C_j(k) \begin{bmatrix} \gamma_{0j}(x, k) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1,j}(x, k) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Por conveniencia, introduciremos las siguientes matrices:

$$\Gamma_j(x, k) = \begin{bmatrix} \gamma_{0j}(x, k) & \dots & \gamma_{n-1j}(x, k) \\ \gamma'_{0j}(x, k) & \dots & \gamma'_{n-1j}(x, k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{0j}^{(n-1)}(x, k) & \dots & \gamma_{n-1j}^{(n-1)}(x, k) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$M(x, k) = \begin{bmatrix} e^{ikx} & \dots & e^{ikz^{n-1}x} \\ ik e^{ikx} & \dots & ikz^{n-1} e^{ikz^{n-1}x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (ik)^{n-1} e^{ikx} & \dots & (ikz^{n-1})^{n-1} e^{ikz^{n-1}x} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\Phi(x, k) = \begin{bmatrix} \varphi_0(x, k) & \dots & \varphi_{n-1}(x, k) \\ \varphi'_0(x, k) & \dots & \varphi'_{n-1}(x, k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(x, k) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x, k) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\Psi(x, k) = \begin{bmatrix} \psi_0(x, k) & \dots & \psi_{n-1}(x, k) \\ \psi'_0(x, k) & \dots & \psi'_{n-1}(x, k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_0^{(n-1)}(x, k) & \dots & \psi_{n-1}^{(n-1)}(x, k) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Entonces, puesto que  $\varphi_0(\cdot, k), \psi_1(\cdot, k), \dots, \psi_{n-1}(\cdot, k) \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{j-1}(x_{j-1}, k) C_{j-1}^T &= \Gamma_j(x_{j-1}, k) C_j^T(k) \\ \Gamma_j(x_j, k) C_j^T(k) &= \Gamma_{j+1}(x_j, k) C_{j+1}^T(k), \end{aligned}$$

de donde

$$C_1^T(k) = \left[ \prod_{j=1}^N \Gamma_j^{-1}(x_j, k) \Gamma_{j+1}(x_j, k) \right] C_{N+1}^T(k). \quad (4.9)$$

Ahora, si  $\gamma_{m1}(x, k) = \varphi_m(x, k)$ ,  $\gamma_{mN+1}(x, k) = \psi_m(x, k)$ , usando la Proposición 4 se obtiene que

$$C_1^T(k) = \begin{bmatrix} 1 & \Lambda_{10}(k) & \dots & \Lambda_{n-1,0}(k) \\ 0 & \Lambda_{11}(k) & \dots & \Lambda_{n-1,1}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Lambda_{1,n-1}(k) & \dots & \Lambda_{n-1,n-1}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$C_{N+1}^T(k) = \begin{bmatrix} b_{00}(k) & 0 & \dots & 0 \\ b_{01}(k) & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{0n-1}(k) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$(C_{N+1}^T(k))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_{00}(k)} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{b_{01}(k)}{b_{00}(k)} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{b_{0n-1}(k)}{b_{00}(k)} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

donde la matriz  $(b_{ij}(k))$  es la inversa de  $\Lambda(k)$ . Por lo tanto,

$$C_1^T(k)(C_{N+1}^T(k))^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{00}(k) & \Lambda_{10}(k) & \dots & \Lambda_{n-10}(k) \\ \Lambda_{01}(k) & \Lambda_{11}(k) & \dots & \Lambda_{n-11}(k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_{0n-1}(k) & \Lambda_{1n-1}(k) & \dots & \Lambda_{n-1n-1}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

y entonces

$$\Lambda^T(k) = \prod_{j=1}^N \Gamma_j^{-1}(x_j, k) \Gamma_{j+1}(x_j, k). \quad (4.14)$$

Para encontrar la relación entre las matrices  $\Lambda_j$  y  $\Gamma$  se introducen las funciones  $P^l(x)$ , que están asociadas a una partición más conveniente; esto nos permitirá meter en los cálculos a las matrices  $M$ , correspondientes a las ondas libres:

Primero, supongamos que  $l \neq 2, N$ , y entonces definamos  $P^l(x) = Q_l(x)$ . A cada una de estas nuevas funciones le asociamos una nueva partición:  $x_0^l = -\infty$ ,  $x_2^l = x_{l-1}$ ,  $x_3^l = x_l$ ,  $x_5^l = \infty$ ,  $x_1^l = x_1$  y  $x_4^l = x_N$ . Para  $P^l(x)$ , podemos ahora definir, análogamente a como lo hicimos para  $Q_j(x)$ , el conjunto de funciones  $\{\gamma_{mj}^l(x, k)\}_{m=0}^{n-1}$ , formado por  $n$  soluciones linealmente independientes de (3.2) para  $P_j^l(x) = P^l(x)\chi_{(x_{j-1}^l, x_j^l)}(x)$ . Llamaremos  $\Gamma_j^l(x, k)$  a la matriz definida como en (4.5), formada por las funciones  $\gamma_{mj}^l(x, k)$ .

Para visualizar esta construcción, en la Figura 23 se muestra la diferencia entre  $Q_l$  y  $P^l$ : mientras la primera es considerada como una parte del potencial  $Q$ , con la partición original, la segunda es tratada como un potencial completo por su propio derecho, con una partición completamente distinta, a la que le podemos aplicar de nuevo (4.14).

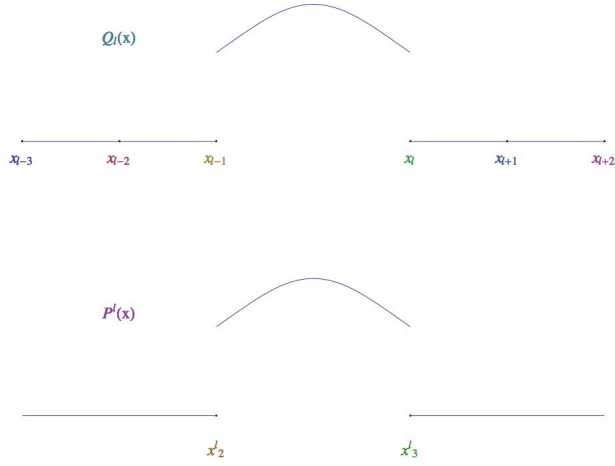


Figura 23.

Como el soporte de  $P^l(x)$  está contenido en  $(x_2^l, x_3^l]$ , podemos hacer

$$\begin{aligned}\Gamma_1^l(x, k) &= M(x, k) \\ \Gamma_2^l(x, k) &= M(x, k) \\ \Gamma_4^l(x, k) &= M(x, k) \\ \Gamma_5^l(x, k) &= M(x, k).\end{aligned}$$

Entonces, usando (4.14) para  $P^l(x)$ , tenemos que

$$\Lambda^{lT}(k) = M^{-1}(x_2^l, k)\Gamma_3^l(x_2^l, k)\Gamma_3^{l-1}(x_3^l, k)M(x_3^l, k), \quad (4.15)$$

donde  $\Lambda^l(k)$  es la matriz de cambio de base para  $P^l(x)$ . Como  $P^l(x) = Q_l(x)$ , entonces de hecho  $\Lambda^l(k) = \Lambda_l(k)$ . Pero entonces, usando el mismo razonamiento, podemos escoger  $\Gamma_3^l(x, k) = \Gamma_l(x, k)$ , de modo que (4.15) puede reescribirse como

$$\Lambda_l^T(k) = M^{-1}(x_{j-1}, k)\Gamma_j(x_{j-1}, k)\Gamma_j^{-1}(x_j, k)M(x_j, k). \quad (4.16)$$

Ahora, considérense los extremos de la recta real. Por un lado, para  $l = 2$  hacemos  $P^2(x) = Q_2(x)$ ,  $x_0^2 = -\infty$ ,  $x_1^2 = x_1$ ,  $x_2^2 = x_2$ ,  $x_3^2 = x_N$  y  $x_4^2 = \infty$ , y escogemos

$$\begin{aligned}\Gamma_1^2(x, k) &= \Phi(x, k) \\ \Gamma_2^2(x, k) &= \Gamma_2(x, k) \\ \Gamma_3^2(x, k) &= M(x, k) \\ \Gamma_4^2(x, k) &= M(x, k),\end{aligned}$$

de donde

$$\Lambda_2^T(k) = \Phi^{-1}(x_1, k)\Gamma_2(x_1, k)\Gamma_2^{-1}(x_2, k)M(x_2, k). \quad (4.17)$$

Por el otro lado, si  $l = N$ , definimos  $P^N(x) = Q_N(x)$ ,  $x_0^N = -\infty$ ,  $x_1^N = x_1$ ,  $x_2^N = x_{N-1}$ ,  $x_3^N = x_N$  y  $x_4^N = \infty$ , y escogemos

$$\begin{aligned}\Gamma_1^N(x, k) &= M(x, k) \\ \Gamma_2^N(x, k) &= M(x, k) \\ \Gamma_3^N(x, k) &= \Gamma_N(x, k) \\ \Gamma_4^N(x, k) &= \Psi(x, k),\end{aligned}$$

para obtener que

$$\Lambda_N^T(k) = M^{-1}(x_{N-1}, k)\Gamma_N(x_{N-1}, k)\Gamma_N^{-1}(x_N, k)\Psi(x_N, k), \quad (4.18)$$

y entonces todos los casos quedan cubiertos.

Combinando todo lo anterior, utilizando (4.14) de nuevo, y haciendo  $x_1 \rightarrow -\infty$  y  $x_N \rightarrow \infty$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^N \Lambda_j^T(k) &= \Phi^{-1}(x_1, k)\Gamma_2(x_1, k)\Gamma_2^{-1}(x_2, k)M(x_2, k) \\ &\quad \left( \prod_{j=3}^{N-1} M^{-1}(x_{j-1}, k)\Gamma_j(x_{j-1}, k)\Gamma_j^{-1}(x_j, k)M(x_j, k) \right) \\ &\quad M^{-1}(x_{N-1}, k)\Gamma_N(x_{N-1}, k)\Gamma_N^{-1}(x_N, k)\Psi(x_N, k) \\ &= \prod_{j=1}^N \Gamma_j^{-1}(x_j, k)\Gamma_{j+1}(x_j, k) \\ &= \Lambda^T(k).\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema de factorización. ■

Es importante resaltar este resultado: Aunque encontrar la matriz de cambio de base  $\Lambda(k)$  de manera explícita es bastante complicado incluso en el caso  $n = 2$ , es comparativamente más sencillo encontrarla para potenciales de soporte compacto que para el resto de los potenciales en general: esta reducción de la dificultad es debida a que en los potenciales con soporte compacto las soluciones  $\varphi_j$  y  $\psi_j$  coinciden al lado izquierdo y derecho del soporte, respectivamente con las ondas libres  $e^{iz^j k}$ , permitiendo que la ecuación espectral se pueda resolver como una ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera haciendo que tanto analíticamente como numéricamente la ecuación sea más tratable. Como consecuencia, el teorema que acabamos de probar nos ayuda a reducir la complejidad de calcular la matriz de cambio de base al convertir un potencial con soporte arbitrario en varios problemas con soporte compacto. En la siguiente sección proponemos un algoritmo que hace uso de este resultado para calcular eigenvalores del operador  $L$ .



## 4.2. Un algoritmo para encontrar eigenvalores del operador $L$

El resultado presentado en la sección anterior no da información sobre cómo hacer la partición de los potenciales para simplificar la obtención de los eigenvalores. En esta sección, proponemos un algoritmo para calcular la matriz de cambio de base  $\Lambda(k)$  para  $k \in \mathbb{K}$ , que da una respuesta a esta pregunta.

Primero, probaremos el siguiente resultado técnico:

**Proposición 5** *Sea  $k \in \mathbb{K}$  fija y  $r$  cualquier número positivo. Defináanse  $I_r = (-r, r)$  y  $Q_r(x) = Q(x)\chi_{I_r}(x)$ . Si  $\Lambda_r(k)$  denota la matriz de cambio de base correspondiente a  $Q_r(x)$ , entonces*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda_r(k) = \Lambda(k). \quad (4.19)$$

**Prueba.** Usando el teorema 8 se obtiene que para cada  $r$ :

$$\Lambda(k) = B_r(k)\Lambda_r(k)A_r(k), \quad (4.20)$$

donde  $B_r(k)$  y  $A_r(k)$  son las matrices de cambio de base correspondientes a  $Q(x)\chi_{[r, \infty)}(x)$  y  $Q(x)\chi_{(-\infty, -r]}(x)$ , respectivamente. Por lo tanto, es suficiente probar que  $A_r(k), B_r(k) \rightarrow I$  (la matriz identidad), cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Para esto, usamos la representación en función de Green de la solución  $\varphi_0$ , que encontramos en la sección 3.1:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, k)e^{-ikx} &= 1 + \\ &\frac{i}{nk^{n-1}} \int_{-\infty}^x \sum_{j=0}^{n-1} C_{lm}(k)e^{ik(z^j-1)(x-s)} q_l^{(l-m)}(s) \varphi_0(s, k)e^{-iks} ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $C_{lm}(k) = \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} i^l z^j (-ikz^j)^m$ . Ahora, escribimos  $A_r(k) = (a_{ij}(k))$ ; entonces, para  $x > -r$ , tenemos la relación

$$\varphi_0(x, k)e^{-ikx} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{0j}(k)e^{i(z^j-1)kx}, \quad (4.22)$$

lo que se sigue del hecho de que  $A_r$  es una matriz de cambio de base, correspondiente a un problema cuyas soluciones  $\varphi_j$  y  $\psi_j$  cerca de  $\infty$  tienen la forma exacta  $e^{ikz^j x}$ , ya que el soporte de los potenciales correspondientes está contenido en  $(-\infty, -r]$ .

Comparando ambas expresiones, y tomando el límite cuando  $x \rightarrow \infty$ , encontramos que

$$a_{0j}(k) = \delta_{0j} + \frac{i}{nk^{n-1}} \int_{-\infty}^{-r} C_{lm}(k)e^{-ikz^j s} q_l^{(l-m)}(s) \varphi_0(s, k) ds. \quad (4.23)$$

Pero puesto que todas las funciones  $q_j^{(m)}$  tienen decaimiento exponencial, entonces los integrandos en cada una de las integrales en el lado derecho están acotados para toda  $r$ , y por lo tanto, cuando  $r \rightarrow \infty$ , el elemento  $(0, j)$  de la matriz  $A_r$  tiende a  $\delta_{0j}$ .

Un razonamiento similar aplica para el resto de las entradas de la matriz, usando (3.5), y por lo tanto  $A_r \rightarrow I$ .

La prueba de la convergencia de  $B_r$  a la identidad es análoga. ■

Describiremos ahora un algoritmo para calcular los elementos de  $\Lambda(k)$ . La idea principal detrás de este algoritmo es que estos elementos se pueden calcular de manera numérica con relativa facilidad para potenciales con soporte compacto; el algoritmo lo que hace entonces es calcular  $\Lambda(k)$  para potenciales con soporte cada vez mayor hasta que se cumpla un criterio de paro determinado. La sucesión construida de esta manera, digamos  $\Lambda_j(k)$ , convergerá entonces a  $\Lambda(k)$  como consecuencia de la proposición 5.

Primero, se explica cómo se pueden calcular numéricamente los elementos de  $\Lambda(k)$  para potenciales con soporte compacto.

Fijemos  $k$  y supongamos que el intervalo  $[a, b]$  contiene a todos los soportes de los  $q_j$ . Entonces, como en la proposición 5, en el intervalo  $(-\infty, a)$  sólo tenemos ondas libres, así que en este intervalo podemos expresar  $\varphi_0$  simplemente como  $e^{ikx}$ . Similarmente, en el intervalo  $(b, \infty)$ , por la misma razón todas las soluciones  $\psi_j$  son puramente exponenciales, así que  $\varphi_0(x, k) = a_{0,0}(k)e^{ikx} + \dots + a_{0,n-1}(k)e^{ikz^{n-1}x}$  a la derecha de los soportes. De estas expresiones explícitas, se pueden calcular  $\varphi_0^{(j)}(a, k)$  y  $\varphi_0^{(j)}(b, k)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , donde los superíndices denotan la derivación con respecto a  $x$ .

Ahora, usando los valores  $\varphi_0^{(j)}(a, k)$  como condiciones iniciales, podemos resolver numéricamente la ecuación espectral  $Lf = k^n f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Llamemos  $f_N$  a esta función obtenida numéricamente; derivando numéricamente a  $f_N$  en  $x = b$ , por la continuidad de las soluciones y sus derivadas, obtenemos  $n$  ecuaciones de la forma  $f_N^{(j)} = \varphi_0^{(j)}(b, k)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , de modo que, al menos en principio, podemos obtener  $a_{0,0}, \dots, a_{0,n-1}$ .

El resto de los coeficientes se pueden obtener usando (3.5), y esto resuelve el caso de soporte compacto por completo.

Ahora, para calcular  $\Lambda(k)$  para potenciales con soporte no compacto, podemos combinar el algoritmo previo con la Proposición 5: Empezamos calculando la matriz de cambio de base correspondiente a  $Q$  multiplicado por la función característica de un intervalo compacto, como se explicó en el párrafo anterior. Entonces, iteramos el proceso incrementando el tamaño del intervalo en cada paso, calculando cada vez la matriz de cambio de base; repetimos el proceso hasta que el cambio entre la matriz obtenido en un paso y la del siguiente sea menor que cierta tolerancia.

El algoritmo calcula los elementos de  $\Lambda(k)$  recibiendo como entradas el valor de  $k$ , los potenciales  $q_j$  y la tolerancia  $\epsilon$  que sirve como criterio de paro, y funciona de la siguiente manera:

Como los eigenvalores de  $L$  son ceros de ciertos menores de  $\Lambda(k)$ , pueden obtenerse como mínimos globales de los valores absolutos de dichos menores.

---

**Algoritmo 1**  $\Lambda(k, n, q_0, \dots, q_{n-2}, tol)$ 

---

```
 $r \leftarrow 1$   
 $\Lambda_1 \leftarrow Id$   
repetir  
   $I \leftarrow (-r, r)$   
  para  $i = 0$  hasta  $n - 2$  hacer  
     $Q_i \leftarrow q_i \chi_I$   
   $\Lambda_2 = A(k, n, Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-2})$   
   $r \leftarrow 2r$   
   $e \leftarrow \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|$   
   $\Lambda_1 \leftarrow \Lambda_2$   
hasta  $e < tol$   
regresar  $\Lambda_2$ 
```

---

Combinando el algoritmo previo con un método de optimización, podemos en principio calcular eigenvalores de  $L$ .

Un punto importante es que, puesto que el módulo de una función compleja no es diferenciable en general, para encontrar estos ceros es conveniente usar un método de optimización que no suponga que la función a optimizar sea diferenciable. En el apéndice B se muestran varios ejemplos en los que se usó este algoritmo, el método de optimización usado para ellos fue el método de *evolución diferencial* (véase [18]).



## Capítulo 5

# Conclusiones

El estudio del problema espectral para operadores lineales de orden  $n > 2$  con coeficientes reales presenta grandes dificultades que no ocurren en el problema clásico de Sturm-Liouville. Muchas de estas dificultades pueden atribuirse al hecho de que estos operadores no son autoadjuntos en general, y como consecuencia, la literatura que los estudia es considerablemente escasa en comparación con el caso  $n = 2$ .

Entre los estudios más completos de los problemas de orden superior se pueden mencionar el artículo de Beals [5] y el libro de Beals, Deift y Tomei [4]. Sin embargo, ninguno de ellos estudia el problema como una generalización directa del método clásico (que aquí llamamos el “método de los wronskianos”) como se describe por ejemplo en [14]. Más aún, en el segundo de estos trabajos, que es el más detallado, se supone que los potenciales están en la clase de Schwartz, lo que simplifica muchos de los argumentos, evitando las cuestiones de convergencia que surgen al considerar potenciales más generales.

Por otro lado, intentos por generalizar directamente los métodos clásicos al caso de orden superior, como por ejemplo se hace en [10] para orden 3, exhiben fenómenos interesantes que aparecen en el espectro de los operadores; en particular, surge una pregunta interesante sobre la posibilidad de tener dependencia analítica simultánea en el parámetro espectral por parte de una base completa de soluciones, algo que parece estar directamente relacionado con que los operadores no son autoadjuntos.

Entonces, buscando extender el método de los wronskianos a una clase más amplia de potenciales, encontramos que aquéllos con decaimiento exponencial considerados en este trabajo parecen dar una clase útil que no han sido discutidos en este contexto en la literatura, y en la cual varios resultados del caso clásico pueden ser aplicados a órdenes arbitrarios.

En el camino, obtuvimos una fórmula explícita para la función de Green del operador de orden  $n$ , que nos permitió dar una prueba rigurosa de la existencia de las soluciones asintóticamente exponenciales libres de la ecuación de orden arbitrario. También, establecimos una relación entre las funciones  $\Delta_j$  que aparecen en el Teorema 7 de [4] y el método de los wronskianos, describiéndolas

en términos de los coeficientes de dispersión en una manera que desde nuestro punto de vista es más fácil de manejar que en el desarrollo original; y este enfoque fue también útil para estudiar los  $L^2$ -eigenvalores como ceros de menores de la matriz de cambio de base.

Un resultado central de este trabajo es una generalización a órdenes arbitrarios de un importante método debido a Aktosun [9], que nos da una manera de reconstruir la matriz de cambio de base de un potencial a partir de las matrices de cambio de base de los potenciales resultantes de aplicar una partición a la recta real.

Por último, dándole un carácter más aplicado a esta tesis, propusimos un algoritmo para obtener la matriz de cambio de base para el caso no compacto, utilizando de forma directa el teorema de descomposición generalizado.

## Apéndice A

# Wronskianos y la forma normal del operador

A lo largo de esta tesis se hizo uso de que si tenemos  $n$  soluciones  $f_1, \dots, f_n$  de la ecuación

$$\left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{d^n f}{dx^n} + \left(\frac{1}{i}\right)^{n-2} q_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}} + \dots + q_1(x) \frac{1}{i} \frac{df}{dx} + q_0(x) f = k^n f, \quad (\text{A.1})$$

entonces el wronskiano  $W(f_1, \dots, f_n)$  no depende de  $x$ . En este apéndice probaremos esta afirmación.

Primero, probaremos el siguiente:

**Lema 4** *Para cualquier colección de funciones  $f_1, \dots, f_n$   $n$  veces diferenciables,*

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-2)} & \dots & f_n^{(n-2)} \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-2)} & \dots & f_n^{(n-2)} \\ f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

**Prueba.** Procederemos por inducción. Para  $n = 2$ , tenemos

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \frac{d}{dx} (f_1 f_2' - f_2 f_1') = f_1 f_2'' - f_2 f_1'' = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Ahora, supongamos que el lema es válido para  $n = k - 1$ ,

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_{k-1} \\ f'_1 & \dots & f'_{k-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1^{(k-3)} & \dots & f_n^{(k-3)} \\ f_1^{(k-2)} & \dots & f_n^{(k-2)} \\ f_1^{(k-1)} & \dots & f_n^{(k-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_{k-1} \\ f'_1 & \dots & f'_{k-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1^{(k-3)} & \dots & f_n^{(k-3)} \\ f_1^{(k-1)} & \dots & f_n^{(k-1)} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_k \\ f'_1 & \dots & f'_k \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1^{(k-2)} & \dots & f_k^{(k-2)} \\ f_1^{(k-1)} & \dots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \\ = & \frac{d}{dx} \left( \begin{vmatrix} f'_2 & \dots & f'_k \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_2^{(k-1)} & \dots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{k+1} f_k \begin{vmatrix} f'_1 & \dots & f'_{k-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1^{(k-1)} & \dots & f_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix} \right) \\ = & f'_1 \begin{vmatrix} f'_2 & \dots & f'_k \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_2^{(k-1)} & \dots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{k+1} f'_k \begin{vmatrix} f'_1 & \dots & f'_{k-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1^{(k-1)} & \dots & f_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix} \\ + & f_1 \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f'_2 & \dots & f'_k \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_2^{(k-1)} & \dots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{k+1} f_k \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f'_1 & \dots & f'_{k-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ f_1^{(k-1)} & \dots & f_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} f'_1 & \cdots & f'_k \\ f_1 & \cdots & f_k \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_1^{(k-2)} & \cdots & f_k^{(k-2)} \\ f_1^{(k-1)} & \cdots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \\
&+ f_1 \begin{vmatrix} f'_2 & \cdots & f'_k \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_2^{(k-2)} & \cdots & f_k^{(k-2)} \\ f_2^{(k)} & \cdots & f_k^{(k)} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{k+1} f_k \begin{vmatrix} f'_1 & \cdots & f'_{k-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_1^{(k-2)} & \cdots & f_{k-1}^{(k-2)} \\ f_1^{(k)} & \cdots & f_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix} \\
&= 0 + \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_k \\ f'_1 & \cdots & f'_k \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_1^{(k-2)} & \cdots & f_k^{(k-2)} \\ f_1^{(k)} & \cdots & f_k^{(k)} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se ha utilizado la hipótesis de inducción para las colecciones de  $k - 1$  funciones  $\{f_2, \dots, f_k\}$ ,  $\{f_1, f_3, \dots, f_k\}, \dots, \{f_1, \dots, f_{k-1}\}$ . ■

Con este resultado, podemos ahora probar la siguiente

**Proposición 6** Sean  $f_1, \dots, f_n$  soluciones de la ecuación

$$\left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{d^n f}{dx^n} + \left(\frac{1}{i}\right)^{n-2} q_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}} + \dots + q_1(x) \frac{1}{i} \frac{df}{dx} + q_0(x) f = k^n f. \quad (\text{A.5})$$

Entonces, el wronskiano  $W(f_1, \dots, f_n)$  no depende de  $x$ .

**Prueba.** Usando el lema 4, tenemos que:

$$\frac{d}{dx} W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f'_1 & \cdots & f'_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_1^{(n-2)} & \cdots & f_n^{(n-2)} \\ f_1^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Ahora, como  $f_1, \dots, f_n$  son soluciones de la ecuación (A.5), despejando obtenemos que:

$$f_j^n = i^2 q_{n-2}(x) f_j^{n-2} - \dots - i^{n-1} q_1(x) f'_j - i^n (q_0 - k^n) f_j, \quad (\text{A.7})$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Uniendo (A.6) y (A.7), obtenemos que

$$\frac{d}{dx} W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-2)} & \dots & f_n^{(n-2)} \\ i^2 q_{n-2}(x) f_1^{n-2} - \dots - i^n (q_0 - k^n) f_1 & \dots & i^2 q_{n-2}(x) f_n^{n-2} - \dots - i^n (q_0 - k^n) f_n \end{vmatrix}.$$

Como el último renglón es una combinación lineal de los renglones anteriores, el determinante es igual a 0, y entonces  $W(f_1, \dots, f_n)$  no depende de  $x$ . ■

## Apéndice B

# El método de evolución diferencial y algunos resultados obtenidos del algoritmo

El algoritmo presentado en la sección 5.2 nos ayuda a calcular la matriz de cambio de base  $\Lambda(k)$  para potenciales con soporte no compacto. En la sección 4.3, se establece que los ceros de ciertos menores de dicha matriz corresponden a las raíces  $n$ -ésimas de los eigenvalores de  $L$ . La idea entonces para encontrar eigenvalores de  $L$ , es utilizar un método de optimización para minimizar el módulo de dichos menores, de tal manera que en caso de tener ceros en  $\mathbb{K}$ , los encuentre. Sin embargo, el módulo de una función compleja no es diferenciable en general, razón por la cual no podemos usar métodos como el descenso de gradiente, que presuponen que la función a optimizar tiene cierta diferenciableidad.

El método de optimización que utilizamos fue el método de evolución diferencial, en parte porque su implementación es sencilla, y en parte porque es un método muy robusto que sólo supone que la función a optimizar es continua. A continuación, damos una descripción del método:

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función que se quiere minimizar en el espacio de búsqueda  $S$ . Entonces:

- Se escogen al azar  $N$  puntos en  $S$ , llamados agentes.
- Hasta que se satisface algún criterio de paro (como el número de iteraciones, o el cambio en la población de agentes es menor que cierta tolerancia), repetir lo siguiente:
  - Para cada agente  $x$ 
    - Se escogen tres agentes  $a, b, c$  distintos entre sí y distintos a  $x$ .

- Se escoge al azar un índice  $R \in \{1, \dots, n\}$ .
- Se calcula la nueva posible posición  $y = (y_1, \dots, y_2)$  como sigue:
  - ◇ Para cada  $i$ , se escoge al azar un número  $r_i$  entre 0 y 1.
  - ◇ Si  $r_i < CR$  o  $i = R$ , entonces  $y_i = a_i + F(b_i - c_i)$ , y  $y_i = x_i$  en otro caso.
- Si  $f(y) < f(x)$  entonces  $x$  es remplazado por  $y$  en la población de agentes.

- El agente con la evaluación mínima de la población es tomado como el mínimo global en el espacio de búsqueda.

Los números  $CR \in (0, 1)$ , y  $F \in (0, 2)$ , son parámetros del método que el usuario escoge. Para la implementación que hicimos nosotros, se programó una variante autoadaptiva del método que permite que  $CR$  y  $F$  varíen para facilitar la recombinación de los agentes. Como criterio de paro se usó como tolerancia la raíz cuadrada del épsilon de la máquina, una cantidad ampliamente usada en este tipo de métodos.

Se validó el algoritmo de la sección 5.2 resolviendo un problema de segundo orden, con un potencial cuyo soporte es no compacto: el solitón. Explícitamente, el potencial es

$$u(x) = -\frac{8}{\cosh^2(2x)} \quad (\text{B.1})$$

y es bien conocido que el problema de eigenvalores asociado para este potencial sólo tiene el eigenvalor  $\lambda = -4$ . El algoritmo se detuvo después de 4 iteraciones, y el método encontró un cero de  $\Lambda_0(k)$  en  $k_0 = 2,5 \times 10^{-10} - i2$ , obteniendo como eigenvalor  $k_0^2 = -4 - i1 \times 10^{-9}$ , que, aunque no es un número real, da una aproximación del eigenvalor verdadero con un error menor a la tolerancia usada.

Después, corrimos el algoritmo para un caso de tercer orden, tomando como potenciales  $q_0(x) = q_1(x) = -\text{sech}(x^2)$ . En este caso, el operador ya no es autoadjunto, y obtuvimos el eigenvalor  $\lambda = -0,696193 - i0,0122762$ ; de nuevo, el algoritmo tomó 4 iteraciones en converger. Para confirmar que de hecho es un eigenvalor, graficamos las funciones  $|Lf|$  y  $|\lambda f|$  en la figura 24, donde se ve que ambas son prácticamente indistinguibles.

Para probar el algoritmo para órdenes superiores, lo corrimos para el caso de orden 4 en el que  $q_0(x) = -\text{sech}(x^2)$ ,  $q_1 = q_2 = 0$ . Este caso tiene la particularidad de que el operador  $L$  es simétrico, por lo que sus eigenvalores deben ser reales. El eigenvalor encontrado usando el algoritmo fue  $\lambda = -0,563198 - i2,7915 \times 10^{-10}$ , que aunque no es un número real, corresponde a un número real con un error menor al de la tolerancia permitida. Se hizo una búsqueda intensiva para obtener otros eigenvalores para estos potenciales, pero no se encontró ningún otro.

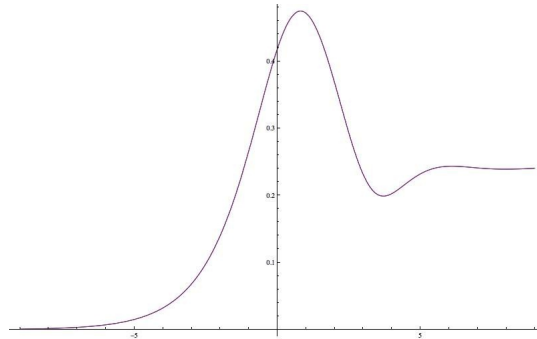


Figura 24. Gráficas de las funciones  $|Lf|$  y  $|\lambda f|$  para el caso  $n = 3$ , con  $q_0 = q_1 = -\text{sech}(x^2)$ .

Finalmente, se corrió el algoritmo de nuevo para el caso de orden 4, con los potenciales  $q_0(x) = q_1(x) = q_2(x) = -e^{-x^2}$ , de modo que el operador ya no era autoadjunto. Esta vez, el algoritmo encontró el eigenvalor  $\lambda = -0,662244 - 1,5469 \times 10^{-8}$ ; una vez más presentamos la gráfica de  $|Lf|$  y  $|\lambda f|$  en la figura 25, sin que haya una diferencia visible entre ambas.

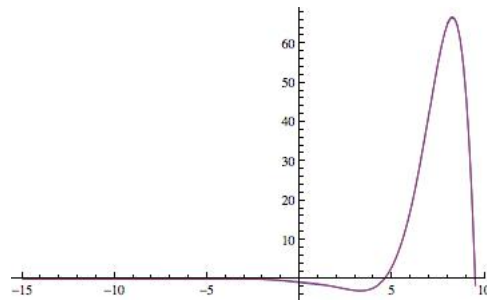


Figura 25. Gráficas de las funciones  $|Lf|$  y  $|\lambda f|$  para el caso  $n = 3$ , con  $q_0 = q_1 = q_2 = -e^{-x^2}$ .



# Bibliografía

- [1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg-de Vries equation”, *Physical Review Letters* **19** (1967), pp. 1095-1097.
- [2] P. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, *Comm. Pure Applied Math.* **21** (1968), pp. 467-490.
- [3] I. M. Gelfand, L. A. Dikii, “The resolvent and Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.* **2** (1977), pp. 93-105.
- [4] R. Beals, P. Deift, C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the Line*, Amer. Math. Soc., Providence (1988).
- [5] R. Beals, “The inverse problem for ordinary differential operators on the line”, *Amer. J. Math.* **107** (1985), pp. 281-366.
- [6] P. Deift, C. Tomei, E. Trubowitz, “Inverse scattering and the Boussinesq equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35** (1982), pp. 567-628.
- [7] C. R. Maple, M. Marletta, *Algorithms and software for selfadjoint ODE eigenproblems: Proceedings of the 8th International Colloquium on Differential Equations*, D. Bainov, VSP, Utrecht (1998)
- [8] Greenberg, L., Marletta, M. “Numerical methods for higher order Sturm-Liouville problems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **125** (2000), pp. 367-383.
- [9] T. Aktosun, “A factorization of the scattering matrix for the Schrödinger equation and for the wave equation in one dimension”, *J. Math. Phys.* **33** (1992), pp. 3865-3869.
- [10] D. J. Kaup, “On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class  $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = k^3\psi$ ”, *Stud.Appl.Math.* **62** (1980), pp. 189-216.
- [11] S. Novikov, S. V. Manakov et. al., *Theory of Solitons; The Inverse Scattering Method*, Contemporary Soviet Mathematics, Moscow (1984).
- [12] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM (1985)

- [13] P. Deift, E. Trubowitz, "Inverse scattering on the line", *Comm. Pure Applied Math.* **32** (1979), pp. 121-251.
- [14] L. D. Faddeev, "Growing solutions of the Schrödinger equation", *Amer. Math. Soc. Transl.* **2** (1964), p. 139.
- [15] T. Aktosun, M. Klaus, C. van der Mee, "Wave scattering in one dimension with absorption", *J. Math. Phys.* **36**, 1957 (1998).
- [16] Yarza, S., Ongay, F., "On the Geometry of the Jost Solutions for  $n$ -th Order Sturm-Liouville Problems on the Line" *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **84** (2014), pp. 149-167.
- [17] S. Hassani, *Mathematical methods: for students of physics and related fields*, Springer (2000).
- [18] Storn, R., Price, K., "Differential evolution-a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces". *Journal of Global Optimization* **11** 341-359 (1997).