

Optimización de portafolio bajo el criterio de rendimiento monótono en el espacio y tiempo

Tatiana Torres Palacios

Septiembre 3, 2018

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

**Optimización de portafolio bajo el criterio de
rendimiento monótono en el espacio y tiempo**



Tatiana Torres Palacios

Director
Daniel Hernández Hernández
PhD.

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar
al título de Maestra en Ciencias con especialidad en Matemáticas aplicadas
Guanajuato, Septiembre 3, 2018

A mi esposo

Agradecimientos

Agradezco de manera especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la financiación total de mis estudios, al Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT) por la oportunidad de realizar con ellos la Maestría en Ciencias, a mi asesor Daniel Hernández por su acompañamiento en la realización de la tesis y a todos los profesores que aportaron a mi desarrollo académico. Finalmente, toda la gratitud para mi familia y amigos por su apoyo incondicional siempre.

Resumen

La optimización de portafolios de un inversionista racional es uno de los problemas de mayor interés en el área de las finanzas. En este campo interesa diseñar estrategias de inversión para maximizar la rentabilidad de un inversionista, mitigando el riesgo.

El problema general que se está abordando es como realizar la optimización del portafolio considerando las preferencias del inversionista. Esto último es un factor muy importante que se debe considerar para desarrollar la estrategia de inversión, ya que dependiendo de estas, como por ejemplo ser conservador o arriesgado, o preferencias hacia acciones de cierto tipo de empresas, se podría diseñar una estrategia que sea más apropiada.

Con esto en mente, se presenta inicialmente un estudio del problema clásico planteado por Merton donde se maximiza una función de utilidad específica por medio de programación dinámica. Dado que el desarrollo de Merton no es suficiente desde el punto de vista financiero, se introduce otra perspectiva. Esta consiste en construir la función de utilidad, con base en el criterio de rendimiento directo, el cual tiene en cuenta la información del mercado y del inversionista. Posteriormente, se construye la estrategia de inversión que pueda optimizar el portafolio.

Abstract

Portfolio optimization of a rational investor is one of the most interesting problems in the area of finance. In this field, the interest is on the development of investment strategies to maximize the return of an investor, mitigating the risk.

The general problem that is being considered is how to optimize the portfolio considering the preferences of the investor. The latter is a very important factor that must be considered in order to develop the investment strategy, since depending on these, such as being conservative or risky or preferences towards shares of certain types of companies we can develop the appropriate investment strategy.

With this in mind, we initially present a study of the classical problem proposed by Merton where a specific utility function is maximized by means of dynamic programming. Since Merton's development is not enough from the financial point of view, another perspective is introduced. This consists of building the utility function, based on the direct performance criterion, which takes into account market and investor information. Subsequently, the investment strategy that can optimize the portfolio is constructed.

Índice

1 Problema clásico de selección de portafolio planteado por R. Merton	5
1.1 Componentes del modelo	5
1.2 Construcción de controles óptimos y del portafolio	8
1.3 Número de acciones en el activo con riesgo y su relación con la proporción de consumo $\pi(t)$	13
1.4 Observaciones a la perspectiva clásica	18
2 Selección de portafolio bajo el supuesto de rendimiento monótono en el espacio tiempo	21
2.1 Modelo del mercado	21
2.2 Función de utilidad	23
2.3 Construcción del portafolio y estrategias óptimas de inversión para maxi- mizar la utilidad	26
Bibliografía	40

Introducción

El problema de optimización de portafolio fue inicialmente estudiado por Robert Merton entre 1969 y 1973 [1–3], y se conoce comunmente como *problema de Merton*. En éste, se busca cómo asignar el capital de inversión entre acciones riesgosas y una cuenta de mercado de dinero sin riesgo, modelando las acciones como movimientos Brownianos geométricos —es decir, tienen volatilidades constantes— y definiendo un tipo específico de función de utilidad para describir la aversión al riesgo del inversionista. De esta manera Merton logró producir soluciones explícitas sobre el portafolio de inversión y la estrategia para cada tipo de activo.

El problema de Merton ha motivado gran variedad de estudios donde se proponen diversas generalizaciones al desarrollo original. La lista de trabajos es bastante extensa como para describirla en detalle aquí, por lo cual mencionamos solo algunos. Entre las formulaciones del problema de control óptimo que se han propuesto y analizado en el pasado, se pueden resaltar [4–6] para el caso de modelos deterministas, mientras que entre los primeros trabajos empleando modelos estocásticos tenemos [7–10] y las referencias incluidas en los mismos. En estas obras, es importante destacar que los autores han considerado un horizonte de inversión fijo, lo cual trajo como consecuencia el dejar de lado el impacto de un horizonte variable en la selección del portafolio óptimo y el comportamiento del inversionista.

Para analizar el impacto del horizonte —problema que se remonta a Fisher [11]— sobre la cartera óptima de inversión en el mercado bursátil y el momento óptimo para liquidar todos sus activos, Henderson [12] propuso encontrar una utilidad que no sea sensible al horizonte. Esta es una de las ideas que contribuyeron al nacimiento de las utilidades hacia adelante (Forward Performances), las cuales aparecieron en la literatura en diversas formas principalmente en los trabajos de Musiela y Zariphopoulou [13–16] y de Choulli y colaboradores [17]. Las utilidades hacia adelante constituyen una subclase de la gran clase de utilidades de campo aleatorias que Karatzas y Žitković trajeron a la matemática financiera [10] y que representan la preferencia de un inversionista, que se actualiza en cada instante utilizando la información pública sobre el mercado.

Posteriormente, Musiela y Zariphopoulou introdujeron la elección óptima de portafolio basada en el llamado criterio de rendimiento directo [18]. Este enfoque ha sido desarrollado en mayor detalle por los mismos autores en la serie de artículos [15, 16, 19, 20] y discutido en otros más recientes [21–23]. La idea principal del enfoque directo es que el inversionista no elige sus preferencias de riesgo en un solo punto en el tiempo —como es el caso del modelo de Merton— sino que tiene la flexibilidad de revisarlas dinámicamente. Este criterio es una composición de insumos deterministas y estocásticos, donde el aporte determinista corresponde a las preferencias del inversionista y es específico de cada uno, mientras que la parte estocástica es universal para todos los inversionistas e incluye la relación entre todos los valores de los activos disponibles para negociar.

En este trabajo nos enfocaremos en realizar un contraste entre el enfoque proporcionado por Merton (discutiendo sus limitaciones) y la elección óptima del portafolio basado en el criterio de rendimiento directo propuesto.

Esquema general

Capítulo 1

En este capítulo se introduce el problema clásico de selección de portafolio dado por Merton [1]. Primero, damos las componentes del modelo y la función de utilidad a optimizar. Posteriormente, por medio de programación dinámica y el uso de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Belman (HJB) encontramos la proporción de inversión de cada activo y la tasa de consumo óptimos. Con ellos, resolvemos la ecuación diferencial estocástica asociada al portafolio para el caso particular de la función de aversión al riesgo hiperbólico (HARA), mostrando gráficamente el comportamiento del portafolio y el número de acciones para parámetros dados. Al final del capítulo se realizan observaciones importantes sobre las limitaciones del modelo.

Capítulo 2

Se presenta una de las formas en que se puede modificar el modelo de Merton para que sea más general y afin con el comportamiento del mercado. Para ello consideramos un modelo que incluya una cantidad mayor de acciones y un coeficiente que mida la influencia del comportamiento de precios entre éstas. Además, el diseño de una función de utilidad que refleje las preferencias del inversionista. La construcción de la función de utilidad se hace con base en el criterio de rendimiento monótono [16]. Al igual que el capítulo anterior, mostramos gráficamente el comportamiento del portafolio y del número de acciones para dos casos particulares.

Por último, concluimos la tesis con un resumen y discusión del trabajo.

Problema clásico de selección de portafolio planteado por R. Merton

En este capítulo se introduce el problema clásico de selección de portafolio dado por Merton [1]. Éste es un problema modelo que permite estudiar las estrategias óptimas de inversión y consumo de un inversionista racional, cuyo supuesto más fuerte es que el inversionista toma decisiones para maximizar una función de utilidad *dada*¹. Se presentará un método de solución de programación dinámica para abordarlo y un ejemplo ilustrativo para ver su funcionamiento. Finalmente, se realizarán observaciones sobre las limitaciones de este modelo y se darán propuestas para mejorarlo. Éstas se discutirán en detalle en el siguiente capítulo.

1.1 Componentes del modelo

La selección del portafolio que permite optimizar las ganancias de un inversionista es uno de los problemas de mayor interés en el campo de las finanzas.

A continuación, se dan los conceptos clave y las respectivas ecuaciones que intervienen en el modelo [24].

Portafolio

El portafolio es el conjunto de activos financieros que posee una persona o empresa. En este caso se considera a un inversionista que tiene dos tipos de activos, activos libres de riesgo y activos que implican riesgo.

1. *Activos libres de riesgo*: éstos están asociados al mercado de dinero y generalmente reciben el nombre de bonos. Cabe mencionar que al invertir en este tipo de activos se garantiza una rentabilidad fija transcurrido cierto periodo de tiempo. De esta manera, se dice que su comportamiento es determinista.

En el modelo se considerará que solo hay una opción para este tipo de activo. Su precio por acción $p(t)$ que depende del tiempo t , varía de acuerdo con la ecuación diferencial ordinaria

$$dp = prdt, \quad (1.1)$$

¹Ésto se refiere a que se propone desde el principio una función que modele la utilidad y se trabaja sobre ella.

donde r representa la tasa con que se precia este activo.

2. *Activos riesgosos*: reciben también el nombre de acciones. Éstas tienen mayor volatilidad, dado que el precio puede fluctuar dependiendo de las condiciones del mercado. De este modo la ecuación que modela su apreciación tendrá un componente estocástico.

En este caso también se considerará que solo hay un activo de este tipo, cuyo precio $S(t)$ varía de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica

$$dS = S(\mu dt + \sigma dw(t)), \quad (1.2)$$

donde μ es la tasa de variación determinista, $\sigma > 0$ es el factor de difusión y $w(t)$ es un movimiento Browniano. Para que el activo riesgoso tenga una tendencia apreciarse por encima del activo libre de riesgo se debe satisfacer que $r < \mu$.

A continuación denotaremos las funciones importantes para nuestro modelo, para un tiempo t dado:

- $x(t)$ – el portafolio del inversionista en el tiempo t ,
- $\pi(t)$ – la fracción de portafolio invertida en el activo con riesgo,
- $c(t)$ – la tasa de consumo del inversionista.

De esta manera, la variación del portafolio respecto al tiempo estará dada por la ecuación diferencial estocástica

$$dx = (1 - \pi(t))x(t)r dt + \pi(t)x(t)(\mu dt + \sigma dw(t)) - c(t)dt. \quad (1.3)$$

El proceso se detendrá cuando $x(t)$ sea cero, es decir cuando el inversionista llegue a la bancarrota.

Proporción de inversión y consumo:

Para poder controlar el proceso de portafolio descrito por la Ecuación (1.3), sólo se pueden manipular dos variables. La primera es la fracción que se invierte en cada tipo de activo. Como en este caso solo hay dos opciones $\pi(t)$ en el activo riesgoso y $1 - \pi(t)$ en el libre de riesgo, bastará con que se controle $\pi(t)$. La segunda variable a manipular es la tasa de consumo, con la cual se utiliza lo disponible en el portafolio que sería en este caso $c(t)$.

Nótese lo siguiente:

- El proceso se detiene cuando el portafolio llega a cero, por lo tanto $x(t) \in \mathcal{O} = [0, \infty)$.
- Al ser $c(t)$ una tasa de consumo, ésta debe tomar valores no negativos, por lo cual $c(t) \in [0, \infty)$.
- $\pi(t)$ puede tomar valores en \mathbb{R} . Es claro que cuando $0 \leq \pi(t) \leq 1$ significa que de nuestro portafolio vamos a invertir un porcentaje al mercado accionario. Pero por ejemplo si $\pi > 1$, significa que vamos a pedir un préstamo al mercado de dinero para poder invertir en las acciones y si $\pi < 0$ significa que vamos a “vender en corto las acciones”, es decir tomamos en préstamo cierta cantidad de un activo financiero de un tercero y la vendemos en el mercado, para luego recomprar ese mismo activo en igual cantidad y devolverlo a su dueño original en una fecha futura.

Vender en corto es una manera de apostar a que el precio de un activo va a bajar. Es decir, es una operación que nos permite obtener una ganancia si el precio de ese activo pierde valor durante un periodo determinado de tiempo.

Lo anterior nos dice que se tiene un proceso a controlar que es el portafolio del inversionista y un control que es de caracter bidimensional $u(s) = (\pi(t), c(t))$ en el espacio $U = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$.

Utilidad de consumo:

La función de utilidad del inversionista se asumirá conocida. Se tomará como el costo de funcionamiento del proceso

$$L(x, v) = l(v), \quad (1.4)$$

en donde $l(c)$ denotará la utilidad de consumir a una tasa c , y debe satisfacer: i) $l(0) = 0$, ii) $l'(0^+) = +\infty$, iii) $l'(c) > 0$ y iv) $l''(c) < 0$ para todo $c > 0$.

Ahora bien, lo que se quiere es maximizar la función J dada por la utilidad esperada del inversionista descontada a una tasa $\beta > 0$

$$J(x, \pi, c) = E_x \int_0^\tau e^{-\beta s} l(c(s)) ds, \quad (1.5)$$

donde $\tau = +\infty$ o τ es el tiempo en que se llega a la bancarrota.

El problema

El problema de Merton consiste en diseñar una estrategia de inversión y de consumo óptimos denotados por $\pi^*(t)$ y $c^*(t)$, respectivamente. Dando como resultado el portafolio óptimo denotado por $x^*(t)$, que permita maximizar la utilidad esperada del inversionista $J(x, \pi, c)$.

1.2 Construcción de controles óptimos y del portafolio

Para dar solución al problema enunciado al final de la sección anterior, se hará uso del operador diferencial [24, 25]

$$-G^v W(x) = \frac{\sigma^2 v_1^2 x^2}{2} W_{xx} + (\mu - r)v_1 x W_x + rx W_x - v_2 W_x, \quad (1.6)$$

para $v = (v_1, v_2) \in U = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$.

La ecuación de programación dinámica asociada puede escribirse de la forma

$$\beta W = \max_{v_1} \left[\frac{\sigma^2 v_1^2 x^2}{2} W_{xx} + (\mu - r)v_1 x W_x \right] + rx W_x + \max_{v_2 \geq 0} [l(v_2) - v_2 W_x]. \quad (1.7)$$

Ésta tiene la forma

$$\beta W + \mathcal{H}(x, DW, D^2W) = 0, \quad (1.8)$$

donde W debe ser creciente en el intervalo $[0, \infty)$ y además ser cóncava, dado que la ecuación tiene una estructura lineal-cóncava. Por lo anterior se busca una solución para la Ecuación (1.7), para $x > 0$ con $W_x > 0$, $W_{xx} < 0$ y $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} W(x)$.

Como se quiere maximizar la expresión que aparece al lado derecho de (1.7), para

$$\max_{v_1} \left[\frac{\sigma^2 v_1^2 x^2}{2} W_{xx} + (\mu - r)v_1 x W_x \right], \quad (1.9)$$

derivando respecto a v_1 , se obtiene la condición de primer orden

$$\sigma^2 v_1 x^2 W_{xx} + (\mu - r)x W_x = 0. \quad (1.10)$$

Por lo cual si despejamos v_1 , se tiene que

$$\begin{aligned} v_1^*(s) &= -\frac{(\mu - r)sW_x}{\sigma^2 s^2 W_{xx}} \\ &= -\frac{(\mu - r)W_x}{\sigma^2 s W_{xx}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Similarmente para $\max_{v_2 \geq 0} l(v_2) - v_2 W_x$, derivando con respecto a v_2 , se obtiene la condición de primer orden

$$l'(v_2) - W_x = 0, \quad (1.12)$$

de donde

$$l'(v_2) = W_x, \quad (1.13)$$

$$v_2^*(s) = \left[(l')^{-1} \right] (W_x). \quad (1.14)$$

Así se tienen los siguientes candidatos para la inversión y el consumo óptimos:

$$\pi^*(s) = -\frac{(\mu - r)W_x(s)}{\sigma^2 s W_{xx}(s)}, \quad c^*(s) = (l')^{-1}(W_x(s)). \quad (1.15)$$

Sustituyendo este resultado en la Ecuación (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \beta W &= \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{(\mu - r)^2 W_x^2}{\sigma^4 s^2 W_{xx}^2} \right] s^2 W_{xx} + (\mu - r) \left[-\frac{(\mu - r)W_x}{\sigma^2 s W_{xx}} \right] s W_x \\ &\quad + r s W_x + l \left[(l')^{-1}(W_x) \right] - (l')^{-1}(W_x) W_x. \end{aligned}$$

De donde

$$\beta W = \frac{(\mu - r)^2 W_x^2}{2\sigma^2 W_{xx}} - \frac{(\mu - r)^2 W_x}{\sigma^2 W_{xx}} W_x + r s W_x + l \left[(l')^{-1}(W_x) \right] - (l')^{-1}(W_x) W_x. \quad (1.16)$$

Así,

$$\beta W = -\frac{(\mu - r)^2 W_x^2}{2\sigma^2 W_{xx}} + r s W_x + l \left[(l')^{-1}(W_x) \right] - (l')^{-1}(W_x) W_x. \quad (1.17)$$

Para continuar, se propondrá una función $l(c)$ para poder resolver esta ecuación explícitamente.

Ejemplo

Asumamos que la función de utilidad al consumo tiene la forma

$$l(c) = \frac{1}{\gamma} c^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (1.18)$$

La cual es conocida como la aversión hiperbólica al riesgo absoluto **HARA** (por sus siglas en inglés) que se caracteriza por ser la única que posee un índice de aversión al riesgo constante dado por:

$$-x \frac{l''(x)}{l'(x)} = 1 - \gamma. \quad (1.19)$$

Ella, satisface que

$$l'(c) = c^{\gamma-1}, \quad [l']^{-1}(c) = c^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (1.20)$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la Ecuación (1.17), queda como sigue

$$\begin{aligned} \beta W &= -\frac{(\mu - r)^2 W_x^2}{2\sigma^2 W_{xx}} + rsW_x + l\left(W_x^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) - W_x^{\frac{1}{\gamma-1}} W_x \\ &= -\frac{(\mu - r)^2 W_x^2}{2\sigma^2 W_{xx}} + rsW_x + \frac{1}{\gamma} W_x^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - W_x^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= -\frac{(\mu - r)^2 W_x^2}{2\sigma^2 W_{xx}} + \left(\frac{1 - \gamma}{\gamma}\right) W_x^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + rsW_x. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Como solución a la Ecuación (1.21) se propone la función W :

$$W(x) = Kx^\gamma, \quad (1.22)$$

debido a que satisface las condiciones mencionadas $W_x > 0$, $W_{xx} < 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} W(x) = 0$.

Esta función en particular, cumple que

$$\begin{aligned} W_x(s) &= K\gamma s^{\gamma-1}, \\ W_{xx}(s) &= K\gamma(\gamma - 1)s^{\gamma-2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por lo cual, al sustituir en las expresiones (1.15), los candidatos óptimos quedan dados por:

$$\begin{aligned} \pi^*(s) &= -\frac{(\mu - r)K\gamma s^{\gamma-1}}{\sigma^2 s K\gamma(\gamma - 1)s^{\gamma-2}} \\ &= \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma^2}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

y

$$\begin{aligned} c^*(s) &= (\gamma K s^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= (\gamma K)^{\frac{1}{\gamma-1}} s. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Esto muestra para este caso en particular, que la fracción de inversión óptima π^* se mantendrá constante y que la tasa de consumo óptima c^* es de carácter lineal.

Al sustituir este resultado y $W = Kx^\gamma$, $W_x = K\gamma x^{\gamma-1}$, $W_{xx} = K\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}$ en (1.21), se obtiene una fórmula que relaciona β y K

$$\begin{aligned} \beta K x^\gamma &= -\frac{(\mu-r)^2 K^2 \gamma^2 x^{2\gamma-2}}{2\sigma^2 K \gamma (\gamma-1) x^{\gamma-2}} + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) (K\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} x^\gamma + r x K \gamma x^{\gamma-1} \\ \beta &= \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r\gamma + \left(\frac{1-\gamma}{K\gamma}\right) (K\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \beta &= \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r\gamma + (1-\gamma)(K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Se tiene una ecuación no lineal para K con solución positiva dada por

$$\begin{aligned} (1-\gamma)(K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}} &= \beta - \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} - r\gamma \\ (K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}} &= \frac{1}{(1-\gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} - r\gamma \right] \\ (K\gamma) &= \left\{ \frac{1}{(1-\gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} - r\gamma \right] \right\}^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Así

$$K = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{(1-\gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} - r\gamma \right] \right\}^{\gamma-1}. \quad (1.28)$$

Y β satisface:

$$\beta > \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r\gamma. \quad (1.29)$$

Teniendo en cuenta las constantes anteriores, finalmente la inversión y el consumo óptimos quedan dados por:

$$\pi^*(x) = \frac{\mu-r}{(1-\gamma)\sigma^2}, \quad (1.30)$$

$$c^*(t) = \frac{1}{(1-\gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu-r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} - r\gamma \right] x(t). \quad (1.31)$$

Para encontrar el portafolio óptimo, se sustituyen las expresiones del consumo e inversión óptimos en la ecuación diferencial estocástica del portafolio (Ecuación (1.3)) y se tiene

$$\begin{aligned}
dx &= \left[1 - \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma^2} \right] rx(t)dt + \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2} x(t)(\mu dt + \sigma dw(t)) \\
&\quad - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu - r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right] x(t)dt \\
&= \left\{ r + \frac{(\mu - r)^2}{(1 - \gamma)\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu - r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right] \right\} x(t)dt \\
&\quad + \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma} x(t)dw(t) \\
&= \left\{ r + \frac{(\mu - r)^2}{(1 - \gamma)\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu - r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right] \right\} x(t)dt \\
&\quad + \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma} x(t)dw(t). \tag{1.32}
\end{aligned}$$

Suponiendo que se tiene la condición inicial $x(0) = x_0$ y denotando por

$$\delta = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma}, \tag{1.33}$$

$$\alpha = r + \frac{(\mu - r)^2}{(1 - \gamma)\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left[\beta - \frac{(\mu - r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right], \tag{1.34}$$

lo que se quiere es resolver la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned}
dx &= \alpha x(t)dt + \delta x(t)dw(t), \\
x(0) &= x_0. \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Para ello necesitaremos utilizar la fórmula de Itô para el proceso $x(t)$.

Teorema 1.2.1. *Sea X_t , para $t \geq 0$, un proceso de Itô y $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ una función $C^{2,1}$, es decir, dos veces diferenciable en x y una en t y de derivadas continuas. Se tiene que*

$$df(t, x(t)) = f_t(t, x(t))dt + f_x(t, x(t))dx(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x(t))dx(t)dx(t). \tag{1.36}$$

En nuestro caso particular, tomaremos $f(x) = \ln x$, que satisface $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Así se tiene que

$$d(\ln x(t)) = \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2(t)} \right) x^2(t) \delta^2 dt. \tag{1.37}$$

Debido que

$$dx(t)dx(t) = (\delta x(t))^2 dw(t)dw(t) = \delta^2 x^2(t)dt. \tag{1.38}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(\ln x(t)) &= \frac{1}{x(t)} [x(t)(\alpha dt + \delta dw(t))] - \frac{\delta^2}{2} dt \\ &= \left(\alpha - \frac{\delta^2}{2} \right) dt + \delta dw(t). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Como $y(t) = \ln x(t)$ satisface

$$dy(t) = \left(\alpha - \frac{\delta^2}{2} \right) dt + \delta dw(t). \quad (1.40)$$

Entonces

$$y(t) = y_0 + \left(\alpha - \frac{\delta^2}{2} \right) t + \delta w(t). \quad (1.41)$$

Por lo cual,

$$x(t) = x(0)e^{\left(\alpha - \frac{\delta^2}{2} \right) t + \delta w(t)}. \quad (1.42)$$

Cambiando α y δ , se obtiene finalmente que el portafolio queda dado por la función

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \exp \left\{ \left[r + \frac{(\mu - r)^2(1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left(\beta - \frac{(\mu - r)^2\gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right) \right] t \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma} w(t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Lo anterior nos muestra un portafolio óptimo exponencial creciente perturbado por el Browniano, que es ideal dado que se espera en este caso en que no se llegue a la bancarrota ($x(t) = 0$).

1.3 Número de acciones en el activo con riesgo y su relación con la proporción de consumo $\pi(t)$

A simple vista pareciera que el comportamiento de la inversión es constante, pero es necesario resaltar que $\pi(t)$ representa la proporción de inversión. Esto quiere decir que si $\theta(t)$ denota el número de acciones en el activo con riesgo, entonces

$$\pi(t) = \frac{\theta(t)s(t)}{x(t)}. \quad (1.44)$$

Por lo tanto el número de acciones que optimiza el portafolio estará dado por

$$\theta^*(t) = \frac{\pi^*(t)x(t)}{s(t)}. \quad (1.45)$$

Teniendo en cuenta que $s(t)$ está modelado por la ecuación

$$ds = s(\mu dt + \sigma dw(t)), \quad (1.46)$$

su solución aplicando la formula de Itô, queda dada por

$$s(t) = s(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma w(t) \right\}. \quad (1.47)$$

Continuación del ejemplo

Con este resultado y la expresión dada para el portafolio, se puede obtener una forma explícita para el número de acciones, dada por

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2} x(0) \exp \left\{ \left[r + \frac{(\mu - r)^2(1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left(\beta - \frac{(\mu - r)^2\gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right) \right] t \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma} w(t) \right\} \left[s(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma w(t) \right\} \right]^{-1} \\ &= \frac{x(0)(\mu - r)}{s(0)(1 - \gamma)\sigma^2} \exp \left\{ \left[r - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{(\mu - r)^2(1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2\sigma^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left(\beta - \frac{(\mu - r)^2\gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right) \right] t + \left(\frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma} - \sigma \right) w(t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Por lo cual el número de acciones quedará dado por una expresión de la forma

$$\theta(t) = Ae^{Bt+Cw(t)}, \quad (1.49)$$

donde

$$A = \frac{x(0)(\mu - r)}{s(0)(1 - \gamma)\sigma^2}, \quad (1.50)$$

$$B = r - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{(\mu - r)^2(1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left(\beta - \frac{(\mu - r)^2\gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right), \quad (1.51)$$

$$C = \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma} - \sigma. \quad (1.52)$$

Lo anterior nos muestra que el número de acciones de inversión tiene un comportamiento volátil al igual que el portafolio para cada tiempo t y no es constante como pareciera, al tener que la proporción de inversión óptima para este caso sí lo es.

Representación gráfica del portafolio y del número de acciones

La Figura 1.1 muestra el comportamiento del portafolio y del número de acciones en función del tiempo tomando como portafolio inicial $x_0 = 10$, precio inicial del activo de riesgo $s_0 = 1$ y valores particulares para cada una de las constantes del modelo que satisfagan todas las condiciones dadas anteriormente. El principal análisis se hará sobre el coeficiente del término t en expresión del portafolio

$$D = \left[r + \frac{(\mu - r)^2(1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2\sigma^2} - \frac{1}{(1 - \gamma)} \left(\beta - \frac{(\mu - r)^2\gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} - r\gamma \right) \right]. \quad (1.53)$$

En la Figura 1.1 vemos la influencia del parámetro “ r ” en tres casos principales. La curva de la izquierda de la parte (a) muestra la función de portafolio $x(t)$ para una tasa de interés en el mercado de dinero $r = 0.9$ (que es bastante optimista y poco realista), factores $\mu = 1$ y $\sigma = 2$, y las constantes de la función de consumo $\gamma = 0.6$ y $\beta = 0.7$. En la gráfica se ve que el crecimiento del portafolio en el tiempo es relativamente rápido, lo cual se atribuye a que la tasa de rendimiento r es grande, por lo cual el rendimiento determinista garantiza un portafolio alto. Dado que el coeficiente $\frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma)\sigma}$ que acompaña al Browniano es pequeño, la volatilidad de la función es baja.

Como se puede apreciar en la Figura 1.1(b), si disminuimos a $r = 0.1$ el valor de B es casi cero, por lo cual vemos un comportamiento del portafolio volátil casi constante alrededor del valor del portafolio inicial.

Finalmente, en el caso (c) al mantener el resto de parámetros iguales y disminuir la tasa del activo libre de riesgo a $r = 0.01$, el portafolio cae y tiene una tendencia a cero. Este sería el caso más realista en términos de los valores de “ r ”.

Teniendo en cuenta que γ representa la aversión al riesgo del inversionista, en la Figura 1.2, analizamos la influencia de γ para los parámetros usados en el caso (c) de la Figura 1.1. En Figura 1.2 (a), si tomamos un $\gamma = 0.9$ (que implica una alta aversión relativa al riesgo) vemos que en este caso no es conveniente ser tan conservador dado que el portafolio cae rápidamente a una tendencia a cero. Por el contrario cuando el inversionista es más arriesgado tomando $\gamma = 0.1$, como se ve en la Figura 1.2 (b), el portafolio cae de forma más lenta hacia el cero.

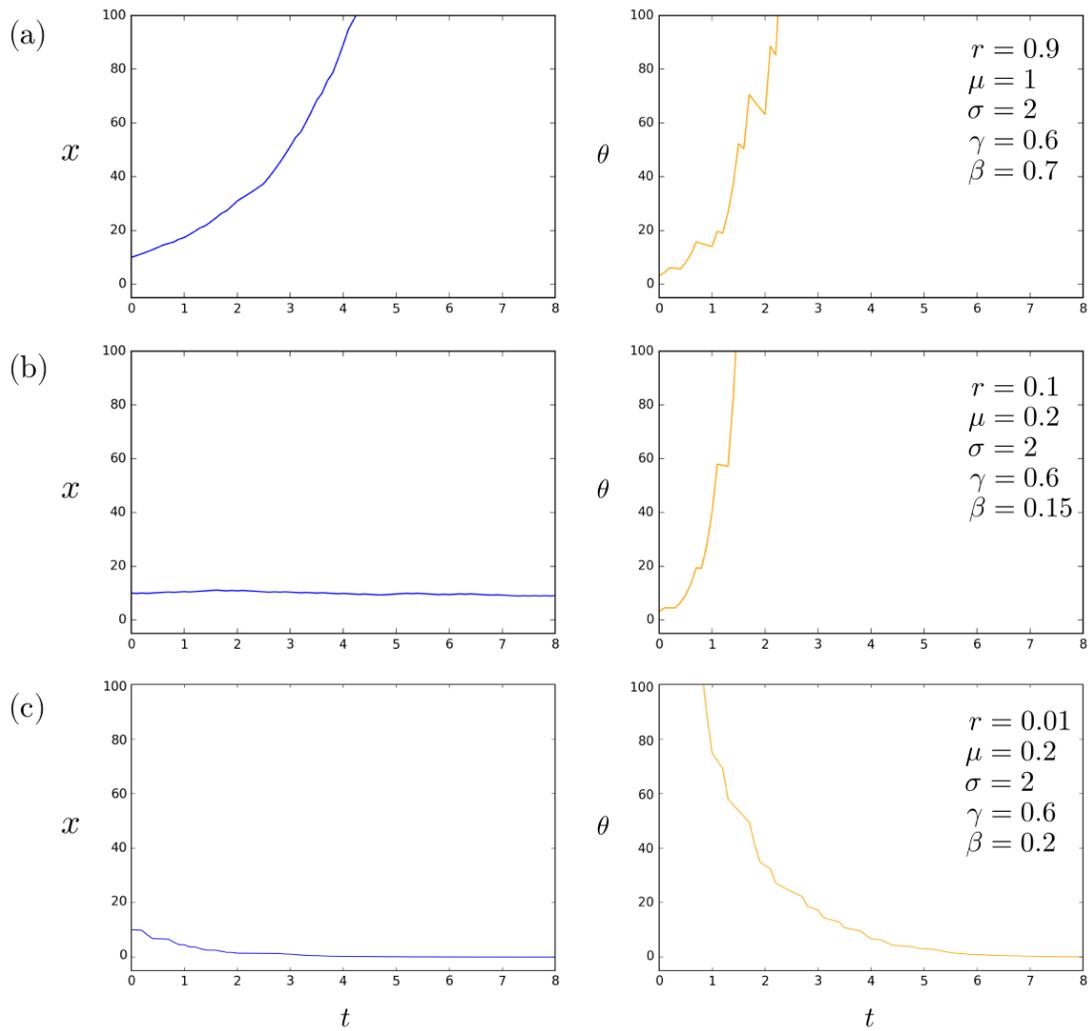


Figura 1.1: Gráfica del portafolio $x(t)$ y $\theta(t)$ en función del tiempo para los parámetros dados.

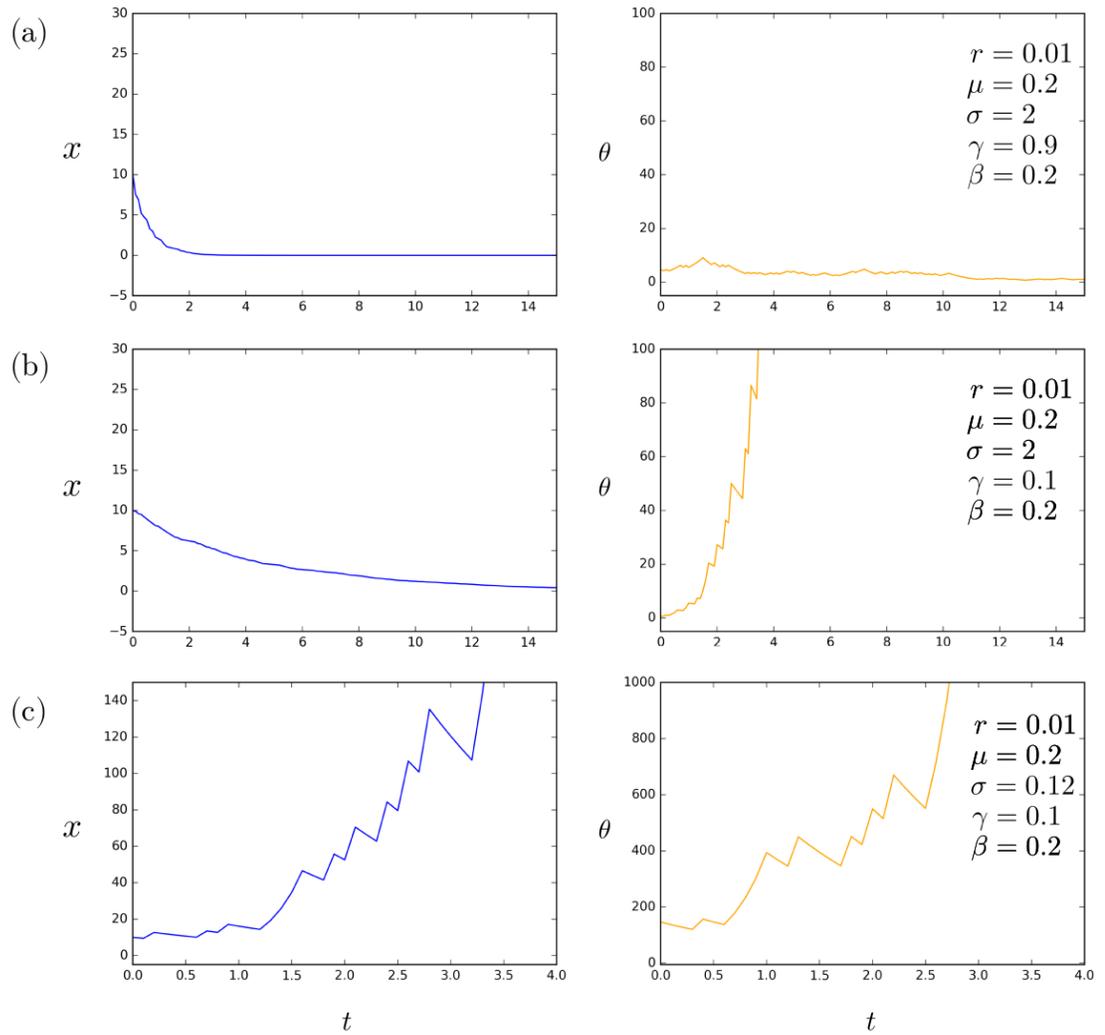


Figura 1.2: Gráfica del portafolio $x(t)$ y $\theta(t)$ en función del tiempo para los parámetros dados.

Cabe destacar también el comportamiento del número de acciones. Cuando el inversionista es averso al riesgo vemos que $\theta(t)$ en el caso (a) se mantiene bajo y alrededor de una constante, pero cuando el inversionista es arriesgado vemos que el número de acciones tiende a crecer como se aprecia en el caso (b).

Finalmente, analicemos la influencia del coeficiente de difusión. En la Figura 1.2 (b), vemos que σ tiene un valor de 2 y el comportamiento del portafolio en ese caso es decreciente con tendencia a cero. Pero al disminuir este valor a $\sigma = 0.12 < 1$, cambia totalmente el comportamiento en $x(t)$ (como se puede apreciar en la Figura 1.2 (c) a uno creciente con tendencia a infinito. De manera similar cambia este comportamiento en $\theta(t)$. Esto sucede principalmente porque σ aparece como denominador en las expresiones de D , haciendo que la parte positiva se compense con la parte negativa (consumo) y finalmente su signo total sea positivo.

Es importante resaltar, que todas las anteriores son simulaciones que dependen fuertemente del Browniano. Esto significa que contienen un componente aleatorio responsable de variaciones cada vez que se ejecuta la simulación. Sin embargo el comportamiento general que define los posibles escenarios se reproduce en cada simulación.

1.4 Observaciones a la perspectiva clásica

El desarrollo de este capítulo permite entender la dinámica básica del mercado, pero el modelo Merton es idealista por varias razones que se detallan a continuación y es necesario realizar modificaciones para que sea más cercano a la realidad.

La primera observación es que los coeficientes en las ecuaciones diferenciales que modelan los activos libres de riesgo y riesgosos son constantes lo cual limitan el modelo y le quitan la posibilidad de variaciones que pueden tener éstos por factores del mercado. Para un modelo más general, es necesario asumir que los factores r , μ y σ de las Ecuaciones (1) y (2) tienen una dependencia respecto al tiempo.

La segunda, es que sólo se está considerando un activo de cada tipo, y en el mercado real siempre se puede tener múltiples opciones de cada uno y el comportamiento es interactivo, por lo cual el comportamiento del precio de unas afectarán a las otras. Es necesario considerar múltiples opciones de acciones y también un factor que mida la interacción entre ellas.

Por último, en el problema de Merton la función objetivo a maximizar ya viene dada por otra función $L(x, c) = l(c)$ que depende de la tasa de consumo. Esto implica que cualquier función l que satisfaga las condiciones mencionadas en la Ecuación (1.4) podrá dar lugar a una expresión para la utilidad esperada sin tener en cuenta factores

del mercado o características intrínsecas del inversionista. Por lo tanto se debería construir una función de utilidad que incluya más información del mercado (como la interacción entre los precios de los activos) y del inversionista (como sus preferencias hacia ciertos activos), para luego diseñar la estrategia de inversión más apropiada según el individuo.

Selección de portafolio bajo el supuesto de rendimiento monótono en el espacio tiempo

Siguiendo con las observaciones realizadas al final de capítulo anterior, se presentará una de las formas en que se puede modificar el modelo de Merton para que sea más general y afin con el comportamiento del mercado. Para ello consideraremos un modelo que incluya una cantidad mayor de acciones y un coeficiente que mida la influencia del comportamiento de precios entre éstas. Además, el diseño de una función de utilidad que refleje las preferencias del inversionista, donde pueda modificarlas de manera flexible en el proceso y no en un solo instante de tiempo (el inicial) como en el problema clásico.

La construcción de la función de utilidad se hará con base en el criterio de rendimiento monótono [16]. Éste es una composición de insumos deterministas y estocásticos, y la función de utilidad tendrá la forma $U_t(x) = u(x, A_t)$, $t \geq 0$. El aporte determinista corresponde a su tolerancia al riesgo, es específico del inversionista, representado por una función $u(x, t)$ que es creciente y cóncava en x , y decreciente en t . La entrada estocástica, sin embargo, es universal para todos los inversionistas y está dada por A_t que incluye la información de la relación entre los valores de los activos disponibles para negociar. Debido a su forma y a las propiedades de las entradas involucradas, el proceso de ejecución es monótono en riqueza y tiempo.

2.1 Modelo del mercado

Activos

En este modelo se considera que existe un solo activo libre de riesgo y k activos riesgosos. De igual manera a como ocurre en el modelo de Merton, el precio del activo libre de riesgo tiene un comportamiento determinista. Éste está dado por el proceso B_t , para $t > 0$ y es descrito por la ecuación diferencial

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad (2.1)$$

con $B_0 = 1$ y un proceso de tasa de interés \mathcal{F}_t -adaptado y no negativo .

El precio de cada uno de los k activos riesgosos es modelado por un proceso de Itô S_t^i para el activo i -ésimo y determinado por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ji} dW_t^j \right), \quad i = 1, \dots, k, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

donde $S_0^i > 0, \forall i$, es decir el precio inicial de cada acción debe ser positivo. El proceso $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ es un movimiento Browniano d -dimensional, definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y los coeficientes μ_t^i y $\sigma_t^i = (\sigma_t^{1i}, \dots, \sigma_t^{di})$ son procesos \mathcal{F}_t -adaptados con valores en \mathbb{R} y \mathbb{R}^d , respectivamente. Por lo anterior, se puede reescribir la Ecuación (2.2) como

$$dS_t^i = S_t^i (\mu_t^i dt + \sigma_t^i \cdot dW_t). \quad (2.3)$$

Observaciones

Los procesos r_t, μ_t y σ_t deberán cumplir condiciones de integrabilidad adecuadas.

A partir de aquí σ_t denotará a la matriz de volatilidad de dimensión $d \times k$, donde cada columna representa la volatilidad σ_t^i del i -ésimo activo riesgoso. A su vez μ_t denotará el vector k -dimensional con coordenadas μ_t^i y $\mathbf{1}$ el vector k -dimensional cuyas componentes son todas iguales a 1.

Bajo la notación anterior, se supondrá que los vectores son tal que

$$\mu_t - r_t \mathbf{1} \in \text{Lin}(\sigma_t^T), \quad (2.4)$$

donde $\text{Lin}(\sigma_t^T)$ representa el espacio lineal generado por las columnas de σ_t^T . Ésto implica que $\sigma_t^T (\sigma_t^T)^+ (\mu_t - r_t \mathbf{1}) = \mu_t - r_t \mathbf{1}$, por lo cual el vector

$$\lambda_t = (\sigma_t^T)^+ (\mu_t - r_t \mathbf{1}), \quad (2.5)$$

es una solución de la ecuación $\sigma_t^T x = \mu_t - r_t \mathbf{1}$ y la matriz $(\sigma_t^T)^+$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose de la matriz σ_t^T .¹

También se va a asumir que el proceso λ_t es acotado por una constante determinista $c > 0$, es decir, para todo $t \geq 0$

$$|\lambda_t| \leq c. \quad (2.6)$$

¹Dada una matriz \mathbf{A} , su pseudoinversa de Moore-Penrose \mathbf{A}^+ es una matriz $k \times d$ única que satisface $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$, $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ y $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$ [26].

Estrategia de inversión y portafolio

El proceso de inversión inicia en el tiempo $t = 0$ con una dotación inicial $x \in \mathbb{R}$ y el inversionista invierte en cada tiempo $t > 0$ en los dos tipos de activo: el libre de riesgo y los riesgosos. Los valores presentes de las cantidades invertidas serán denotados por π_t^i para $i = 1, \dots, k$. El portafolio varia de acuerdo con la ecuación

$$dX_t^\pi = \sum_{i=1}^k \pi_t^i \sigma_t^i \cdot (\lambda_t dt + dW_t) = \sigma_t \pi_t \cdot (\lambda_t dt + dW_t), \quad (2.7)$$

donde $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^k)$ es un vector columna.

Adicionalmente, el conjunto de las estrategias admisibles quedará definido por

$$\mathcal{A} = \left\{ \pi : \text{self-financing con } \pi_t \in \mathcal{F}_t \text{ y } E \left(\int_0^t |\sigma_s \pi_s|^2 ds \right) < \infty, t > 0 \right\}. \quad (2.8)$$

Número de acciones

De manera similar a como se realizó en Capítulo 1 se puede construir el vector θ_t de dimensión k , cuyas componentes θ_t^i , para $i = 1, \dots, k$, están dadas de la forma

$$\theta_t^i = \frac{\pi_t^i X_t^\pi}{S_t^i}, \quad (2.9)$$

y determinan la cantidad de la i -ésima acción que se quiere en el tiempo t .

2.2 Función de utilidad

A continuación describiremos las características que debe seguir la función de utilidad (rentabilidad).

Caraterísticas de un proceso de rentabilidad

Para que el proceso \mathcal{F}_t -adaptado $U_t(x)$ describa una rentabilidad, para $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$, debe satisfacer

- (i) La función $x \rightarrow U_t(x)$ debe ser cóncava y creciente.
- (ii) Para cada $\pi \in \mathcal{A}$, $E(U_s(X_s^\pi | \mathcal{F}_t))^+ < \infty$ y

$$E(U_s(X_s^\pi | \mathcal{F}_t)) \leq U_t(X_t^\pi), \quad \text{para } s \geq t. \quad (2.10)$$

(iii) Debe existir una estrategia $\pi^* \in \mathcal{A}$, que permita que

$$E(U_s(X_s^{\pi^*} | \mathcal{F}_t)) = U_t(X_t^{\pi^*}). \quad (2.11)$$

Notamos que (i) obedece a dos cosas, la función es creciente dado que entre más alto sea el portafolio esperamos que más alta sea la utilidad, y es cóncava puesto que sigue el principio de aversión al riesgo de un inversionista. Ésto último se refleja en el hecho de que para x , $U_t(x)$ cumplirá la desigualdad de Jensen

$$E(U_t(x)) \leq U_t(E(x)), \quad (2.12)$$

que nos indica que un inversionista tendrá preferencia por una opción más segura así ésta tenga una ganancia menor, a una que implique más riesgo. Por otro lado (ii) y (iii) obedecen las características de supermartingala y martingala de un proceso estocástico. Ésto indica que para cualquier estrategia, la utilidad proyectada a un tiempo s con información hasta el tiempo t siempre será menor que la utilidad conocida en t y además que debe existir una estrategia que permita la igualdad.

Proposición 1. Sean A_t y M_t definidos como

$$A_t = \int_0^t |\lambda_s|^2 ds \quad y \quad M_t = \int_0^t \lambda_s dW_s, \quad (2.13)$$

para $t \geq 0$ y donde λ_s está dado en la Ecuación (2.5). Además, sea $u \in \mathcal{C}^{4,1}(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ una función cóncava en el espacio que satisface $u_t u_{xx} = \frac{1}{2} u_x^2$ y $u(x, 0) = u_0(x)$. De esta manera

$$U_t(x) = u(x, A_t), \quad (2.14)$$

es una función de rendimiento, decreciente en el tiempo.

Prueba. A continuación se dará un esbozo con los principales pasos de la prueba, cuando consideramos que solo tenemos una acción y un activo libre de riesgo. El proceso del portafolio en este caso es $dX_t = (\lambda_t dt + dW_t)$ con $X_0 = x$, y sea π una estrategia admisible.

Para iniciar tenemos una función $u_0 \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ y buscamos una solución de la forma $U_t(x) = u(x, A_t)$ para alguna función cóncava y creciente (en el espacio) $u(x, t) \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, con $u(x, 0) = u_0(x)$. Por conveniencia tomamos $A_t = \int_0^t \lambda_s^2 ds$.

Para cualquier control arbitrario π , tenemos que

$$\begin{aligned}
dU_t(X_t) &= du(X_t, A_t) \\
&= u_x(X_t, A_t)dX_t + u_t(X_t, A_t)dA_t + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t, A_t)d\langle X_t \rangle_t \\
&= u_x(X_t, A_t)[\sigma_t\pi_t\lambda_t dt + \sigma_t\pi_t dW_t] + u_t(X_t, A_t)\lambda_t^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t, A_t)\sigma_t^2\pi_t^2 dt \\
&= u_x(X_t, A_t)\sigma_t\pi_t dW_t + \lambda_t^2 \left[u_t(X_t, A_t) + u_x(X_t, A_t)\sigma_t\pi_t\lambda_t^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t, A_t)\sigma_t^2\pi_t^2\lambda_t^{-2} \right] dt \\
&= u_x(X_t, A_t)\sigma_t\pi_t dW_t + \lambda_t^2 \left[u_t(X_t, A_t) + u_x(X_t, A_t)\alpha_t + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t, A_t)\alpha_t^2 \right] dt,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

con $\alpha_t = \sigma_t\pi_t\lambda_t^{-1}$.

Dada la concavidad de u respecto a x , se puede ver que $U_t(X_t)$ puede ser una supermartingala si lo anterior se mantiene no positivo, además, por la forma cuadrática, el signo se garantiza si

$$u_t(x, t)u_{xx}(x, t) \geq \frac{1}{2}u_x^2(x, t), \tag{2.16}$$

para $x \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Si la condición (2.16) la tomamos como igualdad y consideramos la estrategia

$$\pi_t^* = -\sigma_t^{-1}\lambda_t \frac{u_x(X_t^*, A_t)}{u_{xx}(X_t^*, A_t)}, \tag{2.17}$$

para X_t^* el portafolio asociado a π_t^* , luego tenemos que

$$dU_t(X_t^*) = u_x(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t^* dW_t. \tag{2.18}$$

De donde se deducen las condiciones (2.10) y (2.11) de la definición de proceso de rentabilidad.

El hecho de que $u(x, A_t)$ es monotona en x viene de la condición sobre u , mientras que para la monotonía en el tiempo podemos usar la elección de A_t y que $u_t < 0$, que se deriva de la restricción diferencial y la concavidad de u . \square

Una prueba similar a la anterior pero más detallada se verá en el ítem (i) del Teorema (2.3.1).

Lo anterior crea las bases para construir nuestra función de utilidad, basadas en la solución de la ecuación

$$u_t u_{xx} = \frac{1}{2} u_x^2 \quad (2.19)$$

Esto nos permite también proponer una solución óptima X_t^π que satisfaga (2.11).

Función local de la tolerancia al riesgo

La tolerancia al riesgo financiero es la disposición a aceptar el riesgo de que una determinada elección económica tenga un resultado distinto al deseado. Ésta desempeña un papel fundamental en la construcción de una cartera de inversión que cumpla con las necesidades psicológicas de los inversores. Los individuos que son capaces de tolerar un mayor riesgo pueden construir una cartera más agresiva, y por regla general, en el mediano o largo plazo lograr una mayor rentabilidad. Esta función, bajo u como en la Proposición 1, está dada por

$$R(x, t) = -\frac{u_x(x, t)}{u_{xx}(x, t)}. \quad (2.20)$$

La cual satisface

$$R_t + \frac{1}{2} R_x^2 R_{xx} = 0 \quad \text{y} \quad R(x, 0) = -\frac{u'_0(x)}{u''_0(x)}. \quad (2.21)$$

Aversión local al riesgo

La aversión al riesgo es lo contrario a la tolerancia, dado que representa la preferencia de un inversionista a elegir carteras de inversión de bajo riesgo así estas impliquen una menor rentabilidad. La aversión al riesgo está dada por la función $\gamma(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida como

$$\gamma(x, t) = \frac{1}{R(x, t)}, \quad (2.22)$$

y que satisface

$$\gamma_t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \right)_{xx} \quad \text{y} \quad \gamma(x, 0) = -\frac{u''_0(x)}{u'_0(x)}. \quad (2.23)$$

2.3 Construcción del portafolio y estrategias óptimas de inversión para maximizar la utilidad

Conociendo la caracterización general de las funciones de rendimiento, aversión y tolerancia local al riesgo, procedemos a construir la estrategia óptima de inversión. El problema que queremos resolver es encontrar los procesos π_t^* y X_t^* , que maximicen

$U_t(x) = u(x, A_t)$. Para ello definimos el proceso de tolerancia al riesgo (bajo el portafolio óptimo) dado por

$$R_t^* = R(X_t^*, A_t), \quad (2.24)$$

para $t \geq 0$ y A_t dado en (2.13).

Si consideramos el sistema

$$dX_t^* = R(X_t^*, A_t)\lambda_t(\lambda_t dt + dW_t), \quad (2.25)$$

$$dR_t^* = R_x(X_t^*, A_t)dX_t^*, \quad (2.26)$$

y su solución (X_t^*, R_t^*) , $t \geq 0$. Entonces el proceso π_t^* definido por

$$\pi_t^* = R_t^* \sigma_t^+ \lambda_t, \quad (2.27)$$

es óptimo y genera el proceso de portafolio X_t^* , como se verá más adelante.

En el siguiente teorema, vamos a probar que de hecho X_t^* y π_t^* van a estar dados por la información del mercado y funciones deterministas en el espacio y el tiempo.

Antes de enunciar el teorema, necesitamos introducir el conjunto $\mathcal{B}^+(\mathbb{R})$ definido como

$$\mathcal{B}^+(\mathbb{R}) = \left\{ \nu \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \forall B \in \mathcal{B}, \nu(B) \geq 0 \text{ y } \int_{\mathbb{R}} e^{yx} \nu(dy) < \infty, x \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.28)$$

El conjunto de medidas $\mathcal{B}^+(\mathbb{R})$ es no vacío, ya que por ejemplo la medida de Dirac en cero $\nu = \delta_0$ pertenece a él. Este conjunto es de gran importancia ya que cada medida nos dará lugar a una solución de la ecuación de calor (2.30), que nos permitirá construir una familia de funciones $u(t, x)$ que dan lugar a procesos de utilidad como deseamos. Más adelante, se estudiarán dos casos particulares de medidas para simular el portafolio y el número de acciones asociados a la función de utilidad. Este procedimiento se explica en la siguiente proposición:

Proposición 2. (i) Sea $\nu \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R})$. Entonces la función h definida para $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, por

$$h(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{yx - \frac{1}{2}y^2 t} - 1}{y} \nu(dy) + C, \quad (2.29)$$

es una solución estrictamente creciente respecto a x de

$$h_t + \frac{1}{2}h_{xx} = 0. \quad (2.30)$$

(ii) Ahora asumimos h (mencionada en (i)) de rango completo para cada $t \geq 0$ y denotamos por $h^{(-1)} : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ su inversa espacial. Entonces la función

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-h^{(-1)}(x, s) + \frac{s}{2}} h_x \left(h^{(-1)}(x, s), s \right) ds + \int_0^x e^{-h^{(-1)}(z, 0)} dz, \quad (2.31)$$

es una solución creciente y estrictamente concava respecto a x de

$$u_t = \frac{1}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}}. \quad (2.32)$$

En el siguiente teorema daremos la forma explícita de X_t^* y π_t^* .

Teorema 2.3.1. (i) Sea h una solución estrictamente creciente (en x) de la ecuación del calor (2.30), y supongamos que la medida asociada ν satisface

$$\int_{\mathbb{R}} e^{yx + \frac{1}{2}y^2t} \nu(dy) < \infty. \quad \forall x \quad (2.33)$$

Definimos

$$X_t^* = h \left(h^{(-1)}(x, 0) + A_t + M_t, A_t \right), \quad (2.34)$$

y

$$\pi_t^* = h_x \left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t \right) \sigma_t^+ \lambda_t, \quad (2.35)$$

con $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, h dado en (2.29), $h^{(-1)}$ su inversa espacial, y A_t y M_t definidos en (2.13).

La estrategia π_t^* es admisible y genera al portafolio X_t^* , es decir

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t \sigma_s \pi_s^* \cdot (\lambda_s ds + dW_s). \quad (2.36)$$

(ii) Sea u la solución de (2.30) asociada a h (como en (2.31)). Entonces el proceso satisface

$$du(X_t^*, A_t) = u_x(X_t^*, A_t) \sigma_t \pi_t^* \cdot dW_t, \quad (2.37)$$

para X_t^* y π_t^* dados en (2.34) y (2.35), respectivamente.

(iii) Sea $U_t(x)$ dada por

$$U_t(x) = u(x, A_t), \quad (2.38)$$

donde $t \in [0, \infty)$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces $U_t(x)$ es una función de rendimiento y los procesos X_t^* y π_t^* son óptimos.

Prueba. La prueba se da para el caso en el que h es de rango infinito (para el caso de rango semi infinito el procedimiento es similar).

- (i) Empezaremos probando que π_t^* genera al portafolio X_t^* . Lo haremos para el caso cuando h es de rango infinito, es decir, para $x \in \mathbb{R}$, y tomaremos por simplicidad $C = 0$ en la ecuación (2.29), de manera que

$$h(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{yx - \frac{1}{2}y^2t} - 1}{y} \nu(dy), \quad (2.39)$$

donde $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Para $x \in \mathbb{R}$, y A_t y M_t dados en (2.13), definimos el proceso

$$N_t = h^{(-1)}(x, 0) + A_t + M_t, \quad (2.40)$$

donde $h^{(-1)}$ es la inversa espacial de h . Aplicando la formula de Itô a X_t^* dado en (2.34) tenemos que

$$\begin{aligned} dX_t^* &= dh(N_t, A_t) \\ &= h_x(N_t, A_t)dN_t + h_t(N_t, A_t)dA_t + \frac{1}{2}h_{xx}(N_t, A_t)d\langle N^* \rangle_t. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando (2.30), los dos ultimos términos en (2.41) suman cero, con lo cual se obtiene

$$dX_t^* = h_x(N_t, A_t)dN_t. \quad (2.42)$$

Por otro lado, (2.34) y (2.35) implican que $\pi_t^* = h_x(N_t, A_t)\sigma_t^+\lambda_t$, para $t \geq 0$, ya que

$$\begin{aligned} \pi_t^* &= h_x\left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t\right)\sigma_t^+\lambda_t \\ &= h_x\left(h^{(-1)}(h(N_t, A_t)), A_t\right)\sigma_t^+\lambda_t \\ &= h_x(N_t, A_t)\sigma_t^+\lambda_t. \end{aligned}$$

Además, por lo anterior y recordando que $\sigma_t\sigma_t^+\lambda_t = \lambda_t$ podemos obtener (2.36) así:

$$\begin{aligned} dX_t^* &= h_x(N_t, A_t)dN_t \\ &= h_x(N_t, A_t)(|\lambda_t|^2 ds + \lambda_t \cdot dW_t) \\ &= h_x(N_t, A_t)\lambda_t \cdot (\lambda_t dt + dW_t) \\ &= h_x(N_t, A_t)\sigma_t\sigma_t^+\lambda_t \cdot (\lambda_t dt + dW_t) \\ &= \sigma_t h_x(N_t, A_t)\sigma_t^+\lambda_t \cdot (\lambda_t ds + dW_s) \\ &= \sigma_t \pi_t^* \cdot (\lambda_t dt + dW_t). \end{aligned}$$

Por lo cual, integrando tenemos que

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t \sigma_s \pi_s^* \cdot (\lambda_s ds + dW_s).$$

Concluyendo que en efecto, π_t^* es la estrategia que genera al portafolio X_t^* .

Ahora, para establecer que $\pi_t^* \in \mathcal{A}$, es decir, es una estrategia admisible, es suficiente con mostrar que ésta satisface la condición de integrabilidad en (2.8).

Usando que

$$h_x(x, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{yx - \frac{1}{2}y^2 t} \nu(dy), \quad (2.43)$$

y la expresión para X_t^* en (2.34), tenemos que

$$\begin{aligned} h_x \left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t \right) &= \int_{\mathbb{R}} e^{y h^{(-1)}(X_t^*, A_t) - \frac{1}{2}y^2 A_t} \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{y h^{(-1)}[h^{(-1)}(x, 0) + A_t + M_t, A_t] - \frac{1}{2}y^2 A_t} \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{y(h^{(-1)}(x, 0) + A_t + M_t) - \frac{1}{2}y^2 A_t} \nu(dy). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} \left(h_x \left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t \right) \right)^2 &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(y_1 + y_2)(h^{(-1)}(x, 0) + A_t + M_t) - \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)A_t} \nu(dy_1) \nu(dy_2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Veamos que en efecto $E \left(\int_0^t |\sigma_s \pi_s^*|^2 ds \right)$ es finito:

$$E \left(\int_0^t |\sigma_s \pi_s^*|^2 ds \right) = E \left(\int_0^t \left| h_x \left(h^{(-1)}(X_s^*, A_s), A_s \right) \sigma_s \sigma_s^+ \lambda_s \right|^2 ds \right). \quad (2.46)$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_t \sigma_t^+ \lambda_t = \lambda_t$, $\int_0^t |\lambda_s|^2 ds = A_t$ de donde $|\lambda_s|^2 = dA_t$ y el teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned}
E \left(\int_0^t |\sigma_s \pi_t^*|^2 ds \right) &= E \left(\int_0^t \left(h_x \left(h^{(-1)}(X_s^*, A_s), A_s \right) \right)^2 dA_s \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E \left(\int_0^t e^{(y_1+y_2)(h^{(-1)}(x,0)+A_s+M_s) - \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)A_s} dA_s \right) \nu(dy_1) \nu(dy_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E \left(\int_0^{A_t} e^{(y_1+y_2)(h^{(-1)}(x,0)+s+\beta_s) - \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)s} ds \right) \nu(dy_1) \nu(dy_2),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

debido que se realiza el cambio de variable $t = A_s$ que implica $s = A_t^{-1}$, donde $A_t^{(-1)}$ es la inversa de A_t , para $t \geq 0$ y $\beta_t = M_{A_t^{(-1)}}$.

Usando que β_t (para $t \geq 0$) es normalmente distribuida con valor medio 0 y varianza t , y $A_t \leq c^2 t$ por (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
E \left(\int_0^t |\sigma_s \pi_t^*|^2 ds \right) &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E \left(\int_0^{c^2 t} e^{(y_1+y_2)(h^{(-1)}(x,0)+s+\beta_s) - \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)s} ds \right) \nu(dy_1) \nu(dy_2), \\
&= \int_0^{c^2 t} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(y_1+y_2)(h^{(-1)}(x,0)+s) + y_1 y_2 s} \nu(dy_1) \nu(dy_2) ds, \\
&\leq \int_0^{c^2 t} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{y(h^{(-1)}(x,0)+s) + \frac{1}{2}y^2 s} \nu(dy) \right)^2 ds,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

y usando (2.33), concluimos.

(ii) A continuación, veremos que u satisface (2.37).

Usando (2.42) y aplicando la formula de Itô a $u(X_t^*, A_t)$, para $t \geq 0$, encontramos que

$$\begin{aligned}
du(X_t^*, A_t) &= u_x(X_t^*, A_t) dX_t^* + u_t(X_t^*, A_t) dA_t + \frac{1}{2} u_{xx}(X_t^*, A_t) d\langle X^* \rangle_t \\
&= u_x(X_t^*, A_t) \left[h_x \left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t \right) (\lambda_t dt + dW_t) \right] \\
&\quad + u_t(X_t^*, A_t) dA_t + \frac{1}{2} u_{xx}(X_t^*, A_t) d\langle X^* \rangle_t \\
&= u_x(X_t^*, A_t) h_x \left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t \right) \lambda_t \cdot dW_t \\
&\quad + u_x(X_t^*, A_t) h_x \left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t \right) dA_t \\
&\quad + u_t(X_t^*, A_t) dA_t + \frac{1}{2} u_{xx}(X_t^*, A_t) d\langle X^* \rangle_t.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Derivando u de (2.31) respecto a x y usando que h es solución de la ecuación de calor (2.30), obtenemos que:

$$u_x(x, t) = e^{-h^{(-1)}(x,t) + \frac{t}{2}}. \quad (2.50)$$

De manera similar, derivando u respecto a t en (2.31) tenemos:

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}e^{-h^{(-1)}(x,t) + \frac{t}{2}}h_x\left(h^{(-1)}(x, t), t\right), \quad (2.51)$$

de donde

$$\begin{aligned} h_x\left(h^{(-1)}(x, t), t\right) &= -\frac{u_t(x, t)}{\frac{1}{2}e^{-h^{(-1)}(x,t) + \frac{t}{2}}} \\ &= -2\frac{u_t(x, t)}{u_x(x, t)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Teniendo en cuenta que $u_t = \frac{1}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}}$ por (2.32)

$$h_x\left(h^{(-1)}(x, t), t\right) = -\frac{u_x(x, t)}{u_{xx}(x, t)}. \quad (2.53)$$

Con lo cual deducimos que

$$-\frac{u_x(X_t^*, A_t)}{u_{xx}(X_t^*, A_t)} = h_x\left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t\right), \quad (2.54)$$

lo cual combinado con lo anterior da

$$\begin{aligned} du(X_t^*, A_t) &= u_x(X_t^*, A_t)h_x\left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t\right)\lambda_t \cdot dW_t \\ &\quad - \frac{(u_x(X_t^*, A_t))^2}{u_{xx}(X_t^*, A_t)}dA_t + u_t(X_t^*, A_t)dA_t + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t^*, A_t)d\langle X^* \rangle_t. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Por otro lado, de (2.42) tenemos que

$$\begin{aligned} u_{xx}(X_t^*, A_t)d\langle X^* \rangle_t &= u_{xx}(X_t^*, A_t)\left(h_x\left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t\right)\right)^2 dA_t \\ &= -\frac{(u_x(X_t^*, A_t))^2}{u_{xx}(X_t^*, A_t)}dA_t. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
du(X_t^*, A_t) &= u_x(X_t^*, A_t)h_x\left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t\right)\lambda_t \cdot dW_t \\
&\quad + \left(u_t(X_t^*, A_t) - \frac{1}{2} \frac{(u_x(X_t^*, A_t))^2}{u_{xx}(X_t^*, A_t)}\right) dA_t \\
&= u_x(X_t^*, A_t)h_x\left(h^{(-1)}(X_t^*, A_t), A_t\right)\sigma_t\sigma_t^+ \lambda_t \cdot dW_t \\
&= u_x(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t^* \cdot dW_t, \tag{2.57}
\end{aligned}$$

ya que u satisface (2.32). Así, finalmente obtenemos (2.37) que es lo que queremos.

- (iii) Necesitamos establecer que $U_t(x)$ satisface todas las condiciones mencionadas anteriormente, es decir, que la función $x \rightarrow U_t(x)$ sea cóncava y creciente, y las condiciones (2.10) y (2.11). El hecho de que la aplicación $x \rightarrow U_t(x)$ es creciente y estrictamente cóncava se sigue de manera trivial de las propiedades de u y de A_t . Para establecer la condición de integrabilidad $E(U_t(X_t^\pi))^+ < \infty$, primero tenemos en cuenta que $u_t < 0$ como consecuencia de la concavidad estricta de u y de (2.32). De esta manera, $u(x, t) \leq u(x, 0) \leq ax^+ + b$, para a y b constantes positivas. Además (2.7) implica que

$$(X_t^\pi)^+ \leq x^+ + \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_s \pi_s|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_s|^2 ds + \left| \int_0^t \sigma_s \pi_s dW_s \right|. \tag{2.58}$$

Luego, de usar (2.6) y que $\pi_t \in \mathcal{A}$, se sigue la integrabilidad de $E(U_t(X_t^\pi))^+$. Para mostrar (2.10), observamos que $\pi_t \in \mathcal{A}$ y X_t^π como en (2.7), la fórmula de Itô y el hecho de que u es solución de (2.32) da

$$\begin{aligned}
du(X_t^*, A_t) &= \left(u_x(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t\lambda_t + u_t(X_t^*, A_t)|\lambda_t|^2 + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t^*, A_t)|\sigma_t\pi_t|^2\right) dt \\
&\quad + u(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t \cdot dW_t \\
&= \left(u_x(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t\lambda_t + \frac{1}{2} \frac{(u_x(X_t^*, A_t))^2}{u_{xx}(X_t^*, A_t)}|\lambda_t|^2 + \frac{1}{2}u_{xx}(X_t^*, A_t)|\sigma_t\pi_t|^2\right) dt \\
&\quad + u(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t \cdot dW_t \\
&= \frac{1}{2}u_{xx}(X_t^*, A_t) \left|\sigma_t\pi_t + \frac{u_x(X_t^*, A_t)}{u_{xx}(X_t^*, A_t)}\lambda_t\right|^2 dt + u_x(X_t^*, A_t)\sigma_t\pi_t \cdot dW_t, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la concavidad de u , se concluye. Para mostrar (2.11) utilizamos (2.54) y la definición del proceso π_t^* dada en (2.35).

□

Ejemplos

Con base en el teorema anterior tomaremos dos medidas distintas para construir el portafolio y estrategia de inversión óptimos. Luego se verá gráficamente el comportamiento del portafolio y el número de acciones.

Ejemplo 1. Sea $v = \delta_0$, donde δ_0 es la medida de Dirac en 0. Por lo cual $h(x, t) = x$ y $h^{(-1)}(x, t) = x$. Esto implica que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-x+\frac{s}{2}} ds + \int_0^x e^{-z} dz \\ &= 1 - e^{-x+\frac{t}{2}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Note que $u(x, t)$ satisface:

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2} e^{-x+\frac{t}{2}}, \quad (2.61)$$

$$u_x(x, t) = e^{-x+\frac{t}{2}}, \quad (2.62)$$

$$u_{xx}(x, t) = -e^{-x+\frac{t}{2}}. \quad (2.63)$$

También tenemos que $h_x(h^{(-1)}(x, t), t) = 1$, dado que $h_x(x, t) = 1$. Por lo anterior, el portafolio y estrategia óptimos quedan dados por

$$\pi_t^* = \sigma_t^+ \lambda_t, \quad (2.64)$$

$$X_t^* = x + A_t + M_t. \quad (2.65)$$

En la Figura 2.1 se puede apreciar el comportamiento del portafolio y número de acciones.

Ejemplo 2. Sea

$$v(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (2.66)$$

Luego

$$h(x, t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\right), \quad (2.67)$$

con

$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.68)$$

Por lo tanto $h^{(-1)}(x, t) = \sqrt{t+1}F^{(-1)}(x)$, de manera que

$$h_x(h^{(-1)}(x, t), t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} f\left(F^{(-1)}(x)\right), \quad (2.69)$$

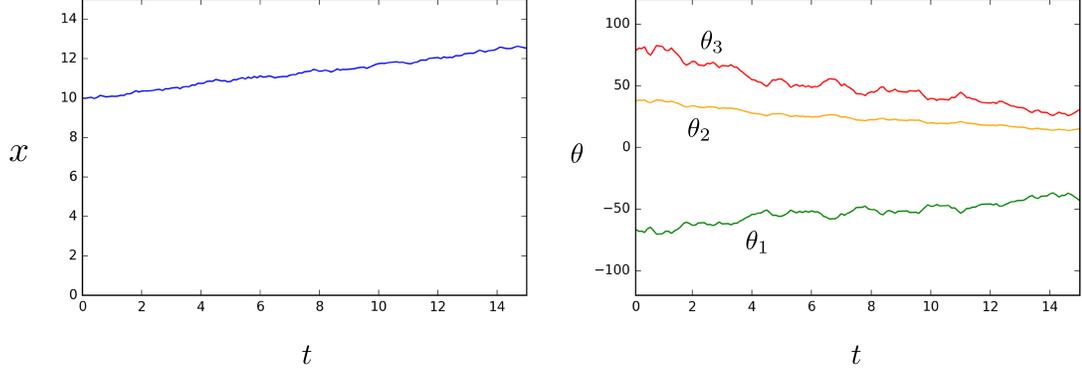


Figura 2.1: Gráfica del portafolio $x(t)$ y numero de acciones $\theta(t)$ en función del tiempo para el caso de la medida de Dirac.

donde $f(x) = F'(x)$. Así $u(x, t)$ queda como:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s+1}} f\left(F^{(-1)}(x)\right) e^{-\sqrt{s+1}F^{(-1)}(x) + \frac{s}{2}} ds + \int_0^x e^{-F^{(-1)}(z)} dz. \quad (2.70)$$

Simplificando obtenemos que

$$u(x, t) = k_1 F\left(F^{(-1)}(x) - \sqrt{t+1}\right) + k_2, \quad (2.71)$$

donde $k_1 = e^{-\frac{1}{2}}$ y $k_2 = e^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^0 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$.

Note que la función $u(x, t)$ satisface

$$u_t(x, t) = -k_1 \frac{f\left(F^{(-1)}(x) - \sqrt{t+1}\right)}{2\sqrt{t+1}}, \quad u_x(x, t) = k_1 \frac{f\left(F^{(-1)}(x) - \sqrt{t+1}\right)}{f\left(F^{(-1)}(x)\right)}, \quad (2.72)$$

y

$$u_{xx}(x, t) = -k_1 \sqrt{t+1} \frac{f\left(F^{(-1)}(x) - \sqrt{t+1}\right)}{f\left(F^{(-1)}(x)\right)^2}. \quad (2.73)$$

Así el portafolio y la estrategia de inversión óptimos quedan dados por

$$\pi_t^* = \frac{1}{\sqrt{A_t+1}} f\left(F^{(-1)}(X_t^*)\right) \sigma_t^+ \lambda_t, \quad t \geq 0, \quad (2.74)$$

y

$$X_t^* = F\left(\frac{F^{(-1)}(x) + A_t + M_t}{\sqrt{A_t+1}}\right). \quad (2.75)$$

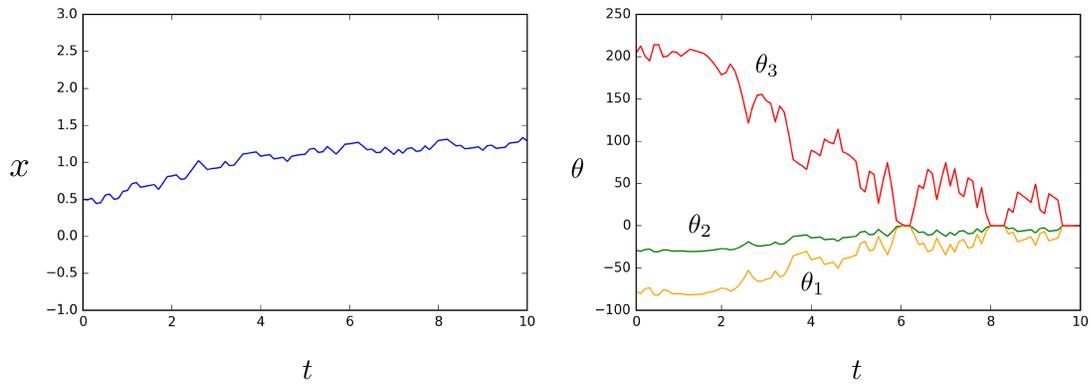


Figura 2.2: Gráfica del portafolio $x(t)$ y $\theta(t)$ en función del tiempo.

En la Figura 2.2 se puede apreciar el portafolio y el numero de acciones. En esta medida, los parametros son bastante sensibles dado que en el portafolio aparece la función error $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, su inversa y su derivada, lo que en ocasiones hace que facilmente se vaya a infinito o a cero en su manipulación.

Conclusiones

En la presente tesis hemos realizado un contraste entre el enfoque proporcionado por Merton y la elección óptima del portafolio basado en el criterio de rendimiento directo.

En el Capítulo 1, se estudió el problema clásico de selección de portafolio dado por Merton, empleando el modelo mas sencillo, cuya característica principal es que el inversionista solo puede definir su cartera en dos activos, uno libre de riesgo (de caracter determinista) y uno riesgoso (de caracter estocastico).

Para a diseñar la estrategia de inversión y el consumo que nos permitieran optimizar el portafolio, iniciamos la utilidad esperada que queriamos maximizar, la cual se caracterizó por ser construida con una función de consumo que satisfacía condiciones de concavidad y monotonicidad. A continuación hicimos uso del principio de programación dinámica y resolvimos la ecuación de HJB en el caso particular de la función de HARA —muy utilizada en economía— donde por medio del cálculo estocastico obtuvimos la estrategia de inversión y consumo óptimos, el portafolio y el número de acciones en el tiempo. Graficamente analizamos la influencia de los parametros en la trayectoria de los dos ultimos. De éesto, pudimos observar las limitantes de este modelo, debido a que es muy idealista, encontrando la necesidad de elaborar una funcción de rendimiento que incluya más información del mercado y del inversionista.

En el Capítulo 2 se presentó una de las formas en que se puede modificar el modelo de Merton para que sea más general y afin con el comportamiento del mercado. Iniciamos considerando un modelo que incluyera una mayor cantidad de acciones y un coeficiente que midiera la influencia del comportamiento de precios entre éstas. Posteriormente, diseñamos la función de utilidad con base en las características mínimas para considerarse una rentabilidad hacia adelante (forward performance) y en el criterio de rendimiento monótono. Obtuvimos una función de utilidad de la forma $U_t(x) = u(x, At)$ para $t \geq 0$ y estudiamos particularmente las funciones u que son solución de una ecuación diferencial especifica. Finalmente, encontramos la estrategia y portafolio óptimos asociados a este horizonte de inversión.

Bibliografía

- [1] R. C. Merton, Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics*, **51**, 247 (1969).
- [2] R. C. Merton, Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*, **3**, 373 (1971).
- [3] R. C. Merton, Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, **4**, 141 (1973).
- [4] R. E. Larson, State Increment Dynamic Programming. *Modern Analytic and Computational methods in Science and Mathematics*, (Elsevier, Amsterdam, 1968).
- [5] J. H. Seinfeld y L. Lapidus, Aspects of forward dynamic programming algorithm. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, **7**(3), 475 (1968).
- [6] K. Vit, Forward differential dynamic programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **21**(4), 487 (1977).
- [7] I. Karatzas y H. Wang, Utility maximization with discretionary stopping. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **39**(1), 306 (2000).
- [8] D. Kramkov y W. Schachermayer, The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability*, 904 (1999).
- [9] J. Cvitanić y I. Karatzas, Convex duality in constrained portfolio optimization. *The Annals of Applied Probability*, **2**, 767 (1992).
- [10] I. Karatzas y G. Žitković, Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets. *The Annals of Probability*, **31**(4), 1821 (2003).
- [11] I. Fisher, The impatience theory of interest. *American Economic Review*, **3**, 610 (1931).

- [12] V. Henderson y D. Hobson, Horizon-unbiased utility functions. *Stochastic processes and their applications*, **117**(11), 1621 (2007).
- [13] M. Musiela y T. Zariphopoulou, Investment and valuation under backward and forward dynamic exponential utilities in a stochastic factor model. En *Advances in mathematical finance*, (Birkhäuser, Boston, 2007), p. 303.
- [14] M. Musiela y T. Zariphopoulou, The single period binomial model. En *Indifference Pricing*, (Princeton University Press, Princeton, 2009), p. 3.
- [15] M. Musiela y T. Zariphopoulou, Portfolio choice under dynamic investment performance criteria. *Quantitative Finance*, **9**(2), 161 (2009).
- [16] M. Musiela y T. Zariphopoulou, Portfolio choice under space-time monotone performance criteria. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **1**(1), 326 (2010).
- [17] T. Choulli, C. Stricker y J. Li, Minimal Hellinger martingale measures of order q . *Finance and Stochastics*, **11**(3), 399 (2007).
- [18] M. Musiela y T. Zariphopoulou, Investments and forward utilities. *preprint*, (2006).
- [19] M. Musiela y T. Zariphopoulou, Optimal asset allocation under forward exponential performance criteria. En *Markov processes and related topics: a Festschrift for Thomas G. Kurtz*, (Institute of Mathematical Statistics, Bethesda, MD, 2008), p. 285.
- [20] M. Musiela y T. Zariphopoulou, Stochastic partial differential equations in portfolio choice. En *Contemporary Quantitative Finance*, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010), p. 195.
- [21] E. K. Nicole y M. Mohamed, An Exact Connection between Two Solvable SDEs and a Nonlinear Utility Stochastic PDE. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **4**(1), 697 (2013).
- [22] S. Nadtochiy y M. Tehranchi, Optimal Investment For All Time Horizons And Martin Boundary Of Space-Time Diffusions. *Mathematical Finance*, **27**(2), 438 (2017).
- [23] M. Shkolnikov, R. Sircar y T. Zariphopoulou, Asymptotic analysis of forward performance processes in incomplete markets and their ill-posed HJB equations. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **7**(1), 588 (2016).
- [24] W. H. Fleming y H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions Vol. 25*, (Springer Science & Business Media, 2006).
- [25] R. Korn, *Optimal portfolios: stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time*, (World Scientific, 1997).
- [26] R. Penrose, A generalized inverse for matrices. En *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, (Cambridge University Press, 1955), p. 406.

