CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS CON GARANTÍA AMERICANA DE CAPITAL Y REPRESENTACIÓN MÁX-PLUS DE SUPERMARTINGALAS

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

Presenta

José Alberto Tepox Méndez

Director de Tesis:

Dr. Daniel Hernández Hernández

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 12 de Julio de 2018

A mis padres, Paula y Benjamín

Agradecimientos

A mis padres, Paula Méndez y Benjamín Tepox que con su apoyo, cariño y confianza, la distancia no importó para sentirlos cerca. Éste y cada uno de mis logros no habrían sido posibles sin ellos.

A mis hermanos, en orden de aparición, Rocío, Verónica, Raúl y Sandra; por sus consejos y respaldo a través de su diversidad de ideas.

A Natalia, por su apoyo, el conocimiento transmitido y los mejores momentos que viví durante esta maestría. ¡Gracias por inspirarme!

A todos los amigos y compañeros con los que tuve la oportunidad de intercambiar ideas, aprender y compartir durante estos dos (y más) años de arduo trabajo. De manera particular a Camilo, Santiago, Adrian, Guillermo, Óscar, Vannesa, Pablo, María, Ricardo y Delio.

A mi asesor de tesis y profesor, Dr. Daniel Hernández Hernández, a quien respeto y admiro no sólo por su excelencia como investigador, sino por su gran calidad humana. Gracias Dr. Daniel por su paciencia y todo el tiempo dedicado a esta tesis.

A mis sinodales, Dra. Ekaterina Todorova y Dr. José Luis Pérez Garmendia, por su trabajo en la revisión de esta tesis y sus aportaciones a la misma.

Finalmente, al Centro de Investigación en Matemáticas y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por ser una institución que promueve un ambiente idóneo para la investigación y por la beca que durante dos años me dio la posibilidad de llevar a cabo mis estudios de maestría.

A todos ustedes, muchas gracias.

Índice general

Introducción

Existe una gran variedad de problemas que se abordan en el área de finanzas desde el punto de vista matemático, área que por sí misma ha congregado el esfuerzo de muchos matemáticos desde mediados del siglo pasado. En ese sentido, la teoría de probabilidad y en particular la de procesos estocásticos, ha sido una excelente herramienta para modelizar y resolver los problemas referidos. Asimismo, entre los problemas destacados se encuentra el de optimización de portafolios, el cual ha sido uno de los más estudiados desde la perspectiva estocástica y que representa el objeto de interés para esta tesis.

En términos generales, el problema de optimización de portafolios consiste en hallar una estrategia que mejore (en cierto sentido) el proceso de inversión para un agente que cotiza en diferentes activos financieros. Siendo más precisos, se busca responder a las interrogantes cuánto, dónde y cuándo se debe invertir para maximizar la *utilidad* de un inversionista. Para responder a estas preguntas existen dos perspectivas matemáticas: la primera consiste en un enfoque desde la teoría de control estocástico desarrollado por Merton en 1969 que se basa en el principio de programación dinámica. El segundo enfoque es vía representación martingalas el cual fue desarrollado, entre otros, por Pliska en 1986 [14]. Para la elaboración de este proyecto, nos basaremos en la idea general del segundo enfoque descrito.

El objetivo de esta tesis es presentar bajo el marco general de un mercado financiero el problema de optimización de portafolios con garantía Americana, de manera más específica, nos interesa el problema de maximización de la utilidad terminal esperada del capital de un inversionista que además tiene como restricción la de superar un proceso de capital mínimo en cada instante de tiempo. Asimismo, presentamos la solución propuesta por Nicole El Karoui y Asma Meziou en [4] considerando pruebas más detalladas basándonos en argumentos desarrollados en [5]. Por último, desarrollamos un ejemplo bajo el contexto de Black-Scholes del problema de optimización de portafolios y su solución a partir de este nuevo enfoque, al mismo tiempo que abrimos la discusión sobre el problema de considerar funciones de utilidad más complejas o el de determinar la forma de las políticas de decisión.

Para presentar lo anterior, esta tesis se ha dividido en tres capítulos y se considera, a lo largo de la misma, un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ que satisface las condiciones usuales. Además, suponemos que las decisiones de inversión son tomadas en cada instante y que pueden modelarse con un proceso $\pi = \{\pi_t;\ t \geq 0\}$ conocido como *proceso de portafolio* y que determina, junto a las fluctuaciones aleatorias del mercado, el capital del inversionista, el cual vamos a suponer que podemos modelar por un proceso $X^\pi = \{X_t^\pi;\ t \geq 0\}$. Por último, se considera el *horizonte del problema* dado por un tiempo de paro ζ y que representa el último instante de observación del proceso.

Con base en lo anterior, en el Capítulo 1 se presenta la teoría base de los mercados financieros y la formulación del problema de optimización de portafolios dentro del marco de dichos mercados. Así, el problema de optimización de portafolios con *garantía Americana* que vamos a considerar a lo largo de toda la tesis, consiste en hallar una estrategia que maximice el valor esperado de la utilidad terminal del capital del inversionista, cuando dicho capital supera a un proceso de capital mínimo; en otras palabras, se pretende hallar el proceso de portafolio π que solucione

$$\sup_{\pi} \left\{ \mathbb{E}\left[U\left(X_\zeta^\pi\right)\right];\ X_t^\pi \geq K_t \text{ para cada } t \in [0, \zeta] \text{ y } X_0^\pi = x \right\}, \tag{0.1}$$

donde U es una *función de utilidad*, x es el capital inicial del inversionista y $K = \{K_t : t \geq 0\}$ un proceso que representa la cantidad mínima que el inversionista debe poseer en cada instante. Más aún, se presenta una generalización del problema de optimización de portafolios a partir de considerar el *orden cóncavo estocástico*.

El Capítulo 2 versa sobre el problema de representación de supermartingalas y su relación con el problema de hallar la martingala que resuelva

$$\sup_{M} \left\{ \mathbb{E}\left[U\left(M_\zeta\right)\right] : M \text{ es una martingala, } M_t \geq Z_t\ \forall t \in [0, \zeta] \text{ y } M_0 = m_0 \right\}, \tag{0.2}$$

donde U es una función de utilidad y Z es una supermartingala. El hecho de que Z sea una supermartingala es una suposición fundamental al momento de presentar una solución del problema dado en (0.2), esto debido a que en [5] se presenta un resultado análogo al teorema de descomposición de Doob-Meyer, describiendo un Teorema de representación de supermartingalas en el álgebra Máx-Plus, el cual consiste en garantizar la existencia de un proceso opcional $L = \{L_t;\ 0 \leq t \leq \zeta\}$ tal que

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u \middle| \mathcal{F}_t \right]. \tag{0.3}$$

Este capítulo se basa en las ideas propuestas por Nicole El Karoui y Asma Meziou en [5], presentando de manera detallada los resultados y demostraciones necesarios para abordar el problema de optimización de portafolios a través de un problema de martingalas. Más aún, se presenta una solución general de este último al considera el orden cóncavo definido en el Capítulo 1.

Basándonos en lo desarrollado en [4], en el Capítulo 3 se presenta el método de solución al problema de optimización de portafolios descrito en el Capítulo 1. Dicho método consiste en transformar el problema dado en (0.1), en un problema similar al descrito en (0.2) y solucionarlo a través de las ideas propuestas en el Capítulo 2. Aunque este método se presenta para una clase amplia de funciones de utilidad, en este capítulo se discute sobre los problemas que surgieron al considerar otras familias de funciones de utilidad y de las consideraciones que deberían tenerse en proyectos futuros que consideren este mismo probema.

Capítulo 1

Problema de optimización de portafolios

El objetivo principal de este capítulo es definir el problema de optimización de portafolios con garantía americana. Para ello, en la primera sección se presenta la teoría general de un mercado financiero completo descrito a través de procesos de difusión. Asimismo, se definen los procesos de portafolio y de capital que representan, en cierto sentido, a un agente que invierte dentro del mercado financiero. Esta primera parte está basada en la teoría desarrollada por Karatzas y Shreve en [9]. Por otro lado, en la segunda sección se definen las funciones de utilidad asociadas a un inversionista y el orden cóncavo estocástico. Por último, en la tercera sección se presenta el problema de optimización de portafolios en su forma más general, sin embargo, se especifica que el problema que se aborda en esta tesis versa sobre la maximización de la utilidad terminal esperada. Más aún, se presenta el problema con garantía americana y su generalización a partir del orden cóncavo.

1.1. Mercado financiero y proceso de capital

A lo largo de esta tesis vamos a considerar un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un movimiento Browniano D-dimensional $W_t = \left(W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(D)}\right)'$, $t \geq 0$, definido sobre el mismo espacio, además, vamos a suponer que $W_0 = 0$ casi seguramente (c.s.). En este caso, el apóstofro se refiere a la operación transpuesta, de manera que W_t es un vector columna para cada $t \geq 0$.

Definimos a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ para cada $t \geq 0$ como

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left(W_s;\ 0 \leq s \leq t\right), \tag{1.1}$$

y asumimos que $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los conjuntos de probabilidad nula de $\mathcal{F}$. A $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$

se le denomina la filtración aumentada generada por W.

En general, estamos interesados en estudiar un periodo de tiempo definido por $[0,\zeta]$, donde ζ es un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, más aún, ζ puede tomar el valor $+\infty$. Sin embargo, en esta primera parte consideramos $\zeta \equiv T < \infty$, con $T > 0$ fijo.

Antes de introducir formalmente el *bono bancario* y los N activos que componen el mercado, describamos algunas de sus principales propiedades.

El precio del bono al instante t se denota por S_t^0 y es tal que $S_0^0 = 1$. Además, se asume que el proceso de precio del bono $S^0 = \{S_t^0;\ 0 \leq t \leq T\}$ es continuo, estrictamente positivo, $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado y tiene variación total finita en $[0,T]$. Así, S^0 se puede descomponer en su parte absolutamente continua y su parte singularmente continua, S^{ac} y S^{sc}, respectivamente. Por ello podemos definir para cada $t \in [0,T]$ a los procesos

$$r_t := \frac{\frac{d}{dt}S_t^{ac}}{S_t^0} \quad \text{y} \quad A_t := \int_0^t \frac{dS_u^{sc}}{S_u^0}, \tag{1.2}$$

de manera que la dinámica que describe a S^0 está dada por

$$dS_t^0 = S_t^0\left[r_t dt + dA_t\right], \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

con condición inicial $S_0^0 = 1$, o equivalentemente,

$$S_t^0 = \exp\left\{\int_0^t r_u du + A_t\right\}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.4}$$

En el caso particular cuando S^0 es absolutamente continuo, es decir, $A \equiv 0$, el precio del bono bancario se comporta como el valor de una cuenta de ahorro cuya *tasa de interés* (*libre de riesgo*) instantánea al tiempo t es r_t. En general, suponemos que r es aleatoria, dependiente del tiempo y que es $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptada.

Para introducir formalmente los procesos de precio de los N activos, consideremos la siguiente definición de un mercado financiero.

Definición 1.1. Un *mercado financiero* consiste de

(i) un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

(ii) un valor positivo T llamado *tiempo terminal* u *horizonte de observación*;

(iii) un movimiento Browniano D-dimensional $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ es la filtración aumentada generada por W;

(iv) un proceso $r = \{r_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ progresivamente medible conocido como la *tasa de interés libre de riesgo* que satisface $\int_0^T |r_t| dt < \infty$ c.s.;

(v) un proceso N-dimensional $b = \left\{(b_t^1, \ldots, b_t^N)';\ 0 \leq t \leq T\right\}$ progresivamente medible llamado *tasa media de retorno* que satisface $\int_0^T \|b_t\| dt < \infty$ c.s.;

(vi) un procesos N-dimensional $\delta = \left\{(\delta_t^1, \ldots, \delta_t^N)';\ 0 \leq t \leq T\right\}$ progresivamente medible llamado *tasa de dividendos* que satisface $\int_0^T \|\delta_t\| dt < \infty$ c.s.;

(vii) un *proceso de volatilidad* $\sigma = \{\sigma_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ progresivamente medible que toma valores en las matrices de dimensión $N \times D$ con entradas reales y que satisface $\sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \sum_0^T (\sigma_t^2)_{nd} dt < \infty$ c.s.;

(viii) un vector $S_0 = (S_0^1, \ldots, S_0^N)'$ de precios iniciales de activos;

(ix) un proceso $A = \{A_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ progresivamente medible, singularmente continuo y de variación finita, cuya variación total en $[0, t]$ es denotada por $\tilde{A}_t$.

Nos referimos a este mercado financiero como $\mathbf{M} = (r, b, \delta, \sigma, S_0, A)$.

Con lo anterior, los procesos de precio de los N activos al tiempo t están dados por $S_t^1, \ldots, S_t^N$, con valores iniciales conocidos $S_0^1, \ldots, S_0^N$. Más aún, para cada $n = 1, \ldots, N$, S^n es un proceso continuo y estrictamente positivo que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t^n = S_t^n \left[b_t^n dt + dA_t + \sum_{d=1}^D (\sigma_t)_{nd} dW_t^{(d)} \right], \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.5}$$

cuya solución está dada por

$$S_t^n = S_0^n \exp\left\{ \int_0^t \left[b_s^n - \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\sigma_s)_{nd} \right] ds + \int_0^t \sum_{d=1}^D (\sigma_s)_{nd} dW_s^{(d)} + A_t \right\}, \tag{1.6}$$

para cada $0 \leq t \leq T$ y $n = 1, \ldots, N$. En consecuencia, en los procesos de *precio descontado* de los activos, el proceso singularmente continuo A no aparece. En efecto, notemos que para cada $t \geq 0$ y $n = 1, \ldots, N$

$$\frac{S_t^n}{S_t^0} = S_0^n \exp\left\{ \int_0^t \left[b_s^n - r_s - \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\sigma_s)_{nd} \right] ds + \int_0^t \sum_{d=1}^D (\sigma_s)_{nd} dW_s^{(d)} \right\}. \tag{1.7}$$

Observación 1.1. Observemos que hasta este momento el proceso δ de la Definición 1.1 no figura en las expresiones de los precios de los activos, esto debido a que solo en ciertas aplicaciones los activos pagan dividendos. Así, si consideramos que el n-ésimo activo paga dividendos según una proporción δ_n por cada unidad monetaria invertido en él, podemos definir el proceso de *rendimiento* para ese activo por $Y_0^n = S_0^n$ y

$$dY_t^n = S_t^n \left[b_t^n dt + dA_t + \sum_{d=1}^{D} (\sigma_t)_{nd} dW_t^{(d)} + \delta_t^n dt \right], \tag{1.8}$$

para cada $t \in [0,T]$, o de manera equivalente

$$Y_t^n = S_t^n + \int_0^t S_u^n \delta_u^n du, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.9}$$

para cada uno de los N activos.

1.1.1. Procesos de portafolio y capital

Para hablar del papel que el inversionista toma dentro del mercado financiero es necesario definir la manera en que éste invierte en cada uno de los $N+1$ activos. Para esto, en la Definición 1.2 se puntualiza formalmente sobre el *proceso de portafolio* asociado a un inversionista.

Definición 1.2. Consideremos un mercado financiero $\mathbf{M} = (r, b, \delta, \sigma, S_0, A)$. Un *proceso de portafolio* (π^0, π) dentro de este mercado consiste de un proceso real-valuado $\pi^0 := \{\pi_t^0;\ 0 \le t \le T\}$ y un proceso N-dimensional $\pi := \big\{(\pi_t^1, \dots, \pi_t^N)';\ 0 \le t \le T\big\}$, ambos progresivamente $\{\mathcal{F}_t\}$-medibles tales que

$$\int_0^T |\pi_t^0 + \pi_t'\mathbf{1}| \big[|r_t| dt + d\tilde{A}_t \big] \ < \ \infty \quad \text{c.s.}, \tag{1.10}$$

$$\int_0^T \big| \pi_t' \big[b_t + \delta_t - r_t \mathbf{1} \big] \big| \, dt \ < \ \infty \quad \text{c.s.}, \tag{1.11}$$

$$\int_0^T \|\sigma_t' \pi_t\|^2 dt \ < \ \infty \quad \text{c.s.}, \tag{1.12}$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector N-dimensional con todas sus entradas iguales a 1.

En términos generales, para cada $n = 0, 1, \dots, N$ y $t \in [0,T]$, π_t^n representa la cantidad de unidades monetarias invertidas en el n-ésimo activo al instante t. Sin embargo, necesitamos una forma de observar el desempeño del proceso de portafolio en conjunto con el comportamiento de los precios en el mercado, para ello en la Definición 1.3 se aborda el *proceso de ganancia*, el cual representa la cantidad de unidades monetarias que el agente ha generado a partir de sus inversiones hasta el momento de observación.

Definición 1.3. El *proceso de ganancias* G asociado a un portafolio (π^0, π) se define por

$$\begin{aligned} G_t \; := \; & \int_0^t \big[\pi_s^0 + \pi_s'\mathbf{1}\big](r_s ds + dA_s) + \int_0^t \pi_s'\big[b_s + \delta_s - r_s\mathbf{1}\big]ds \\ & + \int_0^t \pi_s'\sigma_s dW_s, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Se dice que el proceso de portafolio (π^0, π) es *auto-financiable* si para cada $t \in [0, T]$ se satisface que

$$G_t = \pi_t^0 + \pi_t'\mathbf{1}. \tag{1.14}$$

En otras palabras, el valor del portafolio en cada instante t iguala las ganancias del inversionista hasta ese momento y, por lo tanto, no tiene que contraer deudas para seguir invirtiendo.

En la ecuación (1.13), el integrando $b + \delta - r\mathbf{1}$ es llamado el *proceso de prima al riesgo*; su n-ésima componente se considera como la compensación, en términos de tasa de crecimiento media, recibida por un inversor dispuesto a incidir en el riesgo de invertir en el n-ésimo activo.

Durante el desarrollo de esta tesis, nos referimos al proceso de portafolio únicamente por π, esto debido a que si consideramos el proceso de ganancias G y suponemos que se satisface (1.14), se sigue que π^0 está completamente determinado. Así, para referirnos a un portafolio auto-financiable, solo necesitamos considerar al proceso N-valuado π.

La siguiente definición describe una propiedad necesaria en los procesos de portafolio para posteriormente considerar martingalas relacionadas con el proceso de ganancia y lo que posteriormente será definido como el *proceso de capital*.

Definición 1.4. Un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado π que satisface (1.11) y (1.12) se dice *dominado* si el proceso de ganancia descontada definido por la semimartingala

$$\frac{G_t}{S_t^0} = \int_0^t \frac{1}{S_u^0}\pi_u'\big[b_u + \delta_u - r_u\mathbf{1}\big]du + \int_0^t \frac{1}{S_u^0}\pi_u'\sigma_u dW_u, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.15}$$

es acotado por abajo por una constante que no depende de t, aunque posiblemente dependa de π. Si (π^0, π) es un proceso de portafolio y π es dominado, entonces decimos que el portafolio (π^0, π) es dominado.

En la práctica, un agente puede tener ingresos y gastos que no están relacionados con sus inversiones, Luego, para discutir sobre el capital del inversionista no basta con considerar el proceso de ganancias asociado a su portafolio, así, debemos agregar las fuentes de capital ajenas a las inversiones. En la Definición 1.5 se desarrolla esta idea y se enuncia formalmente el *proceso de capital* de un inversionista asociado a su proceso de portafolio.

Definición 1.5. Sea $\mathcal{M}$ un mercado financiero, un proceso semimartingala Γ llamado *proceso de ingresos acumulados* y (π^0, π) un proceso de portafolio. El *proceso de capital* asociado a (Γ, π^0, π) es

$$X_t := \Gamma_t + G_t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.16}$$

El portafolio (π_0, π) se dice que es Γ-*financiado* si

$$X_t = \pi_t^0 + \pi_t' \mathbf{1}, \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{1.17}$$

De la definición anterior, Γ_t puede interpretarse como el capital que ha recibido y acumulado el inversor en el intervalo $[0, t]$, por ejemplo, puede tratarse del sueldo acumulado durante el periodo $[0, t]$ si consideramos que el agente realiza otra actividad remunerada y ajena al proceso de inversión; en ese sentido, un decremento en Γ representa el consumo del inversor. En particular, nos interesa el caso cuando $\Gamma \equiv x$, para algún $x > 0$, esto es, cuando el inversionista comienza con un capital $x > 0$ y no recibe ni consume alguna cantidad monetaria externa al proceso de inversión durante todo el tiempo de observación; en este caso, si se satisface (1.17), decimos que π es x-financiado, o simplemente, *auto-financiado* si se hace explícito que $X_0 = x$.

A partir de (1.13) y (1.16), la dinámica que sigue el proceso de capital X asociado a un proceso de portafolio Γ-financiado π, está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = d\Gamma_t + X_t\big[r_t dt + dA_t\big] + \pi_t'\big[b_t + \delta_t - r_t \mathbf{1}\big]dt + \pi_t' \sigma_t dW_t. \tag{1.18}$$

Observación 1.2. La ecuación (1.18) representa la forma más general de la dinámica de un proceso de capital, sin embargo, para los propósitos de esta tesis, nos interesa que los procesos de capital descontado sean martingalas bajo cierto cambio de medida de probabilidad, luego, no podemos considerar un proceso ajeno al mercado. Esto hace necesario suponer que el proceso $\Gamma \equiv x$, para algún $x > 0$.

1.1.2. Arbitraje y mercados completos

Una vez que hemos definido el proceso de capital y la forma en cómo el agente realiza sus inversiones, debemos agregar ciertas restricciones a los procesos que definen al mercado y a los procesos de portafolio que el inversionista puede implementar, esto con el fin de adecuar el modelo a lo que sucede en la realidad.

Uno de los aspectos que debemos cuidar es el de evitar las posibilidades de *arbitraje*. En términos generales, el arbitraje es la capacidad de generar ganancias sin el riesgo de contraer deudas, o bien, obtener ganancias a pesar de iniciar con un capital inicial igual a cero. En la siguiente definición se presenta esta idea en función de los procesos de portafolio y el proceso de ganancias.

Definición 1.6. En un mercado financiero $\mathbf{M}$ decimos que un proceso de portafolio π dominado y auto-financiable es una *oportunidad de arbitraje* si el proceso de ganancia asociado G satisface que $G_T \geq 0$ c.s. y $\mathbb{P}\big[G_T > 0\big] > 0$. Por otro lado, decimos que un mercado financiero es *viable* si no existen tales oportunidades de arbitraje.

En el siguiente teorema se dan condiciones suficientes y necesarias para afirmar que un mercado $\mathbf{M}$ es viable, en otras palabras, son condiciones para evitar oportunidades de arbitraje.

Teorema 1.1. Si un mercado $\mathbf{M}$ es viable, entonces existe un proceso progresivamente medible θ con valores en $\mathbb{R}^D$ llamado *precio del riesgo de mercado*, tal que para casi toda $t \in [0, T]$, la prima al riesgo $b_t + \delta_t - r_t\mathbf{1}$ se relaciona con θ_t a través de la ecuación

$$b_t + \delta_t - r_t\mathbf{1} = \sigma_t\theta_t, \quad \text{c.s.} \tag{1.19}$$

A la inversa, suponga que existe un proceso θ que satisface la condición anterior y además

$$\int_0^T \|\theta_s\|^2 ds < \infty, \quad \text{c.s.}, \tag{1.20}$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T \theta_s' dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta_s\|^2 ds\right\}\right] = 1. \tag{1.21}$$

Entonces el mercado $\mathbf{M}$ es viable.

Demostración. Ver Sección 1.4 de [9]. ■

Motivados por el Teorema 1.1, procedemos a dar la siguiente definición donde el término dentro de la exponencial en (1.21) adquiere mayor relevancia para nuestros propósitos.

Definición 1.7. Un modelo de mercado financiero $\mathbf{M}$ es llamado *estándar* si

(i) es viable;

(ii) el número de activos (N) es menor o igual que la dimensión del movimiento Browniano subyacente (D);

(iii) el proceso de precio del riesgo θ satisface

$$\int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt < \infty, \quad \text{c.s.}; \tag{1.22}$$

(iv) el proceso Z^0 definido por

$$Z_t^0 := \exp\left\{-\int_0^t \theta_s' dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta_s\|^2 ds\right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.23}$$

es una $\mathbb{P}$-martingala.

Luego, para un mercado estándar, definimos la medida *martingala estándar* $\mathbb{P}_0$ sobre $\mathcal{F}_T$ por

$$\mathbb{P}_0(A) := \mathbb{E}\big[Z_T^0 1_A\big], \quad \forall\ A\ \in \mathcal{F}_T. \tag{1.24}$$

Nótese que $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}$ son medidas equivalentes sobre $\mathcal{F}_T$.

Dentro de un mercado financiero estándar y de acuerdo al teorema de Girsanov, el proceso

$$W_t^0 := W_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.25}$$

es un movimiento Browniano D-dimensional bajo $\mathbb{P}_0$ con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$. Así, en términos de W^0 el proceso de ganancia descontado tiene la forma

$$\frac{G_t}{S_t^0} = \int_0^t \frac{1}{S_u^0}\pi_u' \sigma_u dW_u^0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.26}$$

es decir, es una $\mathbb{P}_0$-martingala local; mientras que el proceso de capital descontado sigue la dinámica descrita por

$$\frac{X_t}{S_t^0} = \Gamma_0 + \int_0^t \frac{d\Gamma_u}{S_u^0} + \int_0^t \frac{1}{S_u^0}\pi_u' \sigma_u dW_u^0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.27}$$

Observación 1.3. Notemos que si el proceso $\Gamma \equiv x > 0$, entonces el proceso de capital descontado sigue la dinámica descrita por

$$\frac{X_t}{S_t^0} = x + \int_0^t \frac{1}{S_u^0}\pi_u' \sigma_u dW_u^0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.28}$$

por lo que $\frac{X}{S^0}$ es una $\mathbb{P}_0$-martingala local.

Antes de continuar con la descripción del mercado, tenemos que definir el proceso de *densidad de precio del estado*, el cual tendrá un papel fundamental en el resto de esta tesis.

Definición 1.8. El proceso de *densidad de precio del estado* H está dado por

$$H_t := \frac{Z_t^0}{S_t^0}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.29}$$

donde Z^0 es la martingala definida en (1.23) y S^0 es el proceso de precio bono bancario.

Observación 1.4. De (1.28) y la definición anterior, se sigue que

$$H_t X_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es una $\mathbb{P}$-martingala, para cualquier portafolio admisible. Esto será de gran utilidad en el Capítulo 3, cuando relacionemos un problema de portafolios con un problema de martingalas.

Por otro lado, y a menos de que se afirme lo contrario, vamos a suponer que T es finito y que H satisface

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_t dt + H_T\right] < \infty. \tag{1.30}$$

Regresando a la discusión sobre las características deseables para un mercado financiero, debemos hacer énfasis en el principal propósito de un mercado, el cual es brindarle al agente la oportunidad de cubrirse del riesgo inherente de sus actividades de inversión. Para ejemplificar lo anterior, supongamos que un agente sabe, al tiempo $t = 0$, que en el futuro, al tiempo T, debe hacer un pago por un monto B, el cual no es determinista pues depende de las fluctuaciones del mercado que ocurren desde el momento $t = 0$ hasta el instante T. En ese sentido, el inversionista quiere reservar una cantidad de dinero fija x al tiempo $t = 0$ con la cual se asegure que podrá hacer el pago al tiempo T. Una estrategia conservadora sería reservar una cantidad igual al máximo valor que puede tener B, siempre que este valor sea finito. Una estrategia más razonable es reservar la menor cantidad posible, pero invertirla de tal manera que al tiempo T, el capital del inversionista haya crecido lo suficiente para cubrir el pago B. Este es el proceso de *cubrir el riesgo inherente a un pago aleatorio* y que da sentido a la siguiente definición.

Definición 1.9. Sea $\mathbf{M}$ un mercado financiero estándar y sea B una variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible tal que $\frac{B}{S_T^0}$ es acotada por abajo c.s. y

$$x := \mathbb{E}_0\left[\frac{B}{S_T^0}\right] < \infty. \tag{1.31}$$

(i) Decimos que B es *financiable*, si existe un proceso de portafolio π dominado y x-financiado cuyo proceso de capital satisface $X_T = B$, es decir,

$$\frac{B}{S_T^0} = x + \int_0^T \frac{1}{S_u^0}\pi_u' \sigma_u dW_u^0, \quad \text{c.s.} \tag{1.32}$$

(ii) Decimos que el mercado financiero **M** es *completo* si para cada variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible B, con $\frac{B}{S_T^0}$ acotado por abajo c.s. y que satisface (1.31), es financiable. En otro caso, decimos que el mercado es *incompleto*.

En el contexto de esta definición, si podemos hallar un portafolio x-financiado y dominado π tal que su proceso de capital asociado X satisface $X_T = B$ c.s., entonces $\mathbb{E}_0\left[\frac{X_T}{S_T^0}\right] = x$, con lo cual, $\frac{X}{S^0}$ es una $\mathbb{P}_0$-martingala y, en consecuencia, X está determinado de manera única por la ecuación

$$X_t = \mathbb{E}_0\left[\frac{S_t^0}{S_T^0}B\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.33}$$

El Teorema 1.2 nos brinda condiciones suficientes y necesarias para que un mercado estándar sea completo.

Teorema 1.2. Un mercado financiero estándar $\mathcal{M}$ es completo si y solo si el número de acciones N es igual a la dimensión del movimiento Browniano y la matriz σ_t es no singular para casi toda $t \in [0, T]$.

Demostración. Ver Sección 1.6 de [9]. ■

Como consecuencia del Teorema 1.2 podemos afirmar que en un mercado completo **M** existe un único proceso de precio del riesgo de mercado θ que satisface (1.19) y que está dado de manera explícita para cada $t \in [0, T]$ por

$$\theta_t = \big(\sigma_t\big)^{-1}\big[b_t + \delta_t - r_t\mathbf{1}\big], \tag{1.34}$$

lo cual es fundamental para describir la forma de la probabilidad martingala estándar $\mathbb{P}_0$.

1.2. Funciones de utilidad y orden cóncavo

Hasta este momento se ha considerado que el agente toma las decisiones de inversión de manera que satisfagan ciertas condiciones técnicas, sin embargo, no se han contemplado las preferencias que éste tiene en el momento de invertir. En ese sentido, existen agentes que prefieren ser conservadores al momento de invertir y algunos otros que prefieren tomar decisiones más audaces. Con el fin de agregar este aspecto a los modelos de inversión que hemos definido, en esta sección se desarrolla la teoría de funciones de utilidad que representan, en cierto sentido, las preferencias de inversión del agente.

1.2.1. Funciones de utilidad

Basado en lo descrito en [11] por Ralf Korn, presentamos lo siguiente.

Definición 1.10. Decimos que $U : (0, \infty) \to [-\infty, \infty)$ es una *función de utilidad* si es estrictamente creciente, estrictamente cóncava, tiene derivada continua y satisface que

$$U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}U(x) = 0 \quad \text{y} \quad U'(0^+) := \lim_{x\downarrow 0} \frac{d}{dx}U(x) = \infty. \tag{1.35}$$

Las condiciones que debe cumplir una función de utilidad tienen sentido propio desde un punto de vista monetario. En general, es natural asumir que una función de utilidad U sea estrictamente creciente, ya que, si un agente puede disponer de dos cantidades $x, y > 0$ tales que $x < y$, entonces $U(x) < U(y)$, es decir, prefiere aquella con mayor valor absoluto. Por otro lado, la condición $U'(0^+) = \infty$ se interpreta como que el inversionista prefiere cualquier cantidad que sea apenas mayor que cero, mientras que $U'(\infty) = 0$ se refiere al hecho de que mientras más grandes sean las cantidades que imperan al inversionista, menor será la preferencia de una sobre la otra.

La concavidad conlleva un significado con mayor relación a las preferencias de inversionista y se refiere a un concepto denominado *aversión al riesgo*. Para clarificar este último concepto, supongamos que a un inversionista se le asocia una función de utilidad U y consideremos una cantidad aleatoria de capital X, entonces, por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$\mathbb{E}\big[U(X)\big] \leq U\big(\mathbb{E}[X]\big),$$

esto significa que, en general, un inversionista con función de utilidad U prefiere no arriesgarse y obtener una cantidad $\mathbb{E}[X]$ no aleatoria por encima de arriesgarse y aceptar una cantidad aleatoria $U(X)$. De esta manera, se dice que un inversionista con este tipo de comportamiento es *averso al riesgo*.

Como se verá en la siguiente sección, la propiedad de concavidad de las funciones de utilidad tendrá varios beneficios en favor del desarrollo del problema optimización de portafolios. Mientras tanto, abrimos la discusión sobre algunos ejemplos específicos de funciones de utilidad.

Tipos de funciones de utilidad

Una primera clasificación de funciones de utilidad se realiza a partir de cierta medida para la aversión al riesgo. Una de esas medidas es el *medida de Arrow-Pratt de aversión al riesgo absoluto* (ARA, por sus siglas en inglés), introducida por los economistas Kenneth Arrow y John W. Pratt [1], también conocido como el coeficiente de aversión al riesgo absoluto, el cual se define para cualquier función de utilidad U como

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\left(\ln U'\right)'(x), \quad x \geq 0.$$

Notemos que A se relaciona con la curvatura de la función U, en ese sentido, afirman Arrow y Pratt que entre mayor sea la curvatura de la función U, mayor será la aversión al riesgo del inversor.

Otra medida de aversión al riesgo es la *medida de Arrow-Pratt de aversión al riesgo relativo* (RRA) y cuyo coeficiente para cualquier función de utilidad se define como

$$R(x); = xA(x), \quad x > 0.$$

Con lo anterior, podemos definir las siguientes dos familias de funciones de utilidad.

(a) **Aversión al riesgo absoluto constante (CARA):** Esta clase de funciones de utilidad se refieren al caso cuando $A(x) = \alpha$, para algún $\alpha > 0$. Así, de la definición de A, una función de utilidad U tipo CARA debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\alpha = -\frac{U''(x)}{U'(x)},$$

por lo que U tiene la forma $U(x) = a - be^{-\alpha x}$. Luego, a través de una normalización de la función U obtenemos

$$U(x) = 1 - e^{-\alpha x}.$$

(b) **Aversión al riesgo absoluto hiperbólico (HARA):** Como lo nombre lo indica, este caso considera cuando A tiene una forma hiperbólica, esto es,

$$A(x) = \frac{1-\alpha}{x}, \quad x > 0,$$

para algún $\alpha < 1$. Así, la funciones de utilidad de esta familia son de la forma

$$U_\alpha(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{1}{\alpha}x^\alpha, & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

Bajo la medida de aversión al riesgo relativo, las funciones de utilidad que tiene la forma como en (1.36), también son conocidas como *funciones de utilidad de aversión al riesgo relativo constante* (CRRA). Estas últimas serán de gran utilidad para el desarrollo del problema de optimización de portafolios en el Capítulo 3, ya que son las únicas que permiten una expresión explícita para la solución vía martingalas.

1.2.2. Orden cóncavo estocástico

Es momento de introducir una noción de orden para variables aleatorias a partir del valor esperado de su composición con funciones cóncavas. Este nuevo concepto aporta otra noción de optimalidad para ciertos problemas de optimización, como se verá en la última sección de este capítulo.

Definición 1.11. Sean X y Y dos variables aleatorias, se dice que X es menor que Y en el *orden cóncavo estocástico*, denotado por $X \leq_{cv} Y$, si para toda función cóncava real-valuada g

$$\mathbb{E}\big[g(X)\big] \leq \mathbb{E}\big[g(Y)\big], \tag{1.37}$$

siempre que ambas esperanzas existan. Además, si (1.37) es válido para cualquier función cóncava y estrictamente creciente, decimos que X es menor que Y en el *orden cóncavo estocástico creciente* y denotamos por $X \leq_{icv} Y$.

La importancia del orden cóncavo recae en las implicaciones que se generan, grosso modo, si X es menor que Y en el orden cóncavo, entonces X es más "pequeño" y presenta mayor "variabilidad" que Y, en cierto sentido. Para dilucidar lo anterior, consideremos las funciones cóncavas $\varphi_1(x) = x$ y $\varphi_2(x) = -x$, de la Definición 1.11 podemos observar que, si $X \leq_{cv} Y$ entonces

$$\mathbb{E}\big[X\big] = \mathbb{E}\left[Y\right],$$

en particular, $\mathbb{E}\big[X\big] \leq \mathbb{E}\left[Y\right]$. Por otro lado, si proponemos la función $\varphi_3(x) = -\big(x - \mathbb{E}[X]\big)^2$, deducimos que

$$Var\big[X\big] \geq Var\big[Y\big],$$

siempre que $Var\big[X\big] < \infty$. De esta manera, si $X \leq_{cv} Y$, podemos garantizar que X presenta mayor variabilidad que X. Más aún, si $X \leq_{icv} Y$, se garantiza que X es menor que Y en media y presenta mayor variabilidad.

1.3. Optimización de portafolios

El objetivo de esta sección es presentar el problema de optimización del portafolio de un inversor que comercia en un mercado estándar completo como el que se ha definido en las secciones anteriores. En general, el objetivo de este agente es maximizar la utilidad esperada de su proceso de capital al final del horizonte de planeación. Por último, consideramos que el agente es un *inversor pequeño* en el sentido de que sus acciones no influyen en los precios del mercado.

Así, el papel que el agente desempeña en el mercado financiero se restringe a la elección de un *proceso de portafolio* y un *proceso de consumo*, este último definiéndose como sigue.

Definición 1.12. Un *proceso de consumo* es un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-medible no negativo $c = \{c_t;\ 0 \le t \le T\}$ que satisface $\int_0^T c_t dt < \infty$ c.s.

De esta manera, un inversionista que cuenta con un capital inicial $x \ge 0$ y que elige un proceso de consumo c, tendrá asociado un proceso de ingresos acumulado $\Gamma_t = x - \int_0^t c_u du$, $0 \le t \le T$. Así, si este agente elige un proceso de portafolio Γ-financiado π, entonces su proceso de capital $X^{x,c,\pi}$ satisface la ecuación

$$\frac{X_t^{x,c,\pi}}{S_t^0} = x - \int_0^t \frac{c(u)}{S_u^0} du + \int_0^t \frac{1}{S_u^0} \pi' \sigma_u dW_u^0, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.38}$$

Sin embargo, nos interesan sólo el conjunto de pares de procesos de portafolio y consumo que mantengan el capital del inversionista como una cantidad no negativa, por lo que presentamos la siguiente definición.

Definición 1.13. Dado $x \ge 0$, decimos que un par de procesos de consumo y portafolio (c, π) es *admisible* en x, y escribimos $(c, \pi) \in \mathcal{A}(x)$, si el proceso de capital $X^{x,c,\pi}$ asociado a x, c y π satisface

$$X_t^{x,c,\pi} \ge 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.39}$$

casi seguramente. Acordamos además que $\mathcal{A}(x) = \emptyset$ siempre que $x < 0$.

Ahora necesitamos una manera de cuantificar la elección del proceso de portafolio y el proceso de consumo. Para ello consideremos lo siguiente.

Definición 1.14. Una *estructura de preferencias* consiste de un par de funciones $U_1 : [0, T] \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ y $U_2 : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ que satisfacen lo siguiente

1. Para cada $t \in [0, T]$, $U_1(t, \cdot)$ es una función de utilidad (ver Definición 1.10).

2. U_2 es una función de utilidad.

Con lo anterior, nos encontramos en condiciones de definir de manera formal el problema de optimización de portafolios en su forma general.

Definición 1.15. Consideremos un agente con capital inicial $x \geq 0$ que invierte en un mercado financiero estándar completo al que asociamos una estructura de preferencia (U_1, U_2). Luego, el agente puede considerar cualquiera de los siguientes tres problemas

Problema 1. Hallar un par de procesos de consumo y portafolio $\left(c^{(1)}, \pi^{(1)}\right) \in \mathcal{A}_1(x)$ que resuelva el problema de maximización de la utilidad de consumo durante el periodo $[0, T]$, es decir, que verifica

$$\sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}_1(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^T U_1(t, c_t)dt\right],$$

donde

$$A_1(x) := \left\{(c, \pi) \in \mathcal{A}(x);\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \text{mín}\left\{0, U_1(t, c_t)\right\} dt\right] > -\infty\right\}.$$

Problema 2. Encontrar un par de procesos de consumo y portafolio $\left(c^{(2)}, \pi^{(2)}\right) \in \mathcal{A}_2(x)$ que resuelva el problema de maximización de la utilidad terminal esperada, es decir, que verifica

$$\sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}_2(x)} \mathbb{E}\left[U_2\left(X_T^{x,c,\pi}\right)\right],$$

donde

$$A_2(x) := \left\{(c, \pi) \in \mathcal{A}(x);\ \mathbb{E}\left[\text{mín}\left\{0, U_2\left(X_T^{x,c,\pi}\right)\right\}\right] > -\infty\right\}.$$

Problema 3. Encontrar un par de procesos $\left(c^{(3)}, \pi^{(3)}\right) \in \mathcal{A}_3(x)$ que resuelva el problema de maximización de la utilidad de consumo durante el periodo $[0, T]$ y la utilidad terminal esperada, es decir, que verifica

$$\sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}_3(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^T U_1(t, c_t)dt + U_2\left(X_T^{x,c,\pi}\right)\right],$$

donde

$$A_3(x) := A_1(x) \cap A_2(x).$$

Observación 1.5. Para el desarrollo de esta tesis nos interesa el Problema 2 de la Definición 1.15. Además, notemos que de la dinámica del proceso de capital descrita en (1.38), la mejor estrategia de consumo para máximizar el valor terminal esperado es no consumir, esto es, $c_t = 0$ para cada $t \in [0, T]$.

Con base en esta observación, para cada proceso de portafolio π, el proceso de capital asociado sigue la dinámica descrita por la ecuación

$$\frac{X_t^{x,\pi}}{S_t^0} = x + \int_0^t \frac{1}{S_u^0}\pi'\sigma_u dW_u^0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

y el problema de optimización de portafolios que se considera en esta tesis está dado por la siguiente definición.

Definición 1.16 (Problema de optimización de portafolio)**.** Consideremos un agente con capital inicial $x > 0$ que invierte en un mercado financiero estándar completo y que tiene asociado una función de utilidad U. El problema de optimización de la utilidad terminal esperada consiste en encontrar un proceso de portafolio óptimo $\pi^* \in \mathcal{A}^1(x)$ para el problema de maximización de la utilidad terminal esperada, esto es, que el proceso de capital asociado a π^*, X^{x,π^*}, verifica

$$\mathbb{E}\left[U\left(X_T^{x,\pi^*}\right)\right] = \sup_{\pi\in\mathcal{A}^1(x)} \mathbb{E}\left[U\left(X_T^{x,\pi}\right)\right],$$

donde

$$\mathcal{A}^1(x) := \{\pi;\ X_t^{x,\pi} \geq 0\ \forall\ t\in[0,T],\ \mathbb{E}\left[\text{mín}\left\{0, U\left(X_T^{x,\pi}\right)\right\}\right] > -\infty\}.$$

Este problema ha sido ampliamente estudiado y puede ser consultado en [9], [11] y [18], donde se muestran ejemplos y casos específicos donde es resuelto de manera explícita. Este problema es llamado comúnmente el *problema de optimización de portafolios sin restricciones* debido a que no hacemos suposiciones extras o también conocido como el problema de Merton (ver [11]). Sin embargo, el problema que nos interesa añade una restricción fundamental al proceso de capital y el cual puede ser enunciado como sigue.

Definición 1.17 (Problema de optimización de portafolios con restricción)**.** Consideremos un agente con capital inicial $x > 0$ que invierte en un mercado financiero estándar completo al que asociamos una función de utilidad U y un proceso opcional $K = \{K_t : 0 \leq t \leq T\}$ no negativo y tal que $K_0 \leq x$. El problema de optimización de portafolios con restricción consiste en hallar un proceso de portafolio óptimo $\pi^* \in \mathcal{A}_K(x)$ para el problema

$$\max_{\pi\in\mathcal{A}_K(x)} \mathbb{E}\big[U(X_T^{x,\pi})\big], \tag{1.40}$$

donde

$$\mathcal{A}_K(x) = \left\{\pi\in\mathcal{A}^1; X_t^{x,\pi} \geq K_t\ \forall\ t\in[0,T]\right\}. \tag{1.41}$$

Esta restricción que se agrega al problema de optimización se debe a que en la práctica es común que en cada instante de tiempo el inversionista deba poseer una cantidad mínima de capital que le permita hacer frente a cualquier situación desfavorable del mercado, o bien, procurar que su capital sea mayor a algún índice de mercado; a esta restricción se le denomina comúnmente *garantía Americana*.

Por otro lado, notemos que el problema de optimización depende fuertemente, entre otros factores, de la función de utilidad asociada al inversionista, sin embargo, en la práctica es usual que el proceso de capital no represente a un único agente, más aún, representa el capital de un conjunto de inversionistas donde cada uno tiene sus propias preferencias de inversión. Considerando esto, el problema que planteamos en esta tesis consiste en optimizar la utilidad esperada al final del periodo de observación para cualquier función de utilidad. Formalmente definimos el problema de optimización a través del orden cóncavo que se definió en secciones anteriores.

Definición 1.18 (Problema de optimización de portafolios con garantía Americana respecto al orden cóncavo)**.** Consideremos un agente con capital inicial $x > 0$ que cotiza en un mercado financiero estándar completo y un proceso opcional K no negativo. El problema de optimización de portafolios con respecto al orden cóncavo consiste en hallar un proceso de portafolio $\pi^* \in \mathcal{A}_K(x)$ tal que el proceso de capital X^{x,π^*} satisface

$$X_T^{x,\pi^*} \geq_{cv} X_T^{x,\pi}, \quad \forall\, \pi \in \mathcal{A}_K(x), \tag{1.42}$$

En el siguiente capítulo relacionamos el problema de la Definición 1.18 con un problema de martingalas basándonos en las ideas desarrollas por Nicole El Karoui y Asma Meziou, más aún, desarrollamos la teoría necesaria para resolver este último problema a través de un teorema de representación de supermartingalas.

Capítulo 2

Descomposición de supermartingalas y optimización de martingalas

En este capítulo se presenta un resultado análogo al teorema de descomposición de Doob-Meyer, describiendo un resultado de representación de supermartingalas en el álgebra Máx-Plus. En ese sentido, se muestra la existencia y la forma de la representación para algunos ejemplos específicos como son los procesos de Lévy multiplicativos y aditivos. En la última sección se presenta el problema de optimización de martingalas con garantía americana respecto al orden cóncavo y su solución a través del resultado propuesto para descomposición de supermartingalas.

Para el desarrollo de este capítulo consideramos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ que satisface las condiciones usuales definidas en el Capítulo 1 y vamos a suponer que $\{F_t\}$ es *casi-continua* por la izquierda, es decir, para cada tiempo de paro *predecible* τ, se tiene que $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau^-}$. Además de esto, necesitamos introducir las siguientes definiciones.

Definición 2.1.

1. El *horizonte* del problema ζ es un tiempo de paro bajo la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y puede ser infinito.

2. Decimos que un proceso X es dominado por un proceso Y, o bien, que Y domina a X si
$$Y_t \geq X_t, \text{ c.s.} \quad t \geq 0.$$

3. Se dice que un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado X es de *clase* $(\mathcal{D})$ si $|X|$ es dominado por una martingala uniformemente integrable. Más aún, si X es una martin-

gala (supermartingala), entonces decimos que X es una $(\mathcal{D})$-martingala ($(\mathcal{D})$-supermartingala).

4. Un proceso adaptado Z es la *envoltura de Snell* de un proceso X si
   - Z es una supermartingala;
   - Z domina a X; y
   - Si Y es una supermartingala que domina a X, entonces Y domina a Z.

Observación 2.1. Notemos que, de la Definición 2.1.4, cualquier martingala M que domina a un proceso X, también domina a su envoltura de Snell. Esto será fundamental en el Capítulo 3 para relacionar el problema de portafolios con restricciones y un problema de martingalas.

2.1. Descomposición de supermartingalas

Dentro de la teoría de procesos estocásticos, la descomposición de Doob-Meyer constituye el resultado más conocido de descomposición de una supermartingala; en este resultado, la supermartingala se expresa como la diferencia entre una martingala local y un proceso predecible no decreciente. En ese sentido, han surgido nuevos resultados similares motivados por problemas de optimización en Matemáticas Financieras. En general, existen otros métodos de descomposición que se basan en distintas operaciones tales como la multiplicación, donde la supermartingala de interés se descompone como el producto de una única martingala y un único proceso predecible no creciente (ver [5], [10] ó [12]).

En esta sección nos enfocamos en un nuevo tipo de descomposición relacionado con la operación máx, esto es, si consideramos una supermartingala Z de clase $(\mathcal{D})$, el problema consiste en hallar un proceso opcional $L = \{L_t;\ 0 \leq t \leq \zeta\}$ tal que

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{2.1}$$

Esta forma de descomposición se deriva de considerar una nueva estructura algebraica: el semicampo Máx-Plus ($\mathbb{R}_{\text{máx}}$). Formalmente, $\mathbb{R}_{\text{máx}}$ denota al conjunto de los reales adicionado con el punto $-\infty$ y dotado de las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ tales que

$$x \oplus y = \text{máx}\{x, y\} \quad \text{y} \quad x \otimes y = x + y,$$

para cada $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Este enfoque fue desarrollado por El Karoui y Meziou en [5], sin embargo, en esta tesis se presentan los resultados necesarios para garantizar dicha descomposición considerando únicamente las propiedades del supremo.

A continuación se presentan el resultado principal de la sección que enuncia la descomposición Máx-Plus de una supermartingala en términos del proceso del supremo de un proceso opcional L. De manera más específica, la primera parte del Teorema presenta la descomposición, mientras que la segunda parte versa sobre la martingala relacionada a dicha descomposición para, finalmente, garantizar la unicidad de dicha descomposición. Sin embargo, la prueba de la primera y última parte, requiere de otros resultados que serán desarrollados más adelante.

Teorema 2.1. Sea Z una $(\mathcal{D})$-supermartingala casi-continua por la izquierda definida en $[0,\zeta]$. Entonces se verifica lo siguiente

1. Z admite la siguiente descomposición Máx-Plus

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\sup_{t\le u\le\zeta} L_u \vee Z_\zeta \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \le t \le \zeta, \tag{2.2}$$

   donde $L = \{L_t; 0 \le t \le \zeta\}$ es un proceso opcional semicontinuo superiormente por la derecha que satisface que $L_\zeta \le Z_\zeta$.

2. Sea $L^*_{t,s}$ el proceso del supremo càdlàg de L, es decir, $L^*_{t,s} := \sup_{t\le u\le s} L_u$, para $s,t \in [0,\zeta]$ y $t \le s$. Definamos la $(\mathcal{D})$-martingala $M^\oplus$ por

$$M^\oplus_t := \mathbb{E}\left[L^*_{0,\zeta} \vee Z_\zeta \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \le t \le \zeta, \tag{2.3}$$

   entonces, para cada $t \in [0,\zeta]$ se tiene que

$$M^\oplus_t \ge \text{máx}(Z_t, L^*_{0,t}) \text{ c.s.}, \tag{2.4}$$

   y para cualquier tiempo de paro $S \le \zeta$ tal que $L_S = L^*_{0,S}$, se tiene

$$M^\oplus_S = Z_S \quad \text{c.s.} \tag{2.5}$$

   Como consecuencia, se verifica la siguiente condición *flat-off*

$$\int_{[0,\zeta]} \left(M^\oplus_s - Z_s\right) dL^*_{0,s} = 0. \tag{2.6}$$

3. Esta descomposición es única en términos del Teorema 2.2.

Demostración. 1. Ver Teorema 2.4, Sección 2.1.1.

2. Para cada tiempo $t \in [0, \zeta]$ y dado que $L^*_{0,\zeta} = L^*_{0,t} \vee L^*_{t,\zeta}$, se tiene

$$\begin{aligned} M_t^{\oplus} &:= \mathbb{E}\big[L^*_{0,\zeta} \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t\big] \\ &= \mathbb{E}\big[L^*_{0,t} \vee L^*_{t,\zeta} \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t\big] \\ &\geq L^*_{0,t} \vee \mathbb{E}\big[L^*_{t,\zeta} \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t\big] \\ &= L^*_{0,t} \vee Z_t, \end{aligned}$$

es decir, $M_t^{\oplus} \geq L^*_{0,t} \vee Z_t$, para cada $t \in [0, \zeta]$. Además, si S es un tiempo de paro tal que $L_S = L^*_{0,S}$, entonces $L^*_{S,\zeta} = L^*_{0,\zeta}$, y por lo tanto, $Z_S = M_S^{\oplus}$.

■

La descomposición dada en (2.2) es similar al resultado de Doob-Meyer en el sentido de que es una descomposición respecto a la suma de $\mathbb{R}_{\text{máx}}$, aunque en este caso el proceso no decreciente es opcional y no necesariamente predecible.

Ahora, en el Teorema 2.2 se prueba la unicidad sin necesidad de la forma explícita de la descomposición Máx-Plus, más aún, basta considerar que la condición flat-off se satisface por un proceso no decreciente Λ.

Teorema 2.2 (Unicidad)**.** Sea Z una $(\mathcal{D})$-supermartigala y suponga que existe una $(\mathcal{D})$-martingala M con $M_0 = Z_0$ y un proceso càdlàg adaptado y no decreciente Λ que toma valores en $[-\infty, \infty)$ y que satisface para cada $t \in [0, t]$ que

$$M_t \geq Z_t \quad \text{c.s.} \quad \text{y} \quad M_\zeta = \Lambda_\zeta \vee Z_\zeta, \quad \text{c.s.} \tag{2.7}$$

Además suponga que Λ solo crece al tiempo $t \leq \zeta$ siempre que $M_t = Z_t$, es decir, Λ satisface la condición *flat-off*

$$\int_{[0,\zeta]} (M_t - Z_t) d\Lambda_t = 0 \quad \text{c.s.} \tag{2.8}$$

Entonces la martingala M es única y será denotada por $M^{\oplus}$.

Observación 2.2. De forma más específica, la condición flat-off consiste en que Λ_t solo crece para los $t \in [0, \zeta]$ tales que $M_t = Z_t$. Esto será fundamental para la prueba del resultado.

Demostración. Supongamos que existen dos descomposiciones $(M^1, \Lambda^{+,1})$ y $(M^2, \Lambda^{+,2})$, donde $\Lambda^{+,i}$ es la modificación de Λ^i que tiene un incremento al tiempo ζ y que satisface $\Lambda^{+,i}_\zeta = \Lambda^i_\zeta \vee Z_\zeta$, para $i = 1, 2$. Además, suponga que estas dos parejas satisfacen las condiciones (2.7) y (2.8). Por simplicidad vamos a considerar que $\Lambda_0^{+,1}$ y $\Lambda_0^{+,2}$ son finitos, ya que en el caso donde son infinitos, basta definir $-\infty + \infty = 0$.

Ahora, sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función positiva, regular, convexa en $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$ que se anula en cero. Luego, dado que $f(0)=0$, por la convexidad de f se tiene

$$f\big(M_\zeta^1-M_\zeta^2\big)\leq f'\big(M_\zeta^1-M_\zeta^2\big)\big(M_\zeta^1-M_\zeta^2\big)=f'\big(\Lambda_\zeta^{+,1}-\Lambda_\zeta^{+,2}\big)\big(M_\zeta^1-M_\zeta^2\big) \tag{2.9}$$

Ahora vamos a usar la representación diferencial de procesos de variación finita, para ello es conveniente introducir la aproximación discreta de la derivada de f' como

$$f_d''(x,\delta)=\begin{cases}\frac{1}{\delta}\big(f'(x+\delta)-f'(x)\big), & \text{si } \delta\neq 0,\\ f''(x), & \text{si } \delta=0.\end{cases}$$

Así, si definimos $\Delta_s^{1,2}:=\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big)-\big(\Lambda_{s^-}^{+,1}-\Lambda_{s^-}^{+,2}\big)$ para cada $s\in(0,\zeta)$, tenemos

$$\begin{aligned} f'\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big) &= f'\big(\Lambda_0^{+,1}-\Lambda_0^{+,2}\big)+\int_{(0,\zeta]} f_d''\big(\Lambda_{s^-}^{+,1}-\Lambda_{s^-}^{+,2},\Delta_s^{1,2}\big)d\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big)\\ &= f'\big(\Lambda_0^{+,1}-\Lambda_0^{+,2}\big)+\int_{(0,\zeta]}\tilde f_d''(s)d\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big),\end{aligned}$$

donde $\tilde f_d''(s):=f_d''(\Lambda_{s^-}^{+,1}-\Lambda_{s^-}^{+,2},\Delta_s^{1,2})$, más aún, dado que f es una función regular convexa en $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, $\tilde f_d''$ es positivo y acotado.

Por otro lado, notemos que M^1-M^2 es una martingala u.i., de manera que $\mathbb{E}[M_\zeta^1-M_\zeta^2|\mathcal{F}_t]=M_t^1-M_t^2$ para cada $t\in[0,\zeta]$, mientras que, por construcción, $\Big(\tilde f_d''\Big)$ es un proceso adaptado, por lo cual se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f'(\Lambda_\zeta^{+,1}-\Lambda_\zeta^{+,2})(M_\zeta^1-M_\zeta^2)\big] &= \mathbb{E}\big[f'(\Lambda_0^{+,1}-\Lambda_0^{+,2})(M_\zeta^1-M_\zeta^2)\big]\\ &\quad+\mathbb{E}\left[\int_{(0,\zeta]}(M_s^1-M_s^2)\tilde f_d''(s)d\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big)\right].\end{aligned}$$

Por hipótesis, $\Lambda^{+,1}$ y $\Lambda^{+,2}$ sólo tienen incrementos en los instantes $t\leq\zeta$ tales que $M_t^1=Z_t$ y $M_t^2=Z_t$, respectivamente; de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{(0,\zeta]}(M_s^1-Z_s+Z_s-M_s^2)\tilde f_d''(s)d\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big) &= \int_{(0,\zeta]}\tilde f_d''(s)(Z_s-M_s^2)d\Lambda_s^{+,1}\\ &\quad-\int_{(0,\zeta]}\tilde f_d''(s)(M_s^1-Z_s)d\Lambda_s^{+,2},\end{aligned}$$

y dado que M^1 y M^2 dominan a Z, se verifica que

$$\int_{(0,\zeta]}(M_s^1-M_s^2)\tilde f_d''(s)d\big(\Lambda_s^{+,1}-\Lambda_s^{+,2}\big)\leq 0,$$

luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f'(\Lambda_\zeta^{+,1}-\Lambda_\zeta^{+,2})(M_\zeta^1-M_\zeta^2)\big] &\leq \mathbb{E}\big[f'(\Lambda_0^{+,1}-\Lambda_0^{+,2})(M_\zeta^1-M_\zeta^2)\big]\\ &= f'(\Lambda_0^{+,1}-\Lambda_0^{+,2})\mathbb{E}\big[M_\zeta^1-M_\zeta^2\big]=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (2.9) podemos concluir que

$$\mathbb{E}\big[f(M_\zeta^1-M_\zeta^2)\big]=0,$$

para toda función convexa en $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, con lo que concluimos que $M^1=M^2$ c.s. ■

En la siguiente sección se desarrolla lo necesario para garantizar la existencia y forma del proceso L con que se concluiría formalmente la prueba de la descomposición Máx-Plus de una supermartingala.

2.1.1. Existencia de la descomposición Máx-Plus

En el Teorema 2.1 se asume que existe un proceso opcional L con el cual se desarrolla la descomposición de la supermartingala. En ese sentido es necesario describir la teoría y los resultados que garanticen la existencia de dicho proceso.

Definición 2.2. 1. Denotamos por $\mathcal{T}$ a la familia de todos los tiempos de paro; y para algún $S\in\mathcal{T}$ fijo, definimos al conjunto de los tiempos de paro posteriores a S por $\mathcal{T}_S:=\{\tau\geq S;\tau\in\mathcal{T}\}$.

2. Decimos que un proceso es $(\mathcal{D})$-regular si es un proceso càdlàg de clase $(\mathcal{D})$.

3. Para cada $m\in\mathbb{R}$ y Z una supermartingala $(\mathcal{D})$-regular, el proceso $Z(m)=\{Z_t(m);\ 0\leq t\leq\zeta\}$ denota a la envoltura del Snell del proceso $Z\vee m$.

El proceso $Z(m)$ será fundamental para el desarrollo de la teoría posterior. De manera más específica, estamos interesados en la familia de supermartingalas como función del parámetro $m\in\mathbb{R}$. Por otro lado, la caracterización dual de $Z(m)$ es bien conocida (ver Apéndice D de [9]) y está dada para cada $S\in\mathcal{T}_{0,\zeta}$ por

$$Z_S(m)=\operatorname*{ess\ sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{S,\zeta}}\mathbb{E}\big[Z_\tau\vee m|\mathcal{F}_S\big], \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{T}_{S,\zeta}\subset\mathcal{T}$ denota al conjunto de tiempos de paro que toman valores en $[S,\zeta]$. A partir de lo anterior, es posible hacer las siguientes observaciones.

- Si M es una martingala, entonces $M \vee m$ es una submartingala, por lo que, para todo tiempo de paro $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$ tal que $S \leq \zeta$, se tiene

$$\mathbb{E}\left[M_S \vee m\right] \leq \mathbb{E}\left[M_\zeta \vee m\right].$$

Entonces por (2.10), $M.(m)$ es una martingala y

$$M_S(m) = \mathbb{E}\left[M_\zeta \vee m \middle| \mathcal{F}_S\right], \tag{2.11}$$

para cada $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$.

- Si Z es una supermartingala $(\mathcal{D})$-regular, entonces existen dos martingalas U y V tales que $U \leq Z \leq V$, luego, para cada $m \in \mathbb{R}$, la envoltura de Snell $Z(m)$ es de clase $(\mathcal{D})$ y para cada $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$ se verifica

$$\mathbb{E}\big[U_\zeta \vee m|\mathcal{F}_S\big] \leq Z_S(m) \leq \mathbb{E}\big[V_\zeta \vee m|\mathcal{F}_S\big]$$

La siguiente proposición precisa las propiedades de una versión regular de la familia de supermartingalas indexadas con el parámetro m.

Proposición 2.1. Existe una versión 1-Lipchitz regular de la transformación $(S, m) \mapsto Z_S(m)$, tal que $m \mapsto Z_S(m)$ es convexo, no decreciente y la transformación $m \mapsto Z_S(m) - m$ es convexa no creciente. Más aún, para cada variable aleatoria $\mathcal{F}_S$-medible, Λ_S, se tiene

$$Z_S(\Lambda_S) = \operatorname*{ess\,sup}_{S \leq \tau \leq \zeta} \mathbb{E}\big[Z_\tau \vee \Lambda_S|\mathcal{F}_S\big].$$

Demostración. Ver Apéndice de [5]. ■

El siguiente teorema exhibe más propiedades de la envoltura de Snell $Z(m)$ y lo relaciona directamente con resultados de la teoría de tiempo de paro óptimo. La prueba detallada del mismo puede encontrarse en [5].

Teorema 2.3. Sea Z una supermartingala $(\mathcal{D})$-regular. Entonces se verifica que

(a) $Z(m)$ es una supermartingala $(\mathcal{D})$-regular.

(b) Definamos $T_S(m) := \text{ínf}\,\{t \in [S, \zeta]; Z_t(m) = Z_t\}$ con el supuesto de $\text{ínf}\,\emptyset = \infty$. Entonces, el tiempo de paro $T_S(m) \wedge \zeta$ es un tiempo de paro óptimo, es decir,

$$Z_S(m) = \mathbb{E}\big[\, Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee m \big| \,\mathcal{F}_S\big] \quad \text{y} \quad Z_{T_S(m)\wedge\zeta}(m) = Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee m.$$

(c) La familia $m \mapsto T_S(m) \wedge \zeta$ es no decreciente y continua por la izquierda.

Con base en los resultados de regularidad anteriores, podemos esbozar una representación explícita de $Z_S(m)$ para m y $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$ fijos, misma que será de utilidad para obtener la descomposición Máx-Plus explícita de Z. Más aún, se presenta una caracterización de la derivada por la izquierda de $Z_S(m)$ como función de m. Lo anterior, es enunciado y probado en la siguiente proposición.

Proposición 2.2 (Representación estática de $Z_t(m)$)**.** Sea $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$ fijo y $\Lambda_S(\alpha)$ la inversa por la izquierda al tiempo α de la transformación $m \mapsto T_S(m)$ para cada $m \in \mathbb{R}$, esto es

$$\Lambda_S(\alpha) := \sup\{m \in \mathbb{R}; T_S(m) \leq \alpha\}, \tag{2.12}$$

con la convención de $\sup \emptyset = -\infty$. Entonces se verifica lo siguiente

(a) La transformación convexa $m \mapsto Z_S(m)$ tiene derivada por la izquierda que satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m) &= \mathbb{P}\left[\, Z_\zeta < m; T_S(m) = \infty | \, \mathcal{F}_S\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\, Z_\zeta < m; \Lambda_S(\zeta) < m | \, \mathcal{F}_S\right] \end{aligned}$$

(b) Para cada $m \in \mathbb{R}$,

$$Z_S(m) = \mathbb{E}\left[\, \Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \vee m | \, \mathcal{F}_S\right] \quad \text{y} \quad Z_S = Z_S(-\infty) = \mathbb{E}\left[\, \Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \, \mathcal{F}_S\right]$$

Demostración. (a) Sean $\epsilon > 0$ y $x, m \in \mathbb{R}$, así la siguiente desigualdad de verifica

$$\epsilon \mathbf{1}_{\{x<m-\epsilon\}} \leq (x \vee m) - (x \vee (m-\epsilon)) \leq \epsilon \mathbf{1}_{\{x<m\}}. \tag{2.13}$$

Ahora, recordemos que para cada $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$, $T_S = \inf\{t \in [S,\zeta] : Z_t(m) = Z_t\}$, entonces bajo el evento $\{T_S(m) \leq \zeta\}$ se tiene

$$Z_{T_S(m)} = Z_{T_S(m)}(m) \geq m,$$

por lo que se satisface la igualdad de eventos

$$\left\{Z_{T_S(m)\wedge\zeta} < m\right\} = \left\{Z_\zeta < m, T_S(m) = \infty\right\}.$$

A partir de las observaciones anteriores, dado que $T_S(m) \wedge \zeta$ es un tiempo de paro óptimo y que $Z(m)$ es una supermartingala, se tiene

$$\begin{aligned} Z_S(m) - Z_S(m-\epsilon) &= \mathbb{E}\left[Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee m | \mathcal{F}_S\right] - Z_S(m-\epsilon) \\ &\leq \mathbb{E}\left[Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee m | \mathcal{F}_S\right] - \mathbb{E}\left[Z_{T_S(m)\wedge\zeta}(m-\epsilon) | \mathcal{F}_S\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee m - Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee (m-\epsilon) | \mathcal{F}_S\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\epsilon \mathbf{1}_{\left\{Z_{T_S(m)\wedge\zeta}<m\right\}} \middle| \mathcal{F}_S\right] \\ &= \epsilon \mathbb{P}\left[Z_\zeta < m, T_S(m) = \infty | \mathcal{F}_S\right]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

De manera completamente análoga se prueba que

$$\begin{aligned} Z_S(m) - Z_S(m-\epsilon) &\geq \mathbb{E}\big[Z_{T_S(m-\epsilon)\wedge\zeta} \vee m - Z_{T_S(m-\epsilon)\wedge\zeta} \vee (m-\epsilon)|\mathcal{F}_S\big] \\ &\geq \epsilon\mathbb{P}\left[Z_\zeta < m-\epsilon, T_S(m-\epsilon) = \infty|\mathcal{F}_S\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Luego, dado que $T_S(m)$ es no decreciente, continua por la izquierda como función de m y que $\{T_S(m) = \infty\} = \bigcap_{\epsilon>0}\{T_S(m-\epsilon) = \infty\}$, se verifica

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \mathbb{P}\left[Z_\zeta < m-\epsilon, T_S(m-\epsilon) = \infty|\mathcal{F}_S\right] = \mathbb{P}\left[Z_\zeta < m, T_S(m) = \infty|\mathcal{F}_S\right].$$

Por lo anterior, (2.14) y (2.15) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m) &:= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{Z_S(m) - Z_S(m-\epsilon)}{\epsilon} \\ &= \mathbb{P}\left[Z_\zeta < m, T_S(m) = \infty|\mathcal{F}_S\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

(b) La idea de esta prueba es integrar la expresión anterior con el fin de obtener una representación explícita de $Z_S(m)$. En ese sentido, buscamos expresar al evento $\{T_S(m) = \infty\}$ de una manera más simple y en términos de m. Para ello recordemos que $m \mapsto T_S(m) \wedge \zeta$ es no decreciente y continuo por la izquierda, de manera que $\{m \in \mathbb{R};\ T_S(m) \leq \zeta\}$ es un intervalo cerrado a la derecha por

$$\Lambda_S(\zeta) = \sup\left\{m \in \mathbb{R};\ T_S(m) \leq \zeta\right\},$$

de manera que se tiene la siguiente igualdad de eventos

$$\left\{Z_{T_S}(m) = \infty\right\} = \left\{\Lambda_S(\zeta) < m\right\},$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m) &= \mathbb{P}\left[Z_\zeta < m, \Lambda_S(\zeta) < m|\mathcal{F}_S\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta < m|\mathcal{F}_S\right] \\ &= 1 - \mathbb{P}\left[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \geq m|\mathcal{F}_S\right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por otro lado, de la caracterización dual de $Z(m)$ se tiene

$$\begin{aligned} Z_S(m) - m &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{S,\zeta}} \mathbb{E}\big[Z_\tau \vee m|\mathcal{F}_S\big] - m \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{S,\zeta}} \mathbb{E}\big[\big(Z_\tau - m\big)^+|\mathcal{F}_S\big], \end{aligned}$$

en particular $Z_S - m \geq 0$. Asimismo, si V es una martingala u.i. que domina a Z, entonces se satisfacen las siguientes desigualdades

$$0 \leq Z_S(m) - m - \leq V_S - m = \mathbb{E}\left[V_\zeta - m|\mathcal{F}_S\right] \leq \mathbb{E}\left[(V_\zeta - m)^+|\mathcal{F}_S\right],$$

y en consecuencia

$$0 \leq \lim_{m\uparrow\infty} Z_S(m) - m \leq \lim_{m\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[(Z_\tau - m)^+ \middle| \mathcal{F}_S \right] = 0.$$

Por consiguiente, obtenemos la siguiente representación de $Z_S(m)$

$$Z_S(m) - m = \int_m^\infty -\frac{\partial^-}{\partial m}\big(Z_S(\alpha) - \alpha\big)d\alpha,$$

más aún, de (2.17) se tiene

$$\begin{aligned} Z_S(m) - m &= \int_m^\infty \mathbb{P}\left[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \geq \alpha | \mathcal{F}_S\right] d\alpha \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left[(\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta - m)^+ \geq l | \mathcal{F}_S\right] dl \\ &= \mathbb{E}\left[(\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_S\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Z_S(m) = \mathbb{E}\big[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S\big].$$

Ahora, por el teorema de convergencia monótona

$$Z_S(-\infty) := \lim_{m\downarrow\infty} Z_S(m) = \mathbb{E}\big[\, \Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \, \mathcal{F}_S\big].$$

Por otro lado, el tiempo de paro $T_S(m)$ decrece a $T_S(-\infty)$ cuando $m \to \infty$, y por la continuidad a la derecha de Z, $Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \to Z_{T_S(-\infty)\wedge\zeta}$. Así, dado que $T_S(-\infty) \wedge \zeta$ es un tiempo de paro mayor que S y Z es una supermartingala se tiene, por el teorema de convergencia dominada, que

$$\begin{aligned} Z_S &\leq \lim_{m\downarrow -\infty} Z_S(m) \\ &= \lim_{m\downarrow -\infty} \mathbb{E}\big[\, Z_{T_S(m)\wedge\zeta} \vee m \big| \, \mathcal{F}_S\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\, Z_{T_S(-\infty)\wedge\zeta} \big| \, \mathcal{F}_S\big] \leq Z_S, \end{aligned}$$

por lo que podemos concluir que

$$Z_S = Z_S(-\infty) = \mathbb{E}\big[\, \Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \, \mathcal{F}_S\big].$$

■

De la proposición anterior se tiene, en particular, una representación de Z_t para $t \in [0, \zeta]$ fijo. Así, siguiendo esos una serie de argumentos análogos se pretende exhibir una representación para Z en términos de un proceso opcional L.

Observación 2.3. Si tomamos el tiempo de paro determinista $t \in [0,\zeta]$, entonces

$$\Lambda_t(\alpha) = \sup\{m \in \mathbb{R};\ T_t(m) \leq \alpha\}, \quad t \leq \alpha \leq \zeta, \tag{2.18}$$

define la inversa continua por la derecha de la transformación $m \mapsto T_t(m)$. En otras palabras, se tiene la siguiente igualdad de eventos

$$\big\{T_t(m) \leq \alpha\big\} = \big\{m \leq \Lambda_t(\alpha)\big\},$$

para cada $\alpha \in [t,\zeta]$.

Esta observación será de gran utilidad en la prueba del Teorema 2.4, el cual constituye el resultado principal de esta sección ya que exhibe la existencia del proceso opcional L que garantiza la descomposición Máx-Plus de Z así como la martingala $M^{\oplus}$ asociada al mismo resultado.

Teorema 2.4. Sea L_t una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible definida para cada $t \in [0,\zeta]$ por

$$\begin{aligned} L_t &:= \sup\{m \in \mathbb{Q}; Z_t(m) = Z_t\} \\ &= \sup\{m \in \mathbb{Q}; T_t(m) = t\}, \quad = -\infty \text{ si el conjunto es vacío.} \end{aligned}$$

Sea $L^*_{t,\alpha}$ el supremo de L en el intervalo $[0,\alpha]$ con $t \leq \alpha \leq \zeta$, es decir,

$$L^*_{t,\alpha} = \sup_{t \leq s \leq \alpha} L_s.$$

Entonces

(a) $L^*_{t,\alpha} = \Lambda_t(\alpha)$ para cada $\alpha \in [t,\zeta]$.

(b) El proceso $M = \{M_t; 0 \leq t \leq \zeta\}$ definido por

$$M_t = \mathbb{E}\big[\, L^*_{0,\zeta} \vee Z_\zeta \big|\, \mathcal{F}_t\big] = Z_t(L^*_{0,t}) \geq Z_t = Z_t(-\infty), \quad 0 \leq t \leq \zeta, \tag{2.19}$$

es la martingala $M^{\oplus}$ correspondiente a la descomposición Máx-Plus de Z, ya que el proceso $L^*_{0,\cdot} = \big\{L^*_{0,t}; 0 \leq t \leq \zeta\big\}$ satisface la condición *flat-off*

$$\int_{[0,\zeta]} (M_t - Z_t)\, dL^*_{0,t} = 0, \quad \text{c.s.}$$

Demostración. (a) Sea $t \in [0,\zeta]$ arbitrario pero fijo. Primero notemos que de la Proposición 2.1, la transformación $m \mapsto Z_t(m)$ es no decreciente, convexo y, por lo tanto, continuo casi seguramente, luego L_t es el punto derecho del intervalo cerrado $\{m : Z_t(m) = Z_t\}$.

Ahora veamos que para $\alpha \in [t,\zeta]$, $T_t(m) = \operatorname{ínf}\{s \in [t,\zeta] : Z_s(m) = Z_t\} \leq \alpha$ si y solo si existe $s \in [t,\alpha]$ tal que $Z_s(m) = Z_s$, o bien, $L_s \geq m$. En consecuencia, se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}\big\{T_t(m) = t\big\} &= \bigcap_{a\geq 0} \big\{T_t(m) \leq t+\alpha\big\} \\ &= \bigcap_{a\geq 0} \big\{\exists s \in [t,t+\alpha]; L_s \geq m\big\} \\ &= \left\{\limsup_{s\downarrow t} L_s \geq m\right\}.\end{aligned}$$

Más aún, dada la igualdad de eventos

$$\big\{T_t(m) = t\big\} = \big\{L_t \geq m\big\},$$

se sigue que $L_t = \limsup_{s\downarrow t} L_s$ y las trayectorias del proceso $L = \{L_t; 0 \leq t \leq \zeta\}$ son semicontinuas superiormente a la derecha.

Por otro lado, para cada $\alpha \in [t,\zeta]$ se verifican las siguientes igualdades de eventos

$$\big\{T_t(m) \leq \alpha\big\} = \big\{\exists s \in [t,\alpha]; L_s \geq m\big\} = \big\{m \leq L^*_{t,\alpha}\big\}.$$

Por lo tanto, de la Observación 2.3 podemos concluir que $L^*_{t,\alpha} = \Lambda_t(\alpha)$ para cada $\alpha \in [t,\zeta]$.

(b) Sea M la martingala definida en (2.19). Ahora notemos que $L^*_{0,\cdot} = \big\{L^*_{0,t}; 0 \leq t \leq \zeta\big\}$ es un proceso creciente y consideremos a $S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}$ un tiempo de paro correspondiente a un punto donde $L^*_{0,\cdot}$ tiene un incremento; luego se tienen dos casos

- Si $S < \zeta$, entonces se satisface que

$$L^*_{0,\zeta} = \sup_{0\leq t\leq\zeta} L_t = \sup_{S\leq t\leq\zeta} L_t = L^*_{S,\zeta},$$

  de manera que $\mathbb{E}\big[\, L^*_{0,\zeta} \vee Z_\zeta \big|\, \mathcal{F}_S\big] = \mathbb{E}\big[\, L^*_{S,\zeta} \vee Z_\zeta \big|\, \mathcal{F}_S\big]$, es decir, $M_S = Z_S$.

- Ahora si $S = \zeta$, se sigue que $L^*_{0,\zeta^-} < L_\zeta$, de lo contrario S no sería un punto donde $L^*_{0,\cdot}$ incrementa. Ahora, por la definición de L se tiene que $L_\zeta = Z_\zeta$ y $M_\zeta = L_{0,\zeta^-} \vee L_\zeta$, de manera que $Z_\zeta = M_\zeta$.

En otras palabras, L solo crece al tiempo $t \leq \zeta$ si $M_t = Z_t$, es decir, M satisface la condición flat-off y, por el Teorema 2.2, se concluye que $M = M^\oplus$.

■

En la siguiente subsección se presentan ejemplos explícitos de la descomposición Máx-Plus de submartingalas Z con incrementos, aditivos o multiplicativos, independientes y estacionarios.

2.1.2. Ejemplos

En la presente sección se obtiene la descomposición Máx-Plus de supermartingalas que son procesos de Lévy multiplicativos y aditivos. En una primera instancia, para el caso de los procesos multiplicativos, se propone un horizonte de tiempo infinito, es decir, $\zeta = \infty$ y posteriormente se presentan los resultados análogos para cuando ζ sigue una distribución exponencial.

Procesos de Lévy multiplicativos positivos

Las definiciones y propiedades de los procesos de Lévy que se presentan en esta sección se basan en [2] y [15].

Definición 2.3. (Proceso de Lévy multiplicativo) Un proceso Z adaptado y càdlàg con espacio de estados en $\mathbb{R}$, tal que $Z_0 = x > 0$ y $Z_t > 0$ para todo $t \geq 0$, es llamado un *proceso de Lévy multiplicativo* si para cada $t \geq 0$ y $h \geq 0$

1. $Z_{t+h}Z_t^{-1}$ es independiente de $\mathcal{G}_t = \sigma(Z_u; u \leq t)$; y

2. la ley de $Z_{t+h}Z_t^{-1}$ no depende de t.

La siguiente proposición presenta de manera explícita la descomposición Máx-Plus de una supermartingala que es a su vez un proceso de Lévy multiplicativo.

Proposición 2.3. Sea Z una $(\mathcal{D})$-supermartingala casi-continua por la izquierda que a su vez es un proceso de Lévy multiplicativo positivo con valor inicial x y tal que $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\zeta} Z_t\right] < \infty$, y sea $\mathcal{Z}$ el proceso tal que $Z_t = x\mathcal{Z}_t$, $0 \leq t \leq \zeta$. Suponga además que $\zeta = \infty$, entonces se tiene

$$Z_t = b\mathbb{E}\big[Z^*_{t,\infty}|\mathcal{F}_t\big] \quad \text{y} \quad L^*_{0,t} = bZ^*_t,$$

donde $b = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^*_{0,\infty}\right]}$ y $Z^*_t := Z^*_{0,t} = \sup_{0\leq u\leq t} Z_u$, para cada $t \geq 0$.

Demostración. Gracias a la independencia de los incrementos de Z y a la integrabilidad de $Z^*_{0,\infty}$, se tiene, para cada $t \geq 0$, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\, Z^*_{t,\infty}\middle|\, \mathcal{F}_t\right] &= Z_t\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq u}\frac{Z_u}{Z_t}\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\
&= Z_t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq v}\frac{Z_{v+t}}{Z_t}\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\
&= Z_t\mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^*_{0,\infty}\right],
\end{aligned}$$

de manera que $Z_t = b\mathbb{E}\big[Z^*_{t,\infty}|\mathcal{F}_t\big]$, con $\frac{1}{b} = \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[Z^*_{0,\infty}\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^*_{0,\infty}\right]$. ■

Observación 2.4. Cuando el horizonte es tal que $\zeta < \infty$, de la Proposición 2.3, la constante b en la descomposición Máx-Plus de un proceso de Lévy multiplicativo Z es reemplazada por una función $b(\cdot)$ tal que, para cada tiempo instante t

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\sup_{t \le u \le T} b(T-u) Z_u \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Sin embargo, no se tiene una fórmula explícita para la función $b(\cdot)$, aunque se sabe que está relacionada con la función $t \mapsto \mathbb{E}\left[\mathcal{Z}^*_{0,t}\right]$ (ver [5]).

El siguiente lema constituye un resultado similar al de la Proposición 2.3, pero ahora considerando un horizonte aleatorio.

Lema 2.1. Sea Z un proceso de Lévy multiplicativo positivo y supongamos un horizonte aleatorio ζ con distribución exponencial de parámetro $\beta > 0$ e independiente de Z. Además, sea $\widetilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}$ y $b_\beta = \mathbb{E}\big[\mathcal{Z}^*_{0,\zeta}\big]^{-1}$. Entonces, para cada $t \le \zeta$

$$\widetilde{Z}_t = b_\beta \mathbb{E}\left[Z^*_{t,\zeta} \middle| \mathcal{G}_t \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} = b_\beta \mathbb{E}\left[\widetilde{Z}^*_{t,\zeta} \middle| \mathcal{G}_t \right].$$

Demostración. Consideremos a $\{\mathcal{G}_t\}$, la filtración aumentada generada por $\mathcal{F}_{t\wedge\zeta} \vee \sigma(t\wedge\zeta)$ y suponga que es continua por la derecha. Así, bajo el evento $\{t \le \zeta\}$, toda variable $\mathcal{G}_t$-medible es también $\mathcal{F}_t$-medible. Además según [5], para cada v.a. $\mathcal{G}_\zeta$-medible, X, se verifica

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_t]\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}|\mathcal{F}_t]}\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} = e^{\beta t}\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}|\mathcal{F}_t]\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}. \tag{2.20}$$

Observemos que sobre el evento $\{t < \zeta\}$, $\frac{Z^*_{t,\zeta}}{Z_t}$ es condicionalmente independiente de Z_t dado $\mathcal{G}_t$ y tiene la misma distribución que $\frac{Z^*_{0,\zeta}}{x}$. Por lo anterior y la relación (2.20), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z^*_{t,\zeta} \middle| \mathcal{G}_t \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} &= e^{\beta t}\mathbb{E}\left[Z^*_{t,\zeta}\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} \\
&= e^{\beta t} Z_t \mathbb{E}\left[\frac{Z^*_{t,\zeta}}{Z_t}\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} \\
&= Z_t e^{\beta t}\mathbb{E}\left[\int_t^\infty \beta e^{-\beta s}\frac{Z^*_{t,s}}{Z_t} ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} \\
&= Z_t \mathbb{E}\left[\int_t^\infty \beta e^{-\beta(s-t)}\frac{Z^*_{0,s-t}}{x} ds \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} \\
&= Z_t \mathbb{E}\big[\mathcal{Z}^*_{0,\zeta}\big] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}},
\end{aligned}$$

donde la segunda y tercera igualdad se derivan de la Definición 2.3.
De lo anterior,

$$Z_t \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} = b_\beta \mathbb{E}\left[Z^*_{t,\zeta} \middle| \mathcal{G}_t \right] \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}, \tag{2.21}$$

donde $b_\beta = \mathbb{E}\big[\mathcal{Z}^*_{0,\zeta}\big]^{-1}$.

La representación obtenida en (2.21) no se puede considerar como una descomposición Máx-Plus de Z debido a que sólo es cierta cuando $\{t < \zeta\}$. Para lograr esto, es necesario considerar la filtración $\{\mathcal{G}_t\}$ en lugar de $\{\mathcal{F}_t\}$ y el proceso

$$\widetilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}} = Z_{t\wedge\zeta} - Z_\zeta \mathbf{1}_{\{\zeta\le t\}}.$$

Luego, dado que Z es positivo, $\widetilde{Z}$ es una $\mathcal{G}_t$-supermartinga, más aún, se verifica que

$$Z^*_{t,\zeta} = \sup_{t\le u\le\zeta} Z_u = \sup_{t\le u<\zeta} Z_u \mathbf{1}_{\{u<\zeta\}} = \sup_{t\le u<\zeta} \widetilde{Z}_u = \sup_{t\le u\le\zeta} \widetilde{Z}_u = \widetilde{Z}^*_{t,\zeta};$$

y observe que, para $t = \zeta$, $\sup_{t\le u\le\zeta} Z_u = Z_\zeta \neq \sup_{t\le u\le\zeta} \widetilde{Z}_u = Z_\zeta$. Por lo tanto, si definimos $\widetilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}$, obtenemos el resultado. ■

Procesos de Lévy aditivos

En esta sección exhibimos la descomposición Máx-Plus de un proceso de Lévy aditivo de manera análoga a lo realizado en la sección anterior.

Definición 2.4. (Proceso de Lévy) Un proceso Z adaptado y càdlàg con espacio de estados en $\mathbb{R}$, tal que $Z_0 = x$, es llamado un *proceso de Lévy aditivo*, o simplemente *proceso de Lévy*, si para cada $t \ge 0$ y $h \ge 0$

1. $Z_{t+h} - Z_t$ es independiente de $\sigma(Z_u; u \le t)$; y
2. la ley de $Z_{t+h} - Z_t$ no depende de t.

A diferencia del caso anterior, vamos a considerar sólo el caso cuando $\zeta = \infty$. Así, el resultado principal se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. Sea Z un proceso de Lévy que satisface que es una supermartingala $(\mathcal{D})$-regular con valor inicial x y es tal que $\mathbb{E}[Z^*_{0,\infty}] < \infty$, entonces

$$Z_t - \mathbb{E}\left[Z^*_{t,\infty} - b|\mathcal{F}_t\right] \quad \text{y} \quad L^*_{0,t} = Z^*_t,$$

donde $b = \mathbb{E}[Z^*_{0,\infty}] - x$.

Demostración. La prueba se realiza de manera análoga al caso del proceso de Lévy multiplicativo partiendo de $\mathbb{E}[Z^*_{t,\infty}|\mathcal{F}_t]$ y considerando que Z tiene incrementos independientes y estacionarios.

■

Por último, vamos a presentar un ejemplo particular de descomposición Máx-Plus donde mostraremos explícitamente el valor de b y la forma de la martingala $M^\oplus$.

Movimiento Browniano geométrico.

Suponga que la supermartingala Z está dada por un movimiento Browniano geométrico con deriva negativa, es decir, Z es solución de la ecuación

$$dZ_t = -rZ_t dt + \sigma Z_t dW_t, \tag{2.22}$$

donde, por simplicidad, r y σ son constantes positivas, W es un $\mathbb{P}$-movimiento Browniano unidimensional y $Z_0 = x > 0$. En el siguiente lema se enuncian algunas propiedades distribucionales del running supremum de Z que ayudarán a obtener una expresión explícita para la martingala $M^{\oplus}$ asociada a Z.

Lema 2.2. Definamos $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma}$ y δ como la raíz más grande del polinomio $p(y) = y^2 - \gamma y - \frac{2\beta}{\sigma^2}$. Sea ζ una variable aleatoria exponencial independiente de parámetro $\beta > 0$. El caso cuando $\zeta = \infty$ c.s. corresponde a $\beta = 0$. Entonces para cada $m \in \mathbb{R}$ se tiene

1. $\mathbb{P}\big[Z^*_\zeta \geq m\big] = \left(\dfrac{x}{m} \wedge 1\right)^\delta \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\big[Z^*_\zeta\big] = \dfrac{\delta}{\delta - 1} x.$
2. $\mathbb{E}\left[\left(Z^*_\zeta - m\right)^+\right] = \begin{cases} \frac{m}{\delta-1}\left(\frac{x}{m}\right)^\delta, & \text{si } m \geq x, \\ \frac{\delta}{\delta-1}x - m, & \text{si } m < x. \end{cases}$

Demostración. 1. Sea $m \in \mathbb{R}$ y definamos $T_m := \inf\{t; Z^*_t \geq m\}$, luego se tiene la siguiente igualdad de eventos

$$\big\{Z^*_t \geq m\big\} = \big\{T_m \leq t\big\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big[Z^*_\zeta \geq m\big] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{Z^*_\zeta \geq m\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_m \leq \zeta\}} | T_m]\right] \\ &= \mathbb{E}\big[\exp\{-\beta T_m\}\big], \end{aligned}$$

e incluso, si $\beta = 0$,

$$\mathbb{P}\left[Z^*_{0,\infty} \geq m\right] = \mathbb{P}\left[T_m < \infty\right] = \lim_{\beta \downarrow 0} \mathbb{E}\big[\exp\{-\beta T_m\}\big].$$

Por lo anterior, basta calcular la transformada de Laplace de T_m, para ello proponemos aplicar el Teorema de paro de Doob a la siguiente martingala

$$e^{-\beta t} Z^\delta_t = e^{\sigma\delta W_t - \frac{1}{2}\sigma^2\delta^2 t}, \quad t \in [0, \zeta].$$

Entonces, para cada $t \in [0, \zeta]$, $\mathbb{E}\left[e^{-\beta(T_m \wedge t)} Z^\delta_{T_m \wedge t}\right] = x^\delta$ y dado que $\beta > 0$, se verifica

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta(T_m \wedge t)} Z^\delta_{T_m \wedge t}\right] \leq (m \vee x)^\delta.$$

Así, tomando $t \to \infty$ y por el teorema de convergencia dominada, obtenemos

$$\mathbb{P}\left[Z_\zeta^* \geq m\right] = \left(\frac{x}{m} \wedge 1\right)^\delta.$$

Por último, dado que $Z_* \geq 0$ c.s., concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Z_\zeta^*\right] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left[Z_\zeta^* \geq \alpha\right] d\alpha \\ &= \int_0^x d\alpha + \int_x^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\delta d\alpha \\ &= \frac{\delta}{\delta - 1} x. \end{aligned}$$

2. Primero notemos que si $Z_0 = x$, entonces $Z_t^* \geq x$ para toda $t \geq 0$; luego, si $m \geq x$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(Z_\zeta^* - m)^+\right] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left[Z_\zeta^* - m \geq \alpha\right] d\alpha \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha + m}\right)^\delta d\alpha \\ &= \frac{m}{\delta - 1}\left(\frac{x}{m}\right)^\delta. \end{aligned}$$

Mientras que, si $m < x$, entonces $Z_\zeta - m \geq 0$ c.s., por lo que

$$\mathbb{E}\left[(Z_\zeta^* - m)^+\right] = \frac{\delta}{\delta - 1} x - m,$$

lo cual es lo que se quería probar.

■

Proposición 2.5. Sea Z definida por (2.22) y pongamos $\gamma = \delta = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$. Además, suponga que $\zeta = \infty$ c.s., entonces la martingala de la descomposición Máx-Plus de Z puede ser caracterizada como una función explícita de (Z_t, Z_t^*) dada por

$$M_t^\oplus = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Z_t^* \left[\frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{Z_t}{Z_t^*}\right)^\gamma + 1\right].$$

Demostración. Por la Proposición 2.3 y el Teorema 2.1, el proceso $M^\oplus$ definido por

$$M_t^\oplus = b\mathbb{E}\left[Z_{0,\infty}^* | \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

es la martingala de la decomposición Máx-Plus de Z. Luego, dado que la distribución de $Z^*_{0,\zeta}$ es bien conocida, existe una expresión cerrada para $M^{\oplus}_t$ como función de $(Z_t, Z^*_{0,t})$. En efecto, observemos que para cada $t \in [0, \zeta]$ se tiene

$$\begin{aligned} M^{\oplus}_t &= b\mathbb{E}\left[\left(Z^*_{t,\infty} - Z^*_{0,t}\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] + bZ^*_{0,t} \\ &= bZ_t\mathbb{E}\left[\left(\frac{Z^*_{t,\infty}}{Z_t} - \frac{Z^*_{0,t}}{Z_t}\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] + bZ^*_{0,t}. \end{aligned}$$

Luego, dado que $\frac{Z^*_{t,\infty}}{Z_t}$ es independiente de $\frac{Z^*_{0,t}}{Z_t}$ y tiene la misma distribución que $\mathcal{Z}^*_{0,\infty}$, entonces $M^{\oplus}_t$ puede reescribirse como

$$M^{\oplus}_t = bZ_t\mathbb{E}\left[\left(\mathcal{Z}^*_{0,\infty} - m_t\right)^+\right] + bZ^*_{0,t},$$

donde $m_t = \frac{Z^*_{0,t}}{Z_t} \geq 1$ cuyo valor es conocido al instante t. Así, sustituyendo m_t en la ultima expresión del Lema 2.2 obtenemos

$$M^{\oplus}_t = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Z^*_{0,t}\left[\frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{Z_t}{Z^*_{0,t}}\right)^{\gamma} + 1\right].$$

■

Ahora consideremos un horizonte aleatorio ζ independiente de Z y con distribución exponencial de parámetro $\beta > 0$. Bajo la misma notación de los procesos de Lévy multiplicativos, la martingala $\widetilde{W}^{\oplus}$ asociada a la descomposición Máx-Plus de $\widetilde{Z}$, tiene la forma

$$\widetilde{M}_t = b_\beta\mathbb{E}\left[\widetilde{Z}^*_{0,\zeta}\middle| \mathcal{F}_t\right] = b_\beta\mathbb{E}\left[Z^*_{0,\zeta}\middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta. \tag{2.23}$$

Además, dado que en el Lema 2.2 se consideró el caso cuando ζ tiene una distribución exponencial con parámetro arbitrario, la distribución de $Z^*_{0,\zeta}$ es bien conocida y podemos deducir una expresión cerrada para $\widetilde{M}^{\oplus}$. La siguiente proposición formaliza este resultado.

Proposición 2.6. La martingala que resulta de la descomposición Máx-Plus de $\widetilde{Z}_t = Z_t\mathbf{1}_{\{t<\zeta\}}$ esta dada para cada $t \in [0, \zeta]$ por

$$\widetilde{M}^{\oplus}_t = \frac{\delta - 1}{\delta}\widetilde{Z}^*_{0,t}\left[\frac{1}{\delta - 1}\left(\frac{\widetilde{Z}_t}{\widetilde{Z}^*_{0,t}}\right) + 1\right].$$

La demostración de este resultado se basa en las mismas ideas del caso con horizonte infinito. (ver [5]).

2.2. Optimización de martingalas

Es común pensar en martingalas cuando nos enfocamos en un mercado financiero completo, esto debido a que bajo ciertos supuestos dentro del mercado financiero definido en el Capítulo 1, un proceso de capital asociado a una portafolio autofinanciable se puede trasformar en una martingala bajo un cambio adecuado de la medida de probabilidad. De esta manera, parece sensato pensar que el problema de optimización de portafolios puede relacionarse, de alguna manera, con un problema de martingalas. Esto último se presenta en el Capítulo 3, pero para ello es necesario presentar los siguientes problemas de martingalas.

El problema de optimización de martingalas que vamos a considerar en esta tesis consiste en hallar una proceso M que resuelva el problema dado por

$$\max_{M \in \mathcal{M}_x} \mathbb{E}\big[U\big(M_\zeta\big)\big], \tag{2.24}$$

donde U es una función de utilidad conocida y $\mathcal{M}_x$ es el conjunto de martingalas admisibles definido por

$$\mathcal{M}_x = \big\{M = \{M_t;\ t \geq 0\} : M \text{ es una } \mathbb{P}\text{-martingala u.i. y } M_0 = x\big\}.$$

El problema definido en (2.24) es conocido como el problema de optimización de martingalas sin restricciones. Por otro lado, notemos que la solución para éste no depende de la función de utilidad, de hecho, debido a la concavidad de la función U, tenemos que

$$\mathbb{E}\big[U(M_\zeta)\big] \leq U\big(\mathbb{E}[M_\zeta]\big) = U(x),$$

para cada martingala $M \in \mathcal{M}_x$, por lo que la martingala que resuelve el problema de optimización es el proceso constante definido por $M_t = x$, $t \geq 0$.

El problema que nos interesa es aquel donde el conjunto de martingalas admisibles debe dominar a cierto proceso. Más específicamente, buscamos una martingala M que maximice la utilidad esperada al tiempo ζ y que domina durante todo el periodo de observación a un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado Y, es decir, $M_t \geq Y_t$ c.s., $0 \leq t \leq \zeta$. Más aún, por la Observación 2.1 es natural restringirnos al conjunto de supermartingalas. Por lo anterior, definimos formalmente el problema de optimización de martingalas.

Definición 2.5. Sea Z una $(\mathcal{D})$-supermartingala casi-continua por la izquierda definida en $[0, \zeta]$ y ζ un tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$. El problema de optimización de martingalas con garantía americana consiste en hallar un proceso óptimo $M \in \mathcal{M}^Z$ para el problema

$$\max_{M \in \mathcal{M}^Z} \mathbb{E}\big[U(M_\zeta)\big], \tag{2.25}$$

donde U es una función de utilidad conocida y $\mathcal{M}^Z$ el conjunto dado por

$$\mathcal{M}^Z = \big\{M : M \text{ es una } \mathbb{P}\text{-martinga u.i., } M_t \geq Z_t \ \forall t \in [0,\zeta] \text{ y } M_0 = Z_0\big\}.$$

De manera similar al caso sin restricciones, nos gustaría encontrar una solución que no dependa de la forma de U, esto debido a los mismos argumentos que se discutieron en la Sección 1.3 del capítulo anterior.

En ese sentido, el problema de optimización de martingalas respecto al orden cóncavo consiste en hallar la martingala más grande $M^* \in \mathcal{M}^Z$ con respecto al orden cóncavo estocástico en el valor terminal, es decir, $M^*_\zeta \geq_{cv} M_\zeta$ para toda $M \in \mathcal{M}^Z$.

Teorema 2.5 (Teorema Principal)**.** Fijemos un horizonte ζ y consideremos a Z una supermartingala $(\mathcal{D})$-regular y casi-continua por la izquierda. Suponga también que existe un proceso progresivamente medible $L = \{L_t;\ 0 \leq t \leq \zeta\}$ con trayectorias semicontinuas superiormente por la derecha, tal que

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq u\leq \zeta} L_u \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta. \tag{2.26}$$

Entonces $M^\oplus$ definida por

$$M^\oplus_t = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq \zeta} L_u \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

es la martingala más grande en $\mathcal{M}^Z$ con respecto al orden cóncavo estocástico. En otras palabras,

$$\mathbb{E}\big[g(M^\oplus_\zeta)\big] \geq \mathbb{E}\big[g(M_\zeta)\big],$$

para cada martingala $M \in \mathcal{M}^Z$ y toda función cóncava g para la cual las esperanzas anteriores están bien definidas.

Demostración. Sean $M \in \mathcal{M}^Z$ arbitrario y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cóncava para la cual las expresiones $\mathbb{E}\big[g(M^\oplus_\zeta)\big]$ y $\mathbb{E}\big[g(M_\zeta)\big]$ están bien definidas. Luego, por la concavidad de g se tiene que es derivable en casi todo punto y además

$$\mathbb{E}\big[g(M_\zeta)\big] - \mathbb{E}\big[g(M^\oplus_\zeta)\big] \leq \mathbb{E}\big[g'(M^\oplus_\zeta)(M_\zeta - M^\oplus_\zeta)\big] = \mathbb{E}\big[g'(L^*_{0,\zeta})(M_\zeta - M^\oplus_\zeta)\big]. \tag{2.27}$$

Ahora, para usar la representación diferencial de procesos de variación finita, es necesario definir la aproximación a la derivada de g' como

$$g''_d(x,\delta) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\big(g'(x+\delta) - g'(x)\big), & \text{si } \delta \neq 0, \\ g''(x), & \text{si } \delta = 0, \end{cases}$$

por lo cual tenemos

$$g'(L^*_{0,\zeta}) = g'(L^*_{0,0}) + \int_0^\zeta g''_d(L^*_{0,s^-}, \Delta L^*_{0,s}) dL^*_{0,s},$$

donde $\Delta L^*_{0,s} := L^*_{0,s} - L^*_{0,s^-}$, de manera que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[g'(L^*_{0,\zeta})(M_\zeta - M^\oplus_\zeta)\big] &= \mathbb{E}\big[g'(L^*_{0,0})(M_\zeta - M^\oplus_\zeta)\big] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^\zeta (M_\zeta - M^\oplus_\zeta) g''_d(L^*_{0,s^-}, \Delta L^*_{0,s}) dL^*_{0,s}\right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Por otro lado, note que $g''_d(L^*_{0,s^-}, \Delta L^*_{0,s}) dL^*_{0,s}$ es $\{\mathcal{F}_s\}$-adaptado, $M - M^\oplus$ es una martingala u.i., g''_d es negativa por ser g cóncava y que $L^*_{0,\cdot}$ satisface la condición flat-off, por el Teorema 2.1 se verifica

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^\zeta (M_\zeta - M^\oplus_\zeta) g''_d(L^*_{0,s^-}, \Delta L^*_{0,s}) dL^*_{0,s}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\zeta (M_s - M^\oplus_s) g''_d(L^*_{0,s^-}, \Delta L^*_{0,s}) dL^*_{0,s}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\zeta (M_s - Z_s) g''_d(L^*_{0,s^-}, \Delta L^*_{0,s}) dL^*_{0,s}\right] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, (2.27) y (2.28) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[g(M_\zeta)\big] - \mathbb{E}\big[g(M^\oplus_\zeta)\big] &\leq \mathbb{E}\big[g'(M^\oplus_\zeta)(M_\zeta - M^\oplus_\zeta)\big] \\ &\leq \mathbb{E}\big[g'(L^*_{0,0})(M_\zeta - M^\oplus_\zeta)\big] \\ &= \mathbb{E}\big[g'(L^*_{0,0})(M_0 - M^\oplus_0)\big] = 0, \end{aligned}$$

y dado que g y M son arbitrarias, podemos concluir que

$$M^\oplus \geq_{cv} M, \quad \forall\ M \in \mathcal{M}^Z.$$

■

Con lo desarrollado hasta este momento, la tarea principal en el siguiente capítulo será relacionar el problema de martingalas con el problema de optimización de portafolios, donde a partir de ciertos cambios en la medida de probabilidad, se mostrará que en ciertos casos estos problemas son equivalente, por lo que resolver uno de ellos nos garantiza la existencia de la solución del otro.

Capítulo 3

Optimización de portafolios vía la descomposición Máx-Plus

En este capítulo se conjunta lo desarrollado en los dos primeros capítulos con el fin de solucionar el problema de optimización de portafolios con restricciones a través de la representación Máx-Plus de supermartingalas. De manera particular, se presenta el desarrollo, planteamiento y solución de dicho problema para una clase específica de funciones de utilidad. Por último, se aplica todo lo desarrollado en este tesis para el problema de optimización de portafolios en el contexto de Black y Scholes.

Para el desarrollo de este capítulo consideraremos un mercado financiero estándar y completo definido en el Capítulo 1, además de suponer lo siguiente.

- El horizonte del problema ζ está dado por un tiempo de paro acotado, es decir, $0 \leq \zeta \leq T < \infty$.
- La densidad de precio del estado H de la Definición 1.8, constituye una semimartingala continua y estrictamente positiva tal que $H_0 = 1$, más aún, suponemos que existe $\eta > 1$ tal que
$$\mathbb{E}\big[H_\zeta^{-\eta}\big] < \infty. \tag{3.1}$$
- El proceso de capital X^π asociado a cualquier portafolio admisible π, es una semimartingala tal que
    1. $X_t^\pi \geq 0$ para cada $t \in [0, \zeta]$.
    2. $HX^\pi = \{H_t X_t^\pi;\ t \in [0, \zeta]\}$ es una martingala uniformemente integrable bajo $\mathbb{P}$. Además, se satisface que $\mathbb{E}\left[H_\zeta X_\zeta^\pi\right] = X_0^\pi$.

Agregado a lo anterior, notemos que por tratarse de un mercado completo, para cualquier variable aleatoria no negativa ξ que sea $\mathcal{F}_\zeta$-medible y que satisfaga que

$\mathbb{E}[\xi^\mu] < \infty$, para algún $\mu > 1$, existe un portafolio admisible π tal que el proceso de capital asociado a π satisface que $X_\zeta^\pi = \xi$ y $X_0^\pi = \mathbb{E}[\xi H_\zeta]$.

3.1. Problema sin restricciones

Bajo los supuestos anteriores, recordemos el problema de optimización de portafolios sin restricciones para un inversionista con capital inicial $x > 0$ y función de utilidad asociada U, esto es, el problema que consiste en hallar $\pi \in \mathcal{A}(x)$ tal que sea solución de

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}\left[U\left(X_\zeta^{x,\pi}\right)\right],$$

donde $\mathcal{A}(x) = \{\pi;\ X_t^{x,\pi} \geq 0\ \forall\ t \in [0,T],\ \mathbb{E}[\min\{0, U(X_T^{x,\pi})\}] > -\infty\} = A^1(x)$ del Capítulo 1. Para el caso del problema con restricciones, basta con cambiar el conjunto de portafolios admisibles por $\mathcal{A}_K(x) = \{\pi \in \mathcal{A}(x); X_t^{x,\pi} \geq K_t\ \forall\ t \in [0,T]\}$, donde K es el proceso piso que debe mayorar el capital del inversionista.

Como ya se ha discutido en la Sección 1.3, no existe un método general para solucionar el problema de portafolios, sin embargo, existe un criterio para determinar cuándo una estrategia de portafolio es óptima a partir del valor terminal del proceso de capital asociado. Este resultado está enunciado en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Suponga una estrategia $\pi^* \in \mathcal{A}(x)$ con valor terminal X_ζ^* tal que

I. $U'\left(X_\zeta^*\right) = \lambda H_\zeta$ para algún $\lambda > 0$,

II. $\mathbb{E}\left[U(X_\zeta^*)\right] < \infty$,

III. $\mathbb{E}\left[H_\zeta X_\zeta^*\right] = x$.

Entonces π^* es solución del problema de optimización portafolios sin restricciones.

Demostración. Esta prueba se basa en la propiedad de concavidad de la función de utilidad; para ello considere un proceso de portafolio $\pi^* \in \mathcal{A}(x)$ cuyo proceso de capital asociado X^* satisface las condiciones mencionadas y sea $\pi \in \mathcal{A}(x)$ arbitrario con proceso de capital dado por X^π. Ahora, dado que U es una función cóncava, existe $U'(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$, más aún, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se satisface que $U(y) - U(x) \leq U'(x)(y - x)$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[U(X_\zeta^\pi)\right] - \mathbb{E}\left[U(X_\zeta^*)\right] &\leq \mathbb{E}\left[U'(X_\zeta^*)(X_\zeta^\pi - X_\zeta^*)\right] \\
&= \lambda \mathbb{E}\left[H_\zeta(X_\zeta^\pi - X_\zeta^*)\right] \\
&= \lambda(x - x) = 0,
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue porque HX es una martingala, mientras que la tercera igualdad se sigue de iii. En consecuencia, $\mathbb{E}\left[U(X_\zeta^\pi)\right] \leq \mathbb{E}\left[U(X_\zeta^*)\right]$, concluyendo que $\pi^* \in \mathcal{A}(x)$ es solución para el problema de portafolio sin restricciones. ■

Esta proposición será de gran utilidad en el resto del capítulo, ya que podremos definir una nueva medida de probabilidad a partir del portafolio que resuelve el problema de portafolios sin restricciones.

3.1.1. Solución general para funciones de utilidad tipo CRRA

En esta sección consideramos la funciones de utilidad de tipo CRRA definidas en la Sección 1.2.1. Ésta es un clase particular de funciones de utilidad para la cual se puede obtener de manera específica el proceso de capital óptimo V que satisface las condiciones de la Proposición 3.1, más aún, la forma de este tipo de funciones de utilidad permite cambiar del problema de portafolios con restricciones al problema de martingalas con restricciones, sin necesitar más supuestos. Esto último será esencial para presentar una solución a partir de lo desarrollado en el Capítulo 2 y la descomposición Máx-Plus.

Supongamos que a un inversionista se le asocia una función de utilidad de tipo CRRA definida por

$$U_\alpha(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^+,$$

con $\frac{1}{1+\eta} < \alpha < 1$ y η definido en (3.1), así todas las suposiciones de integrabilidad se satisfacen. En efecto, sea $\pi \in \mathcal{A}(x)$ y definamos $\delta := \frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda$ con $\lambda > 1$. Entonces, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[U_\alpha(X_\zeta^\pi)\right] &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[H_\zeta^{-(1-\alpha)}\left(H_\zeta X_\zeta^\pi\right)^{1-\alpha}\right] \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathbb{E}\left[H_\zeta^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda}\right]\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}}\left(\mathbb{E}\left[(H_\zeta X_\zeta^\pi)^{(1-\alpha)\nu_\alpha}\right]\right)^{\frac{1}{\nu_\alpha}},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\nu_\alpha := \frac{\lambda}{\lambda-\alpha}$ y claramente $\frac{1}{\nu_\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda} = 1$. Luego, definiendo $\beta := \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} < 1$, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[U_\alpha(X_\zeta^\pi)\right] \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathbb{E}\left[H_\zeta^{-\delta}\right]\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}}\left(\mathbb{E}\left[(H_\zeta X_\zeta^\pi)^\beta\right]\right)^{\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}}.$$

Ahora, dada la Observación 1.4 y que $x \mapsto x^\beta$ es una función cóncava sobre $\mathbb{R}$, $(HX^\pi)^\beta$ define una supermartinga, por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\left(H_\zeta X_\zeta^\pi\right)^\beta\right] \leq (H_0 X_0^\pi)^\beta = 1.$$

De esta última desigualdad, (3.1) y (3.2), se obtiene que $\mathbb{E}\left[U_\alpha(X_\zeta^\pi)\right] < \infty$ para cualquier proceso de portafolio $\pi \in \mathcal{A}(x)$.

Por otro lado, dada la completez del mercado financiero, para la variable $\mathcal{F}_\zeta$-medible $\mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]^{-1} H_\zeta^{-\frac{1}{\alpha}}$, existe un portafolio admisible $\hat{\pi}$ y su respectivo proceso de capital $V := X^{\hat{\pi}} = \{V_t;\ 0 \leq t \leq \zeta\}$ que satisface

$$V_\zeta = \frac{H_\zeta^{-\frac{1}{\alpha}}}{\mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]}, \tag{3.3}$$

más aún, (HV) es una $\mathbb{P}$-martingala u.i. con valor inicial $H_0V_0 = 1$.

Observación 3.1. El proceso de capital asociado al portafolio óptimo con valor inicial x está dado por $X_t^* = xV_t$, para cada $0 \leq t \leq \zeta$. En efecto, notemos que se verifica

$$U_\alpha'\left(X_\zeta^*\right) = (xV_\zeta)^{-\alpha} = \lambda' H_\zeta,$$

donde $\lambda' = \left(x/\mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]\right)^{-\alpha} > 0$, y también

$$\mathbb{E}\left[H_\zeta X_\zeta^*\right] = x\mathbb{E}\left[H_\zeta V_\zeta\right] = x.$$

Así, por la Proposición 3.1, $\hat{\pi}$ es el proceso de portafolio óptimo para el problema de optimización de portafolios sin restricciones y X^* es su respectivo proceso de capital. Por último, el valor terminal óptimo para el problema de portafolio está dado a partir de (3.3) por

$$\mathbb{E}\left[U_\alpha(X_\zeta^*)\right] = \frac{x}{1-\alpha}\left(\frac{x}{\mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]}\right)^{-\alpha}.$$

Luego, dado que el proceso (HV) es una $\mathbb{P}$-martingala u.i., podemos definir una nueva medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ a través de su densidad de Radon-Nikodym.

Definición 3.1. Sea $\mathbb{Q}^V$ una medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ definida a través de su densidad de Radon-Nikodym, la cual está dada por

$$\frac{d\mathbb{Q}^V}{d\mathbb{P}} = H_\zeta V_\zeta = \frac{H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]}.$$

Con esta última definición, podemos considerar un cambio de numerario a partir del siguiente lema.

Lema 3.1. Consideremos a V como un nuevo *numerario*, esto es, para cada portafolio admisible y su proceso de capital X, el capital bajo el nuevo numerario se define por

$$X_t^V := \frac{X_t}{V_t}, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

y se satisface que es una $\mathbb{Q}^V$-martingala u.i.

Demostración. En efecto, recordemos que HX es una $\mathbb{P}$-martingala u.i. y dada la definición de $\mathbb{Q}^V$, se verifica para cada $0 \leq s \leq t \leq \zeta$ que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[X_t^V \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{H_t V_t}{H_s V_s} \frac{X_t}{V_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{1}{H_s V_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[H_t X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{X_s}{V_s} = X_s^V,$$

es decir, X^V es una $\mathbb{Q}^V$-martingala u.i. ■

Este cambio de numerario será de utilidad para transformar el problema de portafolios en un problema de martingalas. Más específicamente, podemos obtener la siguiente equivalencia de valores esperados bajo la forma particular de la función de utilidad U_α. Para ello, consideremos una vez más un portafolio admisible π y su proceso de capital asociado X^π, así, por (3.3) se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U_\alpha(X_\zeta^\pi) \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\left(X_\zeta^\pi\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\frac{1}{H_\zeta V_\zeta} \frac{\left(X_\zeta^\pi\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\frac{V_\zeta^{-\alpha}}{H_\zeta} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{X_\zeta^\pi}{V_\zeta} \right)^{1-\alpha} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}} \right]^\alpha U_\alpha\left(\frac{X_\zeta^\pi}{V_\zeta} \right) \right] \\
&= \lambda^* \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[U_\alpha\left(X_\zeta^{\pi,V} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\lambda^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}} \right]^\alpha$ y $X^{\pi,V}$ es el proceso de capital asociado a π bajo el nuevo numerario S. Con esta transformación, el problema de optimización de portafolio es equivalente a hallar un proceso que maximice el criterio

$$\max_{X_t^V \in \mathcal{M}_x(\mathbb{Q}^V)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[U_\alpha(X_\zeta^V) \right],$$

donde $\mathcal{M}_x(\mathbb{Q}^V) = \left\{ X = \{X_t;\ t \geq 0\} : X \text{ es una } \mathbb{Q}^V\text{-martinga u.i. y } X_0 = x \right\}$. Más aún, como se discutió en la Sección 2.2, el proceso óptimo para este problema es aquel con valor constante x. En ese sentido la transformación no ha sido relevante, sin embargo, este nuevo criterio será de gran utilidad para el caso cuando solicitamos que el proceso satisfaga una garantía tipo americana.

En efecto, consideremos el problema de la Definición 1.17, es decir, supongamos que un agente con capital inicial $x > 0$, una función de utilidad asociada de tipo CRRA U_α y un proceso no negativo y $(\mathcal{D})$-regular K (ver Definición 2.2), el cual consiste en buscar un portafolio admisible $\pi^* \in \mathcal{A}_K(x)$ que verifica el criterio

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}_K(x)} \mathbb{E}\left[U_\alpha(X_\zeta^\pi)\right]. \tag{3.5}$$

Así, por el Lema 3.1, el problema es equivalente a hallar una $\mathbb{Q}^V$-martingala u.i. que satisfaga el criterio

$$\max_{X \in \mathcal{M}^{Z^K}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[U_\alpha(X_\zeta)\right], \tag{3.6}$$

donde

$$\mathcal{M}^{Z^K} = \left\{X : X \text{ es una } \mathbb{Q}^V\text{-martingala u.i., } X_t \geq Z_t^K\ \forall t \in [0,\zeta] \text{ y } M_0 = Z_0^K\right\},$$

y Z^K es la envoltura de Snell del proceso definido para cada $t \in [0,\zeta]$ por $\frac{K_t}{V_t}$.

En conclusión, hemos transformado en el problema de optimización de portafolios en un problema de martingalas similar al de la Definición 2.5.

Observación 3.2. Notemos que hemos dejado de lado a los procesos de portafolio π y nos hemos enfocado simplemente en los procesos de capital, esto es debido al hecho de que trabajamos bajo el argumento de un mercado completo, donde cada política admisible puede ser representada por una martingala.

3.1.2. Solución del problema con restricciones vía descomposición Máx-Plus

Dado el problema con restricciones de la sección anterior, podemos aplicar el Teorema 2.1 y afirmar que existe un proceso opcional semicontinuo superiormente por la derecha L que satisface

$$Z_t^K = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\sup_{t \leq s \leq \zeta} L_s^K \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

y por el Teorema 2.5, la martingala $M^{K,\oplus}$ definida por

$$M_t^{K,\oplus} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[L_{0,\zeta}^{K,*} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\sup_{0 \leq s \leq \zeta} L_s^K \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta, \tag{3.7}$$

satisface la desigualdad
$$\mathbb{E}\left[g(M_\zeta^{K,\oplus})\right] \geq \mathbb{E}\left[g(M_\zeta)\right],$$
para toda función cóncava g y cualquier martingala $M \in \mathcal{M}^{Z^K}$. En particular, si tomamos $g \equiv U_\alpha$ y $x = Z_0^X$, entonces $M^{K,\oplus}$ soluciona el problema de portafolios con restricciones.

Si consideramos el problema inicial definido por (3.5), el proceso de capital optimo puede expresarse por
$$X_t^{K,\pi^*} = V_t M_t^{X,\oplus}, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$
para alguna política admisible $\pi^* \in \mathcal{A}_K(x)$. Más aún, el valor terminal óptimo está dado por
$$X_\zeta^{K,\pi^*} = \frac{H_\zeta^{-\frac{1}{\alpha}}}{\mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]} L_{0,\zeta}^{K,*}. \tag{3.8}$$

3.2. Ejemplo en el contexto de Black-Scholes

En esta sección presentamos un ejemplo del problema de optimización de portafolio en el contexto bien conocido de Black y Scholes. De manera general, vamos a desarrollar cada uno de los pasos de la sección anterior para conducir a la solución de este ejemplo.

3.2.1. Problema sin restricciones

Consideremos un mercado financiero que consta de un activo sin riesgo, un activo con riesgo y un horizonte finito y no aleatorio ζ. La evolución del precio del activo sin riesgo S^0 sigue la dinámica descrita por
$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$
donde suponemos que la tasa de interés instantánea r es constante y positiva. Asimismo, la dinámica del precio del activo con riesgo S satisface
$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$
con b y σ constantes positivas y W un movimiento Browniano unidimensional.

Bajo estos supuestos, podemos expresar de manera explícita el proceso de precio del riesgo, el proceso Z^0 de cambio de medida y la medida de probabilidad martingala estándar $\mathbb{P}_0$. En efecto, el proceso de precio del riesgo θ es constante y está definido por
$$\theta = \frac{b-r}{\sigma},$$

con lo que Z^0 tiene forma explícita dada por

$$\begin{aligned} Z_t^0 &= \exp\left\{-\left(\frac{b-r}{\sigma}\right)W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{b-r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \\ &= \exp\left\{-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right\}, \quad 0 \leq t \leq \zeta, \end{aligned}$$

y la medida de probabilidad martingala $\mathbb{P}_0$ se define por su derivada de Radon-Nikodym respecto a $\mathbb{P}$ como

$$\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}} = Z_\zeta^0,$$

definiendo así un nuevo $\mathbb{P}_0$-movimiento Browniano W^0 que satisface

$$dW_t^0 = dW_t + \theta dt, \quad 0 \leq t \leq \zeta.$$

En este caso, el proceso de densidad de precio del estado H está dado por

$$\begin{aligned} H_t = \frac{Z_t^0}{S_t^0} &= \exp\left\{-\left(\frac{b-r}{\sigma}\right)W_t - \left(r + \frac{1}{2}\left(\frac{b-r}{\sigma}\right)^2\right)t\right\} \\ &= \exp\left\{-\theta W_t - \left(r + \frac{1}{2}\theta^2\right)t\right\}, \quad 0 \leq t \leq \zeta. \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos que un inversionista posee un capital inicial $x > 0$ y que sus preferencias de inversión están modeladas por una función de utilidad de tipo CRRA U_α. Más aún, el proceso de portafolio del inversionista está dado por un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-medible $\pi = \{\pi_t; t \in [0,\zeta]\}$, donde π_t representa la cantidad invertida en el activo con riesgo al tiempo t. De esta manera, si X es el proceso de capital del inversionista, entonces $X_t - \pi_t$ representa la cantidad invertida en el activo sin riesgo al tiempo t. Por lo anterior, la dinámica que sigue el capital del inversionista está descrita para cada $0 \leq t \leq \zeta$

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t^\pi - \pi_t)\frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= \big(rX_t^\pi + \pi_t(b-r)\big)dt + \pi_t \sigma dW_t \\ &= rX_t^\pi dt + \pi_t \sigma dW_t^0. \end{aligned}$$

Recordemos que nuestro interés se enfoca en los portafolios auto-financiables, para ello, dada la simplicidad de este modelo, basta pedir que $X_t - \pi_t \geq 0$ para cada $t \in [0,\zeta]$. En este mismo sentido, dentro de lo discutido de la sección anterior, nos interesan los procesos de portafolio tales que HX^π sea una $\mathbb{P}$-martingala u.i., o lo que es equivalente, buscamos que X^π/S^0 sea una $\mathbb{P}_0$-martingala u.i., debido a que

$$d\left(\frac{X_t^\pi}{S_t^0}\right) = \sigma \frac{\pi_t}{S_t^0} dW_t^0, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

es suficiente pedir que π satisfaga

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}\left[\int_0^\zeta \left(\frac{\pi_t}{S_s^0}\right)^2 ds\right] < \infty,$$

para que HX^π sea una $\mathbb{P}$-martingala u.i.

Recordemos que el primer paso de la sección anterior consiste en hallar el portafolio que soluciona el problema sin restricciones y con valor inicial $x = 1$, esto es, buscamos $\hat{\pi} \in \mathcal{A}(1)$ tal que, el proceso de capital asociado V maximice el valor esperado de la utilidad terminal, donde

$$\mathcal{A}(1) = \left\{\pi;\ X_t^\pi - \pi_t \geq 0\ \forall t \in [0,\zeta] \text{ y } \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}\left[\int_0^\zeta \left(\frac{\pi_t}{S_s^0}\right)^2 ds\right] < \infty\right\}.$$

Este problema ha sido ampliamente estudiado y su solución en bien conocida, en particular, en [18] se resuelve utilizando técnicas de programación dinámica y se obtiene que el portafolio $\hat{\pi}$ que soluciona el problema sin restricciones está dado por

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t &= \frac{b-r}{\alpha\sigma^2}V_t \\ &= \frac{\theta}{\alpha\sigma}V_t, \quad 0 \leq t \leq \zeta.\end{aligned}$$

donde V está dado por la ecuación diferencial estocástica

$$dV_t = \left(r + \frac{1}{\alpha}\theta^2\right)V_t dt + \frac{\theta}{\alpha}V_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

con condición inicial $V_0 = 1$, o bien,

$$V_t = \exp\left\{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(r + \frac{1}{2\alpha}\theta^2\right)t\right\} H_t^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.9}$$

$$= \frac{H_t^{-\frac{1}{\alpha}}}{\mathbb{E}\left[H_t^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]}, \quad 0 \leq t \leq \zeta. \tag{3.10}$$

Usando el cambio a la medida $\mathbb{Q}^V$, la cual está definida a través de su derivada de Radon-Nikodym con respecto a $\mathbb{P}$ por

$$\frac{d\mathbb{Q}^V}{d\mathbb{P}} = H_\zeta V_\zeta = e^{-r\zeta}V_\zeta\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}},$$

bajo la cual $W_t^V := W_t^0 - \frac{\theta}{\alpha}t$ define un $\mathbb{Q}^V$-movimiento Browniano, se obtiene que $X^{\pi,V} = \frac{X^\pi}{V}$ es una $\mathbb{Q}^V$-martingala u.i. y

$$\mathbb{E}\left[U_\alpha(X_\zeta^\pi)\right] = \hat{\lambda}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[U_\alpha\left(X_\zeta^{\pi,V}\right)\right], \quad \pi \in \mathcal{A}(1),$$

donde $\hat{\lambda} = \mathbb{E}\left[H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]^\alpha$. Con esto, hemos transformado el problema de optimización de portafolios en un problema de martingalas obteniendo de manera explícita la medida de probabilidad $\mathbb{Q}^V$, sin embargo, hasta ahora no hemos considerado el problema con restricciones.

3.2.2. El caso del problema con restricciones

Dentro del ambiente financiero que se ha propuesto, es sensato pensar que el inversionista debe procurar que su capital sea mayor que el crecimiento que tendría su capital inicial si se invirtiera por completo en activo sin riesgo, esto es, los procesos de portafolio que el inversionista debe elegir son aquellos que satisfacen $X_t^\pi \geq xe^{rt} =: K_t$. Así, el problema de portafolios ahora contiene una restricción.

Debido al cambio de numerario, dado el proceso $K = \{K_t = xe^{rt}; 0 \leq t \leq \zeta\}$, la restricción anterior se convierte en

$$X_t^{\pi,V} \geq \frac{K_t}{V_t} =: Z_t^K, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

para cada $\pi \in \mathcal{A}_K(x)$. Luego, es necesario analizar el comportamiento de Z bajo la medida de probabilidad $\mathbb{Q}^V$. Para esto, notemos que la representación de $\frac{1}{V}$ en términos del $\mathbb{Q}^V$-movimiento Browniano, está dada por

$$\frac{1}{V_t} = \exp\left\{-rt - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2 t - \frac{\theta}{\alpha}W_t^V\right\}, \quad ,0 \leq t \leq \zeta,$$

así, Z^K está dado por

$$Z_t^K = \frac{e^{rt}}{V_t} = x\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2 t - \frac{\theta}{\alpha}W_t^V\right\}, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

es decir, Z^K es una $\mathbb{Q}^V$-martingala por lo que, en particular, es una $\mathbb{Q}^V$-supermartingala. Más aún, Z^K es un proceso de Lévy multiplicativo, así, por la Sección 2.1.2, Z^K tiene una representación Máx-Plus dada por

$$Z_t^K = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\sup_{t \leq u \leq \zeta} b(\zeta - u)Z_u^K \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

donde $b(\cdot)$ es una función determinista aunque se desconoce su forma explícita. Luego, la martingala $M^{K,\oplus}$ está dada por

$$M_t^{K,\oplus} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^V}\left[\sup_{t\leq u\leq \zeta} b(\zeta - u)Z_u^K \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad ,0 \leq t \leq \zeta,$$

y además, $M^{K,\oplus}$ soluciona el problema de optimización de martingalas con restricción. Así, el proceso de capital óptimo puede expresarse como

$$X_t^{\pi^*} = V_t M_t^{K,\oplus}, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

para alguna política admisible $\pi^* \in \mathcal{A}_K(x)$.

Notemos que a pesar de que nos encontramos en el contexto de Black y Scholes, el cual es unos de los escenarios más simples y mejor estudiados, no es posible describir la forma del proceso de portafolio óptimo π^* con las herramientas que hemos considerado hasta este momento. En general, hallar de manera explícita dicho proceso es un problema complejo e incluso en publicaciones como [3], donde se aborda el problema de optimización de portafolios con garantía Americana, los autores se limitan a obtener el valor terminal del proceso de capital óptimo de manera similar a lo que se presentó en (3.8).

Trabajo a futuro

Considerando que para el problema de optimización de portafolios que se ha propuesto hemos encontrado la forma del proceso de capital óptimo, se plantea como un proyecto futuro el estudiar la formulación de la política asociada a dicho proceso a partir de considerar herramientas como las desarrolladas por N. Touzi en [18].

Por otro lado, observemos que la suposición de estar trabajando bajo un mercado financiero completo fue sustancial en la solución del problema propuesto, ya que de esa manera se pudo garantizar la existencia del proceso de cambio de numerario V. Así surge la pregunta de qué sucede en un mercado incompleto, es decir, en un mercado donde no necesariamente existe una estrategia de portafolio para cubrir en el futuro a cada cantidad aleatoria.

Recordemos que el contexto de mercados incompletos ha sido estudiado en referencias como [9] y [18] a través de argumentos de programación dinámica, análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales, sin embargo, un problema interesante que se vislumbra es el de proponer argumentos de representación de martingalas (supermartingalas) al menos de manera local dentro del contexto de estos mercados.

Por último, podemos advertir que la solución se planteó solo para funciones de utilidad tipo CRRA, por lo que es natural preguntarse si para otra clase de funciones se tiene un resultado análogo. En este sentido, durante la elaboración de la tesis se consideraron funciones de utilidad tipo logaritmo y CARA (ver Sección 1.2.1) y se abordo el problema de encontrar una transformación similar a la propuesta en (3.4), sin embargo, en ninguno de los dos casos se pudo hallar dicha transformación, por lo que consideramos muy probable que el método para abordar otras funciones de utilidad tenga que ser distinto al propuesto en esta sección.

Conclusiones

Con base en el trabajo desarrollado para la elaboración de esta tesis, las conclusiones que se obtienen alrededor del problema de optimización de portafolios y su solución a través de la descomposición Máx-Plus son las siguientes.

- En el contexto de mercados completos, el Teorema 2.5 es una herramienta potente para resolver el problema de optimización de portafolios debido a que las hipótesis que requiere son usuales dentro de la teoría de control estocástico. Más aún, su principal aportación es la de garantizar la optimalidad del proceso de capital para cualquier función de utilidad.

- Es posible obtener una expresión para el valor terminal óptimo, sin embargo y como es común en los problemas de control, no es sencillo mostrar la forma explícita del proceso de portafolio que optimiza el problema. Para ello sería necesario desarrollar teoría distinta a la presentada en esta tesis y correspondería a un problema de investigación futuro.

- El problema de optimización en su versión de martingala puede resolverse de manera explícita para las funciones de utilidad tipo CRRA. No obstante, las técnicas usadas en el estudio de este tipo de funciones no bastan al momento de considerar otro tipo de funciones de utilidad.

- Se abre una nueva linea de investigación si se considera el problema bajo el contexto de un mercado financiero incompleto. En ese sentido, sería interesante tratar de aplicar otros resultados de representación de martingalas (supermartingalas) locales y abordar el problema de optimización con técnicas similares a las expuestas en esta tesis.

Bibliografía

[1] Arrow, K. J. (1965). Aspects of the Theory of Risk-Bearing. Yrjo Jahnsson Lectures. Yrjo Jahnssonin Saatio, Helsinki.

[2] Chybiryakov, O. (2006). The Lamperti Correspondence Extended to Lévy Processes and Semi-stable Markov Processes in Locally Compact Groups. Stochastic Processes and Their Applications, 116(5), 857-872.

[3] El Karoui, N., Jeanblanc, M., & Lacoste, V. (2005). Optimal Portfolio Management with American Capital Guarantee. Journal of Economic Dynamics and Control, 29(3), 449-468.

[4] El Karoui, N., & Meziou, A. (2006). Constrained Optimization With Respect to Stochastic Dominance: Application to Portfolio Insurance. Mathematical Finance, 16(1), 103-117.

[5] El Karoui, N., & Meziou, A. (2008). Max-Plus Decomposition of Supermartingales and Convex Order. Application to American Options and Portfolio Insurance. The Annals of Probability, 647-697.

[6] Fernholz, E. R. (2002). Stochastic Portfolio Theory. In Stochastic Portfolio Theory (pp. 1-24). Springer, New York, NY.

[7] Föllmer, H., & Schied, A. (2011). Stochastic finance: an introduction in discrete time. Walter de Gruyter.

[8] Karatzas, I. (1997). Lectures on the Mathematics of Finance (Vol. 8). American Mathematical Soc..

[9] Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). Methods of Mathematical Finance. New York: Springer.

[10] Klebaner, F. C. (2012). Introduction to Stochastic Calculus with Applications. World Scientific Publishing Company.

[11] Korn, R. (1997). Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time. World Scientific.

[12] Le Gall, J. F. (2016). Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus (Vol. 274). Heidelberg: Springer.

[13] Mordecki, E. (2000). Elementary Proofs on Optimal Stopping. Preprint.

[14] Pliska, S. R. (1986). A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios. Mathematics of Operations Research, 11 (2), 371-382.

[15] Sato, K. I. (1999). Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.

[16] Shaked, M., & Shanthikumar, J. G. (2007). Stochastic Orders. Springer Science & Business Media.

[17] Shreve, S. E. (2004). Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-time Models (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

[18] Touzi, N. (2012). Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE (Vol. 29). Springer Science & Business Media.