



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

SISTEMAS MEÁNDRICOS Y SU RELACIÓN CON PROBABILIDAD LIBRE

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con Orientación en
Probabilidad y Estadística

Presenta

Daniel Muñoz George

Director de Tesis:

Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Autorización de la versión final

A Nasus,

Un poquito de todo el enorme amor que me entregaste.

Agradecimientos

Antes que todo quiero agradecer a mi familia, padres y hermanos en particular, por apoyarme en cada una de mis decisiones y saber que puedo contar con su apoyo a pesar de la distancia. Por otra parte agradezco a mi novia, por siempre darme ánimos y alentarme a lograr cada una de mis metas, te amo.

Quiero agradecer a mis sinodales, Dr. Carlos Vargas Obieta y Dr. Pierre Tarrago por la dedicación y tiempo dedicado a la lectura de esta tesis, muchas gracias por sus comentarios y aportes, de manera especial quiero agradecer a mi asesor Dr. Octavio Arizmendi Echegaray por el tiempo, esfuerzo y compromiso mostrado en la elaboración de este trabajo. Además de un asesor te considero un mentor y amigo, muchas gracias por todos tus consejos, sé que me serán muy útiles en lo que está por venir.

Agradezco a todo el cuerpo de profesores del CIMAT por las enseñanzas a lo largo de esto dos años, puedo decir con mucha seguridad que sea cual sea el problema que se me presente a futuro sabré responder, pues el cimiento académico que me han proporcionado es sólido. En particular, quiero hacer un énfasis en el grupo de profesores de Probabilidad Libre; Dr. Victor Perez, Dr. Octavio Arizmendi, Dr. Carlos Vargas y Dr. Pierre Tarrago, sus enseñanzas me serán excepcionales en esta nueva etapa de mi vida.

Quiero agradecer a toda la comunidad CIMAT-DEMAT por el apoyo emocional y académico que me han brindado estos dos años, en particular a mi generación, 2016-2018, por todos los buenos momentos que pasamos juntos, los extrañaré chicos.

Finalmente pero no menos importante, quiero agradecer al CIMAT, por ser una institución excepcional en cada uno de los aspectos que uno requiere como estudiante. No miento cuando digo que siento un enorme orgullo al decir que pertencí a esta gran institución. En particular quiero dar las gracias por el apoyo económico otorgado a través de la beca CONACyT en estos dos años

y por la beca de ayudantía otorgada en mi tercer semestre de maestría. El apoyo y orientación que brinda todo el personal es invaluable, me llevo sin duda un hermoso recuerdo.

Índice general

1. Preliminares	8
1.1. El conjunto de permutaciones y particiones en n elementos . .	8
1.1.1. El conjunto de permutaciones S_n	8
1.1.2. El conjunto de particiones $P(n)$	9
1.2. Introducción a la Probabilidad No Conmutativa	12
1.2.1. Espacio de Probabilidad No Conmutativo	12
1.2.2. Relación momentos-cumulantes	16
1.2.3. Transformadas elementales	21
1.2.4. Convolución aditiva libre	23
1.3. Sistemas meándricos	24
1.4. Diagramas de Hasse	26
1.4.1. Complemento de Kreweras	28
1.5. Introducción a la Teoría de Gráficas	31
2. Sistemas meándricos y primeras relaciones con probabilidad libre	35
2.1. Definiciones y resultados	35
2.2. Sistemas meándricos irreducibles	38
2.3. Sistemas meándricos de un solo componente	42
3. Una relación directa entre sistemas meándricos y diagramas de Hasse	51
3.1. Gráficas de Cayley	51
3.2. La distancia en el diagrama de Hasse Λ_n	53
4. Número promedio de componentes de los sistemas meándricos	60

4.1.	Expresiones equivalentes con la distancia en el diagrama de Hasse	60
4.2.	Sistemas meándricos con tapa superior e inferior	65
4.3.	Sistemas meándricos con tapa superior	68
4.3.1.	Resultados y definiciones previas	69
4.3.2.	Sistemas meándricos con tapa superior fija $d_{2,m}$	72
4.3.3.	Sistemas meándricos con tapa superior arbitraria	82
4.4.	Cotas para el caso general	88
4.5.	Sistemas meándricos con tapa superior e inferior vía la convolución aditiva booleana	93
4.6.	Comentarios y conclusiones	97

Introducción

Un sistema meándrico se puede definir como un conjunto de curvas cerradas que no se intersectan, tales que cruzan una línea horizontal por una cantidad finita de puntos, la motivación de su nombre proviene de la similitud que guarda con la curva descrita por un río a la que se le conoce como meandro. Entre trabajos pioneros que se tienen acerca de sistemas meándricos destacan los realizados por P. Di Francesco, O. Golinelli y E. Guitter en los noventa. En particular, el artículo [1] donde se analizan los semi-sistemas meándricos es una buena introducción al tema.

Los problemas estudiados en relación con sistemas meándricos son por lo general problemas combinatorios, y debido a su naturaleza se han atacado numerosas veces a través de herramientas de conteo, algebraicas, computacionales, entre otras. En el trabajo de esta tesis se abordará el problema de contar el número promedio de componentes de los sistemas meándricos en $2n$ puntos donde con componente nos referimos a una curva cerrada. El enfoque con que se estudiará este problema se basa en el uso de herramientas de probabilidad libre, para ser más específico, a través de la convolución aditiva libre.

En el primer capítulo vamos a adentrarnos de manera general en todas aquellas herramientas que vamos a requerir. Para esto, se verá de manera muy general que es un sistema meándrico y abordaremos brevemente lo que es la Probabilidad No Conmutativa. La inclusión de este capítulo tiene como objetivo permitir a cualquier lector que no esté familiarizado con dichos conceptos poder comprender todo el trabajo de esta tesis. En este sentido lo que se busca es que este sea un trabajo autocontenido.

El segundo capítulo está basado en Nica [5]. Para este capítulo vamos a estar particularmente interesados en todos aquellos sistemas meándricos de un solo componente, los cuáles en la literatura son referidos como meandros simplemente. Para esto, introduciremos lo que es un sistema meándrico irre-

ducible y se verá que en particular todo meandro es un sistema meándrico irreducible, por lo que el poder contar todos los sistemas meándricos irreducibles en $2n$ puntos nos permitirá establecer una cota superior para el número de meandros en $2n$ puntos. La herramienta fundamental será ver que el número de sistemas meándricos irreducibles en $2n$ puntos es de hecho el $2n$ -ésimo cumulante libre de una variable aleatoria en el sentido algebraico visto en el Capítulo 1. Es aquí donde entrará toda la herramienta de Probabilidad No Conmutativa. En este sentido, la motivación de este Capítulo 2, es el de darle al lector una idea general de como los problemas de conteo sobre sistemas meándricos pueden abordarse a través de herramientas de probabilidad libre. Para el tercer capítulo nos basaremos en Tracy [3]. Este capítulo será nuestra maquinaria base para poder abordar el problema principal de la tesis. Para esto buscaremos hallar una relación entre el número de componentes de un sistema meándrico en $2n$ puntos y la distancia en el diagrama de Hasse de $NC(n)$. Dicha relación nos permitirá estudiar el número de componentes de los sistemas meándricos a través de expresiones que dependen de particiones en $NC(n)$, es aquí donde podremos hacer uso de la convolución aditiva libre.

Finalmente, en el cuarto y último capítulo, el cual está basado en [6], nos enfocaremos en lo último mencionado. Se hará uso de la convolución aditiva libre para poder hallar expresiones que dependen completamente del número de bloques de las particiones en $NC(n)$. Con estos resultados y lo obtenido en el Capítulo 3 vamos a dar expresiones algebraicas para el número promedio de componentes y con ellos conocer como se comportan asintóticamente cuando n crece arbitrariamente.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación se darán algunas definiciones y conceptos previos, además de resultados que servirán al desarrollo del posterior trabajo. Estos conceptos y resultados motivan además de manera natural la introducción de la probabilidad libre. Algunos de ellos solo se mencionaran sin verse a detalle pues se trata de resultados bastante conocidos y no van enfocados en el objetivo principal de este trabajo.

1.1. El conjunto de permutaciones y particiones en n elementos

La idea de presentar estas dos nociones juntas va encaminado en el hecho de que existe un encaje natural del conjunto de particiones en el de permutaciones. De esta relación se hablará bastante en el Capítulo 3 de esta tesis, y de hecho, nos va a permitir encontrar una relación directa entre la gráfica de Cayley del conjunto de permutaciones con el diagrama de Hasse del conjunto de particiones que no se cruzan. Esta relación será fundamental a lo largo del Capítulo 4 y nos permitirá, vía la distancia en el diagrama de Cayley, definir una distancia en el diagrama de Hasse.

1.1.1. El conjunto de permutaciones S_n

Definición 1. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, y $S_n = \{f | f : [n] \rightarrow [n] \text{ tal que } f \text{ es biyectiva} \}$ como el conjunto de permutaciones de n

elementos. Una transposición es un elemento de S_n que deja invariante todos los elementos salvo dos que intercambian mutuamente.

Es bien sabido que toda permutación puede expresarse como composición de transposiciones, lo cual motiva a la siguiente definición.

Definición 2. Para una permutación $\sigma \in S_n$, denotamos por $\|\sigma\|$ a su norma, definida de la siguiente manera,

$$\|\sigma\| = \min\{m : \sigma = t_1 \cdots t_m \text{ donde } t_1, \dots, t_m \text{ son transposiciones}\}.$$

Es además conocido que toda permutación puede descomponerse como producto de ciclos disjuntos, denotaremos a la cantidad de ciclos disjuntos de σ por $\#ciclos(\sigma)$.

Ejemplo 3. Dada la permutación σ como sigue,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

su descomposición en ciclos disjuntos es $(123)(45)(6)$ y por ende $\#ciclos(\sigma) = 3$.

Un resultado bastante conocido es que para $\sigma \in S_n$ se cumple $\|\sigma\| = n - \#ciclos(\sigma)$, y de hecho, se verificará dicho resultado en el Capítulo 3. Estas son las herramientas básicas que se requieren saber acerca de permutaciones, como lo mencione al principio, estos resultados son bastante conocidos de un curso de teoría de grupos y por tal motivo no se detalla más.

1.1.2. El conjunto de particiones $P(n)$

Ahora hablaremos de particiones, que como más adelante se verá, surge de manera muy natural al pensar el problema de calcular momentos de variables aleatorias a base de herramientas combinatorias en vez de analíticas. Esto mismo motivará además a la introducción de la probabilidad libre, de la cual se hablará brevemente.

Definición 4. Para $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $P(n)$ el conjunto de particiones de $[n]$, dado por $\{(A_1, \dots, A_k) | A_i \subset [n], A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \cup_{i=1}^k A_i = [n], \text{ con } 1 \leq k \leq n\}$. A los A_i se les denomina bloques de la partición y se denota por $|\pi|$ a la cantidad de bloques de la partición π .

En palabras simples, una partición de $[n]$ es una disección en bloques disjuntos de $\{1, \dots, n\}$. Existen además conjuntos propios de $P(n)$ que será útil definir.

- Definición 5.**
1. Se define el conjunto de particiones que no se cruzan de n elementos, $NC(n)$, como el subconjunto de particiones de $P(n)$ tales que si $\pi \in NC(n)$, entonces no existen $a < b < c < d$ con a, c en un bloque de π y d, b en algún otro bloque distinto.
 2. Se define el conjunto de particiones a intervalos, $Int(n)$, como el subconjunto de particiones $\pi \in NC(n)$, tales que si a, b pertenecen al mismo bloque de π , necesariamente todos los elementos c con $a \leq c \leq b$ pertenecen al mismo bloque también.

Además vamos a denotar por $NC_2(2n)$ al conjunto de particiones que no se cruzan de $2n$ elementos a pares, es decir todas aquellas particiones donde todos sus bloques son de tamaño 2. Es importante mencionar este conjunto pues será fundamental más adelante. Un hecho bastante usado en probabilidad libre y combinatoria es que $NC(n) \cong N_2(2n)$ en el sentido de que existe una biyección natural entre ambos conjuntos, más aun al ser conjuntos finitos se sabe que, $|NC_2(2n)| = |NC(n)| = Cat_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Además tenemos el siguiente subconjunto de particiones que usaremos mas adelante.

Definición 6. Denotamos al conjunto de particiones 2-divisibles de n elementos, como el subconjunto de $NC(n)$ compuesto por todas aquellas particiones $\pi \in NC(n)$ tales que si $\pi = \{v_1, \dots, v_k\}$ entonces, $|v_i|$ es par para todo $i = 1, \dots, k$.

Como se mencionó al inicio de la sección, existe una forma canónica de ensamblar $NC(n)$ dentro de S_n de la siguiente manera.

Definición 7. Para cada $\pi \in NC(n)$, definimos la permutación $P_\pi \in S_n$ de la siguiente manera: los bloques de π con los elementos ordenados se convierten en las órbitas de P_π , i.e, si π tiene un bloque $V = \{i_1, \dots, i_k\}$ con $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, entonces (i_1, \dots, i_k) es una órbita de P_π y por ende, $P_\pi(i_l) = i_{l+1}$ para $1 \leq l \leq k - 1$ y $P_\pi(i_k) = i_1$.

La motivación de definir el conjunto de particiones es debido al importante uso que se le da en Probabilidad No Conmutativa. Como se verá en el siguiente capítulo, esta rama de la probabilidad busca un enfoque algebraico,

y conceptos como conjuntos parcialmente ordenados, particiones y cumulantes surgen de manera muy natural. Antes de terminar la sección, vamos a probar un serie de resultados acerca de la cantidad promedio de bloques de una partición que retomaremos cuando llegemos al resultado principal de la tesis en el Capítulo 4.

Teorema 8. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que,*

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pi \in \text{Int}(n)} |\pi| = \frac{1}{\text{Cat}_n} \sum_{\rho \in \text{NC}(n)} |\rho| = \frac{n+1}{2}.$$

Demostración. Para la prueba comencemos con la igualdad, $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pi \in \text{Int}(n)} |\pi| = \frac{n+1}{2}$, para esto es fácil notar que la cantidad de particiones a intervalos con exactamente k bloques está dada por $\binom{n-1}{k-1}$ pues es como hacer k grupos y entonces las $k-1$ divisiones respectivas se pueden colocar en $n-1$ lugares entre los números, dicho esto se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pi \in \text{Int}(n)} |\pi| &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \mathbb{E}(1 + \text{Binom}(n-1, \frac{1}{2})) = 1 + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad, $\frac{1}{\text{Cat}_n} \sum_{\rho \in \text{NC}(n)} |\rho| = \frac{n+1}{2}$, vamos a usar el hecho de que la cantidad de particiones en $\text{NC}(n)$ con k bloques está dado por el número de Narayana, $\frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$, luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Cat}_n} \sum_{\rho \in \text{NC}(n)} |\rho| &= \frac{1}{\text{Cat}_n} \sum_{k=1}^n k \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n k \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{n+1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{1}{n} \binom{n}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{n+1}{n} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} - \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}}. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}}$ es la densidad de una variable aleatoria hipergeometrica(n,n,2n) con soporte 0, 1, 2, ..., n se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Cat_n} \sum_{\rho \in NC(n)} |\rho| &= \frac{n+1}{n} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} - \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} \\ &= (n+1) \left[1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} \right] - \frac{n+1}{n} \left[\mathbb{E}(Hip(n, n, 2n)) - \frac{n}{\binom{2n}{n}} \right] \\ &= n+1 \left[1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} \right] - \frac{n+1}{n} \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{\binom{2n}{n}} \right) = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

□

1.2. Introducción a la Probabilidad No Conmutativa

El objetivo de esta sección es dar un concepto muy general y amplio de lo que es la Probabilidad No Conmutativa. Veremos además algunas transformadas de variables aleatorias que nos resultará esencial mencionar para capítulos posteriores. La teoría de la Probabilidad No Conmutativa es bastante extensa, como comentario personal, se recomienda leer Nica y Speicher [7] si se desea saber más al respecto de esta materia que relaciona probabilidad con un enfoque algebraico.

1.2.1. Espacio de Probabilidad No Conmutativo

Definición 9. Una $*$ -álgebra es un par $(A, *)$ donde A es un álgebra y $*$: $A \rightarrow A$ una aplicación definida por $*(a) = a^*$, y que cumple:

- (I) $(a^*)^* = a$
- (II) $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- (III) $(ab)^* = b^*a^*$

Definición 10. Un Espacio de Probabilidad No Conmutativo (EPNC) es un par (A, ψ) . Donde A es un $*$ -álgebra con unidad 1_A y $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que $\psi(1_A) = 1$.

En este sentido las variables aleatorias son elementos en el álgebra y decimos que son autoadjuntas si $a = a^*$, para ver como este concepto engloba al caso clásico se puede ver el primer ejemplo, de los siguientes ejemplos de EPNC's.

Ejemplo 11. Algunos ejemplos de EPNC's son los siguientes:

1. (A_1, \mathbb{E}) donde $A_1 = \{x+iy | x, y \text{ son v. a. con todos sus momentos.}\}$, en este caso $\psi = \mathbb{E}$ es la esperanza usual.
2. (A_2, tr) donde $A_2 = \{M_n(\mathbb{C})\}$ el conjunto de matrices de $n \times n$ con coeficientes en los complejos, en este caso $\psi = tr = \frac{Tr}{n}$ es la traza normalizada.
3. $(A_3, \mathbb{E}(tr))$ donde $A_3 = \{M | M \text{ es una matriz con entradas en } A_1\}$, usualmente esto es a lo que llamamos matriz aleatoria, en este caso $\psi = \mathbb{E} \circ tr$.

La primera duda natural que surge es, como definimos en este caso la distribución de una variable aleatoria. Para responder a esta cuestión se brinda la siguiente definición.

Definición 12. Sea a una variable aleatoria en (A, ψ) . La $*$ -distribución de a es la función, $\psi_a : \mathbb{C} \langle X, X^* \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ que manda P en $\psi(P(a, a^*))$. Si $\epsilon \in \{1, *\}^r$, el $*$ -momento ϵ de a está dado por $\psi_a(P_\epsilon)$ donde $P_\epsilon = X^{\epsilon_1} X^{\epsilon_2} \dots X^{\epsilon_r}$.

Si a es autoadjunto entonces $\psi_a : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ y su k -ésimo momento está dado por $m_k(a) = \psi(a^k)$. En el caso en que a es autoadjunto es posible probar que siempre existe una medida μ_a sobre \mathbb{R} tal que,

$$\psi_a(P) = \int_{\mathbb{R}} P(t) d\mu_a(t).$$

En este sentido, si para k natural se considera $P(x) = x^k$ entonces,

$$m_k(a) = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_a(t).$$

Es decir, en el caso en que a es autoadjunta, μ_a juega el rol de lo que se conoce como la medida de a en el caso clásico, por lo que así le llamaremos de ahora en adelante. Una vez resuelto el problema de la distribución, otra duda natural es como definir el concepto de independencia. A diferencia del caso clásico

donde se define a través de la densidad, en la Probabilidad No Conmutativa, todo esto se define a través del funcional ψ , como una regla para calcular momentos. Para esto es importante resaltar que la noción de independencia no es única y de hecho existen al menos 3 tipos de independencia,

1. Independencia clásica tensorial.
2. Independencia libre.
3. Independencia booleana.

Estas están definidas como sigue.

Definición 13. 1. Se dice que $a, b \in A$ son independientes en el sentido clásico si a y b conmutan y además

$$\psi(a^n b^m) = \psi(a^n)\psi(b^m)$$

para todo $n, m \geq 1$.

2. Se dice que $a, b \in A$ son independientes en el sentido libre si

$$\psi(p_1(a)q_1(b)\dots p_n(a)q_n(b)) = 0$$

para todos los polinomios $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$ tal que $\psi(p_i(a)) = \psi(q_i(b)) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

3. Se dice que $a, b \in A$ son independientes en el sentido booleano si

$$\psi(a^{n_1}b^{m_1}\dots b^{m_{k-1}}a^{n_k}) = \prod_{i=1}^k \psi(a^{n_i})\psi(b^{m_i})$$

para todo $n_i, m_i \geq 1$.

Tomando el ejemplo 1 visto de Espacios de Probabilidad No Conmutativos, en el caso de variables aleatorias clásicas, esto se traduce en que si X, Y son v.a. independientes, entonces, $\mathbb{E}(X^m Y^n) = \mathbb{E}(X^m)\mathbb{E}(Y^n)$ para todas $m, n \in \mathbb{N}$. Una vez definidos los momentos, es fácil definir los cumulantes, al igual que antes existen 3 tipos de cumulantes, asociados a cada noción de independencia.

Definición 14. Dado un EPNC (A, ψ) y $X \in A$, se definen recursivamente los cumulantes, r_n (libres), b_n (booleanos) y k_n (clásicos) por las fórmulas,

$$\psi(X^n) = \begin{cases} \sum_{\pi \in P(n)} k_\pi(X), \\ \sum_{\pi \in NC(n)} r_\pi(X), \\ \sum_{\pi \in Int(n)} b_\pi(X), \end{cases}$$

donde para $c_n \in \{r_n, b_n, k_n\}$ se define,

$$c_\pi(X) = \prod_{j=1}^{|\pi|} c_{|V_j|}(X),$$

donde V_j son los bloques de π . A $(r_\pi)_{\pi \in NC(n)}$ se le suele llamar la extensión multiplicativa de $(r_n)_{n \geq 1}$.

Es importante mencionar que es posible extender esto al caso multivariado de la siguiente manera,

$$\psi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} r_\pi(a_1, \dots, a_n),$$

y análogamente para el caso clásico y booleano. Por supuesto es inmediato ver que $r_n(a, \dots, a) = r_n(a)$. Además tenemos el siguiente teorema.

Teorema 15. Sean (A, ψ) un EPNC, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ los cumulantes libres, $m < n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$. Sean $1 \leq i(1) < i(2) < \cdots < i(m) = n$ una sucesión dada y $A_1 = a_1 a_2 \cdots a_{i(1)}, A_2 = a_{i(1)+1} \cdots a_{i(2)}, \dots, A_m = a_{i(m-1)+1} \cdots a_{i(m)}$, entonces se cumple que,

$$r_m(A_1, \dots, A_m) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma = 1_n}} r_\pi(a_1, a_2, \dots, a_m),$$

donde $\sigma = \{\{1, 2, \dots, i(1)\}\{i(1) + 1, \dots, i(2)\} \cdots \{i(m-1) + 1, \dots, i(m)\}\}$.

Para la prueba se puede consultar el Teorema 11.12 de [7].

Dicho esto será útil ver porque guardan esta relación los momentos con los cumulantes, la sección posterior aborda una manera distinta de definir los cumulantes clásicos, la cual es la más estándar en un curso de probabilidad clásica, para al final ver que en efecto la relación que guardan con los momentos es la definición que se dio.

1.2.2. Relación momentos-cumulantes

La forma en que el problema de calcular momentos y el conjunto de particiones se entrelazan está determinado por los resultados que se verán a continuación. Estos resultados tienen un enfoque algebraico, desarrollaremos los resultados que se tienen en probabilidad clásica los cuales nos abrirán la idea de como llevar esto al caso libre y booleano. Para esto será bueno introducir el concepto de cumulantes visto desde la probabilidad clásica. Los cumulantes clásicos fueron definidos en 1889 por el astrónomo, matemático y actuuario danés Thorvald N. Thiele y se pueden definir de la siguiente manera.

Definición 16. Sea X una variable aleatoria unidimensional definida como en el caso clásico, su función generadora de momentos está definida como:

$$\phi_x(t) = \mathbb{E}(e^{tx}).$$

Si la f.g.m de X existe y debido a que $\phi_X(0) = 1$, podemos considerar su logaritmo y desarrollar su serie de potencias alrededor del cero. A la función resultante se le denomina función generadora de cumulantes de X .

$$K_X(t) = \log(\phi_X(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(X) \frac{t^n}{n!}.$$

A $k_n(X)$ se le llama el cumulante de orden n de X , donde por convención el cumulante cero coincide con el momento de orden cero, $k_0(X) = m_0(X) = 1$.

Tenemos el siguiente resultado, bastante conocido.

Proposition 17. Sean X, Y v. a independientes y $a \in \mathbb{R}$, entonces

1. $k_n(aX) = a^n k_n(X)$.
2. $k_n(X + Y) = k_n(X) + K_n(Y)$.
3. $k_1(X + a) = k_1(X) + a$.
4. $k_n(X + a) = k_n(X)$.

Demostración.

1. Definimos a $Z = X + Y$, si $\phi_Z(t)$ es su función generadora de momentos, entonces

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \log(\phi_Z(t)) &= \log(\phi_X(t)) + \log(\phi_Y(t)) \Rightarrow \\ k_n(X + Y) &= k_n(X) + k_n(Y). \end{aligned}$$

2. Sea $Z = aX$ y $\phi_Z(t)$ su función generadora de momentos entonces

$$\log(\phi_X(at)) = \log(\phi_Z(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(X) \frac{(at)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(X) a^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(Z) \frac{t^n}{n!}.$$

Por lo tanto

$$k_n(Z) = a^n k_n(X).$$

3. Por 1) tenemos que

$$k_n(X + a) = k_n(X) + k_n(a).$$

Notemos que,

$$\log(\phi_a(t)) = \log(\mathbb{E}(e^{at})) = \log(e^{at}) = at,$$

por lo tanto $k_1(a) = a$ y $k_n(a) = 0$ para $n > 1$ lo que implica que $k_1(X + a) = k_1(X) + a$.

4. Por 1) tenemos que,

$$k_n(X + a) = k_n(X) + k_n(a)$$

y ya que $k_n(a) = 0$ para $n > 1$ obtenemos que,

$$k_n(X + a) = k_n(X)$$

para $n > 1$.

□

Ejemplo 18. 1. Si $X \sim N(0, 1)$ entonces $\log(M_X(t)) = \frac{t^2}{2}$, i.e $k_i(X) = 0$ para $i \neq 2$ y $k_2(X) = 1$.

2. Si $X \sim Poisson(\lambda)$ entonces $\log(M_X(t)) = \lambda(e^t - 1) = \sum_{n \geq 1} \lambda \frac{t^n}{n!}$, i.e $k_i(X) = \lambda$ para todo $i \geq 1$.

Por convención de ahora en adelante $k_n(X) = k_n$ siempre y cuando no haya ambigüedad respecto a la variable aleatoria.

Teorema 19. *Sea X una variable aleatoria con momentos y cumulantes $\{m_n\}_{n \geq 0}$ y $\{k_n\}_{n \geq 0}$ respectivamente, entonces se cumple la siguiente relación*

$$m_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} m_k k_{n-k}.$$

Para probar la relación anterior vamos a definir lo que es una serie exponencial.

Definición 20. Para $\{a_n\}_{n \geq 0}$ asociamos su serie exponencial $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$ y escribimos $f \leftrightarrow \{a_n\}_n$.

De la definición anterior tenemos que si $f \leftrightarrow \{a_n\}_{n \geq 0}$ y $g \leftrightarrow \{b_n\}_{n \geq 0}$ entonces;

1. $f^{(k)} \leftrightarrow \{a_{n+k}\}_{n \geq 0}$.
2. $fg \leftrightarrow \{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}\}_{n \geq 0}$.

Este último es debido al producto de Leibnitz. Podemos así probar el Teorema 19.

Demostración. Dicho lo anterior, notemos que si X es una variable aleatoria con momentos y cumulantes $\{m_n\}_{n \geq 0}$ y $\{k_n\}_{n \geq 0}$ respectivamente, tenemos que su serie de momentos y cumulantes son respectivamente

$$M_x(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n \geq 0} m_n \frac{t^n}{n!}.$$

$$K_x(t) = \sum_{n \geq 0} k_n \frac{t^n}{n!}.$$

Además de la definición tenemos que $K_x(t) = \log(M_x(t))$, de donde

$$K_x^{(1)}(t) = \frac{M_x^{(1)}(t)}{M_x(t)}$$

i.e

$$K_x^{(1)}(t)M_x(t) = M_x^{(1)}(t). \quad (1.2.1)$$

Luego por un lado $M_x^{(1)}(t) \leftrightarrow \{m_{n+1}\}_{n \geq 0}$ y por otro lado $K_x^{(1)}(t)M_x(t) \leftrightarrow \{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m_k k^{(n+1)-k}\}$, de la igualdad 1.2.1 concluimos

$$m_{n+1} = \sum_{k=0}^n m_k k^{(n+1)-k}.$$

□

Lo anterior da pie a una nueva fórmula que relaciona directamente los momentos y cumulantes.

Teorema 21. Sean $\{a_n\}_{n \geq 0}$ y $\{b_n\}_{n \geq 0}$ dos sucesiones de reales, entonces $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k a_{(n+1)-k}$ sí y solo sí $b_n = \sum_{\pi \in P(n)} a_\pi$, donde si $\pi = \{v_1, \dots, v_l\}$ se define $a_\pi = a_{|v_1|} a_{|v_2|} \dots a_{|v_l|}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{\pi \in P(n+1)} a_\pi = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{\pi \in P(n+1) \\ 1 \in V_1 \\ |v_1|=k}} a_k a_{\pi-v_1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a_k \sum_{\pi \in P(n+1-k)} a_{\pi-v_1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a_k b_{n-k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-j+1} b_j. \end{aligned}$$

□

De los teoremas anteriores podemos deducir así que,

$$m_n = \sum_{\pi \in P(n)} k_\pi, \quad (1.2.2)$$

que no es más que la relación que se dio como definición en la sección pasada. De esta ultima relación tenemos que los primeros momentos son

1. $m_1 = k_1$.
2. $m_2 = k_2 + k_1^2$.
3. $m_3 = k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3$.

En este sentido, tenemos una expresión de los momentos a partir del conjunto de particiones de $P(n)$.

Ejemplo 22. Vimos antes en el Ejemplo 18 que los cumulantes de la variable aleatoria normal estándar son todos cero salvo el segundo que es 1, haciendo uso de esto y de la relación (1.2.2) se tiene,

$$m_n = \sum_{\pi \in P_2(n)} k_\pi.$$

Donde $P_2(n)$ denota las particiones a pares de $P(n)$, es decir todas aquellas con todos sus bloques de tamaño 2, luego por paridad es inmediato que $m_{2n+1} = 0$ para toda $n \geq 0$, y para los momentos pares debemos contar todas las particiones a pares de $2n$ elementos, estas son $\frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2}$ particiones totales, pues son las formas de ir tomando dos elementos y dividimos entre $n!$ pues es lo mismo tomar primero la pareja a, b y luego c, d que hacerlo al revés, en el caso de n parejas hay $n!$ formas de tomarlas en distintos ordenes, luego esto es,

$$\frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{2n!}{n!2^n}.$$

Lo cual nos da los momentos pares de la normal estándar, que típicamente se calculan con argumentos analíticos a través de la función generadora de momentos.

Lo anterior nos da entonces una herramienta combinatoria para calcular los momentos de variables aleatorias a partir de sus cumulantes, esto es parte de lo que busca hacer la teoría de Speicher en Probabilidad No Conmutativa. Como vimos en la sección pasada, la relación (1.2.2) es la misma relación para el caso libre y booleano cambiando el conjunto $P(n)$ por $NC(n)$ e $Int(n)$ respectivamente.

Ejemplo 23. Retomando el último ejemplo, que sucede si en vez de considerar $P(n)$ consideramos $NC(n)$. Lo que ocurre es que entonces los momentos resultantes son nuevamente cero en el caso impar y en el caso par están dados por,

$$m_{2n}(X) = \psi(X^{2n}) = \sum_{\pi \in NC_2(2n)} 1 = |NC_2(2n)| = Cat_n.$$

En este sentido, podemos decir que la variable aleatoria normal en el caso libre es aquella con momentos impares cero y pares Cat_n , a esta variable se le suele conocer por el nombre de distribución semicircular porque su densidad esta dada por,

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} 1_{[-2,2]}(x).$$

1.2.3. Transformadas elementales

Dada una variable aleatoria a autoadjunta, podemos asociar algunas transformadas que nos serán muy útiles. Vamos a centrarnos en el caso libre, pues para el Capítulo 4 todo girará en torno a esto.

Definición 24. Dada a una variable aleatoria con cumulantes libres, $(r_n)_{n \geq 1}$ y momentos $(m_n)_{n \geq 1}$ definimos:

- Su M -transformada, como la serie formal de sus momentos, $M_a(z) = \sum_{n \geq 1} m_n z^n$.
- Su R -transformada como la serie formal de sus cumulantes, $R_a(z) = \sum_{n \geq 1} r_n z^n$.

Es bastante común en textos hallar a la R -transformada como la función dada por $\sum_{n \geq 0} r_{n+1} z^n$, esto no afecta en mucho a la definición salvo la multiplicación por un factor z , por lo cual es bastante común encontrarse cualesquiera de las dos definiciones. En nuestro caso ésta será la definición que nos será útil. La motivación de porque definir únicamente estas dos transformaciones es porque guardan una estrecha relación, la cual, será la clave para la prueba del teorema central de todo este trabajo. Existen por supuesto muchas otras transformadas, tales como la transformada de Cauchy y la transformada de Voiculescu. Sería bastante retroalimentativo poder entrar en detalle en cada una de estas transformadas pero para efectos prácticos del presente trabajo será únicamente necesario comprender estas dos transformaciones y su relación, si se desea saber mas al respecto de estas transformadas puede consultarse [7] en su Capítulo 2.

Teorema 25. Sean a con transformadas R y M como antes, entonces definiendo, $\hat{R} = R + 1$ y $\hat{M} = M + 1$ se cumple que,

$$\hat{R}(z\hat{M}(z)) = \hat{M}(z).$$

Demostración. Sea $n \geq 1$ entonces se cumple que $m_n = \sum_{\pi \in NC(n)} r_\pi$, supon-
gamos que para $\pi \in NC(n)$, π es tal que el bloque que contiene al 1 tiene
tamaño k y sean s_1, s_2, \dots, s_k la cantidad de elementos que quedan entre los
elementos del primer bloque, es decir si el bloque es $\{1, i_2, i_3, \dots, i_k\}$, entonces
 $s_1 = i_2 - 1 - 1$, $s_2 = i_3 - i_2 - 1$ y así consecutivamente, entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{\pi \in NC(n)} r_\pi = \sum_{k=1}^n r_k \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n-k}} \prod_{i=1}^k \left(\sum_{\pi_i \in NC(S_i)} r_{\pi_i} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n r_k \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n-k}} \prod_{i=1}^k (m_{s_i}). \end{aligned}$$

Luego se tiene que,

$$\begin{aligned} \hat{M}(z) &= \sum_{n \geq 1} m_n z^n = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=1}^n r_k \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n-k}} \prod_{i=1}^k (m_{s_i}) \right] z^n + 1 \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n r_k z^k \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n-k}} \prod_{i=1}^k m_{s_i} z^{s_i} + 1 \\ &= \sum_{k \geq 1} r_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n-k}} \prod_{i=1}^k m_{s_i} z^{s_i} + 1 \\ &= \sum_{k \geq 1} r_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n}} \prod_{i=1}^k m_{s_i} z^{s_i} + 1. \end{aligned}$$

Pero notemos que $\hat{M}(z)^k = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_k \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_k = n}} \prod_{i=1}^k m_{s_i} z^{s_i}$, así se tiene que,

$$\hat{M}(z) = \sum_{k \geq 0} r_k z^k \hat{M}(z)^k = \hat{R}(z \hat{M}(z)).$$

□

Lo anterior traducido a las R y M transformadas se traduce en que,

$$M(z) = R(z(M(z) + 1)). \quad (1.2.3)$$

En el caso booleano se puede hallar una relación similar si se define la R -transformada en término de los cumulantes booleanos en vez de los libres. Denotamos por $B(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ a esta transformada, entonces se tiene que,

$$M(z) = \frac{1}{1 - B(z)}. \quad (1.2.4)$$

Con estos resultados y definiciones podemos darnos paso a definir lo que es la suma de variables aleatorias independientes en el sentido libre.

1.2.4. Convolución aditiva libre

Recordemos primero que en el caso clásico podemos encontrar la distribución de la suma de variables aleatorias independientes, $X + Y$, a través de la convolución. La idea de esta sección es poderle dar un sentido análogo a cuando tenemos variables aleatorias independientes en el sentido libre. Para esto vamos a recordar que los cumulantes clásicos tienen la propiedad de que si X e Y son independientes, entonces $k_n(X + Y) = k_n(X) + k_n(Y)$. Esto quiere decir que si definiéramos la R transformada vía los cumulantes clásicos, entonces por aditividad tendríamos que la R transformada asociada a $X + Y$ sería la suma de las respectivas R -transformadas de cada uno. Precisamente esta es la definición que se da a continuación.

Definición 26. Sean a, b variables aleatorias autoadjuntas independientes en el sentido libre con medidas μ y ν respectivamente y R -transformadas, R_μ y R_ν respectivamente. La convolución aditiva libre de μ con ν denotada por $\mu \boxplus \nu$ es la medida asociada a la suma $a + b$ definida como la única medida tal que,

$$R_{\mu \boxplus \nu} = R_\mu(z) + R_\nu(z).$$

Si consideramos entonces a la convolución aditiva libre de μ consigo misma, podemos extender esta definición al caso no discreto, como sigue.

Definición 27. Sea a una variable aleatoria autoadjunta con medida μ , entonces para $t > 0$, denotamos por $\mu^{\boxplus t}$ a su convolución aditiva libre consigo misma t veces como la única medida tal que

$$R_{\mu^{\boxplus t}}(z) = tR_\mu(z),$$

siempre que exista.

1.3. Sistemas meándricos

Vamos a ver de manera general lo que es un sistema meándrico, los capítulos posteriores a éste giraran en torno a dichos sistemas y sus relaciones con probabilidad libre.

Definición 28. Dada una partición $\pi \in NC(n)$, se define su duplicación, $\partial\pi$ como la partición que no se cruza a pares en $NC_2(2n)$ de la siguiente manera; se realiza una copia de cada elemento en $[n]$, digamos $\{1, 1', 2, 2', \dots, n, n'\}$ que es isomorfo a $[2n]$, luego si π tiene un bloque digamos $\{i_1, \dots, i_k\}$, con el orden usual, i.e $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, entonces $i'_l \stackrel{\partial\pi}{\sim} i_{l+1}$ para $1 \leq l \leq k-1$ y $i'_k \stackrel{\partial\pi}{\sim} i_1$.

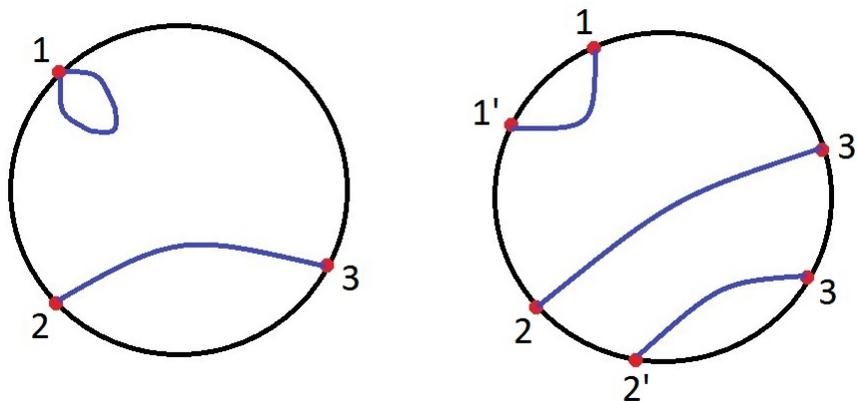


Figura 1.1: Ejemplo de una duplicación con $\pi = \{\{1\}\{2, 3\}\}$.

Definición 29. Dadas dos particiones que no se cruzan a pares en $2n$ elementos, π, ρ , se define el sistema meándrico asociado, $M(\pi, \rho)$, como la gráfica generada de colocar una línea horizontal imaginaria con los $2n$ puntos y poner por la parte superior de la línea la representación planar de π y por debajo de la línea la representación planar de ρ . Además nos referimos como el número de componentes del sistema meándrico al número de curvas cerradas de $M(\pi, \rho)$ denotado por $\#M(\pi, \rho)$.

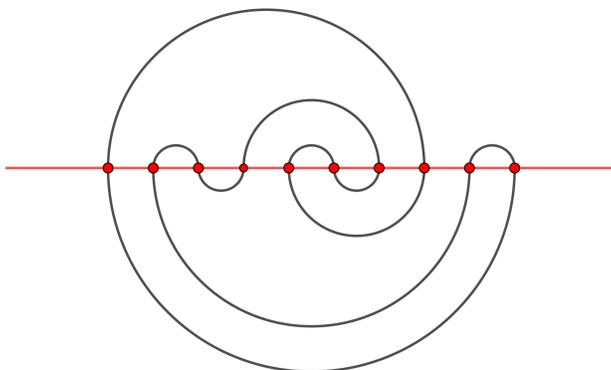


Figura 1.2: Ejemplo de sistema meándrico $M(\pi, \rho)$ con $\pi = \{\{1, 8\}\{2, 3\}\{4, 7\}\{5, 6\}\{9, 10\}\}$ y $\rho = \{\{1, 10\}\{2, 9\}\{3, 4\}\{5, 8\}\{6, 7\}\}$ de un solo componente.

Dadas $\pi, \rho \in NC(n)$ se hará abuso de notación como $M(\pi, \rho)$ refiriéndose a $M(\partial\pi, \partial\rho)$. Una observación importante, es que es fácil construir $M(\pi, \rho)$ a partir de π y ρ en su representación planar de la siguiente manera. Supongamos se tienen $\pi = \{\{1, 3\}\{2\}\{4, 5\}\{6\}\}$ y $\rho = \{\{1, 4, 5\}\{2, 3\}\{6\}\}$ y hacemos su representación planar como en la Figura 1.3.

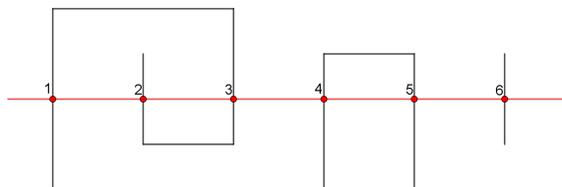


Figura 1.3: Representación planar de dos particiones, una por la parte superior y otra por la parte inferior.

Para construir $\partial\pi$ y $\partial\rho$ basta colocar un punto a la derecha y uno a la izquierda de cada número i , denotados por i e i' respectivamente y seguir la regla de la definición de como se construye $\partial\pi$ y $\partial\rho$, quedando como en la Figura 1.4.

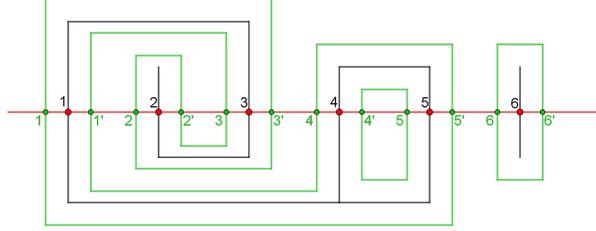


Figura 1.4:

Es fácil notar que, por definición, la figura en verde es justamente $M(\pi, \rho)$, en este último ejemplo se tiene un sistema meándrico de 3 componentes. Además haciendo uso del hecho de que $NC_2(2n) \cong NC(n)$, es claro que el total de sistemas meándricos que cruzan por $2n$ puntos es Cat_n^2 .

1.4. Diagramas de Hasse

Ahora vamos a introducir lo que es un diagrama de Hasse, pues para capítulos posteriores lo que se hace es justamente encontrar una relación directa entre el diagrama de Hasse asociado a $NC(n)$ y sus sistemas meándricos.

Definición 30. Un orden parcial es una relación binaria, \sim , sobre un conjunto X que satisface,

1. es reflexiva, i.e, $x \sim x$ para todo $x \in X$
2. es antisimétrica, i.e, si $a \sim b$ y $b \sim a$ entonces $a = b$ para $a, b \in X$
3. es transitiva, i.e, $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces $a \sim c$, para $a, b, c \in X$

Un conjunto con un orden parcial es lo que conocemos como conjunto parcialmente ordenado o copo. Usualmente se usa el símbolo \leq para la relación binaria.

Definición 31. Dado un copo finito, S , se dice que y cubre a x si $x \leq y$ y además no existe algún elemento $z \in S$ tal que $x \leq z \leq y$. Se define el diagrama de Hasse asociado a S como la gráfica de vértices S y aristas (x, y) , donde y cubre a x . Además se denota por d_S a la distancia en el diagrama

de Hasse asociado a S , la cual es la longitud del menor camino entre dos vértices.

Lo que haremos a continuación es definir un orden en el conjunto de particiones a través de la contención, lo cual nos permitirá dar a $P(n)$ un estructura de copo.

Definición 32. dadas, $\pi, \sigma \in P(n)$, decimos que $\pi \leq \sigma$ si para bloque $V \in \pi$ existe un bloque $W \in \sigma$ tal que $V \subset W$. Bajo este orden podemos pensar a $P(n)$ como un conjunto parcialmente ordenado. Esto se puede definir también en $N(n)$ e $Int(n)$ con el orden inducido.

Dicho lo anterior es entonces posible considerar el diagrama de Hasse asociado a $NC(n)$, y su distancia denotada de ahora en adelante por d_H .

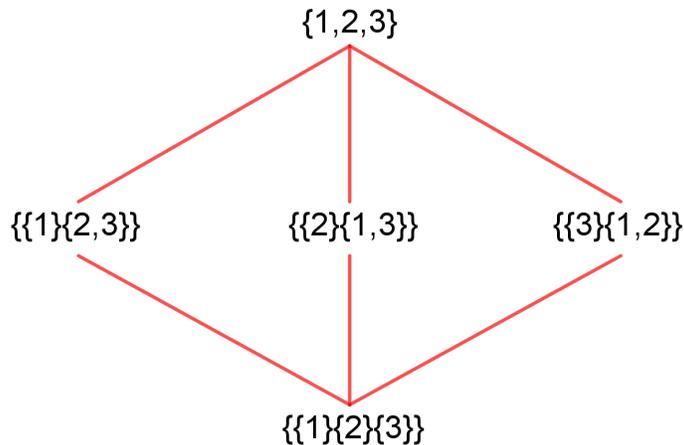


Figura 1.5: Diagrama de Hasse de $NC(3)$.

Definición 33. Sean $\pi, \rho \in NC(n)$ dos particiones, definimos,

1. La unión de π y ρ como la mínima cota superior de π y ρ en $NC(n)$, denotada por $\pi \vee \rho$.
2. La reunión de π y ρ como la máxima cota inferior de π y ρ en $NC(n)$, denotada por $\pi \wedge \rho$.

Estas dos definiciones pueden además extenderse a $P(n)$ y las denotaremos como \tilde{V} y $\tilde{\Lambda}$ respectivamente. Es fácil de hecho notar que \wedge y $\tilde{\Lambda}$ coinciden, sin embargo no necesariamente sucede lo mismo con la unión.

1.4.1. Complemento de Kreweras

La motivación de definir el complemento de Kreweras de una partición en esta sección y no en la sección de particiones, es que el complemento de Kreweras tiene una estrecha relación con el orden en las particiones como veremos a continuación. Para proceder será fundamental considerar la representación circular de una partición.

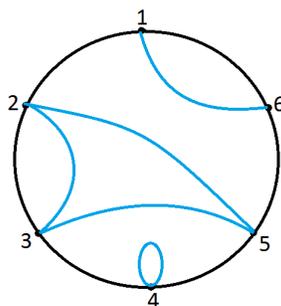


Figura 1.6: Representación circular de la partición $\{\{1, 6\}\{2, 3, 5\}\{4\}\}$.

A las secciones entre las curvas cerradas que se generan al unir los puntos los denotaremos por componentes, como puede ilustrarse en la Figura 1.7 en punteado.

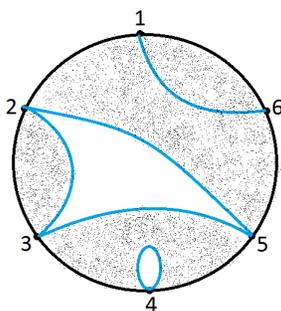


Figura 1.7: Representación circular de la partición $\{\{1, 6\}\{2, 3, 5\}\{4\}\}$, en punteado se ven los componentes.

Definición 34. Dada una partición π en $NC(n)$, definimos su complemento de Kreweras, $Kr(\pi)$, a la partición en $\{1', 2', \dots, n'\}$, donde $i' \sim j'$ ssi i' y j' están en el mismo componente generado en la representación circular de π .

Ejemplo 35. Tomando el ejemplo de antes, siguiendo la idea de la sección donde se define la duplicación de una partición, asignamos a cada elemento i un elemento a su lado i' siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj, luego de la definición se construye su complemento de Kreweras.

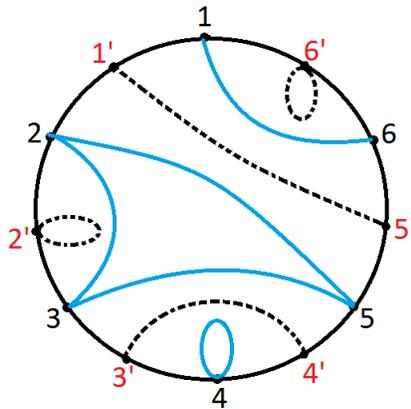


Figura 1.8: Representación circular de la partición $\{\{1, 6\}\{2, 3, 5\}\{4\}\}$ en líneas continuas y su complemento de Kreweras en líneas punteadas.

Recordando lo visto en la sección pasada, recordemos que para construir la duplicación de π a través de la representación de π , lo que se hace es colocar a lado de cada punto i un elemento i a su izquierda y un elemento i' a su derecha, luego se unen estos elementos siguiendo la regla que se dio por definición lo cual no es más que trazar una curva entre i' y j si π es tal que tiene un bloque de la forma $\{i_1, \dots, i, j, \dots, i_k\}$, esto último en la representación circular de π se traduce en que i y j están conectados a través de una línea y por ende en la duplicación de π lo que se está haciendo es trazar una línea paralela a esta curva, como puede verse en la Figura 1.9.

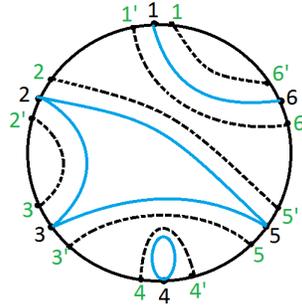


Figura 1.9: Duplicación de la partición $\{\{1, 6\}\{2, 3, 5\}\{4\}\}$ en líneas punteadas.

La anterior observación nos dice que entonces la duplicación de π y de $Kr(\pi)$ son de hecho exactamente iguales en su representación circular, la única diferencia es que mientras en π el elemento en verde se etiqueta por i , en su complemento de Kreweras este se etiqueta por $(i - 1)'$, mientras que si en π un elemento en verde se etiqueta por i' entonces en su complemento de Kreweras este está etiquetado por i , en otras palabras para poder recuperar la duplicación de $Kr(\pi)$ basta considerar la duplicación de π y reetiquetar sus vértices $\{1, 1', \dots, n, n'\}$ vía un desplazamiento ciclico en sentido contrario de las manecillas del reloj, lo cual resulta justamente en que si el vértice es i entonces ahora sera $(i - 1)'$ y en que si es i' ahora será i , esto puede ilustrarse en la Figura 1.10.

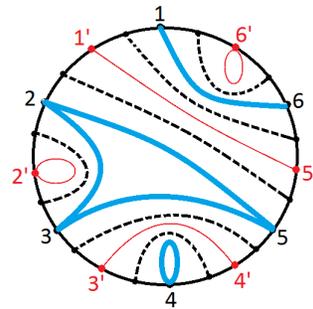


Figura 1.10: Representación circular de la partición $\{\{1, 6\}\{2, 3, 5\}\{4\}\}$ en líneas gruesas, su complemento de Kreweras en líneas delgadas y la duplicación de ambos en líneas punteadas, como puede verse ambos tiene la misma duplicación en su representación circular salvo una reetiquetamiento de los vértices.

Esta ultima observación será fundamental en el Capítulo 3. En términos de el orden parcial definido en esta sección, el complemento de Kreweras de una partición π no es más que la mayor partición en $1', \dots, n'$ tal que $\pi \cup Kr(\pi)$ es una partición que no se cruza en $\{1, 1', \dots, n, n'\}$, en ese sentido el complemento de Kreweras guarda una estrecha relación con el orden parcial en $NC(n)$. Para cerrar la sección vamos a ver el siguiente resultado.

Teorema 36. *Sea $\pi \in NC(n)$, entonces $|\pi| + |Kr(\pi)| = n + 1$.*

Demostración. Para la prueba lo que hay que notar es que cada componente en la representación circular define un bloque del complemento de Kreweras pues se unen todos los puntos en ese componente. Vamos a proceder por inducción fuerte sobre n , el caso $n = 1$ es trivial pues hay una única partición $\{1\}$ y por ende un único complemento de Kreweras ambas con un bloque lo cual da 2.

Supongamos ahora que se cumple para $k \leq n - 1$ y probemos que se cumple para n . Para eso del hecho de que π es una partición que no se cruza entonces tiene un bloque B que no encaja a algún otro bloque, es decir este bloque B es de la forma $\{i, i + 1, \dots, i + k - 1\}$, pues de no ser consecutivo entonces habría algún otro bloque dentro de B con los elementos restantes. Supongamos entonces que B es como antes y por ende $|B| = k$. Definamos ahora $\tilde{\pi} = \pi - B$ la partición resultante de considerar π sin ese bloque B . Como B es tal que no encaja a algún otro bloque dentro, entonces en la representación circular de π al quitar B lo que está sucediendo es que los K componentes que había entre $i - 1$ e $i + k$ definidos por B están volviéndose uno solo componente en la representación circular de $\tilde{\pi}$, de la observación hecha al inicio y eso último tenemos entonces que, $|Kr(\pi)| = |Kr(\tilde{\pi})| + k - 1$, luego

$$|\pi| + |Kr(\pi)| = 1 + |\tilde{\pi}| + |Kr(\tilde{\pi})| + k - 1 = |\tilde{\pi}| + |Kr(\tilde{\pi})| + k.$$

Pero por hipótesis de inducción se tiene que $|\tilde{\pi}| + |Kr(\tilde{\pi})| = n - k + 1$, de donde concluimos lo deseado. \square

1.5. Introducción a la Teoría de Gráficas

Para esta sección el objetivo es dar un muy breve repaso de la Teoría de Gráficas, así como centrarnos en los resultados que vamos a requerir en capítulos posteriores. El contenido será breve y únicamente de forma que el presente trabajo sea autocontenido.

Definición 37. Una gráfica es un par (A, V) donde A es un conjunto arbitrario conocido como el conjunto de vértices, y V es un conjunto contenido en $A \times A$ conocido como el conjunto de aristas. Se dice que (a, b) es una arista de la gráfica para $a, b \in A$ si $(a, b) \in V$, además diremos que la gráfica es no orientada si $(a, b) \in V$ implica que $(b, a) \in V$.

Nuestro único objetivo será enfocarnos en árboles, el cual es un tipo particular de gráfica.

Definición 38. Un árbol, $G = (A, V)$, es una gráfica que cumple las siguientes propiedades:

1. Es conexa, es decir, para todos $a, b \in A$ existe un camino de a a b , i.e existen $c_1, \dots, c_n \in A$ tales que $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, b) \in V$.
2. No tiene ciclos, es decir no existen caminos cerrados, y por ende tampoco lazos.

Se tiene entonces el siguiente teorema bastante elemental pero que citaremos más adelante. Ponemos la demostración por completitud.

Teorema 39. *Todo árbol, G , con n aristas tiene $n + 1$ vértices.*

Demostración. Procediendo por inducción fuerte, el caso $n = 1$ nos dice que se trata de un único arista que une dos vértices, no se puede tener un vértice más pues en ese caso este no estaría conectado y no podría ser entonces un árbol. Supongamos que se cumple para n , luego para un árbol con $n + 1$ aristas consideremos un arista cualquiera y sean sus dos vértices i y j . Vamos a definir la subgráfica A_i como las subgráfica de G , tal que todo vértice en A_i se conecta con i en la gráfica original sin pasar por el arista (i, j) y además vamos a pedir que $i \in A_i$, de la misma manera vamos a definir A_j . En otras palabras A_i es la subgráfica de G' de tal manera que todo vértice de A_i se conecta con i en G' , donde G' es la gráfica G sin el arista (i, j) , es decir ambas subgráficas no tienen a (i, j) por definición.

Notemos lo siguiente, dado un vértice arbitrario, $v \neq \{i, j\}$, del hecho de que G es conexa entonces existe un camino de menor longitud de v a i , nuestra afirmación es que este camino es de hecho único, en efecto, supongamos que dicho camino se ve de la forma

$$(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_k, i).$$

Si existiera algún otro camino entonces tendría que ser distinto en al menos una arista, supongamos el camino es igual al inicio los primeros r aristas y después toma un camino nuevo y nunca regresa al camino original, en este caso este camino se ve de la forma

$$(v, i_1) \cdots (i_{r-1}, i_r)(i_r, j_1)(j_1, j_2) \cdots (j_k, i).$$

En este caso tenemos que $(i_r, i_{r+1}) \cdots (i_k, i)(i, j_k)(j_k, j_{k-1}) \cdots (j_1, i_r)$ es un ciclo en el árbol lo cual no es posible. Notemos que lo anterior considera el hecho en el que el camino es distinto desde el inicio tomando $r = 0$ y en dicho caso $i_r = i_0 = v$. Finalmente tenemos el caso en que si regresa al camino original, pero en este caso nuevamente estamos creando un ciclo al momento de regresar al camino original lo cual conduce nuevamente a una contradicción, en cualquier caso lo que estamos viendo es que este camino mínimo de v a i es único. Más aun lo que acabamos de probar es que de hecho todo camino de v a i está totalmente descrito por los aristas del camino minimal, en otras palabras todo camino de v a i no puede salirse de dichas aristas o se crea un ciclo en el árbol. Tenemos entonces dos posibilidades, si el camino es tal que no pasa por (i, j) entonces existe un camino de la forma,

$$(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_{k-1}, i_k)(i_k, i)$$

donde $(i_l, i_{l+1}) \neq (i, j)$ para todos $l = 1, \dots, k$. Luego, por definición $v \in A_i$, más aun, como G es conexa existe además un camino de menor longitud de v a j , la afirmación es que este camino es de hecho $(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_{k-1}, i_k)(i_k, i)(i, j)$, es decir el mismo camino que antes uniendo el arista (i, j) , pues de no ser así, entonces existe otro camino de menor longitud que es distinto en al menos un arista. Digamos por ejemplo que el camino de v a j es igual al inicio los primeros $r + 1$ pasos y después toma un camino totalmente distinto y nunca vuelve al camino original, entonces se ve de la forma

$$(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_r, i_{r+1})(i_{r+1}, j_1)(j_1, j_2) \cdots (j_k, j).$$

En este caso se tiene que

$$(i_{r+1}, i_{r+2}) \cdots (i_k, i)(i, j)(j, j_k)(j_k, j_{k-1}) \cdots (j_2, j_1)(j_1, i_{r+1})$$

es un ciclo en el árbol lo cual no es posible. De la misma manera si el camino de v a j es igual al inicio, luego toma un camino distinto y después regresa al camino está nuevamente creando un ciclo en el árbol, finalmente si el camino

es diferente desde el inicio podemos aplicar el mismo razonamiento para notar que regrese o no regrese al camino original de cualquier manera se crea un ciclo en el árbol, esto nos lleva a la conclusión que de hecho cualquier camino de v a j debe ser descrito por los aristas de el mismo camino de v a i mas el arista (i, j) y por ende el camino de menor longitud es el camino de v a i mas el arista (i, j) . Luego, al no contemplar este arista lo que tenemos es que entonces $v \in A_i$ pero no está en A_j , para la segunda posibilidad en que el camino de menor longitud de v a i si pasa por (i, j) entonces del hecho de que es el camino de menor longitud tenemos que se ve necesariamente de la forma,

$$(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_k, j)(j, i)$$

con $(i_l, i_{l+1}) \neq (j, i)$, nuevamente al considerar la gráfica sin el arista (i, j) lo que tenemos es que entonces $v \in A_j$ pues el camino $(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_k, j)$ es un camino de v a j que no pasa por (i, j) pero no puede estar en A_i pues todo camino de v a i está descrito por los aristas del camino minimal $(v, i_1)(i_1, i_2) \cdots (i_k, j)(j, i)$.

Lo que acabamos entonces de probar es que todo vértice de la gráfica G , está en A_i o A_j , es decir los vértices de estas subgráficas son disjuntos y suman el total. De esto es bastante claro que cada arista está en una sola subgrafica pues si una arista pertenece a ambas subgráficas entonces ambos vértices de esta arista pertenecen a ambas subgráficas lo cual no es posible. Con esta observación podemos concluir, supongamos que la cantidad de aristas de A_i es $k \leq n$, por ende la cantidad de aristas de A_j es $n - k$ pues entre ambas deben ser n que mas la arista (i, j) que estamos quitando suman las $n + 1$ aristas. De la hipótesis de inducción tenemos que el total de vértices de A_i es $k + 1$ y el de A_j es $n - k + 1$, del hecho de que los vértices son una partición disjunta del total de vértices tenemos que la gráfica original tiene $k + 1 + n - k + 1 = n + 2$ vértices que es lo que queríamos probar. \square

Como comentario se puede de hecho definir a un árbol con n vértices, como una gráfica conexa con $n - 1$ aristas.

Capítulo 2

Sistemas meándricos y primeras relaciones con probabilidad libre

En el Capítulo 1, tratamos de dar una perspectiva muy general de lo que es un sistema meándrico y la probabilidad libre. Este capítulo va orientado en hallar una relación particular entre probabilidad libre y sistemas meándricos a manera de motivación para capítulos posteriores. El problema central de la tesis, como se mencionó al principio, es el de usar herramientas de probabilidad libre para calcular el número promedio de componentes de los sistemas meándricos. Este problema se aborda en los Capítulos 3 y 4, este Capítulo 2 tiene como objetivo únicamente darle al lector una idea de como algunos de los problemas que se tienen respecto a los sistemas meándricos se pueden abordar con herramientas de probabilidad libre a través del uso de la R -transformada vista en el capítulo anterior. Todo el presente capítulo se basará en los resultados expuestos en [5] por Alexandru Nica en 2015.

2.1. Definiciones y resultados

Recordemos lo descrito en el Capítulo 1, dada una partición π vamos a denotar por $\partial\pi$ a su duplicación construido como antes. Vamos a considerar la ligera modificación de en vez de que la duplicación de π sea una partición en $\{1, 1', 2, 2', \dots, n, n'\}$ la consideramos en $\{1, \dots, 2n\}$ identificando a cada i como $2i - 1$ y a cada i' como $2i$. Vamos además a denotar por $A(\pi)$ a la

representación planar de $\partial\pi$, a esta representación es a lo que llaman en [5] el diagrama de arco, como abuso de notación muchas veces nos referiremos a $A(\pi)$ como una partición.

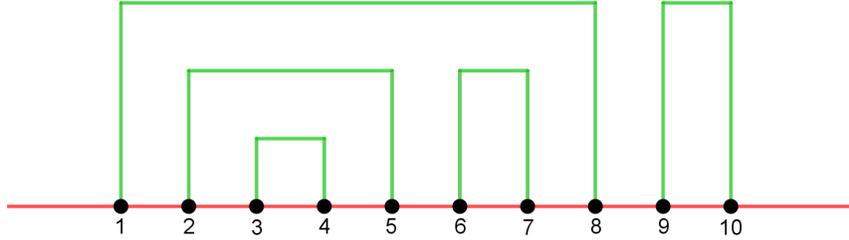


Figura 2.1: Diagrama de arco, $A(\pi)$, asociado a la partición $\pi = \{\{1, 3, 4\}\{2\}\{5\}\}$.

Para este capítulo vamos a definir a un sistema meándrico de una manera distinta a la del Capítulo 1, únicamente para ser consistentes con las pruebas y definiciones que se siguen en [5]. Esta definición sera usada únicamente en este capítulo y, de hecho, como veremos tiene una interpretación bastante natural con como definimos un sistema meándrico en el Capítulo 1.

Definición 40. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\pi, \rho \in NC(n)$. Vamos a definir al sistema meándrico $M_{\pi, \rho}$ como la permutación en S_{2n} definida por,

$$M_{\pi, \rho}(2i - 1) = P_{A(\pi)}(2i - 1) = 2P_{\pi}^{-1}(i)$$

$$M_{\pi, \rho}(2i) = P_{A(\rho)}(2i) = 2P_{\rho}(i) - 1$$

donde P es la aplicación definida en el capítulo anterior de $NC(n)$ en S_n .

Para ver lo que está sucediendo lo único que basta notar es que si π es tal que tiene un bloque de la forma $\{i, j, \dots\}$ entonces en su duplicación $A(\pi)$ tiene como bloque a $\{2i - 1, 2j\}$, es decir en el sistema meándrico, $M(\pi, \rho)$, definido como en el Capítulo 1 se tiene que $2i - 1$ y $2j$ se unen por una línea superior. Por otro lado, en el sistema meándrico definido en este capítulo

visto como permutación se tiene que $M_{\pi,\rho}(2i-1) = P_{A(\pi)}(2i-1) = 2j$. De la misma manera se puede verificar que si en $M(\pi, \rho)$ se tiene que $2i$ y $2j-1$ se unen por una línea inferior entonces $M_{\pi,\rho}(2i) = 2j-1$, por lo que la definición de sistema meándrico pensándolo como permutación no es más que tomar el sistema meándrico visto como gráfica en el Capítulo 1 y para un número impar, $2i-1$, ver con quien se conecta por arriba, digamos $2j$ y definir $M_{\pi,\rho}(2i-1) = 2j$. Después se hace de la misma manera para los números pares pero viendo las conexiones por abajo, en este sentido esta definición no está para nada alejada de la original, es únicamente una manera de interpretar dicha gráfica como permutación.

Definición 41. Dado un sistema meándrico, $M_{\pi,\rho}$, vamos a decir que se trata de un meandro cuando $\#ciclos(M_{\pi,\rho}) = 1$, que visto como gráfica no es más que $\#M(\pi, \rho) = 1$, por la observación de antes. Además se dirá que $M_{\pi,\rho}$ es reducible cuando exista un subintervalo propio $J = \{a, a+1, \dots, b\} \subset \{1, \dots, 2n\}$ con $a \leq b$ y $b-a \leq 2n-2$ tal que J es invariante bajo $M_{\pi,\rho}$. Cuando $M_{\pi,\rho}$ no sea reducible diremos que es irreducible.

De lo anterior, notemos que un subconjunto S es invariante bajo $M_{\pi,\rho}$ si y solo si S es unión de bloques de $A(\pi)$ y $A(\rho)$ al mismo tiempo. Lo anterior se basa en la observación de que si $a \in S$ entonces es invariante si y solo si $M_{\pi,\rho}(a) \in S$ lo cual ocurre (en el caso de que a sea impar) si y solo si $P_{A(\pi)}(a) \in S$, pero $P_{A(\pi)}(a)$ no es más que el elemento tal que $\{a, P_{A(\pi)}(a)\}$ es bloque de $A(\pi)$, es decir $\{a, P_{A(\pi)}(a)\}$ está en S , en otras palabras, S está compuesto de bloques de $A(\pi)$. Por otro lado, ya vimos que $P_{A(\pi)}(a)$ tiene que estar en S , de la definición de la duplicación es claro que $P_{A(\pi)}(a)$ es de hecho par, por lo que aplicando el mismo razonamiento de antes tenemos que para que S sea invariante necesariamente se tiene que $P_{A(\rho)}(P_{A(\pi)}(a))$ debe estar en S , pero nuevamente se tiene que $\{P_{A(\pi)}(a), P_{A(\rho)}(P_{A(\pi)}(a))\}$ es bloque de $A(\rho)$, por lo que necesariamente al mismo tiempo se tiene que S es unión de bloques de $A(\rho)$. Todo esto fue bajo el supuesto inicial de que a fuera impar, un razonamiento exactamente igual nos lleva a lo mismo para cuando a es par. Con ayuda de esta observación podemos plantear el siguiente teorema.

Teorema 42. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\pi, \rho \in NC(n)$, entonces los siguientes son equivalentes,

1. $M_{\pi,\rho}$ es irreducible.
2. $A(\pi) \vee A(\rho) = 1_{2n}$.

Demostración. Para la primera implicación vamos a proceder por contrapositiva. Supongamos que $A(\pi) \vee A(\rho) \neq 1_{2n}$, como además $A(\pi) \vee A(\rho)$ es de hecho una partición que no se cruza entonces tiene algún intervalo J , pues toda partición que no se cruza tiene al menos un intervalo. De la suposición de que $A(\pi) \vee A(\rho) \neq 1_{2n}$, es claro que dicho intervalo es propio y cumple que la diferencia de su mayor y menor elemento es menor a $2n - 1$. Finalmente como $A(\pi) \vee A(\rho) \geq A(\pi)$ y $A(\pi) \vee A(\rho) \geq A(\rho)$ entonces esto quiere decir que los bloques de $A(\pi) \vee A(\rho)$ son de hecho unión de bloques tanto de $A(\pi)$ como de $A(\rho)$, de la observación anterior concluimos que entonces J es invariante bajo $M_{\pi,\rho}$ y por ende $M_{\pi,\rho}$ es reducible lo cual prueba la primer implicación.

Para la segunda implicación nuevamente procedemos por contrapositiva. Tenemos que si $M_{\pi,\rho}$ es reducible entonces existe un intervalo propio J que es invariante bajo $M_{\pi,\rho}$ y que cumple que la diferencia de su mayor y menor elemento es menor a $2n - 1$. Como J es invariante de la observación anterior es al mismo tiempo unión de bloques de $A(\pi)$ y $A(\rho)$ al mismo tiempo, es además claro que también $\hat{J} = \{1, 2, \dots, 2n\} - J$ es unión de bloques de $A(\pi)$ y $A(\rho)$ al mismo tiempo, es decir la partición $\sigma = \{J, \hat{J}\}$ es tal que $A(\pi) \vee A(\rho) \geq \sigma$. Luego, es claro que entonces $A(\pi) \vee A(\rho) \neq 1_{2n}$ lo cual concluye la prueba. \square

2.2. Sistemas meándricos irreducibles

Con los resultados anteriores el objetivo de esta sección es el de encontrar una distribución μ en el sentido algebraico visto en el Capítulo 1, cuyos cumulantes libres impares sean 0 y cuyos cumulantes libres pares sean la cantidad de sistemas meándricos irreducibles. Dada esa construcción se tendría una relación entre el problema de contar sistemas meándricos irreducibles y el de calcular cumulantes libres. La motivación de porque contar los sistemas meándricos irreducibles es que estos son de hecho una cota superior para la cantidad de meandros, es decir, sistemas meándricos de un único componente. Lo anterior se basa en el hecho de que todo meandro tiene un único ciclo y todo subconjunto S invariante bajo un sistema meándrico tiene que ser forzosamente unión de ciclos de dicho sistema meándrico para que sea invariante. Luego en el caso de un meandro necesariamente el único subconjunto invariante es el total, es decir este es irreducible. En términos matemáticos, si denotamos por m_n^{irr} a la cantidad de sistemas meándricos irreducibles en S_{2n}

y a $m_n^{(1)}$ a la cantidad de meandros en S_{2n} , es decir todos aquellos sistemas meándricos con un único ciclo, entonces se tiene que $m_n^{(1)} \leq m_n^{irr}$.

Teorema 43. Sean η, ϵ variables aleatorias en el sentido algebraico, que tienen distribución semicircular y que además son independientes en el sentido libre, entonces se cumple que los cumulantes libres de $\epsilon\eta$ están dados por,

$$\begin{aligned} r_{2n-1}(\epsilon\eta) &= 0 \\ r_{2n}(\epsilon\eta) &= m_n^{irr} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como vimos en el Capítulo 1, esto quiere decir que sus cumulantes libres son tales que $r_2(\epsilon) = r_2(\eta) = 1$ y cero para todos los demás, usando la fórmula de productos como argumentos del Teorema 15 se tiene para $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n(\epsilon\eta) = \sum_{\substack{\pi \in NC(2n) \\ \pi \vee \lambda_{2,n} = 1_{2n}}} r_\pi(\epsilon, \eta, \dots, \epsilon, \eta).$$

Donde $\lambda_{2,n} = \{\{1, 2\}\{3, 4\} \cdots \{2n-1, 2n\}\}$. Un hecho muy importante es que los cumulantes multivariados se anulan si se tienen elementos tanto de η como de ϵ pues estos son independientes libres. Así se tiene que forzosamente π debe ser tal que una pares con pares e impares con impares, en otras palabras, $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ donde π_1 es una partición que no se cruza en $\{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$ y π_2 es una partición que no se cruza en $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, además $\pi_1 \cup \pi_2$ debe ser partición que no se cruza. Así tenemos que,

$$r_n(\epsilon\eta) = \sum_{\substack{\pi_1 \in NC(\{1,3,\dots,2n-1\}) \\ \pi_2 \in NC(\{2,4,\dots,2n\}) \\ \pi_1 \cup \pi_2 \vee \lambda_{2,n} = 1_{2n}}} r_{\pi_1}(\epsilon) r_{\pi_2}(\eta).$$

Notemos ahora que como π_1 une solo impares, entonces supongamos que es tal que hay dos impares que no están en el mismo bloque, es decir existen $2a-1$ y $2b-1$ tales que están en distintos bloques de π_1 , como requerimos que $\pi_1 \cup \pi_2 \vee \lambda_{2,n} = 1_{2n}$ por la estructura de $\lambda_{2,n}$ entonces π_2 debe ser tal que uno de sus bloques una a $2a$ con $2b$ para que de esta manera los bloques $\{2a-1, 2a\}$ y $\{2b-1, 2b\}$ de $\lambda_{2,n}$ se unan al considerar la unión. Notemos que si renombramos a los vértices de π_2 como $\{1, 3, \dots, 2n-1\}$ restando uno a

cada vértice, lo anterior se traduce en que la unión de π_1 y π_2 sea tal que una a $2a - 1$ con $2b - 1$. En otras palabras, la condición de que $\pi_1 \cup \pi_2 \vee \lambda_{2,n} = 1_{2n}$ se traduce en la condición de que $\pi_1 \vee \pi_2 = 1_n$ donde los vértices de π_2 se consideran en $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$, de donde se tiene,

$$r_n(\epsilon\eta) = \sum_{\substack{\pi, \sigma \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma = 1_n}} r_\pi(\epsilon) r_\sigma(\eta).$$

Del hecho mencionado al inicio, tenemos que esto no se anula únicamente cuando π, σ son particiones a pares, en cuyo caso se tiene que $r_\pi(\epsilon) = 1 = r_\sigma(\eta)$, de esto es inmediato que los cumulantes impares son cero pues siempre hay un bloque de tamaño impar, y para los cumulantes pares se tiene que,

$$r_{2n}(\epsilon\eta) = \sum_{\substack{\pi, \sigma \in NC_2(2n) \\ \pi \vee \sigma = 1_{2n}}} 1 = |\{\pi, \sigma \in NC_2(2n) : \pi \vee \sigma = 1_{2n}\}|.$$

Considerando el isomorfismo que proporciona la duplicación, lo anterior es igual a,

$$|\{\theta, \rho \in NC(n) : A(\theta) \vee A(\rho) = 1_{2n}\}|.$$

Finalmente del Teorema 42 se tiene que esto es justamente m_n^{irr} que es lo que buscábamos probar. \square

Corolario 44. *Sean ϵ y η como antes, entonces la R -transformada de $\epsilon\eta$ está dada por,*

$$R_{\epsilon\eta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{irr} z^{2n}.$$

Tenemos así una forma de contar los sistemas meándricos irreducibles a través de calcular los cumulantes libres del producto de dos variables semicirculares libres. En este sentido la distribución buscada es aquella asociada al producto de dos variables semicirculares libres. Para cerrar la sección y a manera de abarcar todo el contenido de [5], vamos a resumir de manera muy general que utilidad tiene lo anterior. Para esto vamos a recordar la relación (1.2.3), la cual nos dice que $M(z) = R(z(M(z) + 1))$, esta relación nos permite calcular el radio de convergencia de R si conocemos el radio de convergencia de M . Mas explícitamente, si r_0 denota el radio de convergencia de M , entonces el radio de convergencia de R está dado por $r_1 = r_0(1 + M(r_0))$. Si consideramos la R -transformada de $\epsilon\eta$ como antes puede ser complicado

calcular el radio de convergencia pues no hay una expresión analítica para m_n^{irr} , sin embargo es fácil ver que los momentos de $\epsilon\eta$ están dados por Cat_n^2 para el $2n$ -ésimo momento y cero para los impares, es decir hay una expresión explícita para los términos de la M -transformada de $\epsilon\eta$. Luego, a través de la aproximación de Stirling es fácil ver que dicha M -transformada tiene radio de convergencia $\frac{1}{4}$, de donde, la R -transformada tendrá radio de convergencia $r_1 = \frac{1}{4}(1 + M(\frac{1}{4}))$, se puede verificar que esto último es de hecho $\frac{(4-\pi)}{\pi}$. Para finalizar, vamos a usar el hecho de que si tenemos una serie de potencias $\sum_{n \geq 1} c_n z^n$ con radio de convergencia r entonces se cumple que $\limsup_n c_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r}$, de esto último tenemos que,

$$\limsup_n (m_n^{irr})^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\pi}{4-\pi}\right)^2 \approx 13,39.$$

Esto nos da una cota para el crecimiento exponencial de $m_n^{(1)}$, es decir,

$$\limsup_n (m_n^{(1)})^{\frac{1}{n}} \leq 13,39.$$

Es importante mencionar que la cota anterior fue calculada por Lando y Zvonkin en [4]. Como comentario, este paper menciona que aproximaciones numéricas sugieren que este último límite es aproximadamente 12.26. A manera de completitud, me parece pertinente mencionar que en [6], se calcula dicho crecimiento pero condicionando a aquellos meandros $M_{\pi,\rho}$ donde $\pi \in Int(n)$, es decir si denotamos por $\bar{m}_n^{(1)}$ a la cantidad de meandros en S_{2n} donde la partición π está condicionado a ser una partición por intervalos, entonces se tiene que,

$$\limsup_n (\bar{m}_n^{(1)})^{\frac{1}{n}} \approx 5,22.$$

Este resultado no se verá mas adelante pues el objetivo principal de este trabajo va encaminado en comprender el crecimiento asintótico del número promedio de componentes de los sistemas meándricos más que el de comprender el crecimiento de la cantidad de meandros, es decir aquellos con un único componente. Para detalles de lo último mencionado puede verificarse el Corolario 5.5 en [6].

2.3. Sistemas meándricos de un solo componente

Para esta sección el objetivo es seguir las ideas de la sección pasada pero ahora considerando la cantidad de meandros, $m_n^{(1)}$. Buscaremos entonces hallar una distribución ν de alguna variable aleatoria ϵ que tenga como cumulantes pares a la cantidad de meandros y cero para los impares. Sea ν la distribución determinada por tener cumulantes libres,

$$r_{2n}(\nu) = m_n^{(1)}$$

$$r_{2n-1}(\nu) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por supuesto cuando decimos $r_m(\nu)$ nos referimos a $r_m(\epsilon)$, donde la distribución en el sentido algebraico de ϵ es ν . El siguiente teorema nos brinda una expresión para los momentos de ν en términos de meandros. Para esto vamos a introducir la siguiente notación.

Definición 45. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\pi, \rho \in NC(n)$ y consideremos el sistema meándrico, $M_{\pi, \rho}$. Sea $O(M_{\pi, \rho})$ la partición en órbitas disjuntas de $M_{\pi, \rho}$. Si $O(M_{\pi, \rho})$ pensada como partición es tal que no se cruza entonces diremos que el sistema meándrico $M_{\pi, \rho}$ no se cruza estrictamente.

Teorema 46. Sean ν como antes, entonces se cumplen,

$$\nu(X^{2n-1}) = 0$$

$$\nu(X^{2n}) = |\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. De la fórmula de momentos cumulantes, es claro que todos los momentos impares son cero pues todos los cumulantes impares son también cero. Bastará entonces verificar que $\nu(X^{2n}) = |\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}|$. Para esto tenemos que si $M_{\pi, \rho}$ no se cruza estrictamente entonces esto quiere decir que $O(M_{\pi, \rho}) \in NC(2n)$, haciendo uso de esto tenemos que,

$$\begin{aligned} & |\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}| \\ &= \sum_{\sigma \in NC(2n)} |\{\pi, \rho \in NC(n) : O(M_{\pi, \rho}) = \sigma\}|. \end{aligned}$$

Notemos además que por definición $M_{\pi,\rho}$ está definido de manera que manda pares a impares y viceversa, así todas sus órbitas son de tamaño par, de esto último tenemos que,

$$\begin{aligned} & |\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi,\rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}| \\ &= \sum_{\sigma \in NCP(2n)} |\{\pi, \rho \in NC(n) : O(M_{\pi,\rho}) = \sigma\}|. \end{aligned}$$

Donde $NCP(2n)$ denota las particiones 2-divisibles de $2n$ elementos. Por otro lado vamos a fijar momentáneamente a $\sigma \in NCP(2n)$, sea $\sigma = \{W_1, \dots, W_k\}$ sus bloques. Para $1 \leq i \leq k$ el conjunto W_i de $M_{\pi,\rho}$ es tanto unión de bloques de $A(\pi)$ como de $A(\rho)$, pues es de hecho invariante al ser una órbita, podemos entonces considerar las restricciones de $A(\pi)$ y $A(\rho)$ a W_i denotadas por σ_i y θ_i respectivamente, las cuales son particiones a pares en W_i , si renombramos a los elementos de W_i por $1, 2, \dots, |W_i|$ tenemos que entonces σ_i y θ_i son particiones a pares en $\{1, \dots, |W_i|\}$, y por ende existen π_i y ρ_i en $NC(\frac{|W_i|}{2})$ tales que $\sigma_i = A(\pi_i)$ y $\theta_i = A(\rho_i)$, más aun el sistema meándrico asociado M_{π_i,ρ_i} es de hecho un meandro pues tiene un único ciclo ya que W_i es una órbita de $M_{\pi,\rho}$ y por ende $M_{\pi,\rho}$ restringido a W_i es un meandro. Lo anterior nos dice que hay tantas formas de escoger $M_{\pi,\rho}$ restringido a W_i como lo hay de escoger meandros con vértices en $1, \dots, |W_i|$, esto nos da una forma de contar los sistemas meándricos $M_{\pi,\rho}$ de tal manera que sus órbitas sean $O(M_{\pi,\rho}) = \sigma$ dado por,

$$|\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi,\rho} = \sigma\}| = \prod_{W \in \sigma} m_{\frac{|W|}{2}}^{(1)}.$$

Una explicación combinatoria y geométrica de lo anterior es básicamente que las órbitas de $M_{\pi,\rho}$ son de hecho los elementos por los que pasan las curvas cerradas o componentes del sistema meándricos $M(\pi, \rho)$, luego este componente lo podemos escoger entonces de tantas maneras como meandros en esos vértices, luego por la ley del producto entonces la forma de escoger el sistema meándrico con estas órbitas es la multiplicación de las formas de escoger cada meandro en cada órbita. Uniendo esto tenemos que,

$$|\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi,\rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}| = \sum_{\sigma \in NCP(2n)} \prod_{W \in \sigma} m_{\frac{|W|}{2}}^{(1)}.$$

Finalmente por definición sabemos que $r_{2n} = m_n^{(1)}$ lo cual nos dice que,

$$|\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi,\rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}| = \sum_{\sigma \in NCP(2n)} \prod_{W \in \sigma} r_{|W|}(\nu).$$

Luego como los cumulantes impares son siempre cero, entonces lo anterior lo podemos traducir a,

$$|\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}| = \sum_{\sigma \in NC(2n)} \prod_{W \in \sigma} r_{|W|}(\nu),$$

que no es más que la fórmula de momentos cumulantes y por lo tanto concluimos,

$$|\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ no se cruza estrictamente}\}| = \nu(X^{2n}).$$

□

Tenemos entonces una expresión para los momentos y cumulantes libres de ν , lo complicado con este caso a diferencia del anterior es que antes μ era tal que sus momentos $2n$ eran Cat_n^2 y teníamos una expresión analítica para esto último. Más aun, sabíamos explícitamente cuál era la variable aleatoria con dichos momentos. Este caso es complicado en ese aspecto pues no se cuenta con una fórmula cerrada ni para los momentos ni para los cumulantes. Lo último que se hará para cerrar el capítulo y la sección es dar una sucesión de distribuciones ν_t que convergen en momentos a ν y que para cada $t \in \mathbb{Z}$ es posible hallar una variable aleatoria y un Espacio de Probabilidad No Conmutativo tal que bajo ese espacio la distribución de dicha variable es ν_t . Para seguir vamos a introducir la siguiente notación.

Definición 47. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$ denotamos por,

$$m_n^{(k)} = |\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ tiene exactamente } k \text{ orbitas}\}|,$$

que concuerda con la notación de $m_n^{(1)}$.

Para cada $t \in (0, \infty)$, vamos a denotar por ν_t a la distribución tal que,

$$\nu_t(X^{2n-1}) = 0,$$

$$\nu_t(X^{2n}) = \sum_{k=1}^n m_n^{(k)} t^k,$$

para $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión de distribuciones cumple que converge en momentos a ν cuando le aplicamos su convolución aditiva libre, tenemos explícitamente el siguiente teorema.

Teorema 48. Sean ν y ν_t como antes, entonces se cumple que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu_t^{\boxplus t} = \nu$$

en momentos, donde la convolución aditiva libre se define como en el Capítulo 1, bajo el supuesto de que R_{ν_t} es la R -transformada con cumulantes libres $r_n(\nu_t)$.

Demostración. Para la prueba veremos la convergencia en cumulantes que por la fórmula de momentos-cumulantes es equivalente a la convergencia en momentos. Necesitamos entonces verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que, $\lim_{t \rightarrow \infty} r_n(\nu_t^{\boxplus t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} r_n(\nu_t) = r_n(\nu)$. Para los cumulantes impares la convergencia es trivial pues son todos cero. Bastara entonces verificar que para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} r_{2p}(\nu_t) = r_{2p}(\nu) = m_p^{(1)}$. Para esto vamos a probar que para todo $p \in \mathbb{N}$ existe un polinomio Q_p con coeficientes enteros que se anula en 0 y que su derivada en 0 es $m_p^{(1)}$ que además satisface que $Q_p(t) = r_{2p}(\nu_t)$.

Para esto vamos a proceder por inducción fuerte, el caso $p = 1$ es trivial pues $m_1^{(1)} = 1$ por lo que basta tomar $Q_1(t) = t$ que satisface ser 0 en 0, su derivada en 0 igual a 1 y además $Q_1(t) = t = \nu_t(X^2) - \nu_t(X)^2 = r_2(\nu_t)$. Supongamos que se cumple para $1, 2, \dots, p-1$ vamos a probar que se cumple para p . De la fórmula de momentos-cumulantes se tiene que

$$\nu_t(X^{2p}) = \sum_{\pi \in NC(2p)} \left(\prod_{W \in \pi} r_{|W|}(\nu_t) \right).$$

Esta última suma podemos considerarla sólo sobre las particiones 2-divisibles pues si hay alguna partición con un bloque e tamaño impar entonces el respectivo cumulante es 0 y por ende se anula ese término, es decir se tiene,

$$\nu_t(X^{2p}) = \sum_{\pi \in NCP(2p)} \left(\prod_{W \in \pi} r_{|W|}(\nu_t) \right).$$

Separando $\pi = 1_{2p}$ la partición completa en la suma se tiene,

$$\nu_t(X^{2p}) = r_{2p}(\nu_t) + \sum_{\pi \in NCP(2p) - \{1_{2p}\}} \left(\prod_{W \in \pi} r_{|W|}(\nu_t) \right).$$

Como en la suma estamos considerando solo particiones distintas a la total entonces es claro que sus bloques son de tamaño estricto menor a $2p$ por lo

que por hipótesis de inducción existen Q_1, \dots, Q_{p-1} tal que $r_{2k}(\nu_t) = Q_k(t)$ para $1 \leq k \leq p-1$, sustituyendo esto en la igualdad anterior se tiene,

$$r_{2p}(\nu_t) = \nu_t(X^{2p}) - \sum_{\pi \in NCP(2p) - \{1_{2p}\}} \left(\prod_{W \in \pi} Q_{\frac{|W|}{2}}(t) \right).$$

Usando la expresión $\nu_t(X^{2p}) = \sum_{k=1}^p m_p^{(k)} t^k = m_p^{(1)} t + \sum_{k=2}^p m_p^{(k)} t^k$ se tiene que,

$$r_{2p}(\nu_t) = m_p^{(1)} t + \sum_{k=2}^p m_p^{(k)} t^k - \sum_{\pi \in NCP(2p) - \{1_{2p}\}} \left(\prod_{W \in \pi} Q_{\frac{|W|}{2}}(t) \right),$$

el cual es un polinomio que se anula en 0 pues $Q_k(0) = 0$ para todo $k = 1, \dots, p-1$. Además por la regla de la derivada del producto es claro que $U(t) = \sum_{\pi \in NCP(2p) - \{1_{2p}\}} \left(\prod_{W \in \pi} Q_{\frac{|W|}{2}}(t) \right)$ es tal que $U'(0) = 0$ de donde se tiene que

$$V(t) = m_p^{(1)} t + \sum_{k=2}^p m_p^{(k)} t^k - \sum_{\pi \in NCP(2p) - \{1_{2p}\}} \left(\prod_{W \in \pi} Q_{\frac{|W|}{2}}(t) \right)$$

es tal que $V'(0) = m_p^{(1)}$, además por construcción $r_{2p}(\nu_t) = V(t)$, es decir $Q_p(t) = V(t)$ es el polinomio buscado. Para concluir, de lo probado tenemos que para cada $p \in \mathbb{N}$ existe Q_p como antes, luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} r_{2p}(\nu_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} Q_p(t) = Q_p'(0) = m_p^{(1)} = r_{2p}(\nu)$$

□

Para finalizar la sección vamos a ver que para cada d entero es posible construir un EPNC y una variable aleatoria tal que en ese espacio la distribución de dicha variable es ν_d .

Teorema 49. Sean $d \in \mathbb{Z}$ y tomamos a_1, \dots, a_d una familia libre de variables autoadjuntas en un Espacio de Probabilidad No Conmutativo (A, ψ) de tal manera que cada una de estas variables se distribuye con ley semicircular. Consideremos el EPNC $(A \otimes A, \psi \otimes \psi)$, entonces en este espacio la variable autoadjunta,

$$x = a_1 \otimes a_1 + \dots + a_d \otimes a_d$$

tiene distribución ν_d con respecto al funcional $\psi \otimes \psi$.

Demostración. Para probar esto bastará verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumplen,

$$\begin{aligned}\psi \otimes \psi(x^{2n-1}) &= \nu_d(X^{2n-1}) = 0, \\ \psi \otimes \psi(x^{2n}) &= \nu_d(X^{2n}) = \sum_{k=1}^n m_n^{(k)} d^k.\end{aligned}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces se tiene que,

$$x^n = (a_1 \otimes a_1 + \cdots + a_d \otimes a_d)^n = \sum_{i(1), \dots, i(n)=1}^d a_{i(1)} a_{i(2)} \cdots a_{i(n)} \otimes a_{i(1)} a_{i(2)} \cdots a_{i(n)},$$

de donde se tiene

$$\psi \otimes \psi(x^n) = \sum_{i(1), \dots, i(n)=1}^d \psi(a_{i(1)} a_{i(2)} \cdots a_{i(n)})^2.$$

De la fórmula de momentos cumulantes esto es,

$$\psi \otimes \psi(x^n) = \sum_{i(1), \dots, i(n)=1}^d \left[\sum_{\pi \in NC(n)} r_\pi(a_{i(1)}, \dots, a_{i(n)}) \right]^2.$$

De esto último tenemos que si n es impar entonces toda partición π tiene un bloque de tamaño impar k y por ende $r_\pi(a_{i(1)}, \dots, a_{i(n)})$ tiene un factor de la forma $r_k(a_{j(1)}, \dots, a_{j(k)})$, de la independencia libre de los a_i es claro que si existen $j(s)$ y $j(r)$ tales que sean distintos entonces este se anula, la única manera de que no se anule es que entonces sean todos el mismo y por ende este factor sea de la forma $r_k(a_j, \dots, a_j) = r_k(a_j)$, para algún $a_j \in \{a_1, \dots, a_d\}$. Sin embargo como cada a_i tiene ley semicircular se sigue que todos sus cumulantes son 0 salvo el segundo, en particular todos los cumulantes impares son 0 y por ende en este caso también $r_k(a_j) = 0$. Lo que tenemos entonces es que en cualquier caso este factor siempre se vuelve 0 y por ende el producto también. Concluimos así que $\psi \otimes \psi(x^{2n-1}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Bastará verificar el caso par entonces, procediendo como antes tenemos que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi \otimes \psi(x^{2n}) = \sum_{i(1), \dots, i(2n)=1}^d \left[\sum_{\pi \in NC(2n)} r_\pi(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)}) \right]^2.$$

De la observación que hicimos antes es claro que esto no se anula únicamente cuando π es una partición a pares pues en otro caso aparece un cumulante distinto del segundo cumulante y este es 0. Así,

$$\psi \otimes \psi(x^{2n}) = \sum_{i(1), \dots, i(2n)=1}^d \left[\sum_{\pi \in NC_2(2n)} r_{\pi}(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)}) \right]^2.$$

De la observación que hicimos antes de que los cumulantes multivariados se anulan si tienen distintas entradas cuando hay independencia libre entonces se sigue que para que $r_{\pi}(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)})$ no se anule entonces π debe ser tal que si tenemos los índices $i(1), \dots, i(2n)$ fijos de tal manera que varios de ellos son iguales digamos $i(j_1) = i(j_2) = \dots = i(j_k)$ entonces π debe ser tal que una elementos de j_1, \dots, j_k , de otra manera si π une elementos k, l con $i(k) \neq i(l)$ entonces lo que sucederá es que tendremos en $r_{\pi}(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)})$ un factor de la forma $r_2(a_{i(k)}, a_{i(l)})$ que es 0 debido a la independencia libre y entonces todo el sumando $r_{\pi}(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)})$ será 0. Para poder expresar esto de manera mas amigable, vamos a introducir la siguiente notación. Para cada conjunto de índices $i = (i(1), \dots, i(2n))$, denotamos por $ker(i)$ a la partición en $NC(2n)$ donde k y l están en el mismo bloque sí y solo sí $i(k) = i(l)$. En otras palabras, $Ker(i)$ es la partición con bloques dados por todos los elementos que son iguales entre ellos. La observación que acabamos de hacer se traduce a que para que $r_{\pi}(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)})$ no se anule entonces π debe ser tal que $\pi \leq ker(i)$. Más aún, es claro que en caso de que π sea de tal forma entonces $r_{\pi}(a_{i(1)}, \dots, a_{i(2n)}) = 1$ pues todos los segundos cumulantes son 1, de esto último tenemos que,

$$\begin{aligned} \psi \otimes \psi(x^{2n}) &= \sum_{i(1), \dots, i(2n)=1}^d \left[\sum_{\substack{\pi \in NC_2(2n) \\ \pi \leq Ker(i)}} 1 \right]^2 \\ &= \sum_{i(1), \dots, i(2n)=1}^d \sum_{\substack{\pi, \rho \in NC_2(2n) \\ \pi, \rho \leq Ker(i)}} 1. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de sumas esto último es igual a,

$$\begin{aligned}
\psi \otimes \psi(x^{2n}) &= \sum_{i(1), \dots, i(2n)=1}^d \sum_{\substack{\pi, \rho \in NC_2(2n) \\ \pi, \rho \leq Ker(i)}} 1 \\
&= \sum_{\pi, \rho \in NC_2(2n)} \sum_{\substack{i(1), \dots, i(2n)=1 \\ ker(i) \geq \pi, \rho}}^d 1 \\
&= \sum_{\pi, \rho \in NC_2(2n)} |\{(i(1), \dots, i(2n)) \in \{1, \dots, d\}^{2n} : \pi, \rho \leq Ker(i)\}|.
\end{aligned}$$

Vamos ahora a fijar $\pi, \rho \in NC_2(2n)$ y vamos a tratar de ver que está contando el término $|\{(i(1), \dots, i(2n)) \in \{1, \dots, d\}^{2n} : \pi, \rho \leq Ker(i)\}|$. Para esto sean π' y ρ' particiones en $NC(n)$ tales que $A(\pi') = \pi$ y $A(\rho') = \rho$, notemos que las órbitas de $M_{\pi', \rho'}$ son unión de bloques de π y ρ al mismo tiempo pues son invariantes bajo $M_{\pi', \rho'}$, esto nos dice que las órbitas vista como partición es tal que $\pi, \rho \leq Orb(M_{\pi', \rho'})$. Tomemos entonces una órbita (j_1, \dots, j_l) y sea i tal que $i(j_1) = i(j_2) = \dots = i(j_l)$, hacemos lo mismo para cada órbita de $M_{\pi', \rho'}$ y lo que tenemos es entonces una colección de índices $i = (i(1), \dots, i(2n))$ que por construcción es tal que $\pi, \rho \leq Ker(i)$. De la misma manera si tomamos una colección de índices $i = (i(1), \dots, i(2n))$ tal que $\pi, \rho \leq Ker(i)$ entonces cada bloque de $Ker(i)$ es unión de bloques de π y ρ al mismo tiempo y por ende es invariante bajo $M_{\pi', \rho'}$ de donde cada bloque de $Ker(i)$ es unión de órbitas de $M_{\pi', \rho'}$, luego como los bloques de $Ker(i)$ son disjuntos entonces cada órbita (j_1, \dots, j_l) de $M_{\pi', \rho'}$ está contenida en un bloque de $Ker(i)$ y por construcción de $ker(i)$ sus bloques son tales que si $\{l_1, \dots, l_r\}$ es un bloque de $Ker(i)$ entonces $i(l_1) = i(l_2) \dots = i(l_r)$, de donde se sigue que $i(j_1) = i(j_2) \dots = i(j_l)$. Lo anterior nos dice que $|\{(i(1), \dots, i(2n)) \in \{1, \dots, d\}^{2n} : \pi, \rho \leq Ker(i)\}|$ es de hecho la forma de contar índices $i = (i(1), \dots, i(2n))$ de tal manera que la aplicación $i : \{1, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ que manda k en $i(k)$ sea tal que sea constante en las órbitas de $M_{\pi', \rho'}$. Lo anterior nos dice que si tenemos $\#(M_{\pi', \rho'})$ órbitas en $M_{\pi', \rho'}$, entonces la forma de tomar estos índices es colocar un valor de la aplicación i a cada órbita entre $1, \dots, d$, como tenemos d maneras para cada órbita entonces,

$$|\{(i(1), \dots, i(2n)) \in \{1, \dots, d\}^{2n} : \pi, \rho \leq Ker(i)\}| = d^{\#(M_{\pi', \rho'})}.$$

Usando esto último y combinándolo con la última expresión para $\psi \otimes \psi(x^{2n})$

se tiene,

$$\begin{aligned}
\psi \otimes \psi(x^{2n}) &= \sum_{\pi, \rho \in NC_2(2n)} |\{(i(1), \dots, i(2n)) \in \{1, \dots, d\}^{2n} : \pi, \rho \leq Ker(i)\}| \\
&= \sum_{\pi, \rho \in NC_2(2n)} d^{\#(M_{\pi', \rho'})} \\
&= \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} d^{\#(M_{\pi, \rho})} \\
&= \sum_{k=1}^n |\{\pi, \rho \in NC(n) : M_{\pi, \rho} \text{ tiene exactamente } k \text{ orbitas}\}| d^k \\
&= \sum_{k=1}^n m_n^{(k)} d^k,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. \square

Para cerrar el capítulo hay que quedarnos con la clara idea de que el problema de contar sistemas meándricos con cierta particularidad se puede asociar al problema de calcular cumulantes libres, en este sentido los sistemas meándricos no están alejados de la probabilidad libre. Esto por supuesto se sugiere desde el momento que definimos en el Capítulo 1 un sistema meándrico a partir de particiones que no se cruzan a pares. De ahora en adelante la tesis se centrará en abordar el problema de contar el número de componentes de los sistemas meándricos a través de herramientas en probabilidad libre. De hecho, como veremos al final de la tesis, la relación es mas estrecha y se pueden atacar problemas de conteo en sistemas meándricos a través de herramientas en Probabilidad No Conmutativa en general.

Capítulo 3

Una relación directa entre sistemas meándricos y diagramas de Hasse

Este capítulo, a diferencia de los anteriores, va más enfocado en el objetivo principal de la tesis, el cual es analizar el comportamiento asintótico del número promedio de componentes de los sistemas meándricos. La meta principal de este capítulo es el de comprender y desglosar parte del trabajo desarrollado en [3], donde de manera muy resumida se da una expresión equivalente entre la distancia en el diagrama de Hasse de $NC(n)$ y la distancia en el diagrama de Cayley de S_n . Esta equivalencia nos permitirá mas adelante, hallar una relación entre la distancia en el diagrama de Hasse de dos particiones, π, ρ , y el número de componentes del sistema meándrico, $M(\pi, \rho)$. Para esto necesitamos entrar un poco en contexto de lo que es la gráfica de Cayley.

3.1. Gráficas de Cayley

Definición 50. Dado un grupo G y S un subconjunto de G , se define el gráfico de Cayley como la gráfica dada de la siguiente manera,

- Los vértices de la gráfica son los elementos de G .
- Dos elementos a y b de G se conectan a través de una arista si existe $s \in S$ tal que $as = b$.

Comúnmente se toma a S como un generador de G , de esta manera su gráfica de Cayley es conexa, además si se considera que S es cerrado bajo inversos entonces la gráfica resulta no orientada, pues (a, b) es arista si y solo si (b, a) lo es también. Finalmente, si no se considera a la identidad del grupo en S entonces la gráfica de Cayley resulta no tener lazos.

Si tomamos, S_n como el grupo y al conjunto de $\binom{n}{2}$ transposiciones como su generador, entonces el gráfico de Cayley asociado es aquel tal que dos permutaciones se conectan si y solo si una puede obtenerse de componer la otra con una transposición. Vamos a denotar a esta gráfica de Cayley por Γ_n . Dadas dos permutaciones σ, τ vamos a denotar a $d(\sigma, \rho)$ a su distancia, definida como el camino de menor longitud que une σ y τ en la gráfica de Cayley Γ_n . Recordando lo visto en Capítulo 1, sabemos que podemos encajar $NC(n)$ dentro de S_n , por lo que si denotamos por Λ_n al diagrama de Hasse de $NC(n)$, una pregunta que surge es si Λ_n se encuentra entonces también encajado dentro de Γ_n , la respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 51. *Sean Λ_n y Γ_n definidas como antes, entonces Λ_n es una subgráfica de Γ_n , donde los vértices de Λ_n son pensados como permutaciones en ves de particiones vía el ensamble $P : \pi \rightarrow P_\pi$ visto en Capítulo 1.*

Demostración. Para la prueba primero tenemos que verificar que los vértices de Λ_n son un subconjunto de los vértices de Γ_n , esto es inmediato vía el ensamble P , pues toda partición que no se cruza resulta en una permutación en S_n . Bastará entonces verificar que si (P_π, P_ρ) es una arista de Λ_n entonces también lo es en Γ_n . Para esto tomemos (P_π, P_ρ) una arista de Λ_n , por definición del diagrama de Hasse, lo que lo anterior nos dice es que ρ resulta de unir dos bloques de π y conservar el resto igual. Sean $B_1 = \{b_{1,1}, \dots, b_{1,l_1}\}$ y $B_2 = \{b_{2,1}, \dots, b_{2,l_2}\}$ dichos bloques ordenados de manera numéricamente creciente. Del hecho de que π es una partición que no se cruza solo tenemos 4 casos posibles; que b_{2,l_2} sea menor a $b_{1,1}$, que b_{1,l_1} sea menor a $b_{2,1}$, que exista $1 \leq k \leq l_1$ tal que $b_{1,k} \leq b_{2,1} \leq b_{2,2} \leq \dots \leq b_{2,l_2} \leq b_{1,k+1}$ o que exista $1 \leq k \leq l_2$ tal que $b_{2,k} \leq b_{1,1} \leq b_{1,2} \leq \dots \leq b_{1,l_1} \leq b_{2,k+1}$. Si se tiene el primer caso entonces considerando la permutación $\tau = (b_{1,l_1} b_{2,l_2})$ es fácil notar que si pensamos a B_i como órbitas entonces,

$$B_2 B_1 \tau = (b_{2,1}, \dots, b_{2,l_2})(b_{1,1}, \dots, b_{1,l_1})(b_{1,l_1} b_{2,l_2}) = (b_{2,1} b_{2,2} \dots b_{2,l_2} b_{1,1} \dots b_{1,l_1})$$

es decir lo que tenemos es que $P_\pi \tau = P_\rho$ y por ende por definición (P_π, P_ρ) es una arista de Γ_n .

El caso 2 es análogo al caso 1, y el 3 al 4, por lo que basta verificar el caso 3, para esto supongamos que existe $1 \leq k \leq l_1$ tal que $b_{1,k} \leq b_{2,1} \leq b_{2,2} \leq \dots \leq b_{2,l_2} \leq b_{1,k+1}$, tomando $\tau = (b_{1,k}b_{2,l_2})$ se tiene,

$$\begin{aligned} B_1 B_2 \tau &= (b_{1,1}, \dots, b_{1,l_1})(b_{2,1}, \dots, b_{2,l_2})(b_{1,k}b_{2,l_2}) \\ &= (b_{1,1}b_{1,2} \cdots b_{1,k}b_{2,1}b_{2,2} \cdots b_{2,l_2}b_{1,k+1} \cdots b_{1,l_1}). \end{aligned}$$

Es decir, $P_\pi \tau = P_\rho$ y por ende por definición (P_π, P_ρ) es una arista de Γ_n , esto concluye la prueba. \square

Una observación importante es que de hecho la relación anterior es mucho mas fuerte y está dada por el siguiente teorema presentado en [3].

Definición 52. Dado el espacio métrico, (Γ_n, d) y dos puntos $x, y \in \Gamma_n$ se define el intervalo, $I_{x,y}$, como la subgráfica de Γ_n generada por los puntos $y \in \Gamma_n$ tales que $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$.

Teorema 53. Sea Λ_n definida como antes, entonces se cumple que Λ_n es el intervalo, $I_{e,s}$ en el espacio métrico (Γ_n, d) , donde $e = (1)(2) \cdots (n)$ es la identidad y $s = (12 \cdots n)$.

Para la prueba se puede consultar el Teorema 3.1 en [3]. Lo que lo anterior nos dice no es solo que Λ_n es una subgráfica de Γ_n , si no que también nos dice que todos los elementos $y \in \Lambda_n$ cumplen que $d(e, y) + d(y, s) = d(e, s) = n - 1$. Este último valor veremos mas adelante porque es justamente $n - 1$.

3.2. La distancia en el diagrama de Hasse Λ_n

Una vez que se tiene a Λ_n encajado dentro de Γ_n podemos considerar entonces la distancia en Λ_n , $d_\Lambda(\sigma, \rho)$, como la longitud del menor camino de σ a ρ totalmente contenido dentro de Λ_n . Una observación sencilla y bastante importante es que para $\pi, \rho \in NC(n)$, $d_H(\pi, \rho) = d_\Lambda(P_\pi, P_\rho)$.

Vamos ahora a recordar un poco de los sistemas meándricos. Sea $\pi \in NC(n)$ una partición, recordemos que podemos asociar a π su permutación P_π como vimos antes. Más aun, esta permutación P_π nos permite recuperar la duplicación de π de una manera muy sencilla, si $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ es un ciclo de P_π entonces $i'_1 \stackrel{\partial\pi}{\sim} i_2, i'_2 \stackrel{\partial\pi}{\sim} i_3, \dots, i'_k \stackrel{\partial\pi}{\sim} i_1$. Esto es básicamente la construcción de la duplicación de π vista en el Capítulo 1. Finalmente para π y ρ en $NC(n)$ vamos a pensar a $M(P_\pi, P_\rho)$ como el sistema meándrico $M(\pi, \rho)$. Esto nos

permitirá darle sentido a $M(\sigma, \tau)$ cuando σ, τ son elementos de Λ_n . Con estos conceptos podemos motivar a la siguiente definición.

Definición 54. Sea ρ una partición en $NC(n)$, definimos $\vec{\rho}$ como la partición que no se cruza en $NC(n)$ tal que su duplicación, $\partial\vec{\rho}$, es la partición con bloques $\{i, (P_\pi(i) - 1)'\}$, donde la resta es modulo n .

Es importante hacer la observación de que si hacemos un desplazamiento cíclico a la derecha en los vértices de $\partial\rho$ pero conservamos la estructura de $\partial\rho$, entonces la partición resultante es justamente $\partial\vec{\rho}$, pues al desplazar cíclicamente a la derecha lo que estamos haciendo es renombrar a los vértices de la siguiente manera, 1 se convierte en n' , $1'$ se convierte en 1, 2 se convierte en $1'$, $2'$ se convierte en 2 y así sucesivamente. Luego, si originalmente sin el desplazamiento teníamos $i' \stackrel{\partial\rho}{\sim} j$ entonces ahora $i \sim (j - 1)'$ en la partición resultante y por definición eso es justamente la duplicación de $\vec{\rho}$. En otras palabras lo que estamos haciendo es considerar ρ , hacer su duplicación, renombrar cíclicamente los vértices bajo un desplazamiento y recuperar $\vec{\rho}$ a partir de considerar a la permutación resultante como su duplicación. Esto nos dice inmediatamente por la construcción vista en el Capítulo 1, que $\vec{\rho}$ no es más que el complemento de Kreweras de ρ en su representación circular. Esta observación será fundamental más adelante. A $\vec{\rho}$ le llaman el dual de ρ en [3].

Ejemplo 55. Consideremos $\rho = \{\{1, 3, 4\}\{2\}\}$, construimos su representación planar y a partir de ella su duplicación como se observa en la Figura 3.1.

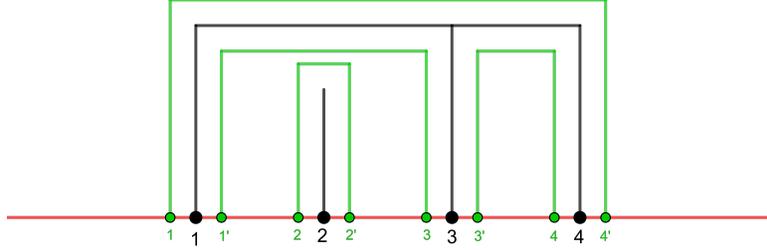


Figura 3.1:

En este caso tenemos que $s_\rho = (1, 3, 4)(2)$ por lo que $s_{\vec{\rho}} = (12)(3)(4)$ y por lo tanto podemos recuperar $\vec{\rho} = \{\{1, 2\}\{3\}\{4\}\}$.

Ahora daremos una expresión explícita para la distancia en el diagrama de Cayley, d .

Teorema 56. *Sea $\sigma \in S_n$ con r órbitas, incluyendo puntos fijos, entonces $d(e, \sigma) = n - r$.*

Demostración. Sea σ expresado como producto de ciclos disjuntos,

$$(i_{11}i_{12} \cdots i_{1l_1})(i_{21}i_{22} \cdots i_{2l_2}) \cdots (i_{r1}i_{r2} \cdots i_{rl_r}).$$

Se tiene entonces que $\sum_{j=1}^r l_j = n$, además se tiene que

$$(i_{j1}i_{j2} \cdots i_{jl_j}) = (i_{j1}i_{j2})(i_{j2}i_{j3}) \cdots (i_{jl_j-1}i_{jl_j}),$$

por lo que cada ciclo de tamaño l_j se puede ver como producto de $l_j - 1$ transposiciones y por ende σ se puede ver como producto de $\sum_{j=1}^r (l_j - 1) = n - r$ transposiciones de donde,

$$d(e, \sigma) \leq n - r.$$

Por otro lado, cuando se multiplica por alguna transposición no se puede reducir el número de ciclos en más de uno, y entonces como e tiene n ciclos y σ tiene r entonces debemos multiplicar por al menos $n - r$ ciclos, es decir $d(e, \sigma) \geq n - r$ lo cual concluye la prueba. \square

Lo anterior nos deja claro porque $d(e, s) = n - 1$, más aun, de las propiedades de Γ_n como gráfica de Cayley, tenemos que d es simétrica y equivariante, es decir $d(\sigma, \tau) = d(e, \sigma^{-1}\tau)$ lo cual nos permite calcular cualquier distancia con ayuda del teorema anterior. Además podemos dar el siguiente lema que será útil en la prueba del teorema principal del capítulo.

Lema 57. Sean π, τ permutaciones en S_n y u una transposición tal que $u\sigma\tau^{-1}$ tiene un ciclo más que $\sigma\tau^{-1}$, en otras palabras, u es tal que parte un ciclo de $\sigma\tau^{-1}$, entonces $d(u\sigma, \tau) = d(\sigma, \tau) - 1$.

Demostración. La prueba es inmediata del teorema anterior, por hipótesis tenemos que $\#\text{ciclos}(u\sigma\tau^{-1}) = \#\text{ciclos}(\sigma\tau^{-1}) + 1$, del teorema anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} d(u\sigma, \tau) &= d(u\sigma\tau^{-1}, e) = n - (\#\text{ciclos}(u\sigma\tau^{-1})) \\ &= n - \#\text{ciclos}(\sigma\tau^{-1}) - 1 = d(\sigma\tau^{-1}, e) - 1 \\ &= d(\sigma, \tau) - 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 58. Sean σ, τ en Λ_n , entonces se cumple que $d_\Lambda(\sigma, \tau) = d(\sigma, \tau)$.

Demostración. Es claro por lo anterior que todo camino en Λ_n es un camino en Γ_n , por lo que, $d(\sigma, \tau) \leq d_\Lambda(\sigma, \tau)$. Lo que se requiere probar es que la distancia entre σ y τ en Γ_n puede ser descrita por un camino totalmente contenido en Λ_n . Para la prueba se procederá por inducción sobre n , para el caso $n = 1$ se tiene que necesariamente, $\sigma = \tau = (1)$, de donde se tiene que $d_\Lambda(\sigma, \tau) = 0 = d(\sigma, \tau)$.

Supongamos que se cumple para $n - 1$, para $n \geq 1$, vamos a suponer que $\sigma(n) = n$ y $\tau(n) = n$, entonces lo que tenemos es que podemos pensar a σ y τ como permutaciones en Λ_{n-1} , donde σ es la permutación original sin n al igual que τ . Lo que estamos haciendo básicamente es usar el hecho de que $\Lambda_{n-1} \subset \Lambda_n$ como puede verse en la Figura 3.2.

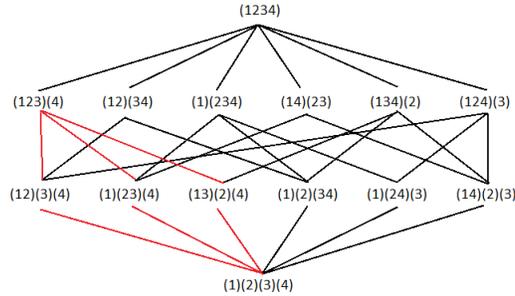


Figura 3.2: Λ_3 en rojo contenido dentro de Λ_4

Luego por hipótesis de inducción se tiene que $d_\Lambda(\sigma, \tau) = d(\sigma, \tau)$. Lo que resta entonces probar es que podemos reducir el caso general donde σ y τ son arbitrarias a el caso donde $\sigma(n) = n$ y $\tau(n) = n$.

Para esto vamos a considerar la aplicación $(\sigma, \tau) \rightarrow (\vec{\sigma}, \vec{\tau})$. Como vimos al inicio, la función $\sigma \rightarrow \vec{\sigma}$ es una isometría en la gráfica de Cayley en el sentido de que intercambia e con s en la gráfica $I_{e,s}$ y por ende en Λ_n también, precisamente por tratarse de el complemento de Kreweras. Esto nos dice que preserva distancias, es decir, $d_\Lambda(\sigma, \tau) = d(\sigma, \tau)$ ssi $d_\Lambda(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) = d(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$. Esto nos permite analizar la distancia de potencias bajo la aplicación $\vec{\cdot}$ de τ y σ . Para analizar que ocurre con el sistema meándrico, $M(\sigma, \tau)$, cuando se le aplica la aplicación $\vec{\cdot}$ tanto a σ como τ basta notar que por las observaciones hechas al inicio de $\vec{\cdot}$, lo que está ocurriendo es que estamos preservando la estructura del sistema meándrico $M(\sigma, \tau)$ pero estamos haciendo un renombramiento de los vértices $\{1, 1', 2, 2', \dots, n, n'\}$ vía un desplazamiento cíclico a la derecha. Por otro lado del hecho de que τ vista como partición, es una partición que no se cruza, quiere decir que existe un arco inferior en el sistema meándrico que no encierra más arcos, en otras palabras, la partición $\partial\tau$ debe tener un par que no encaja a otro par, donde por encajar nos referimos a que si $\{a, b\}$ es dicho par, entonces no existe otro par $\{c, d\}$ tal que $c \leq a \leq b \leq d$. Esto nos dice que τ es tal que su duplicación tiene un elemento de la forma $\{i, i'\}$ si es que i está en un bloque propio en τ o $\{i', i + 1\}$ si $i, i + 1$ están en el mismo bloque de τ . En este último caso es posible aplicar la aplicación una vez para tener que estos vértices ahora se llaman $\{i, i'\}$. En conclusión, en cualquiera de los casos es posible afirmar que después de aplicar cero o una vez la aplicación existe un bloque de la forma $\{i, i'\}$. Nuevamente aplicando

dos veces la aplicación $\vec{\cdot}$ se manda este bloque a el bloque $\{i - 1, i - 1'\}$, por lo que después de una cantidad finita de veces aplicando esta aplicación podemos llegar a que este bloque es $\{n, n'\}$. Es decir, existe una potencia m tal que $\vec{\tau}^{(m)}$ es tal que $\vec{\tau}^{(m)}(n) = n$. Si además se tiene que $\vec{\sigma}^{(m)}(n) = n$ entonces habremos terminado por la observación de que se conserva la distancia y que estamos en el caso donde n es fijo.

En otro caso asumamos que $\vec{\sigma}^{(m)}(n) = i \neq n$. En este caso en $M(\vec{\sigma}^{(m)}, \vec{\tau}^{(m)})$ tenemos una curva que desciende a través de n , se conecta inmediatamente con n' y luego continua por la parte superior donde se conecta con i . Sea $\sigma' = (in)\vec{\sigma}^{(m)}$, entonces lo que hace σ' es justamente dejar fijo n , lo cual nos dice por lo probado anteriormente que $d(\sigma', \vec{\tau}^{(m)}) = d_\Lambda(\sigma', \vec{\tau}^{(m)})$. Por otro lado lo que está haciendo σ' es dividir el bloque de $\vec{\sigma}^{(m)}$ que tiene a n en dos bloques disjuntos, lo cual nos dice que $d_\Lambda(\vec{\sigma}^{(m)}, \vec{\tau}^{(m)}) = d_\Lambda(\sigma', \vec{\tau}^{(m)}) + 1$ pues en el diagrama de Hasse dos elementos son consecutivos si y solo si uno de ellos tiene dos bloques que al unirse forman un bloque del otro y el resto de bloques son idénticos. Por otro lado tenemos que $\vec{\sigma}^{(m)}$ es tal que el ciclo que contiene a n es de la forma $(ia_1a_2\dots a_l n)$, luego, como $\vec{\tau}^{(m)}$ deja fijo n , entonces el fácil ver que $\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\tau}^{(m)})^{-1}$ es tal que en su descomposición en ciclos disjuntos el ciclo que contiene a n es de la forma $(ib_1\dots b_r n)$. De donde, al aplicar la permutación (in) por la izquierda a $\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\tau}^{(m)})^{-1}$ tendremos que este ciclo se partirá en los dos ciclos $(ib_1 \dots b_r)(n)$, así podemos aplicar el Lema 57 para concluir que $d(\vec{\sigma}^{(m)}, \vec{\tau}^{(m)}) = d(\sigma', \vec{\tau}^{(m)}) + 1$. Finalmente, podemos concluir que $d_\Lambda(\vec{\sigma}^{(m)}, \vec{\tau}^{(m)}) = d(\vec{\sigma}^{(m)}, \vec{\tau}^{(m)})$ y por ende $d_\Lambda(\sigma, \tau) = d(\sigma, \tau)$. \square

Todo esto nos permite dar una formulación final de la distancia en el diagrama de Hasse y la distancia en el gráfico de Cayley.

Teorema 59. Sean π, ρ dos particiones en $NC(n)$, entonces se cumple que,

$$d_H(\pi, \rho) = n - \#\text{ciclos}(P_\pi P_\rho^{-1}).$$

Demostración. Para la prueba basta usar el hecho mencionado al principio de que $d_H(\pi, \rho) = d_\Lambda(P_\pi, P_\rho)$, del teorema anterior tenemos entonces que $d_H(\pi, \rho) = d(P_\pi, P_\rho)$, finalmente del lema 56 concluimos que,

$$d_H(\pi, \rho) = d(P_\pi, P_\rho) = d(P_\pi P_\rho^{-1}, e) = n - \#\text{ciclos}(P_\pi P_\rho^{-1}).$$

\square

Este teorema finalmente va alineado en el objetivo principal de la tesis, pues vía esta igualdad y un teorema que veremos más adelante, permitirá establecer una relación entre la distancia en el diagrama de Hasse y el número de componentes del sistema meándrico, lo cual será la herramienta principal para calcular el comportamiento asintótico del número promedio de componentes de los sistemas meándricos.

Capítulo 4

Número promedio de componentes de los sistemas meándricos

En este capítulo se busca conocer el comportamiento asintótico de

$$\frac{1}{n} \frac{1}{|A||B|} \sum_{\pi, \rho \in A \times B} \#M(\pi, \rho).$$

Donde $A, B \subset NC(n)$. Para esto se tomará como base el trabajo desarrollado en [5], se comprenderá y detallaran pruebas de dicho trabajo, donde se aborda el comportamiento asintótico del caso particular,

$$\frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-1} Cat_n} \sum_{\pi, \rho \in Int(n) \times NC(n)} \#M(\pi, \rho).$$

Veremos varios casos, para finalmente llegar al caso más general conocido el cual es $A = Int(n)$ y $B = NC(n)$. Para el caso general, $A = B = NC(n)$, daremos cotas, aunque un límite puntual hasta ahora no se conoce.

4.1. Expresiones equivalentes con la distancia en el diagrama de Hasse

Para llegar al objetivo del presente trabajo necesitaremos hallar una expresión para el número de componentes de los sistemas meándricos a través

de la distancia en el diagrama de Hasse, pues es más fácil atacar al problema de este modo. Esto es lo que se busca hacer precisamente en esta sección.

Definición 60. Dadas $\pi, \rho \in NC(n)$, definimos $\Gamma(\pi, \rho)$, como la gráfica planar de vértices coloreados, negro y blanco de la siguiente manera:

1. Se imagina una línea horizontal con los números ordenados en ella de $1, \dots, n$.
2. Se dibuja la representación planar de π por la parte de arriba y la de ρ por la parte de abajo.
3. a cada bloque de π se le asocia un vértice negro y uno blanco a cada bloque de ρ .
4. las aristas son las líneas que unen los vértices en la grafica resultante de dibujar las representaciones planares de π y ρ , los cuales están etiquetados de 1 a n .

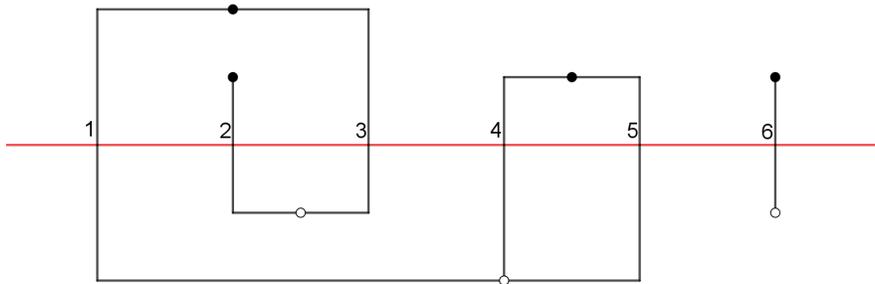


Figura 4.1: Gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$ asociada a $\pi = \{\{1, 3\}\{2\}\{4, 5\}\{6\}\}$ y $\rho = \{\{1, 4, 5\}\{2, 3\}\{6\}\}$, la línea roja se supone imaginaria.

Observación: Podemos dar una expresión explícita para $\pi\tilde{\vee}\rho$, para esto basta unir dos bloques de π y ρ que tengan al menos un elemento en común y repetir el proceso uniendo nuevos bloques de π y ρ que tengan al menos un elemento en común con el bloque resultante del previo paso, luego los

conjuntos resultantes son de hecho los bloques de $\pi\tilde{\nu}\rho$. Esta última observación nos permite asegurar que la cantidad de bloques de $\pi\tilde{\nu}\rho$ es de hecho el número de componentes de la gráfica planar $\Gamma(\pi, \rho)$, se hará uso de esta observación para la prueba del siguiente teorema.

Teorema 61. *Sean $\pi, \rho \in NC(n)$ dos particiones que no se cruzan, entonces las siguientes cantidades son equivalentes;*

1. $d_H(\pi, \rho)$.
2. $n - \#M(\pi, \rho)$.
3. $\|P_\pi P_\rho^{-1}\| = n - \#\text{ciclos}(P_\pi P_\rho^{-1})$.
4. $|\pi| + |\rho| - 2|\pi\tilde{\nu}\rho|$.
5. $n - \sum_{C, \text{componente de } \Gamma(\pi, \rho)} \#\text{caras}(C)$.

Demostración. Para la prueba se verificarán; $1 \Leftrightarrow 3$, $2 \Leftrightarrow 3$, $2 \Leftrightarrow 5$ y $4 \Leftrightarrow 5$. $1 \Leftrightarrow 3$ se sigue del Teorema 59.

Para $2 \Leftrightarrow 3$ notese que basta verificar que $\#M(\pi, \rho) = \#\text{cycles}(P_\pi P_\rho^{-1})$, para esto basta observar lo siguiente. Tomemos un elemento i en $\{1, 1', \dots, n, n'\}$, donde más particularmente $i \in \{1, \dots, n\}$. Es fácil notar que por construcción de $M(\pi, \rho)$ (ver Figura 4.2), el elemento i se conecta por la parte inferior de $M(\pi, \rho)$ con j' , donde j es tal que ρ tiene un bloque de la forma $\{i_1, \dots, j, i, \dots, i_k\}$, luego j' se conecta por la parte superior de $M(\pi, \rho)$ con un nuevo elemento k , donde k es tal que π tiene un bloque de la forma $\{l_1, \dots, j, k, \dots, l_r\}$, y este proceso continúa hasta regresar a el elemento inicial i . Este proceso describe un componente de $M(\pi, \rho)$, sin embargo notemos que este mismo proceso describe un ciclo de $P_\pi P_\rho^{-1}$, pues el elemento inicial i es enviado a j bajo P_ρ^{-1} y luego j es enviado a k bajo P_π , luego este ciclo termina cuando se regresa al elemento inicial i . Esta observación muestra $2 \Leftrightarrow 3$.

Para verificar $2 \Leftrightarrow 5$ basta probar que $\#M(\pi, \rho) = \sum_{C, \text{componentes } \Gamma(\pi, \rho)} \#\text{caras}(C)$. Esto último es inmediato de la construcción de $M(\pi, \rho)$ a través de la gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$ (ver Figura 4.2), pues los componentes de $M(\pi, \rho)$ rodean justamente las caras de los componentes de la gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$.

Para verificar $4 \Leftrightarrow 5$ recordemos primero la fórmula de Euler, la cual establece que para una gráfica planar C , se tiene,

$$\text{vertices}(C) - \text{aristas}(C) + \text{caras}(C) = 2.$$

Denotaremos a esto por $v(C) - a(C) + c(C) = 2$. Haciendo uso de esto y usando que $|\pi\tilde{\vee}\rho|$ es el número de componentes de $\Gamma(\pi, \rho)$ se tiene,

$$\begin{aligned} n - \sum_{C, \text{componente de } \Gamma(\pi, \rho)} c(C) &= a(\Gamma(\pi, \rho)) - \sum_{C, \text{componente de } \Gamma(\pi, \rho)} [2 + a(C) - v(C)] \\ &= v(\Gamma(\pi, \rho)) - \sum_{C, \text{componente de } \Gamma(\pi, \rho)} 2 \\ &= |\pi| + |\rho| - 2|\pi\tilde{\vee}\rho|. \end{aligned}$$

Esto último pues los vértices de la gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$ son justamente el número de bloques de π mas el número de bloques de ρ , pues a cada bloque se le asignaba un vértice. \square

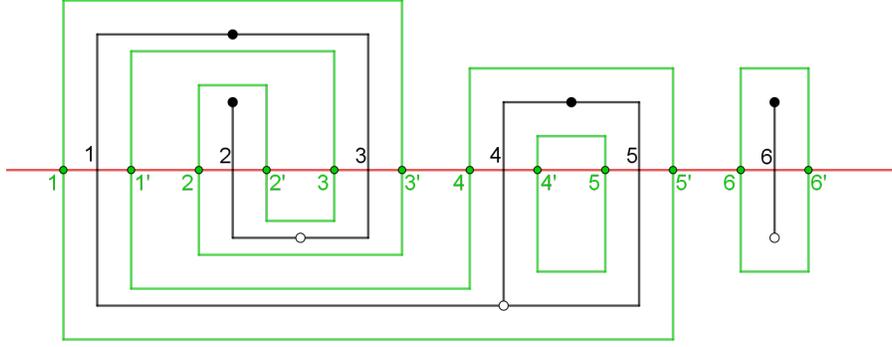


Figura 4.2: $M(\pi, \rho)$ obtenido a través de la gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$ asociada a $\pi = \{\{1, 3\}\{2\}\{4, 5\}\{6\}\}$ y $\rho = \{\{1, 4, 5\}\{2, 3\}\{6\}\}$.

Corolario 62. Sean $\pi, \rho \in NC(n)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes;

1. $M(\pi, \rho)$ tiene un solo componente.
2. $d_H(\pi, \rho) = n - 1$.
3. $||P_\pi P_\rho^{-1}|| = n - 1$.
4. $|\pi| + |\rho| = n + 1$ y $|\pi\tilde{\vee}\rho| = 1$.

5. $\Gamma(\pi, \rho)$ es un árbol.

Demostración. La implicación $1 \Leftrightarrow 2$ se sigue del teorema anterior, pues si $M(\pi, \rho)$ tiene un único componente entonces $\#M(\pi, \rho) = 1$ de donde se concluye.

Para $2 \Leftrightarrow 3$ basta usar la misma implicación en el teorema anterior.

Para $2 \Leftrightarrow 5$ basta observar que de la misma implicación en el teorema anterior se tiene que $\Gamma(\pi, \rho)$ tiene un único componente, y que este último tiene una única cara. Es decir, visto como gráfica es conexo y no tiene caminos cerrados, pues en caso de tenerlos tendría una curva cerrada y por ende al menos una cara mas. De esto último, se tiene que necesariamente $\Gamma(\pi, \rho)$ es un árbol y viceversa.

Para la última implicación de $4 \Leftrightarrow 5$, notemos que si $|\pi| + |\rho| = n + 1$ entonces la gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$ tiene $n + 1$ vértices. Más aun, por construcción, sabemos que tiene n aristas, finalmente el hecho de que $|\pi\tilde{\vee}\rho| = 1$, nos dice que está totalmente conectada. Luego, de estos 3 hechos se tiene que necesariamente es un árbol y lo mismo de manera viceversa, pues todo árbol con n aristas está conectado y tiene $n + 1$ vértices como vimos en el Teorema 39 del Capítulo 1. \square

El anterior corolario nos da el siguiente resultado.

Teorema 63. *Sea $\pi \in NC(n)$, entonces el sistema meándrico, $M(\pi, Kr(\pi))$ tiene un único componente, o equivalentemente debido al corolario anterior, $d_H(\pi, Kr(\pi)) = n - 1$. Donde el complemento de Kreweras se define como en el capítulo 1, pero renombrado sus vértices de $\{1', \dots, n'\}$ a $\{1, \dots, n\}$ para que tenga sentido considerar $M(\pi, Kr(\pi))$.*

Demostración. Para la prueba vamos a usar el corolario anterior, el objetivo sera probar la cuarta equivalencia y es que $|\pi| + |Kr(\pi)| = n + 1$ y $|\pi\tilde{\vee}Kr(\pi)| = 1$. La primera parte se sigue del Teorema 36.

Para la segunda parte basta analizar que para $i = 2, \dots, n$ se tiene que si π es tal que tiene un bloque de la forma $\{i_1, \dots, j, i, \dots, i_k\}$ entonces se tiene que j e i están en el mismo componente de π . Por otro lado, de la representación circular vista en el Capítulo 1 se tiene que hay una curva que une j con i y por ende en el complemento de Kreweras se tiene que j' e $i - 1'$ se unen, es decir, están en el mismo bloque, en otras palabras j e $i - 1$ están en el mismo bloque en $Kr(\pi)$. De lo anterior, tenemos que necesariamente i e $i - 1$ están en el mismo bloque de $\pi\tilde{\vee}Kr(\pi)$, y como i es arbitrario concluimos que $|\pi\tilde{\vee}Kr(\pi)| = 1$. \square

Cerraremos la sección con la observación de que finalmente se tiene la herramienta central, y es que $\#M(\pi, \rho) = n - d_H(\pi, \rho)$. Esto nos permitirá analizar el comportamiento asintótico del número promedio de componentes de los sistemas meándricos, vía la distancia d_H .

4.2. Sistemas meándricos con tapa superior e inferior

Consideremos un sistema meándrico, $M(\pi, \rho)$, diremos que se trata de un sistema meándrico con tapa superior e inferior cuando $\pi, \rho \in \text{Int}(n)$. El siguiente resultado no se muestra en [6], pero parte de la prueba está basado en los resultados anteriores desarrollados por Alexandru Nica y Doron Puder en [6]. Podemos obtener un resultado para el comportamiento asintótico del número de componentes de los sistemas meándricos con tapa superior e inferior. Más explícitamente en esta sección estamos interesados en ver como se comporta la siguiente cantidad cuando n tiende a infinito,

$$\frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-1} 2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n) \times \text{Int}(n)} \#M(\pi, \rho).$$

Para esto definimos la siguiente notación; para $\pi \in \text{Int}(n)$ definimos $i^\pi = (i_1^\pi, \dots, i_{n-1}^\pi)$ dado por $i_k^\pi = 1$ si $k \stackrel{\pi}{\sim} k+1$ y 0 en otro caso. Esto es, i^π nos dice si dos números consecutivos están o no en el mismo intervalo, es decir a partir de i^π podemos recuperar π por completo.

Teorema 64. Sean $\pi, \rho \in \text{Int}(n)$ entonces el número de componentes del sistema meándrico asociado $M(\pi, \rho)$ está dado por,

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho\}}.$$

Demostración. Para la demostración notemos que cuando existe algún k tal que $i_k^\pi = i_k^\rho = 0$ entonces la gráfica planar asociada $\Gamma(\pi, \rho)$ se parte en dos componentes, como se puede observar en la Figura 4.3 encerrados en color verde.

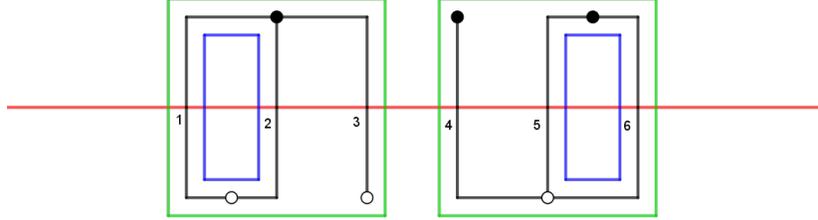


Figura 4.3: Gráfica $\Gamma(\pi, \rho)$ asociada a $\pi = \{\{1, 2, 3\}\{4\}\{5, 6\}\}$ y $\rho = \{\{1, 2\}\{3\}\{4, 5, 6\}\}$.

Esto nos dice que el número de componentes de la gráfica planar $\Gamma(\pi, \rho)$ está dado por $1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho = 0\}}$. Más aun para cada componente con aristas $r, r + 1, \dots, l$ se tiene al menos un cara, y por cada elemento $r \leq k \leq l - 1$ tal que tal que $i_k^\pi = i_k^\rho = 1$ se crea una curva cerrada lo cual da origen a una nueva cara como puede verse en la Figura 4.3 en color azul. Esto nos dice que el número de caras de cada componente con aristas $r, r + 1, \dots, l$ es $1 + \sum_{k=r}^{l-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho = 1\}}$. De estas dos observaciones se deduce que si denotamos por r_1, \dots, r_k a los índices ordenados entre 1 y $n - 1$ tales que $i_{r_t}^\pi = i_{r_t}^\rho = 0$ para $t = 1, \dots, k$ entonces se tienen $k + 1$ componentes, y en cada componente el número de caras está dado por $1 + \sum_{u=r_t}^{r_{t+1}-1} 1_{\{i_u^\pi = i_u^\rho = 1\}}$ para $t = 0, 1, \dots, k$, con $r_0 = 1$ y $r_{k+1} = n$ por defecto(hay al menos un componente por defecto). Luego usando esto se

tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{C, \text{componente de } \Gamma(\pi, \rho)} \# \text{caras}(C) &= \sum_{t=0}^k [1 + \sum_{u=r_t}^{r_{t+1}-1} 1_{\{i_u^\pi = i_u^\rho = 1\}}] \\
&= 1 + k + \sum_{t=0}^k \sum_{u=r_t}^{r_{t+1}-1} 1_{\{i_u^\pi = i_u^\rho = 1\}} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho = 0\}} + \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho = 1\}} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho\}}.
\end{aligned}$$

Para concluir basta usar el Teorema 61. \square

Teorema 65. *El número promedio de componentes de los sistemas meándricos con tapa superior e inferior converge a $\frac{1}{2}$ conforme n tiende a infinito, i.e.,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-1} 2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n) \times \text{Int}(n)} \# M(\pi, \rho) = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Para la demostración bastará usar el lema anterior, notemos que si π y ρ son tales que $\sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho\}} = j$ entonces su sistema meándrico asociado tiene $j+1$ componentes, además claramente $0 \leq j \leq n-1$. Si denotamos por N_j al número de sistemas meándricos tales que $\sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho\}} = j$, es claro que

$$\sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n) \times \text{Int}(n)} \# M(\pi, \rho) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) N_j.$$

Bastará entonces contar N_j lo cual es puramente combinatorio pues para que esto suceda, entonces π y ρ deben compartir j valores iguales, y el resto distintos, es decir, una vez fijo π , ρ se puede escoger de $\binom{n-1}{j}$ formas, que son los j índices iguales y el resto quedan determinados. Luego para escoger π se puede hacer de 2^{n-1} formas pues es el total de particiones en intervalos, por lo que el total de particiones π y ρ que cumplen $\sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{i_k^\pi = i_k^\rho\}} = j$ está

dado por $2^{n-1} \binom{n-1}{j}$ que es precisamente N_j , luego,

$$\begin{aligned} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n) \times \text{Int}(n)} \#M(\pi, \rho) &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)N_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{n-1} \binom{n-1}{j}. \end{aligned}$$

De esto último tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n) \times \text{Int}(n)} \#M(\pi, \rho) &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} j \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{j} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\ &= \mathbb{E}(\text{Binom}(n-1, \frac{1}{2})) + 1 \\ &= \frac{n-1}{2} + 1. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-1}2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n) \times \text{Int}(n)} \#M(\pi, \rho) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{2} + \frac{1}{n},$$

de donde aplicando límite llegamos al resultado. \square

4.3. Sistemas meándricos con tapa superior

Consideremos un sistema meándrico, $M(\pi, \rho)$, diremos que se trata de un sistema meándrico con tapa superior cuando únicamente $\pi \in \text{Int}(n)$ y $\rho \in \text{NC}(n)$ no está restringido a ser una partición en intervalos. De ahora en adelante estamos interesados en este tipo de sistemas meándricos. Nuevamente se desea conocer el comportamiento asintótico del número promedio de componentes, este es el caso más general que se ha resuelto hasta ahora y las pruebas y resultados se basan totalmente en [6]. A diferencia de la sección anterior la manera en que se llega al resultado es más bien analítica en vez de combinatoria. En esta prueba se hace un fuerte uso de la convolución

aditiva libre, en ese sentido la probabilidad libre juega un rol crucial. Vamos a dividir la sección en subsecciones para hacer más comprensible el método general que se sigue.

4.3.1. Resultados y definiciones previas

Teorema 66. Sean $\pi, \rho \in NC(n)$ con $\pi \in I(n)$, entonces $\pi \tilde{\vee} \rho = \pi \vee \rho$ y por ende,

$$d_H(\pi, \rho) = |\pi| + |\rho| - 2|\pi \vee \rho|.$$

Demostración. Para la demostración primero verificaremos que $\pi \tilde{\vee} \rho = \pi \vee \rho$, para esto basta verificar que $\pi \tilde{\vee} \rho$ es de hecho una partición que no se cruza. Consideremos primero el caso especial en el que π tiene un bloque de tamaño 2 y $n - 2$ singletons. Supongamos además que este bloque de tamaño 2 es de la forma $\{i, i + 1\}$. Sean B_i y B_{i+1} los bloques de i e $i + 1$ respectivamente en ρ . De las observaciones hechas anteriormente es claro que $\pi \tilde{\vee} \rho$ es de hecho la partición que une B_i con B_{i+1} y deja los demás bloques de ρ como estaban. Vamos a dividir nuestra prueba en casos.

Primero supongamos que todos los elementos de B_i son menores a $i + 1$ y que todos los elementos de B_{i+1} son mayores a i . Tomemos además $a < b < c < d$ con a, c elementos en un bloque de $\pi \tilde{\vee} \rho$ y d, b en algún otro bloque de la misma partición. Como ρ es una partición que no se cruza entonces necesariamente uno de estos bloques es $B_i \cup B_{i+1}$, pues de otra forma tendríamos que existen dos bloques de ρ tales que uno contiene elementos a, c y el otro b, d con $a < b < c < d$. Supongamos sin pérdida de la generalidad que $a, c \in B_i \cup B_{i+1}$, nuevamente del hecho de que ρ no se cruza necesariamente a pertenece a alguno de estos bloques y b al otro por la misma razón que antes, luego por la suposición inicial y que $a < c$ entonces necesariamente $a \in B_i$ y $c \in B_{i+1}$. Vamos a suponer además que $c = i + 1$, entonces como $b < c$ y además no puede ser i pues pertenece a un bloque distinto de $B_i \cup B_{i+1}$ entonces tenemos que $a < b < i < c < d$, pero a, i pertenecen al mismo bloque B_i de ρ y b, d a algún otro bloque de ρ , lo cual contradice el hecho de que ρ sea una partición que no se cruza. Algo análogo ocurre si $a = i$, por lo tanto la única posibilidad restante es que tanto $a < i$ y que $i + 1 < c$. En este caso notemos que como $b < c$ entonces o b está entre $i + 1$ y c o es menor a $i + 1$, notemos que si b está entre $i + 1$ y c entonces se tiene que $i + 1 < b < c < d$, pero entonces tendríamos que $i + 1, c$ están en un bloque de ρ y b, d en algún otro, lo cual nuevamente es una contradicción a que ρ no se cruce. Por lo tanto,

necesariamente b es menor a $i + 1$, luego en este último caso tenemos que como b no puede ser i pues está en otro bloque distinto a $B_i \cup B_{i+1}$ entonces $a < b < i < d$, y nuevamente tenemos que a, i están en un bloque de ρ y b, d en algún otro, lo cual nuevamente contradice el mismo hecho. Es decir si consideramos el caso especial en el que todos los elementos de B_i son menores a $i + 1$ y que todos los elementos de B_{i+1} son mayores a i , necesariamente la partición resultante, $\pi\tilde{\nu}\rho$ es una partición que no se cruza.

Supongamos ahora el otro caso en el que hay al menos un elemento de B_i que es mayor a $i + 1$, sea i' el elemento en B_i que es mayor a $i + 1$, más aun por el principio del buen orden podemos suponer a i' como el menor elemento en B_i que es mayor a $i + 1$. Como ρ es una partición que se cruza esto nos lleva a que necesariamente todos los elementos de B_{i+1} son mayores o igual a $i + 1$ y menores a i' . Tomemos como antes $a < b < c < d$ con a, c elementos en un bloque de $\pi\tilde{\nu}\rho$ y d, b en algún otro bloque de la misma partición. Por el mismo razonamiento de antes, uno de estos bloques es necesariamente $B_i \cup B_{i+1}$, supongamos s.p.g $a, c \in B_i \cup B_{i+1}$ y b, d en algún otro bloque de $\pi\tilde{\nu}\rho$ (que es también bloque de ρ), más aun, por el mismo razonamiento de antes a pertenece a algún bloque de B_i o B_{i+1} y c al restante. A diferencia del caso anterior donde necesariamente $a \in B_i$ y $c \in B_{i+1}$ ahora es posible cualquiera de los dos casos, supongamos primero $a \in B_i$ y $c \in B_{i+1}$, en este caso se puede proceder de la misma manera que antes para llegar a que $\pi\tilde{\nu}\rho$ es una partición que no se cruza. Faltará entonces el caso restante en el que $a \in B_{i+1}$ y $c \in B_i$, luego por la suposición inicial de $a < c$ entonces tenemos que necesariamente c es un elemento de B_i mayor o igual a i' , si $c = i'$ entonces del hecho de que $a < b$ y que $a \in B_{i+1}$ entonces necesariamente $i < i + 1 \leq a < b$, y por ende $i < b < i' = c < d$, pero i, i' están en un bloque de ρ y b, d en algún otro lo cual nos conduce a la misma contradicción. Finalmente, si $i' < c$ entonces tenemos que como $i + 1 < b$ por al argumento de antes se tienen dos posibilidades, que b este entre i' y c lo cual nos dice que $i' < b < c < d$ y tenemos la misma contradicción que antes, o que b sea menor a i' en cuyo caso tenemos $i < b < i' < c$ y tenemos la misma contradicción que antes. Por ende, si hay al menos un elemento de B_i que es mayor a $i + 1$ se tiene necesariamente que $\pi\tilde{\nu}\rho$ es una partición que no se cruza.

Para el caso simétrico en que hay un elemento de B_{i+1} menor a i se tiene lo mismo, y el último caso posible en el que hay tanto un elemento de B_i mayor a $i + 1$ como uno de B_{i+1} menor a i no se considera posible pues ρ es una partición que no se cruza. Concluimos así que $\pi\tilde{\nu}\rho$ es una partición que no

se cruza.

Finalmente para concluir el caso más general en el que π es arbitrario basta definir lo siguiente; $Pares(\pi) = \{\{i, i+1\} | 1 \leq i \leq n \text{ y } i \stackrel{\pi}{\sim} i+1\}$, donde se entiende que si $i = n$ entonces $i+1 = 1$. Luego si se define σ_i como la partición con bloques $\{i, i+1\}$ y todos los demás singletones, entonces es claro que,

$$\pi = \tilde{\bigvee}_{\{i, i+1\} \in Pares(\pi)} \sigma_i.$$

De esto último se tiene que

$$\pi \tilde{\vee} \rho = \rho \tilde{\vee} (\tilde{\bigvee}_{\{i, i+1\} \in Pares(\pi)} \sigma_i),$$

de donde se concluye usando que $\tilde{\vee}$ es una operación asociativa y el caso inicial. Para concluir la prueba basta usar el Teorema 61 y lo probado aquí para conseguir la igualdad,

$$d_H(\pi, \rho) = |\pi| + |\rho| - 2|\pi \vee \rho|.$$

□

El anterior resultado nos da una herramienta fundamental, pues ahora se tiene una expresión explícita para la distancia en el diagrama de Hasse. Para cerrar esta subsección se define lo siguiente.

Definición 67. Definimos la aplicación $b : NC(n) \times NC(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por,

$$b(\pi, \rho) = |\pi| + |\rho| - 2|\pi \vee \rho|.$$

Es importante observar que debido al Teorema 66, en el caso particular en que π se restringe a $Int(n)$ se cumple la igualdad $b(\pi, \rho) = d_H(\pi, \rho)$, más aun, es claro que $|\pi \vee \rho| \leq |\pi \tilde{\vee} \rho|$ y por ende en general se tiene que $d_H(\pi, \rho) \leq b(\pi, \rho)$.

En otras palabras, esta aplicación es una cota superior para la distancia en el diagrama de Hasse, esto nos va a permitir dar una cota inferior para el número promedio de componentes de los sistemas meándricos cuando ambas particiones están en $NC(n)$ y para cuando la partición superior se restringe a π nos va a permitir dar un límite explícito para el número promedio de componentes. En conclusión, lo que se tiene hasta ahora es que en vez de analizar el número promedio de componentes, se analiza la distancia promedio en el diagrama de Hasse, pero esta distancia coincide con la aplicación

b por lo que se analizará entonces la cantidad promedio de dicha aplicación. Esto nos da una idea de porque para el caso de sistemas meándricos con tapa superior se tiene un límite explícito pero para el caso general donde ambas particiones están en $NC(n)$ solo se tienen cotas y es precisamente porque la anterior aplicación no coincide con la distancia en el diagrama de Hasse en general, pero siempre es una cota.

Estamos en condiciones de mostrar el resultado principal, para esto la siguiente sección se enfoca en un caso particular donde la partición superior es un intervalo fijo, la motivación de presentar primero este caso más particular es que nos va a mostrar el procedimiento que se planea seguir para el caso general cuando la partición no es fija.

4.3.2. Sistemas meándricos con tapa superior fija $d_{2,m}$

Teorema 68. Sean $F(\cdot, \cdot)$ y $G(\cdot)$ dos funciones tales que,

$$F(z, t) = tG(z(1 + F(z, t))).$$

Entonces se cumple que

$$F_2(z, 1) = F(z, 1) + zF_1(z, 1) - \frac{zF_1(z, 1)}{1 + F(z, 1)},$$

donde $F_i(z, t) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(z, t)$ con x_i la i -ésima entrada de F .

Demostración. Derivando con respecto a t en la condición inicial y fijando $t = 1$ tenemos,

$$F_2(z, 1) = G(z(1 + F(z, 1))) + G'(z(1 + F(z, 1)))zF_2(z, 1).$$

Despejando y usando que $G(z(1 + F(z, 1))) = F(z, 1)$ se tiene,

$$G'(z(1 + F(z, 1))) = \frac{F_2(z, 1) - F(z, 1)}{zF_2(z, 1)}. \quad (4.3.1)$$

Por otro lado, hacemos lo mismo ahora derivando con respecto a z e igualando en $t = 1$ para tener,

$$F_1(z, 1) = G'(z(1 + F(z, 1)))(1 + F(z, 1) + zF_1(z, 1)).$$

Nuevamente despejando se tiene,

$$G'(z(1 + F(z, 1))) = \frac{F_1(z, 1)}{1 + F(z, 1) + zF_1(z, 1)}. \quad (4.3.2)$$

Igualando (4.3.1) y (4.3.2) se tiene

$$(F_2(z, 1) - F(z, 1))(1 + F(z, 1) + zF_1(z, 1)) = zF_2(z, 1)F_1(z, 1),$$

de donde se sigue el resultado de despejar $F_2(z, 1)$. \square

Definición 69. Se define la partición, $\lambda_{2,m} = \{\{1, 2\}\{3, 4\} \cdots \{2m-1, 2m\}\}$, dado esto se definen las cantidades,

1. $d_{2,m} = \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} b(\lambda_{2,m}, \rho) = \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} d_H(\lambda_{2,m}, \rho)$, la distancia promedio a la partición $\lambda_{2,m}$.
2. $d_n = \frac{1}{2^{n-1}Cat_n} \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} b(\pi, \rho) = \frac{1}{2^{n-1}Cat_n} \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} d_H(\pi, \rho)$, la distancia promedio en el caso de sistemas meándricos con tapa superior.

El objetivo principal de esta sección y el resultado más general conocido hasta ahora es el de comprender el resultado asintótico de $\frac{d_n}{n}$ que es análogo a comprender el resultado asintótico de

$$\frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-1}Cat_n} \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} \#M(\pi, \rho),$$

debido a la equivalencia entre la distancia del diagrama de Hasse y el número de componentes del sistema meándrico dado en el Teorema 61. Para esto se hará uso de la convolución aditiva libre definida en el Capítulo 1. Para esta subsección, seguiremos paso a paso la demostración de $d_{2,m}$ cuando la partición superior es fija por ser más sencilla y después se usaran las mismas ideas para trabajar el caso de interés d_n .

Definición 70. Definimos las series de potencias,

1. $\phi^{(1)}(z, t) = \sum_{m \geq 1} z^m \sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|}$.
2. $\phi^{(2)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} y^n \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} z^{|\pi|} t^{|\pi \vee \rho|}$.

El objetivo es probar que estas series de potencias son precisamente la serie de momentos en z de alguna medida $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$ la cual es la convolución aditiva libre de alguna medida μ . Comencemos con el primer caso, $\phi^{(1)}(z, t)$. Lo que se verificará es que $\sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|}$ no es más que el m -ésimo comento de alguna medida $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$.

Definiendo, $P_i = \{2i - 1, 2i\}$ y para α una conjunto de enteros positivos definimos, $P(\alpha) = \bigcup_{i \in \alpha} P_i$, además sea $\lambda(\alpha)$ la partición de $P(\alpha)$ con bloques P_i para $i \in \alpha$. En otras palabras, $\lambda(\alpha)$ no es más que $\lambda_{2,m}$ restringido al conjunto $P(\alpha)$.

Por otro lado, notemos que para $m \in \mathbb{N}$ y $\rho \in NC(2m)$ se tiene por definición que $\lambda_{2,m} \vee \rho \geq \lambda_{2,m}$ y por ende, $\lambda_{2,m} \vee \rho$ conserva los bloques de $\lambda_{2,m}$, es decir $\lambda_{2,m} \vee \rho$ tiene bloques de la forma $P(\theta_1), P(\theta_2), \dots$, donde $\theta_1, \theta_2, \dots$ son bloques de una partición $\theta \in NC(m)$, en pocas palabras $\lambda_{2,m} \vee \rho$ es una partición que une los bloques de $\lambda_{2,m}$ de acuerdo a como sean los bloques de ρ . Por poner un ejemplo, si $m = 3$ y $\rho = \{\{1, 4\}\{2, 3\}\{5, 6\}\}$ entonces $\lambda_{2,m} \vee \rho = \{\{1, 2, 3, 4\}\{5, 6\}\}$, esto es exactamente lo mismo que $\lambda_{2,m} \vee \rho = \{P(\{1, 2\}), P(\{3\})\}$, es decir la partición en $NC(3)$ asociada es $\{\{1, 2\}\{3\}\}$. Por ende lo que se está haciendo es una manera distinta de contabilizar las particiones $\lambda_{2,m} \vee \rho$ a través de particiones en $NC(m)$, sin embargo surge un pequeño inconveniente y es que varias particiones $\rho \in NC(2m)$ pueden estar asociadas a la misma partición $\theta \in NC(m)$, de tal manera que todas estas particiones ρ generan la misma partición $\lambda_{2,m} \vee \rho = \{P(\theta_1), P(\theta_2), \dots\}$. Nuevamente, por poner un ejemplo, si en el caso anterior tomamos, $\rho_2 = \{\{1, 2, 3\}\{4\}\{5, 6\}\}$ entonces tendremos que $\lambda_{2,m} \vee \rho = \{P(\{1, 2\}), P(\{3\})\} = \{\{1, 2, 3, 4\}\{5, 6\}\} = \lambda_{2,m} \vee \rho_2$, es decir tanto ρ como ρ_2 están asociadas a la misma partición θ .

Este problema se soluciona agregando para $\theta \in NC(m)$ el termino,

$$\prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma \in NC(P(\theta_i)) \\ \sigma \vee \lambda(\theta_i) = 1_{P(\theta_i)}}} 1 \right).$$

Lo anterior lo que hace es justamente contar todas las particiones ρ que generan el mismo $\lambda_{2,m} \vee \rho$ (de hecho ρ no es más que la unión de los σ en la expresión) pues precisamente verifica bloque a bloque de θ_i de θ , cuantas maneras de tomar ρ distintas en ese conjunto $P(\theta_i)$ generan el mismo bloque

$P(\theta_i)$ en $\lambda_{2,m} \vee \rho$, con esta observación lo que se tiene entonces es,

$$\sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|} = \sum_{\theta \in NC(m)} \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma \in NC(P(\theta_i)) \\ \sigma \vee \lambda(\theta_i) = 1_{P(\theta_i)}}} 1 \right).$$

Lo que se debe notar es que lo anterior no es más que la fórmula de momentos-cumulantes libres vista en el Capítulo 1. Si para alguna medida μ_t tenemos que su m -ésimo momento está dado por,

$$\sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|} = \sum_{\theta \in NC(m)} \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma \in NC(P(\theta_i)) \\ \sigma \vee \lambda(\theta_i) = 1_{P(\theta_i)}}} 1 \right).$$

Entonces tendremos que para $\theta \in NC(m)$ su r_θ cumulante libre estará dado por,

$$r_\theta = \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma \in NC(P(\theta_i)) \\ \sigma \vee \lambda(\theta_i) = 1_{P(\theta_i)}}} 1 \right).$$

Y por ende tomando $\theta = 1_m$ se tiene,

$$r_m = t |\{ \sigma \in NC(2m) : \sigma \vee \lambda_{2,m} = 1_{2m} \}|.$$

En este caso, por ejemplo, se puede dar de manera explícita cual es la medida μ_t asociada. Sea a una variable aleatoria, en el sentido algebraico visto en el Capítulo 1, con ley Marchenko-Pastur, es bien sabido que dicha ley tiene momentos,

$$M_n(a) = Cat_n.$$

Usando la relación de momentos-cumulantes libres vista en el Capítulo 1, esto nos lleva a que los cumulantes libres de a están dados por, $r_n(a) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pues

$$M_n(a) = Cat_n = \sum_{\pi \in NC(n)} r_\pi(a).$$

Sea μ la medida asociada a la variable $b = a^2$, el Teorema 15(productos como

argumentos) del Capítulo 1, nos dice que para $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
r_m(b) &= r_m(aa, aa, \dots, aa) = \sum_{\substack{\sigma \in NC(2m) \\ \lambda_{2,m} \vee \sigma = 1_{2m}}} r_\sigma(a, \dots, a) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in NC(2m) \\ \lambda_{2,m} \vee \sigma = 1_{2m}}} r_\sigma(a) = \sum_{\substack{\sigma \in NC(2m) \\ \lambda_{2,m} \vee \sigma = 1_{2m}}} 1 \\
&= |\{\sigma \in NC(2m) : \lambda_{2,m} \vee \sigma = 1_{2m}\}|.
\end{aligned}$$

Luego si consideramos $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$ entonces por las leyes de los cumulantes vistas en el Capítulo 1, tenemos que para $m \in \mathbb{N}$ el cumulante m -ésimo asociado a la convolución aditiva libre de $\mu, \mu^{\boxplus t}$, está dado por

$$r_m(\mu_t) = t |\{\sigma \in NC(2m) : \lambda_{2,m} \vee \sigma = 1_{2m}\}|.$$

Esto concuerda exactamente con lo obtenido antes, es decir, lo que se tiene en realidad es que,

$$\sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|} = \sum_{\theta \in NC(m)} r_\theta(\mu_t),$$

y por ende, por la fórmula de momentos-cumulantes, se tiene que $\sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|}$ es el m -ésimo momento asociado a $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$, que es la convolución aditiva libre de la medida μ .

Todo lo anterior se hizo con el fin de probar que la serie de momentos asociada a $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$ es precisamente $\phi^{(1)}(z, t)$ y que su R -transformada es $z \rightarrow tG(z)$, donde $G(z) = \sum_{m \geq 1} r_m(\mu) z^m$ es la R -transformada de μ . Luego de la igualdad (1.2.3) del Capítulo 1, se tiene que

$$\phi^{(1)}(z, t) = tG(z(1 + \phi^{(1)}(z, t))).$$

Una observación de suma importancia, es que de hecho no es necesario obtener de manera explícita μ , pues lo único que se requiere es encontrar una expresión de la forma,

$$\sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|} = \sum_{\theta \in NC(m)} \prod_{\theta_i \in \theta} f(\theta_i, t).$$

Lo que la anterior expresión nos dice, es que si definimos $M_m(t) = \sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|}$, entonces se tiene,

$$\phi^{(1)}(z, t) = \sum_{m \geq 1} M_m(t) z^m$$

con la propiedad de que $M_m(t) = \sum_{\theta \in NC(m)} \prod_{\theta_i \in \theta} f(\theta_i, t)$. Luego se tendrá que para cada t ,

$$G(z(1 + \phi^{(1)}(z, t))) = \phi^{(1)}(z, t),$$

donde $G(z) = \sum_{n \geq 1} f(1_n, t) z^n$. Esto debido a que lo que está sucediendo es que precisamente $\phi^{(1)}(z, t)$ es la serie de momentos de alguna medida μ_t , y $G(z)$ es la R -transformada de dicha medida.

Más aun si pedimos una condición más fuerte del estilo,

$$M_m(t) = \sum_{\theta \in NC(m)} t \prod_{\theta_i \in \theta} f(\theta_i),$$

y definimos $G(z) = \sum_{n \geq 1} f(1_n) z^n$, entonces lo que estamos diciendo es que G es la R -transformada de alguna medida μ con cumulantes $(f(1_m))_{m \geq 1}$ y por ende, los cumulantes asociados a su convolución aditiva libre $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$ están dados por $(tf(1_m))_{m \geq 1}$, lo que nos lleva a que $\phi^{(1)}(z, t)$ es en realidad la serie de momentos de la convolución aditiva libre, $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$, luego la relación anterior se convierte en,

$$tG(z(1 + \phi^{(1)}(z, t))) = \phi^{(1)}(z, t), \quad (4.3.3)$$

pues $z \rightarrow tG(z)$ es la R -transformada de la conlución aditiva libre, $\mu^{\boxplus t}$. Este es de hecho el enfoque que se sigue en [6], donde se enuncia la siguiente equivalencia, que es justamente lo que se acaba de explicar.

Teorema 71. *Sea*

$$F(z, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\theta \in NC(n)} \prod_{\theta_i \in \theta} (tg_{|\theta_i|}),$$

donde g_1, g_2, \dots son expresiones que no dependen de z o t , entonces,

$$F(z, t) = tG(z(1 + F(z, t))),$$

donde $G(z) = \sum_{m \geq 1} g_m z^m$.

Demostración. La prueba se remite a lo dicho anteriormente, pero para una prueba más detallada se puede consultar [7], Teorema 10.23. \square

El resultado anterior nos ahorra mucho trabajo, pues nos permite establecer una relación del estilo (4.3.3) entre $\phi^{(i)}$ y su R -transformada asociada sin necesidad de hallar la medida μ detrás, y únicamente encontrando una relación del estilo momentos-cumulantes. Con todo lo visto hasta ahora podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 72. Sea $\phi^{(1)}(z, t) = \sum_{m \geq 1} z^m \sum_{\rho \in NC(2m)} t^{|\lambda_{2,m} \vee \rho|}$, entonces se cumple que,

$$\phi_2^{(1)}(z, 1) = \phi^{(1)}(z, 1) + z\phi_1^{(1)}(z, 1) - \frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)}.$$

Demostración. Por todo lo visto antes, definiendo G de manera adecuada, tenemos que,

$$\phi^{(1)}(z, t) = tG(z(1 + \phi^{(1)}(z, t))).$$

Apelando al Teorema 68, se tiene el resultado. \square

Estamos listo para probar el resultado asintótico deseado al inicio de esta sección, la causa de porque se define esta serie $\phi^{(1)}(z, t)$ es que si se deriva con respecto a t y se evalúa en 1 se encuentra justamente el factor

$$\sum_{m \geq 1} z^m \sum_{\rho \in NC(2m)} |\lambda_{2,m} \vee \rho|.$$

El cual es uno de los términos de la aplicación b definida en el inicio de la sección.

Teorema 73. Se define la distancia promedio a la partición $\lambda_{2,m}$,

$$d_{2,m} = \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} b(\lambda_{2,m}, \rho).$$

Entonces se cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_{2,m}}{m} = \sqrt{2}.$$

Demostración. Para la prueba primero verificaremos que para $m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$d_{2,m} = -\frac{3}{2} + \frac{\binom{2m}{m} 2^{2m-1}}{Cat_{2m}}.$$

En efecto, notemos que,

$$\begin{aligned}
d_{2,m} &= \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} b(\lambda_{2,m}, \rho) \\
&= \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} [|\lambda_{2,m}| + |\rho| - 2|\lambda_{2,m} \vee \rho|] \\
&= \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} [m + |\rho| - 2|\lambda_{2,m} \vee \rho|].
\end{aligned}$$

Usando el Teorema 8 y el hecho de que $\phi_2^{(1)}(z, 1) = \sum_{m \geq 1} z^m \sum_{\rho \in NC(2m)} |\lambda_{2,m} \vee \rho|$, se tiene que,

$$d_{2,m} = m + (m + \frac{1}{2}) - \frac{2}{Cat_{2m}} [\phi_2^{(1)}(z, 1)]_m,$$

donde $[H(z)]_m$ denota el coeficiente de z^m en el desarrollo en serie de potencias de $H(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$, i.e, $[H(z)]_m = a_m$. Por otro lado del Teorema 72 se tiene que,

$$\phi_2^{(1)}(z, 1) = \phi^{(1)}(z, 1) + z\phi_1^{(1)}(z, 1) - \frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)}.$$

Pero notemos que, $\phi^{(1)}(z, 1) = \sum_{m \geq 1} Cat_{2m} z^m$ y $\phi_1^{(1)}(z, 1) = \sum_{m \geq 1} Cat_{2m} m z^{m-1}$. De aquı tenemos inmediatamente que,

$$\begin{aligned}
[\phi_2^{(1)}(z, 1)]_m &= [\phi^{(1)}(z, 1)]_m + [z\phi_1^{(1)}(z, 1)]_m - \left[\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)} \right]_m \\
&= Cat_{2m} + mCat_{2m} - \left[\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)} \right]_m.
\end{aligned}$$

Bastarı entonces conocer el desarrollo en serie de potencias del termino $\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)}$.

Para esto notemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{m \geq 1} Cat_{2m} x^{2m} &= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} 2Cat_{2m} x^{2m} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{m \geq 0} Cat_m x^m + \sum_{m \geq 0} Cat_m (-x)^m \right].
\end{aligned}$$

Usando lo visto en el Capítulo 1 de series ordinarias se puede verificar que,

$$\sum_{m \geq 0} \text{Cat}_{2m} x^{2m} = \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-4x}}{4x}.$$

Por ende, $\sum_{m \geq 0} \text{Cat}_{2m} z^m = \frac{\sqrt{1+4\sqrt{z}} - \sqrt{1-4\sqrt{z}}}{4\sqrt{z}}$. Derivando y multiplicando por z obtenemos que,

$$z\phi_1^{(1)}(z, 1) = \frac{1}{4\sqrt{1+4\sqrt{z}}} + \frac{1}{4\sqrt{1-4\sqrt{z}}} - \frac{1}{8\sqrt{z}}\sqrt{1+4\sqrt{z}} + \frac{1}{8\sqrt{z}}\sqrt{1-4\sqrt{z}}.$$

Dividiendo entre $1 + \phi^{(1)}(z, 1) = \sum_{m \geq 0} \text{Cat}_{2m} z^m = \frac{\sqrt{1+4\sqrt{z}} - \sqrt{1-4\sqrt{z}}}{4\sqrt{z}}$ se obtiene que,

$$\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)} = \frac{\sqrt{z}(u+v)}{uv(u-v)} - \frac{1}{2},$$

donde $u = \sqrt{1+4\sqrt{z}}$ y $v = \sqrt{1-4\sqrt{z}}$. Usando que $u^2 - v^2 = 8\sqrt{z}$ se obtiene que,

$$\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)} = -\frac{1}{2} + \frac{(u^2 - v^2)(u+v)}{8uv(u-v)}.$$

Manipulando algebraicamente se llega a que,

$$\begin{aligned} \frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)} &= -\frac{1}{2} + \frac{(u^2 - v^2)(u+v)}{8uv(u-v)} = -\frac{1}{2} + \frac{u^2 + v^2 + 2uv}{8uv} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2 + 2uv}{8uv} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4uv} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{1-16z}}. \end{aligned}$$

La cual es la serie ordinaria de los coeficientes $\binom{2m}{m}$, es decir,

$$\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)} = \sum_{n \geq 1} \binom{2m}{m} 4^{m-1} z^m.$$

Por ende $[\frac{z\phi_1^{(1)}(z, 1)}{1 + \phi^{(1)}(z, 1)}]_m = \binom{2m}{m} 4^{m-1}$. De esto concluimos que,

$$[\phi_2^{(1)}(z, 1)]_m = \text{Cat}_{2m} + m\text{Cat}_{2m} - \binom{2m}{m} 4^{m-1},$$

luego,

$$\begin{aligned}
d_{2,m} &= m + \left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{Cat_{2m}} [\phi_2^{(1)}(z, 1)]_m \\
&= 2m + \frac{1}{2} - \frac{2}{Cat_{2m}} [Cat_{2m} + mCat_{2m} - \binom{2m}{m} 4^{m-1}] \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{\binom{2m}{m} 2^{2m-1}}{Cat_{2m}}.
\end{aligned}$$

Para concluir la prueba basta hacer uso de la aproximación de Stirling, que nos dice que $n! \approx \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$ son asintóticamente iguales, para así tener que $\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ son asintóticamente iguales, luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_{2,m}}{m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{3}{2m} + \frac{\binom{2m}{m} 2^{2m-1}}{mCat_{2m}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{m} \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \frac{\sqrt{\pi 2m}}{2^{4m}} 2^{2m-1} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{m} \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

□

Esto prueba el primer teorema asintótico, para traducir esto a número promedio de componentes de sistemas meándricos, basta usar el Teorema 61 para tener el siguiente resultado.

Teorema 74. *Definimos la cantidad promedio de componentes de los sistemas meándricos con partición superior $\lambda_{2,m}$ como,*

$$M_{2,m} = \frac{1}{Cat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} \#M(\lambda_{2,m}, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{M_{2,m}}{m} = 2 - \sqrt{2}.$$

Demostración. Para la prueba basta hacer uso del Teorema 61, usando que $\#M(\pi, \rho) = n - d_H(\pi, \rho)$ para $\pi, \rho \in NC(n)$, pero recordemos que como $\lambda_{2,m}$ es una partición en Intervalos entonces $b(\lambda_{2,m}, \rho) = d_H(\lambda_{2,m}, \rho)$, combinando estas dos igualdades tenemos que $\#M(\lambda_{2,m}, \rho) = 2m - b(\lambda_{2,m}, \rho)$, luego,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{M_{2,m}}{m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mCat_{2m}} \sum_{\rho \in NC(2m)} [2m - b(\lambda_{2,m}, \rho)] \\ &= 2 - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_{2,m}}{m} \\ &= 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

4.3.3. Sistemas meándricos con tapa superior arbitraria

Estamos en condiciones de pasar al teorema central de esta sección, comprender el número de componentes promedio de los sistemas meándricos con tapa superior. La temática a seguir es exactamente la misma que la del caso anterior en la que la partición superior era fija. Queremos entonces un resultado para $\phi^{(2)}(z, t)$ análogo al de $\phi^{(1)}(z, t)$. Para esto recordemos que $\phi^{(2)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} y^n \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} z^{|\pi|} t^{|\pi \vee \rho|}$.

Nuestro primer objetivo será hallar una relación momentos-cumulantes como la del caso anterior. Algo que puede causar ruido en la definición de $\phi^{(2)}$ es que hay una variable extra y , sin embargo, no tiene por qué alarmarnos pues lo único que estamos diciendo es que $\phi^{(2)}$ es una serie formal en z y t con coeficientes que son también otra serie formal en y . Recordemos que el objetivo anterior era ver que $\phi^{(2)}$ no es más que la serie de momentos en z de alguna medida μ_t . En términos de la medida μ_t , lo que esta variable y nos dice es que hay una dependencia en y de dicha medida. El uso de esta variable es puramente auxiliar, pues es necesario incorporarla ya que al no tener una partición superior fija entonces establecer una expresión del estilo momentos-cumulantes solo es posible cuando nos restringimos a fijar la partición superior π , esto será posible gracias al termino $z^{|\pi|}$ que aparece en la serie.

Recordemos entonces que al igual que antes, el objetivo es poder expresar a

$\phi^{(2)}(z, t)$ de la forma,

$$\phi^{(2)}(z, t) = \sum_{m \geq 1} z^m \sum_{\theta \in NC(m)} \prod_{\theta_i \in \theta} t f(\theta_i).$$

Para esto definimos para cada partición $\pi \in Int(n)$ con k bloques el vector, $\mathbf{a}_k = (a_1, \dots, a_k)$ que denota el tamaño de sus bloques en el orden en que aparecen en π , i.e, su primer bloque tiene tamaño a_1 , el segundo a_2 y así consecutivamente. Sean $B_i^{(\mathbf{a}_k)} = \{a_1 + \dots + a_{i-1} + 1, \dots, a_1 + \dots + a_i\}$ el i -ésimo bloque de π y al igual que antes, para α un conjunto de enteros positivos denotamos por $B^{(\mathbf{a}_k)}(\alpha) = \bigcup_{i \in \alpha} B_i^{(\mathbf{a}_k)}$ y a $\lambda^{(\mathbf{a}_k)}(\alpha)$ a la partición de $B^{(\mathbf{a}_k)}(\alpha)$ con bloques $B_i^{(\mathbf{a}_k)}$ para $i \in \alpha$, en otras palabras, al igual que antes, $\lambda^{(\mathbf{a}_k)}(\alpha)$ no es más que π restringido a los componentes de $B^{(\mathbf{a}_k)}(\alpha)$. Luego notemos que,

$$\sum_{n \geq 1} y^n \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} z^{|\pi|} t^{|\pi \vee \rho|} = \sum_{k \geq 1} z^k \sum_{\substack{a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1 \\ \rho \in NC(a_1 + \dots + a_k)}} y^{\sum_{i=1}^k a_i} t^{|\pi \vee \rho|}.$$

Donde π es la partición con tamaños de bloques (a_1, \dots, a_k) . Lo único que estamos haciendo es cambiar el orden de las series y correr sobre la cantidad de bloques de π , esto puede ser desde $k = 1$ hasta infinito, luego dado la cantidad de bloques de π corremos sobre todas las particiones ρ con la misma cantidad de elementos de π , para esto corremos sobre todas las k -tuplas, (a_1, \dots, a_k) que son los tamaños de bloques de π (es decir corremos sobre todas las particiones π con k bloques), y entonces $\rho \in NC(a_1 + \dots + a_k)$. Además multiplicamos por los respectivos $y^{\sum_{i=1}^k a_i}$ que es y elevado a la cantidad de elementos de π . Esto es,

$$\sum_{n \geq 1} y^n \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} z^{|\pi|} t^{|\pi \vee \rho|} = \sum_{k \geq 1} z^k \sum_{\substack{a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1 \\ \rho \in NC(a_1 + \dots + a_k)}} t^{|\pi \vee \rho|} \prod_{i=1}^k y^{a_i}.$$

Por otro lado, notemos que dados $a_1, \dots, a_k \geq 1$ y $\rho \in NC(a_1 + \dots + a_k)$ tenemos al igual que el primer caso que, $\lambda^{\mathbf{a}_k}([k]) \vee \rho = \lambda^{\mathbf{a}_k}(\{1, \dots, k\}) \vee \rho \geq \lambda^{\mathbf{a}_k}([k])$ y por ende, $\lambda^{\mathbf{a}_k}([k]) \vee \rho$ debe conservar los bloques de $\lambda^{\mathbf{a}_k}([k])$ (que de hecho no es más que π), es decir al igual que en el primer caso tenemos que los bloques de $\lambda^{\mathbf{a}_k}([k]) \vee \rho$ son de la forma $B^{(\mathbf{a}_k)}(\theta_1), B^{(\mathbf{a}_k)}(\theta_2), \dots$ donde $\theta_1, \theta_2, \dots$ son los bloques de una partición en $NC(k)$, el cual es exactamente

el mismo razonamiento que en el primer caso. Finalmente procediendo como antes, tenemos que

$$\phi^{(2)}(z, t) = \sum_{k \geq 1} z^k \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \geq 1 \\ \theta \in NC(k)}} \prod_{\theta_i \in \theta} [t \sum_{\substack{\sigma \in NC(B^{\mathbf{a}_k}(\theta_i)) \\ \lambda^{(\mathbf{a}_k)}(\theta_i) \vee \sigma = 1_{B^{\mathbf{a}_k}(\theta_i)}}} 1 \prod_{j \in \theta_i} y^{a_j}].$$

Usando que $NC(B^{\mathbf{a}_k}(\theta_i)) \cong NC(|B^{\mathbf{a}_k}(\theta_i)|)$ se tiene,

$$\phi^{(2)}(z, t) = \sum_{k \geq 1} z^k \sum_{\theta \in NC(k)} \prod_{\theta_i \in \theta} [t \sum_{a_1, \dots, a_{|\theta_i|} \geq 1} \sum_{\substack{\sigma \in NC(a_1 + \dots + a_{|\theta_i|}) \\ \lambda^{(a_1, \dots, a_{|\theta_i|})}(\{1, \dots, |\theta_i|\}) \vee \sigma = 1_{a_1 + \dots + a_{|\theta_i|}}}]} \prod_{j=1}^{|\theta_i|} y^{a_j}].$$

Lo cual nos da la fórmula de momentos-cumulantes buscada, donde más explícitamente, tenemos que para $m \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$r_m = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_m \geq 1 \\ \sigma \in NC(a_1 + \dots + a_m) \\ \lambda^{(a_1, \dots, a_m)}([m]) \vee \sigma = 1_{a_1 + \dots + a_m}}} y^{a_1 + \dots + a_m},$$

es el m -ésimo cumulante asociado a la medida μ , donde μ es tal que $\mu_t = \mu^{\boxplus t}$ es la medida con serie de momentos en z , $\phi^{(2)}(z, t)$. Procediendo exactamente como antes tenemos el siguiente resultado.

Teorema 75. *Sea $\phi^{(2)}(z, t)$ definida como antes, entonces se cumple que,*

$$\phi_2^{(2)}(z, 1) = \phi^{(2)}(z, 1) + z\phi_1^{(2)}(z, 1) - \frac{z\phi_1^{(2)}(z, 1)}{1 + \phi^{(2)}(z, 1)}.$$

Demostración. Para la prueba se procede como en el Teorema 72. \square

Nuevamente estamos preparados para mencionar el teorema central de esta sección,

Teorema 76. *Se define la distancia promedio para sistemas meándricos con tapa superior como,*

$$d_n = \frac{1}{2^{n-1} \text{Cat}_n} \sum_{\pi \in \text{Int}(n), \rho \in NC(n)} b(\pi, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} = \frac{2}{3}.$$

Demostración. Para la prueba primero verificaremos que para $n \geq 1$ se cumple que,

$$d_n = 6n + 4 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}Cat_n} - \frac{3}{2^{n-1}Cat_n} \left[\frac{1}{(1+y)(\sqrt{1-8y})} \right]_n,$$

donde $[H(y)]_n$ denota el coeficiente de y^n en la expansión en serie de Taylor alrededor de 0 de H , i.e. si $H(y) = \sum_{n \geq 0} a_n y^n$ entonces, $[H(y)]_m = a_m$. De la definición de $b(\pi, \rho)$ se tiene que,

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2^{n-1}Cat_n} \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} b(\pi, \rho) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}Cat_n} \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} [|\pi| + |\rho| - 2|\pi \vee \rho|]. \end{aligned}$$

De el Teorema 8 tenemos que,

$$d_n = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{2}{2^{n-1}Cat_n} \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} |\pi \vee \rho|.$$

Usando que $\phi_2^{(2)}(1, 1) = \sum_{n \geq 1} y^n \sum_{\pi \in Int(n), \rho \in NC(n)} |\pi \vee \rho|$ y pensando a $\phi_2^{(2)}(1, 1)$ como una serie de potencias en y tenemos que,

$$d_n = n + 1 - \frac{2}{2^{n-1}Cat_n} [\phi_2^{(2)}(1, 1)]_n.$$

Recurriendo al Teorema 75, se tiene que,

$$[\phi_2^{(2)}(1, 1)]_n = [\phi^{(2)}(1, 1)]_n + [\phi_1^{(2)}(1, 1)]_n - \left[\frac{\phi_1^{(2)}(1, 1)}{1 + \phi^{(2)}(1, 1)} \right]_n.$$

Por otro lado recordemos que, $\phi^{(2)}(1, 1) = \sum_{n \geq 1} y^n 2^{n-1} Cat_n$ y $\phi_1^{(2)}(1, 1) = \sum_{n \geq 1} y^n Cat_n \frac{n+1}{2} 2^{n-1}$. Así se tiene de manera inmediata que,

$$[\phi_2^{(2)}(1, 1)]_n = 2^{n-1} Cat_n + \binom{2n}{n} 2^{n-2} - \left[\frac{\phi_1^{(2)}(1, 1)}{1 + \phi^{(2)}(1, 1)} \right]_n.$$

Usando lo visto en Capítulo 1 de series ordinarias y agrupando correctamente se puede ver que,

1. $\phi^{(2)}(1, 1) = \sum_{n \geq 1} y^n 2^{n-1} \text{Cat}_n = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \text{Cat}_n (2y)^n = \frac{1 - \sqrt{1-8y}}{8y} - \frac{1}{2}$.
2. $\phi_1^{(2)}(1, 1) = \sum_{n \geq 1} y^n \text{Cat}_n \frac{n+1}{2} 2^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \binom{2n}{n} (2y)^n = \frac{1}{4\sqrt{1-8y}} - \frac{1}{4}$.

Combinando estos dos resultados tenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_1^{(2)}(1, 1)}{1 + \phi^{(2)}(1, 1)} &= \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{1-8y}} - 1)}{\frac{1+4y-\sqrt{1-8y}}{8y}} = \frac{2y(\frac{1}{\sqrt{1-8y}} - 1)}{1 + 4y - \sqrt{1-8y}} \\
&= \frac{1}{8(1+y)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-8y}} - 1 \right) (1 + 4y + \sqrt{1-8y}) \\
&= \frac{1+4y}{8(1+y)\sqrt{1-8y}} - \frac{4y + \sqrt{1-8y}}{8(1+y)} \\
&= \frac{12y - 4y\sqrt{1-8y}}{8(1+y)\sqrt{1-8y}} = \frac{3y - y\sqrt{1-8y}}{2(1+y)\sqrt{1-8y}} \\
&= -\frac{y}{2(1+y)} + \frac{3y}{2(1+y)\sqrt{1-8y}} \\
&= -\frac{y}{2(1+y)} + \frac{3}{2\sqrt{1-8y}} - \frac{3}{2(1+y)\sqrt{1-8y}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^n y^n + \frac{3}{2} \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} (2y)^n - \frac{3}{2(1+y)\sqrt{1-8y}}.
\end{aligned}$$

luego,

$$\left[\frac{\phi_1^{(2)}(1, 1)}{1 + \phi^{(2)}(1, 1)} \right]_n = \frac{1}{2} (-1)^n + \frac{3}{2} \binom{2n}{n} 2^n - \left[\frac{3}{2(1+y)\sqrt{1-8y}} \right]_n.$$

Combinando esta expresión con la que obtuvimos antes se tiene,

$$[\phi_2^{(2)}(1, 1)]_n = 2^{n-1} \text{Cat}_n + \binom{2n}{n} 2^{n-2} - \frac{1}{2} (-1)^n - \frac{3}{2} \binom{2n}{n} 2^n + \left[\frac{3}{2(1+y)\sqrt{1-8y}} \right]_n.$$

De donde se tiene que,

$$\begin{aligned}
d_n &= n + 1 - \frac{2}{2^{n-1} \text{Cat}_n} [\phi_2^{(2)}(1, 1)]_n \\
&= n + 1 - 2 - (n + 1) + \frac{(-1)^n}{2^{n-1} \text{Cat}_n} + 6(n + 1) - \frac{3}{2^{n-1} \text{Cat}_n} \left[\frac{1}{(1+y)\sqrt{1-8y}} \right]_n \\
&= 6n + 4 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1} \text{Cat}_n} - \frac{3}{2^{n-1} \text{Cat}_n} \left[\frac{1}{(1+y)\sqrt{1-8y}} \right]_n.
\end{aligned}$$

Para analizar el comportamiento de $\frac{1}{(1+y)\sqrt{1-8y}}$ recurrimos a un resultado expuesto en [6], donde se verifica que,

$$\left[\frac{1}{(1+y)(\sqrt{1-8y})}\right]^n = \frac{8}{9} \frac{8^n}{\sqrt{\pi n}} \left[1 - \frac{13}{72n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

De lo anterior y usando la aproximación de Stirling que nos dice que $\binom{2n}{n}$ y $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ son asintóticamente iguales tenemos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{3}{2^{n-1} \text{Cat}_n} \left[\frac{1}{(1+y)\sqrt{1-8y}}\right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(n+1)\sqrt{\pi n}}{n2^n 4^n} \frac{8}{9} \frac{8^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{16}{3}.$$

De esto ultimo se sigue el resultado. \square

Nuevamente podemos traducir este resultado a número promedio de componentes del los sistemas meándricos con tapa superior vía el Teorema 61, lo cual nos da el siguiente resultado.

Teorema 77. *Definimos la cantidad promedio de componentes de un sistema meándrico con tapa superior en n puntos como,*

$$M_n = \frac{1}{2^{n-1} \text{Cat}_n} \sum_{\pi \in \text{Int}(n), \rho \in \text{NC}(n)} \#M(\pi, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \frac{1}{3}.$$

Demostración. Para la prueba se procede como en el Teorema 74, para tener que,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n2^{n-1} \text{Cat}_n} \sum_{\pi \in \text{Int}(n), \rho \in \text{NC}(n)} [n - b(\pi, \rho)] \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n2^{n-1} \text{Cat}_n} \sum_{\pi \in \text{Int}(n), \rho \in \text{NC}(n)} b(\pi, \rho) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} = 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

\square

4.4. Cotas para el caso general

Para esta sección el objetivo es hallar cotas para el caso más general en que $\pi, \rho \in NC(n)$ no están condicionadas. Para esto la idea es proceder exactamente como en el caso anterior para tener una cota superior para la distancia en el diagrama de Hasse, y con esto tener una cota inferior para el número promedio de componentes de los sistemas meándricos. Para la cota superior se apelará a un resultando que se sigue inmediatamente de la desigualdad triangular.

Comencemos entonces con la cota inferior, para esto definimos la siguiente serie formal,

$$\phi^{(3)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} t^{|\pi \vee \rho|}.$$

Nuevamente, el objetivo es hallar una relación del estilo momentos-cumulantes. Este caso es bastante más sencillo, basta notar que como $|\pi \vee \rho|$ es una partición que no se cruza entonces sus bloques son bloques θ_i de una partición que no se cruza θ , más aun cada bloque de $\pi \vee \rho$ nos genera un elemento t , así podemos contar los bloques de $\pi \vee \rho$ como bloques de una partición $\theta \in NC(n)$. Finalmente al igual que en los casos anteriores para contar todas las π y ρ que nos generan la misma partición $\pi \vee \rho$ basta considerar para cada θ el factor,

$$\prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(\theta_i) \\ \sigma \vee \tau = 1_{\theta_i}}} 1 \right).$$

Esto justamente nos cuenta cuantas π y ρ nos generan la misma partición $\pi \vee \rho$ pues verifica bloque a bloque de θ cuantas particiones en esos bloques son tales que su unión se convierte en el bloque completo. En otras palabras, la partición π no es más que la unión de las particiones σ y lo mismo con ρ para τ . Esto nos lleva a que,

$$\phi^{(3)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\theta \in NC(n)} \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(\theta_i) \\ \sigma \vee \tau = 1_{\theta_i}}} 1 \right).$$

Usando que $NC(\theta_i) \cong NC(|\theta_i|)$, podemos expresar lo anterior como,

$$\phi^{(3)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\theta \in NC(n)} \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(|\theta_i|) \\ \sigma \vee \tau = 1_{|\theta_i|}}} 1 \right).$$

Que es la fórmula momentos-cumulantes que estábamos buscando, en otras palabras la medida μ asociada en este caso tiene cumulantes,

$$r_m = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(m) \\ \sigma \vee \tau = 1_m}} 1 = |\{\sigma, \tau \in NC(m) : \sigma \vee \tau = 1_m\}|,$$

para $m \geq 1$. Dicho esto podemos mencionar el primer teorema para este caso análogo a los casos anteriores.

Teorema 78. *Sea $\phi^{(3)}(z, t)$ definida como antes, entonces se cumple que,*

$$\phi_2^{(3)}(z, 1) = \phi^{(3)}(z, 1) + z\phi_1^{(3)}(z, 1) - \frac{z\phi_1^{(3)}(z, 1)}{1 + \phi^{(3)}(z, 1)}.$$

Demostración. Para la prueba se procede como en los Teoremas 72 y 75, definiendo G como la R -transformada con cumulantes r_m asociada a μ y usando que lo anterior verifica que $\phi^{(3)}(z, t)$ es la serie de momentos asociada a $\mu^{\boxplus t}$, luego apelando a la relación entre la R -transformada y su serie de momentos vista en el Capítulo 1 y al Teorema 68 se concluye lo deseado. \square

Nuevamente estamos listos para probar el primer teorema de esta sección.

Teorema 79. *Sea \tilde{b}_n la cantidad promedio con respecto a $b : NC(n) \times NC(n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,*

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\text{Cat}_n^2} \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} b(\pi, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n}{n} = \frac{3\pi - 8}{8 - 2\pi}.$$

Demostración. Para la prueba se tiene que,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n &= \frac{1}{\text{Cat}_n^2} \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} b(\pi, \rho) \\ &= \frac{1}{\text{Cat}_n^2} \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} [|\pi| + |\rho| - 2|\pi \vee \rho|]. \end{aligned}$$

De el Teorema 8 y usando que $\phi_2^{(3)}(z, 1) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} |\pi \vee \rho|$ se sigue que,

$$\tilde{b}_n = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{2}{Cat_n^2} [\phi_2^{(3)}(z, 1)]_n.$$

Donde $[\phi_2^{(3)}(z, 1)]_n$ se define como antes, pensando a $\phi_2^{(3)}(z, 1)$ como una serie en z . Luego debido al Teorema 78 se tiene que,

$$\tilde{b}_n = n + 1 - \frac{2}{Cat_n^2} ([\phi^{(3)}(z, 1)]_n + [z\phi_1^{(3)}(z, 1)]_n - [\frac{z\phi_1^{(3)}(z, 1)}{1 + \phi^{(3)}(z, 1)}]_n).$$

Notemos además que $\phi^{(3)}(z, 1) = \sum_{n \geq 1} z^n Cat_n^2$ y $z\phi_1^{(3)}(z, 1) = \sum_{n \geq 1} n Cat_n^2 z^n$, de esto se tiene que,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n &= n + 1 - \frac{2}{Cat_n^2} (Cat_n^2 + n Cat_n^2 - [\frac{z\phi_1^{(3)}(z, 1)}{1 + \phi^{(3)}(z, 1)}]_n) \\ &= -n - 1 + \frac{2}{Cat_n^2} [\frac{z\phi_1^{(3)}(z, 1)}{1 + \phi^{(3)}(z, 1)}]_n \\ &= -n - 1 + \frac{2}{Cat_n^2} [z \frac{\partial}{\partial z} \log(1 + \phi^{(3)}(z, 1))]_n. \end{aligned}$$

Por otro lado notemos que si $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ entonces $z \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^n$. Lo anterior nos dice que $[z \frac{\partial}{\partial z} f(z)]_n = n [f(z)]_n$. Usando esta observación se sigue que,

$$\tilde{b}_n = -n - 1 + \frac{2n}{Cat_n^2} [\log(1 + \sum_{k \geq 1} Cat_k^2 z^k)]_n.$$

Para concluir vamos a usar un resultado sobre producto de Hadamard de series el cual puede encontrarse en la sección VI.10.2 de [2] que nos dice que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Cat_n^2} [\log(\sum_{k \geq 0} Cat_k^2 z^k)]_n = \frac{1}{\Theta(r)}$, donde $\Theta(z) = \sum_{k \geq 0} Cat_k^2 z^k$ y r es su radio de convergencia.

Bastará entonces hallar el radio de convergencia de Θ . Para esto basta usar el Teorema de Cauchy-Hadamard que nos dice que el radio de convergencia esta dado por,

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Cat_n^2}{Cat_{n+1}^2} = [\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Cat_n}{Cat_{n+1}}]^2 = [\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2 \binom{2n}{n}}{n + 1 \binom{2n+2}{n+1}}]^2 \\ &= [\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)}]^2 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Finalmente de las propiedades de series formales se puede verificar que $\sum_{k \geq 0} \text{Cat}_k^2 \frac{1}{16^k} = \frac{4(4-\pi)}{\pi}$. De esto se sigue que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Cat}_n^2} [\log(\sum_{k \geq 0} \text{Cat}_k^2 z^k)]_n = \frac{\pi}{4(4-\pi)}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{\text{Cat}_n^2} [\log(1 + \sum_{k \geq 1} \text{Cat}_k^2 z^k)]_n \right) = -1 + \frac{\pi}{8-2\pi} = \frac{3\pi-8}{8-2\pi}.$$

□

Con lo anterior podemos dar una primer cota.

Teorema 80. *Sea \tilde{d}_n la distancia promedio en el diagrama de Hasse en $NC(n) \times NC(n)$ definida por,*

$$\tilde{d}_n = \frac{1}{\text{Cat}_n^2} \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} d_H(\pi, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}_n}{n} \leq \frac{3\pi-8}{8-2\pi}.$$

Demostración. La prueba se sigue del Teorema 79 y usando la observación hecha al inicio de que $d_H(\pi, \rho) \leq b(\pi, \rho)$ para todas, $\pi, \rho \in NC(n)$. □

Para la cota inferior se probará el siguiente resultado.

Teorema 81. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que,*

$$\frac{1}{\text{Cat}_n^2} \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} d_H(\pi, \rho) \geq \frac{n-1}{2}.$$

Demostración. Para la prueba comencemos fijando $\rho \in NC(n)$, usando la desigualdad triangular y el Teorema 63 se tiene que para $\pi \in NC(n)$,

$$d_H(\pi, \rho) + d_H(Kr(\pi), \rho) \geq d_H(\pi, Kr(\pi)) = n-1.$$

Sumando sobre todas las particiones $\pi \in NC(n)$ esto nos dice que,

$$\sum_{\pi \in NC(n)} d_H(\pi, \rho) + \sum_{\pi \in NC(n)} d_H(Kr(\pi), \rho) \geq Cat_n(n-1).$$

Del hecho de que el complemento de Kreweras, Kr , es de hecho una biyección entonces ambas sumas son de hecho la misma, de donde,

$$\sum_{\pi \in NC(n)} d_H(\pi, \rho) \geq Cat_n \frac{n-1}{2}.$$

Sumando sobre todas la ρ se llega al resultado. \square

Esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 82. *Sea \tilde{d}_n definida como antes, entonces se cumple que,*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{d}_n}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Demostración. La prueba se sigue del teorema anterior. \square

Podemos finalmente enunciar el teorema central de esta sección.

Teorema 83. *Se define la cantidad promedio de componentes de los sistemas meándricos, como,*

$$\tilde{M}_n = \frac{1}{Cat_n^2} \sum_{\pi, \rho \in NC(n)} \#M(\pi, \rho).$$

Entonces se cumplen los siguientes.

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{M}_n}{n} \leq \frac{1}{2}.$
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{M}_n}{n} \geq \frac{16-5\pi}{8-2\pi} \approx 0,17.$

Demostración. Para la prueba basta usar que para $\pi, \rho \in NC(n)$ se tiene que $\#M(\pi, \rho) = n - d_H(\pi, \rho)$, luego,

$$\tilde{M}_n = n - \tilde{d}_n.$$

De donde $\frac{\tilde{M}_n}{n} = 1 - \frac{\tilde{d}_n}{n}$, aplicando los respectivos límites y usando los Teoremas (82) y (80) se tiene lo deseado. \square

4.5. Sistemas meándricos con tapa superior e inferior vía la convolución aditiva booleana

Recordemos que en la sección 4.2 resolvimos el problema del número promedio de componentes de los sistemas meándricos con tapa superior e inferior a través de herramientas puramente combinatorias y ayudándonos de los resultados relacionados con gráficas desarrollados por Alexandru Nica y Doron Puder e I.P. Goulden en [6]. Antes de cerrar el capítulo sería bueno abordar este mismo problema pero usando las mismas herramientas de probabilidad libre, para ver si esto es consistente con lo que obtuvimos antes. La diferencia crucial es que en este caso ambas particiones están en $Int(n)$, por lo que encontrar relaciones del estilo momentos-cumulantes libres será complicado. Sin embargo podemos hacer esto usando los cumulantes booleanos pues recordemos que en ese caso la relación es a través de las particiones en intervalos. Lo que veremos en esta sección es que podemos plantear este problema exactamente igual que como se plantea en [6] únicamente sustituyendo la convolución aditiva libre por la convolución aditiva booleana. Vamos a proceder entonces exactamente igual que antes, para esto definimos la siguiente serie de potencias,

$$\phi^{(4)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\pi, \rho \in Int(n)} t^{|\pi \vee \rho|}.$$

El objetivo es probar que esta es la M -transformada de alguna medida $\mu_t = \mu^{\uplus t}$ la cual es la convolución aditiva booleana t -veces de una medida μ consigo misma, para esto siguiendo las mismas ideas que antes podemos ver que,

$$\sum_{\pi, \rho \in Int(n)} t^{|\pi, \vee \rho|} = \sum_{\theta \in Int(n)} \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(\theta_i) \\ \sigma \vee \tau = 1_{\theta_i}}} 1 \right).$$

La diferencia fundamental en este caso es que los bloques de $\pi \vee \rho$ son bloques de una partición en intervalos, por lo que la suma que antes teníamos sobre $NC(n)$ ahora debe ser sobre $Int(n)$. Esta es la razón por la que sustituimos la convolución libre con la booleana. Nuevamente usando que $NC(\theta_i) \cong NC(|\theta_i|)$ lo anterior nos dice que,

$$\phi^{(4)}(z, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\theta \in Int(n)} \prod_{\theta_i \in \theta} \left(t \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(|\theta_i|) \\ \sigma \vee \tau = 1_{|\theta_i|}}} 1 \right).$$

Esto último es la relación momentos-cumulantes booleanos, en otras palabras si μ es tal que sus cumulantes booleanos son,

$$b_m = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in NC(m) \\ \sigma \vee \tau = 1_m}} 1 = |\{\sigma, \tau \in NC(m) : \sigma \vee \tau = 1_m\}|,$$

para $m \in \mathbb{N}$, entonces lo que se tiene es que $\phi^{(4)}(z, t)$ es la M -transformada asociada a la medida $\mu_t = \mu^{\uplus t}$. Dicho esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 84. *Sea $\phi^{(4)}(z, t)$ como antes, entonces se cumple que,*

$$\phi_2^{(4)}(z, 1) = \phi^{(4)}(z, 1)^2 \left(1 - \frac{1}{\phi^{(4)}(z, 1)}\right).$$

Demostración. Para la prueba vamos a hacer uso de la relación que guarda la M -transformada y la B -transformada definida como en el Capítulo 1. La relación (1.2.4) nos dice que si tenemos una variable a con M -transformada y B -transformada, M_a y B_a respectivamente entonces,

$$M_a(z) = \frac{1}{1 - B_a(z)}.$$

Por supuesto como la B -transformada se define a través de los cumulantes booleanos entonces esta, al igual que en el caso libre, satisface,

$$B_{\mu^{\uplus t}} = tB_\mu.$$

Usando esto y la relación (1.2.4) tenemos que,

$$M_{\mu^{\uplus t}} = \frac{1}{1 - tB_\mu}.$$

Pero ya vimos antes que $\phi^{(4)}(z, t)$ es la M -transformada asociada a la medida $\mu^{\uplus t}$ donde μ es tal que sus cumulantes booleanos son,

$$b_m = |\{\sigma, \tau \in NC(m) : \sigma \vee \tau = 1_m\}| = b_m(\mu).$$

Si denotamos entonces por $B(z) = \sum_{n \geq 1} b_n(\mu) z^n$ tendremos que,

$$\phi^{(4)}(z, t) = \frac{1}{1 - tB(z)}.$$

Derivando con respecto a t y evaluando en $t = 1$ se tiene,

$$\phi_2^{(4)}(z, 1) = \left(\frac{1}{1 - B(z)}\right)^2 B(z) = \phi^{(4)}(z, 1)^2 \left(1 - \frac{1}{\phi^{(4)}(z, 1)}\right).$$

□

Nuevamente estamos en condiciones de probar el teorema asintótico para la distancia promedio d_H .

Teorema 85. *Se define la distancia promedio para sistemas meándricos con tapa superior e inferior como,*

$$\hat{d}_n = \frac{1}{2^{n-1}2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n)} b(\pi, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{d}_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. En efecto, para $n \geq 1$ se tiene,

$$\begin{aligned} \hat{d}_n &= \frac{1}{2^{n-1}2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n)} b(\pi, \rho) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}2^{n-1}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n)} [|\pi| + |\rho| - 2|\pi \vee \rho|]. \end{aligned}$$

Del Teorema 8 tenemos que,

$$\hat{d}_n = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{2}{2^{2n-2}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n)} |\pi \vee \rho|.$$

Notemos que $\phi_2^{(4)}(z, 1) = \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n)} |\pi \vee \rho|$, así se tiene que,

$$\hat{d}_n = n + 1 - \frac{2}{2^{2n-2}} [\phi_2^{(4)}(z, 1)]_n.$$

Donde al igual que antes, $[\phi_2^{(4)}(z, 1)]_n$ denota el coeficiente asociado a z^n en la expansión en serie de potencias en z . Por otro lado del Teorema 84 se tiene que; $[\phi_2^{(4)}(z, 1)]_n = [\phi^{(4)}(z, 1)^2 (1 - \frac{1}{\phi^{(4)}(z, 1)})]_n$, además notemos que,

$$\phi^{(4)}(z, 1) = \sum_{n \geq 1} z^n 2^{2n-2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n = \frac{z}{1 - 4z},$$

para $|z| < \frac{1}{4}$. De esto se tiene que,

$$\phi^{(4)}(z, 1)^2 \left(1 - \frac{1}{\phi^{(4)}(z, 1)}\right) = \frac{z(5z-1)}{(1-4z)^2} = \frac{z}{1-4z} \left(5 \frac{z}{1-4z} - \frac{1}{1-4z}\right).$$

Desarrollando lo anterior en serie de potencias nos da que,

$$\begin{aligned} \phi^{(4)}(z, 1)^2 \left(1 - \frac{1}{\phi^{(4)}(z, 1)}\right) &= \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n \left(\frac{5}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n - \sum_{n \geq 0} (4z)^n \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n \left(\frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (4z)^k (4z)^{n-k} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n \\ &= \frac{1}{16} \sum_{n \geq 1} (4z)^n n - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} (4z)^n. \end{aligned}$$

De esto último es claro que,

$$[\phi^{(4)}(z, 1)]_n = [\phi^{(4)}(z, 1)^2 \left(1 - \frac{1}{\phi^{(4)}(z, 1)}\right)]_n = \frac{1}{16} n 4^n - \frac{1}{4} 4^n.$$

Usando esto tenemos que,

$$\begin{aligned} \hat{d}_n &= n + 1 - \frac{2}{2^{2n-2}} \left[\frac{1}{16} n 4^n - \frac{1}{4} 4^n \right] \\ &= n + 1 - \frac{2}{2^{-2}} \left[\frac{n}{16} - \frac{1}{4} \right] \\ &= n + 1 - \frac{n}{2} + 2 \\ &= \frac{n}{2} + 3. \end{aligned}$$

Dividiendo entre n y aplicando límite llegamos al resultado deseado. \square

Al igual que antes podemos usar el resultado anterior para obtener un resultado análogo para el número promedio de componentes de los sistemas meándricos con tapa superior e inferior.

Teorema 86. *Se define la cantidad promedio de componentes de los sistemas meándricos con tapa superior e inferior como,*

$$\hat{M}_n = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\pi, \rho \in \text{Int}(n)} \#M(\pi, \rho).$$

Entonces se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{M}_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Nuevamente la prueba se basa en el hecho de que $b(\pi, \rho) = d_H(\pi, \rho) = n - \#M(\pi, \rho)$ de donde,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{M}_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\hat{d}_n}{n}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Lo cual es consistente con lo que habíamos obtenido en la sección 4.2.

4.6. Comentarios y conclusiones

A manera de comentario general cabe rescatar que la relación entre Probabilidad No Conmutativa y sistemas meándricos es bastante estrecha, sobre todo cuando se trata de problemas de conteo. Las conclusiones a las que llegamos es que se tienen teoremas límites para el número promedio de componentes de los sistemas meándricos para muchos casos, para el caso general es distinto pues unicamente se cuentan con cotas, sin embargo, como se menciona en [6] se especula debido a simulaciones que dicho límite existe y es aproximadamente 0,23. Como comentarios al respecto se realizaron programas en C^{++} para darnos una idea de a donde convergen dichos límites, se hicieron tanto programas para el caso en que ambas particiones están en las particiones a intervalos como para cuando ambas están en las que no se cruzan, debido al costo computacional y el orden del programa (probablemente bastante elevado) no se pudo tener una idea clara pues solo se pudo correr para tamaños de n bastante pequeños (aproximadamente de $n = 16$). Otras de las dudas que se discutieron con el asesor es el hecho de poder extender estas ideas al caso de particiones monotanas, esto queda como un pregunta abierta si es que tiene sentido por supuesto. Se comentó además la posibilidad de extender estos resultados al caso cuando la partición superior tiene a lo más una concatenación, es decir todas aquellas particiones tales que sus bloques 'abracen' a lo más a particiones a intervalos, los intervalos son de hecho las particiones con concatenaciones de grado siempre cero. Para esto

la idea original fue usar el resultado de particiones que ya tenemos y tratar de encontrar alguna recurrencia, sin embargo, ya no se desarrolló a más esta idea.

Bibliografía

- [1] P. Di Francesco, O. Golinelli, E. Guitter. Meanders: A Direct Enumeration Approach , (1996), arXiv:hep-th/9607039.
- [2] Philippe Flajolet, Robert Sedgewick. Analytic combinatorics, Cambridge University press, 2009.
- [3] H. Tracy Hall, Meanders in a Cayley graph, (2006), arXiv:math/0606170.
- [4] S.K. Lando, A.K. Zvonkin. Meanders, *Selecta Mathematica Sovietica* 11 (1992), 117- 144.
- [5] Alexandru Nica, Free probability aspect of irreducible meandric systems, and some related observations about meanders, (2015), arXiv:1506.0134.
- [6] Alexandru Nica, Doron Puder, I.P Goulden. Asymptotics for a Class of Meandric Systems, via the Hasse Diagram of $NC(n)$, (2017), arXiv:1708.05188.
- [7] Nica A; Speicher R. Lectures on the combinatorics of free probability. London Mathematical Society Lecture Note Series 335, *Cambridge University Press, Cambridge*, (2006).