



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C

**CIRUGÍA CUASICONFORME SOBRE UNA FAMILIA
DE PRODUCTOS BLASCHKE.**

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Con especialidad en

Matemáticas Básicas

Presenta

Jorge Javier Romero Manosalvas

Realizado con la asesoría de:

Dra. Mónica Moreno Rocha

Guanajuato Capital, 2018

Resumen

La teoría de funciones cuasiconformes ha resultado fundamental para el estudio de los sistemas dinámicos holomorfos. La cirugía cuasiconforme permite construir modelos con ciertas propiedades dinámicas que interesa estudiar en funciones holomorfas. El objetivo de este trabajo es aplicar la cirugía cuasiconforme (específicamente, la cirugía de Ghys) a anillos de Herman de una familia de productos Blaschke para generar discos de Siegel para una familia polinomial con el mismo número de rotación.

Palabras clave: dinámica compleja, cirugía cuasiconforme, disco de Siegel, anillo de Herman.

*El conocimiento de la posibilidad de representación
nos consuela del esclavismo de la vida. El conocimiento de la vida
nos consuela del hecho de que la representación
no es más que sombra.*

– Jean-Luc Godard

Agradecimientos

A mis padres y a mi hermana, sin más que decir por temor a no decirlo todo.

A la Dra. Mónica Moreno Rocha, por su dedicación y compromiso con mi desarrollo como estudiante a lo largo de este último año. Por transmitirme mucho de su calidad humana. En especial, por su constante disposición a escuchar.

Al Dr. Adrián Esparza Amador, por sus finas observaciones y sus valiosos comentarios acerca del trabajo, que me permitieron mejorarlo y plantearme nuevas rutas de estudio para el futuro.

A Loló Morán, por invitarme a conocer las matemáticas, siempre.

A mis mejores amigos, Maria Waleska, Francisco y David, por siempre hacerme ver en lo etéreo las luces. Y a mis nuevos amigos, Sebastián, Sonny, Fernanda, y Citlali, por hacerme sentir en casa.

A CIMAT, por permitirme ser parte de la institución y por el apoyo que siempre estuvieron dispuestos a dar de la mejor manera.

A CONACYT, por el apoyo económico brindado durante los dos años de estudio del programa de maestría.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1. Preliminares | 3 |
| 1.1. Superficies de Riemann y automorfismos de la esfera de Riemann | 3 |
| 1.2. Métrica de Poincaré y automorfismos del disco unitario complejo | 4 |
| 1.3. Preliminares de análisis complejo | 8 |
| 1.4. Dinámica holomorfa en la esfera de Riemann | 9 |
| 1.4.1. Definiciones básicas | 9 |
| 1.4.2. Componentes de Fatou | 13 |
| 1.4.3. Dominios de rotación | 14 |
| 1.5. Familias polinomiales y productos de Blaschke | 21 |
| 1.5.1. Familia polinomial | 21 |
| 1.5.2. Productos de Blaschke | 22 |
| 2. Funciones cuasiconformes | 27 |
| 2.1. Coeficientes de Beltrami y estructuras casi complejas | 27 |
| 2.2. Funciones cuasiconformes | 34 |
| 2.2.1. Una definición analítica | 34 |
| 2.2.2. Una definición geométrica | 35 |
| 2.2.3. Propiedades de funciones cuasiconformes | 36 |
| 2.3. Teorema de integrabilidad | 39 |
| 2.4. Funciones cuasisimétricas | 39 |
| 2.5. Modelos dinámicos | 41 |
| 2.5.1. Funciones cuasiregulares | 41 |

| | |
|---|-----------|
| 2.5.2. Lema fundamental para cirugía | 42 |
| 3. Generando discos de Siegel a partir de anillos de Herman | 44 |
| 3.1. Procedimiento de cirugía cuasiconforme sobre una familia Blaschke | 45 |
| 3.2. Propiedades de la familia polinomial resultante | 47 |
| 3.3. La función de radio conforme | 49 |
| 3.4. Conclusiones | 54 |
| Referencias | 55 |

Introducción

La teoría de iteración de funciones de una variable compleja tiene su origen a inicios del siglo XX gracias a los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia. Algunas conjeturas y la dificultad para visualizar geoméricamente lo que se conoce como conjuntos de Julia y Fatou mantuvieron esta área de las matemáticas en un bajo perfil durante mucho tiempo. En la década de los 80, las computadoras permitieron que se retomara el estudio de los sistemas dinámicos complejos. Sin embargo, para entonces ya se había desarrollado de una manera profunda, en parte por Lars Ahlfors y Lipman Bers, la teoría de funciones cuasiconformes, inspirada en un problema de Herbert Grötzsch.

El problema de Grötzsch planteaba lo siguiente: dos rectángulos en el plano no pueden ser conformemente equivalentes como conjuntos cerrados a menos que sean congruentes. ¿Qué tanto se puede debilitar la condición de conformalidad para una función que mande un rectángulo en otro y vértices en vértices? De aquí surge la noción de función cuasiconforme. Son funciones que distorsionan estructuras, pero de manera acotada. Éstas funciones ya no son \mathbb{R} -diferenciables siempre, pero sí en casi todo punto.

Con la demostración de Dennis Sullivan del Teorema de Componentes No Errantes en 1981, se dio el punto de encuentro entre la teoría de funciones cuasiconformes y la iteración de funciones holomorfas. Así, se desarrolló lo que se conoce hoy como cirugía cuasiconforme, que consiste de un conjunto de técnicas utilizadas para obtener funciones holomorfas con ciertas propiedades dinámicas prescritas que surgen de modelos dinámicos construidos a partir de funciones cuasiregulares, es decir, localmente cua-

siconformes. Una de las ventajas que ofrecen las funciones cuasiconformes con respecto a las holomorfas es su menor grado de rigidez, en cuanto a que el pegado de dos funciones cuasiconformes es nuevamente cuasiconforme, por lo que se pueden manipular con más flexibilidad para construir los modelos dinámicos ya mencionados.

El objetivo del presente trabajo es realizar un estudio detallado de un tipo de procedimiento de cirugía de corte y pegado, desarrollado por Étienne Ghys y expuesto en [BF14], aplicándolo directamente a una familia paramétrica de productos Blaschke. Este tipo de cirugía consiste en realizar un pegado topológico de un disco de Siegel a lo largo de una curva invariante por un producto de Blaschke contenida en un anillo de Herman, siempre que éste exista. Vale resaltar que ésta es una manera de generar funciones que poseen un disco de Siegel con el mismo número de rotación de la función a la que se realizó la cirugía.

En un artículo de 2005 ([Chu06]), Haifeng Chu utiliza este tipo de cirugía para dar una demostración constructiva de un resultado de Jean-Christophe Yoccoz, en el que se dan condiciones para la existencia de anillos de Herman asociados a la dinámica de una familia biparamétrica de productos Blaschke. El objetivo de este trabajo es proporcionar una presentación sistemática de la teoría de cirugía cuasiconforme aplicada a la dinámica de funciones racionales, en particular, a la familia estudiada por H. Chu en [Chu06] y [Chu18].

Relativo a la estructura de este trabajo, presentamos en el Capítulo 1 las definiciones y resultados básicos de la dinámica holomorfa en la esfera de Riemann. En el Capítulo 2 introducimos la teoría básica de funciones cuasiconformes, y herramientas necesarias para estudiar procedimientos de cirugía cuasiconforme, como el Teorema de Integrabilidad de Ahlfors y Bers, y el Lema Fundamental para Cirugía. En el Capítulo 3 exponemos el procedimiento de cirugía de Ghys realizado a una familia de productos Blaschke, para finalmente estudiar algunas propiedades de la familia polinomial resultante de la cirugía.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Superficies de Riemann y automorfismos de la esfera de Riemann.

Definimos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como *la esfera de Riemann*. Las vecindades de un punto en \mathbb{C} son las usuales y las del punto en el infinito son complementos compactos de vecindades en \mathbb{C} .

Una *superficie de Riemann* S es una variedad \mathbb{C} -analítica de dimensión compleja 1. En cada vecindad U de un punto en S podemos escoger una carta coordenada que envía U de manera homeomorfa a un conjunto abierto del plano complejo con la siguiente propiedad: en la intersección de dos vecindades, cada una de estas cartas puede expresarse como una función holomorfa de la otra.

Dos superficies S y S' son conformemente isomorfas si y sólo si existe un homeomorfismo f de S a S' holomorfo en términos de las cartas coordenadas. Si $S = S'$, el isomorfismo f es un automorfismo conforme de S .

Teorema 1.1.1. (Teorema de Uniformización) *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente isomorfa a una de las siguientes tres:*

- (a) *El plano complejo \mathbb{C} .*

- (b) El disco unitario abierto $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.
- (c) La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, con $\zeta = \frac{1}{z}$ como carta coordinada en el punto en el infinito.

La demostración puede verse en [Ahl73].

Nos interesará, en particular, estudiar la esfera de Riemann, sus automorfismos y, posteriormente, la dinámica de funciones holomorfas sobre ella.

Lema 1.1.2. *El grupo $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ de todos los automorfismos de la esfera de Riemann consiste de todas las transformaciones de Möbius de la forma*

$$\mathbb{M} = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

Este grupo, con la operación de composición, es isomorfo al $PSL(2, \mathbb{C})$ con la multiplicación de matrices.

Demostración. Toda transformación de Möbius es composición de rotaciones, traslaciones, homotecias e inversiones. Como éstas son automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$, entonces toda transformación de Möbius es un automorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$.

Para ver que $Aut(\hat{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{M}$, podemos uniformizar $g \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ para obtener $g(0) = 0$ y $g(\infty) = \infty$. De esta manera, $g(z)/z$ es una función holomorfa y acotada de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en sí mismo. Haciendo $\zeta = 1/z$ y $G(\zeta) = 1/g(1/\zeta)$ obtenemos que $g(z)/z = \zeta/G(\zeta)$ tiende a $1/G'(0) \neq 0$ cuando $z \rightarrow \infty$, pues $g(z)/z \rightarrow g'(0) \neq 0$ cuando $z \rightarrow 0$. Luego, haciendo $z = e^w$ obtenemos que la composición $w \mapsto g(e^w)/e^w$ es una función holomorfa y acotada en \mathbb{C} . Por el Teorema de Liouville, esta función es constante con valor c . Entonces $g(z) = cz$ es lineal y por lo tanto, $g \in \mathbb{M}$. \square

1.2. Métrica de Poincaré y automorfismos del disco unitario complejo

Todo conjunto $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ cuyo complemento sean al menos 3 puntos se llama *conjunto hiperbólico*. Éstos conjuntos son conformemente equivalentes a

\mathbb{D} , y podemos usar este isomorfismo conforme para dotar a estos dominios hiperbólicos con una métrica.

Definición 1.2.1. Una métrica conforme en U es una métrica que puede escribirse como

$$ds = \gamma(z)|dz|$$

donde $\gamma(z)$ es una función suave y positiva en U .

Tales métricas son invariantes por automorfismos conformes $w = f(z)$ de U si y sólo si

$$\gamma(w)|dw| = \gamma(z)|dz|$$

o equivalentemente,

$$\gamma(f(z)) = \gamma(z)/|f'(z)|.$$

Por otra parte, toda función $f : U \rightarrow U$ holomorfa e inyectiva (esto es, univalente) que satisface esta condición es una *isometría* con respecto a la métrica conforme.

Un resultado que tiene gran importancia en el estudio geométrico de las funciones complejas es el conocido Lema de Schwarz.

Lema 1.2.2. *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ en \mathbb{D} . Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$. La igualdad se da si y sólo si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.*

Otro resultado que tiene relación con el Lema de Schwarz, y que será valioso más adelante, es el Teorema de 1/4 de Koebe.

Teorema 1.2.3. *La imagen de una función univalente $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ contiene al disco de centro $f(0)$ y radio $\frac{|f'(0)|}{4}$.*

Lema 1.2.4. *El grupo $\text{Aut}(\mathbb{D}) \subset \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ de todos los automorfismos de \mathbb{D} consiste de todas las funciones de la forma*

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

con $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Supongamos que g es un automorfismo de \mathbb{D} y que $a \in \mathbb{D}$ es el único valor tal que $g(a) = 0$. Podemos considerar entonces $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ y tenemos $f(a) = 0$. Consideramos $g \circ f^{-1}$, el cual es un automorfismo de \mathbb{D} por ser composición de automorfismos y además $g \circ f^{-1}(0) = 0$. Por el Lema de Schwarz, $g \circ f^{-1}(z) = e^{i\theta}z$. Entonces $g(z) = e^{i\theta}f(z)$

Por otra parte, si $g(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, con $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, tenemos

$$\begin{aligned} |g(z)| < 1 &\iff |g(z)|^2 < 1 \iff |z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2 \\ &\iff (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) < (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) \\ &\iff (1-z\bar{z})(1-a\bar{a}) > 0 \end{aligned}$$

Como $a \in \mathbb{D}$, se sigue que

$$0 < (1-z\bar{z})(1-a\bar{a}) \iff (1-z\bar{z}) > 0 \iff |z| < 1.$$

Por lo tanto, g manda a \mathbb{D} en sí mismo. □

Existe una equivalencia conforme entre el plano superior complejo \mathbb{H} y \mathbb{D} a través de la aplicación conforme

$$h(z) = \frac{i-z}{i+z}$$

con inversa

$$h^{-1}(w) = \frac{i(1+w)}{1-w}.$$

En ocasiones, será conveniente trabajar sobre \mathbb{H} .

Corolario 1.2.5. *El grupo $Aut(\mathbb{H})$ de todos los automorfismos conformes de \mathbb{H} consiste de todas las transformaciones de Möbius de la forma*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

Lema 1.2.6. *Salvo multiplicación por una constante positiva, existe sólo una métrica conforme en \mathbb{D} que es invariante bajo todo automorfismo conforme de \mathbb{D} .*

Demostración. Sea $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Para $w_1 \in \mathbb{H}$ arbitrario podemos expresar g como la composición de un automorfismo lineal $g_1(w) = aw + b$ tal que $g_1(w_1) = w_2$ y un automorfismo g_2 que fije w_2 . Supongamos entonces que una métrica conforme $\gamma(w)|dw|$ en \mathbb{H} es invariante bajo todo automorfismo lineal $f(w) = aw + b$, con $a > 0$. Como $f(i) = ai + b$, tenemos

$$\gamma(ai + b) = \gamma(f(z)) = \frac{\gamma(z)}{|f'(z)|} = \frac{\gamma(i)}{a}.$$

Podemos asumir, normalizando la métrica, que $\gamma(i) = 1$, y por lo tanto obtenemos, si $w = ui + v \in \mathbb{H}$, que

$$\gamma(ui + v) = \frac{1}{v}$$

esto es,

$$ds = \frac{|dw|}{v}$$

Haciendo $f = g_1$, se ha construido la métrica de manera que g_1 es una isometría. Como $\text{Aut}(\mathbb{D}) \simeq \text{Aut}(\mathbb{H})$ y $g_2 \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, obtenemos, por el Lema de Schwarz, que $|g_2'(w_2)| = 1$. Por lo tanto, g_2 es una isometría en w_2 . De aquí, la métrica es invariante en un punto arbitrario de \mathbb{H} bajo cualquier $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, y es única salvo por multiplicación por constantes, por la forma en que se construyó.

Notemos que $\gamma(ui + v) = \frac{1}{v}$ es una función diferenciable en \mathbb{H} , y $v = \text{Im}(w) > 0$. Por lo tanto, la métrica es conforme. □

Definición 1.2.7. Se define la métrica de Poincaré en \mathbb{H} como

$$ds = \frac{|dw|}{v}$$

Considerando $h^{-1}(w) = \frac{i(1+w)}{1-w}$ para $w \in \mathbb{D}$, podemos encontrar la expresión correspondiente de la métrica de Poincaré en \mathbb{D} .

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= \gamma(h^{-1}(w)) |(h^{-1})'(w)| = \frac{1}{\operatorname{Im}(h^{-1}(w))} \left| \frac{2i}{(1+w)^2} \right| \\ &= \frac{|1-w|^2}{(1-|w|^2)} \frac{2}{|1-w|^2} = \frac{2}{1-|w|^2} \end{aligned}$$

Definición 1.2.8. Se define la métrica de Poincaré en \mathbb{D} como

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

1.3. Preliminares de análisis complejo

Empezamos esta sección con dos teoremas clásicos del análisis complejo. Éstos pueden consultarse en [Con95], [SS03].

Teorema 1.3.1. (Weierstrass) *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y supongamos que $f_k \rightarrow f$ uniformemente en compactos de Ω , donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en Ω y $f'_k \rightarrow f'$ uniformemente en compactos de Ω .*

Teorema 1.3.2. (Hurwitz) *Sean $\{f_k\}$, f y Ω como en el Teorema de Weierstrass. Si $a \in \mathbb{C}$, y $f_k(z) \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \Omega$, entonces $f(z) \neq a$ o $f \equiv a$.*

En particular estaremos interesados en el siguiente corolario.

Corolario 1.3.3. *Supongamos que f_k es univalente para todo $k \in \mathbb{N}$. Con las hipótesis del Teorema de Weierstrass, f es univalente o constante.*

Dadas dos superficies de Riemann S y T , denotamos por $\operatorname{Hol}(S, T)$ al conjunto de todas las funciones $f : S \rightarrow T$ holomorfas.

Definición 1.3.4. Sea \mathcal{F} una colección de funciones holomorfas de una superficie de Riemann S a una superficie de Riemann compacta T . \mathcal{F} se dice *normal* si su cerradura $\bar{\mathcal{F}} \subset \operatorname{Hol}(S, T)$ es compacta, es decir, si toda sucesión de funciones $f_n \in \mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente de manera local a una función límite $g : S \rightarrow T$.

Teorema 1.3.5. *Si S y T son superficies de Riemann hiperbólicas, entonces toda familia \mathcal{F} de funciones holomorfas de S a T es normal.*

La demostración puede consultarse en [Mil06]. De aquí surge uno de los teoremas más importantes en el estudio básico de sistemas dinámicos complejos.

Teorema 1.3.6. (Montel) *Sea S una superficie de Riemann y sea \mathcal{F} una colección de funciones holomorfas $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $f(S) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ para toda $f \in \mathcal{F}$, con $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos. Entonces, \mathcal{F} es una familia normal.*

La demostración de este resultado fue publicada en 1927 en [Mon27], y las consideraciones previas de Paul Montel sobre familias normales fueron clave para el trabajo de Gaston Julia y Pierre Fatou sobre dinámica compleja.

1.4. Dinámica holomorfa en la esfera de Riemann

1.4.1. Definiciones básicas

En lo sucesivo consideraremos, a menos que se indique lo contrario, $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d \geq 2$ y $(\hat{\mathbb{C}}, f)$ el sistema dinámico generado por la iteración de f . Recordemos que f es holomorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ sí y sólo si es racional. Gran parte de esta sección se basa en la teoría desarrollada en [Mil06].

Definición 1.4.1. Dado $z \in \hat{\mathbb{C}}$, se define su órbita positiva, negativa y completa, respectivamente, como

$$\mathcal{O}^+(z) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(z)$$

$$\mathcal{O}^-(z) = \bigcup_{n > 0} f^{-n}(z)$$

$$\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}^+(z) \cup \mathcal{O}^-(z).$$

Definición 1.4.2. Definimos el conjunto de Fatou de f como

$\mathcal{F}(f) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \{f^n\}_{n \geq 0} \text{ es una familia normal en alguna vecindad de } z\}$
y el conjunto de Julia de f como $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$.

Podemos pensar $\mathcal{F}(f)$ como el conjunto de puntos estables en el sentido de normalidad, y $\mathcal{J}(f)$ como el conjunto de puntos inestables. Por definición, $\mathcal{F}(f)$ es abierto y $\mathcal{J}(f)$ es cerrado. Un hecho importante es que ambos conjuntos se preservan bajo conjugación topológica. Esto es, si h es un homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$, para f, g holomorfas, entonces

$$\mathcal{J}(g) = h(\mathcal{J}(f))$$

$$\mathcal{F}(g) = h(\mathcal{F}(f))$$

Teorema 1.4.3. (Propiedades de $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$)

1. $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante por f , es decir, $f^k(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$ para todo entero $n > 0$.
3. $\mathcal{J}(f)$ tiene interior vacío o es todo $\hat{\mathbb{C}}$.
4. $\mathcal{F}(f)$ posee una, dos, ninguna o una cantidad infinita numerable de componentes.

Si $\deg(f) \geq 2$:

5. $\mathcal{J}(f)$ es no-vacío.
6. $\mathcal{J}(f)$ es perfecto.
7. $\mathcal{J}(f)$ es conexo o bien tiene una cantidad no numerable de componentes.

Definición 1.4.4. (Clasificación de puntos periódicos). Sea $\zeta = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ un ciclo periódico. Esto es, $f^p(z_i) = z_i$ para algún $p > 0$ mínimo. Definimos el multiplicador del ciclo como

$$\lambda(\zeta) = (f^p)'(z_i) = f'(z_0) \cdot f'(z_1) \cdot \dots \cdot f'(z_{p-1})$$

- ζ es superatractor si $\lambda(\zeta) = 0$, i.e, $f'(z_i) = 0$ para algún i .
- ζ es geoméricamente atractor si $0 < |\lambda(\zeta)| < 1$.
- ζ es repulsor si $|\lambda(\zeta)| > 1$.
- ζ es indiferente si $|\lambda(\zeta)| = 1$.

El último caso se divide a su vez en los dos siguientes:

- ζ es parabólico si $\lambda(\zeta) = e^{2\pi i \frac{a}{b}}$ con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
- ζ es irracionalmente indiferente si $\lambda(\zeta) = e^{2\pi i \theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En particular, todo punto periódico de período p es un punto fijo para f^p , por lo que, sin pérdida de generalidad, nos concentraremos en estudiar los puntos fijos de f .

Definimos, para un punto fijo z_0 (súper) atractor, i.e, con $\lambda(z_0) \in \mathbb{D}$, la *cuenca de atracción de z_0* como

$$\mathcal{A}(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0\}$$

La *cuenca de atracción inmediata* $\mathcal{A}^*(z_0) \subset \mathcal{A}(z_0)$ es la componente conexa que contiene a z_0 .

Al momento de considerar un punto fijo z_0 de una función racional, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $z_0 = 0$, pues podemos componer con una función conforme tal que $z_0 \mapsto 0$. Las propiedades dinámicas de una función se preservan bajo conjugación conforme.

La naturaleza de los ciclos periódicos y puntos fijos nos permite obtener información valiosa sobre los conjuntos de Julia y Fatou de f .

Teorema 1.4.5. *Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ racional de grado $d \geq 2$.*

1. *Todo ciclo atractor y su cuenca de atracción pertenecen a $\mathcal{F}(f)$.*
2. *Si \mathcal{A} es la cuenca de atracción de un punto fijo atractor, entonces $\mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{A}$.*

3. Todo ciclo parabólico o repulsor pertenece a $\mathcal{J}(f)$. De hecho, $\mathcal{J}(f)$ contiene un punto fijo repulsor o parabólico con multiplicador 1.
4. Los puntos periódicos repulsores son densos en $\mathcal{J}(f)$.
5. Los iterados inversos de cualquier punto fijo de $\mathcal{J}(f)$ son densos en $\mathcal{J}(f)$.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante con un punto fijo en z_0 con multiplicador λ . Podemos escribir

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + a_p(z - z_0)^p + \dots$$

con $p \geq 2$. Decimos que f es conformemente conjugada a g si existe una función conforme φ , que llamamos un *cambio de coordenadas*, que satisface $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

Nos interesa saber cuándo existe tal cambio de coordenadas localmente cerca de z_0 . En particular, queremos saber bajo qué condiciones es f conjugada a la función $z \mapsto \lambda z$, es decir, cuándo es f linealizable. Esto es posible cuando z_0 es un punto atractor o repulsor, y para ciertos valores de λ cuando $|\lambda| = 1$. De este último caso hablaremos más adelante.

Teorema 1.4.6. (Linealización de Koenigs) *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto fijo con multiplicador $\lambda \neq 0$ y $|\lambda| \neq 1$. Entonces existe una función holomorfa φ definida de una vecindad de z_0 a una vecindad de 0 tal que $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \neq 0$ y que satisface*

$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z) \tag{1.1}$$

en una vecindad de z_0 . Bajo la normalización $\varphi'(z_0) = 1$, la función es única.

La idea de la demostración pasa por definir

$$\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$$

y mostrar que esta función, llamada *función de Koenigs*, satisface las condiciones del teorema. Además, existe una inversa local para φ ,

$$\psi_\epsilon : D(0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{A}^*(0).$$

En general, denotaremos por $D(z, r)$ al *disco euclidiano* en \mathbb{C} con centro en z y radio r .

Un resultado que se puede derivar del teorema de linealización de Koenigs se enuncia a continuación.

Lema 1.4.7. $\psi_\epsilon : D(0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{A}^*(0)$ se extiende por continuación analítica a un disco máximo $D(0, r)$ con $\epsilon \leq r < \infty$. Existe entonces una función holomorfa $\psi : D(0, r) \rightarrow \mathcal{A}^*(0)$ que satisface

$$f(\psi(z)) = \psi(\lambda z) \quad (1.2)$$

y $\varphi(\psi(w)) \equiv w$. Más aún, ψ se extiende como un homeomorfismo a $\partial D(0, r)$ y $\psi(\partial D(0, r)) \subset \mathcal{A}^*(0)$ contiene necesariamente un punto crítico de f .

A las ecuaciones (1.1) y (1.2) se les conoce como las *ecuaciones funcionales de Schröder*.

1.4.2. Componentes de Fatou

Ya hemos visto que el conjunto de Fatou de una función racional puede llegar a tener una cantidad infinita numerable de componentes conexas. Nos interesa estudiar entonces su estructura y la clasificación de estas componentes.

Definición 1.4.8. Una componente de Fatou \mathcal{U} de f es:

- p -periódica si $f^p(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ para un $p > 0$ mínimo.
- Estrictamente preperiódica si $f^k(\mathcal{U})$ es periódica para algún $k > 0$ pero \mathcal{U} no lo es.
- Errante si $f^k(\mathcal{U}) \cap f^m(\mathcal{U}) = \emptyset$ para todos $k, m \geq 0$ con $k \neq m$.

Teorema 1.4.9. Sea \mathcal{U} una componente de Fatou p -periódica de f . Entonces ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades:

- \mathcal{U} contiene un punto atractor p -periódico z_0 . $\mathcal{O}^+(\mathcal{U})$ es la cuenca inmediata de atracción del ciclo $\mathcal{O}^+(z_0)$.
- $\partial\mathcal{U}$ contiene un punto p -periódico z_0 que es parabólico y $\mathcal{O}^+(\mathcal{U})$ es la cuenca inmediata de atracción del ciclo parabólico $\mathcal{O}^+(z_0)$.

- \mathcal{U} es conformemente equivalente al disco unitario y $f^p|_{\mathcal{U}}$ es conjugada a una rotación irracional. $\mathcal{O}^+(\mathcal{U})$ se dice un p -ciclo de discos de Siegel.
- \mathcal{U} es conformemente equivalente a un anillo canónico $A_R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R\}$ con $1 < R < \infty$ y $f^p|_{\mathcal{U}}$ es conjugada a una rotación irracional. $\mathcal{O}^+(\mathcal{U})$ se dice un p -ciclo de anillos de Herman.

Referimos al texto de [CG93] para la demostración. Sin embargo, esta clasificación fue posible gracias a un resultado de gran importancia para la dinámica racional. Durante mucho tiempo estuvo abierta la pregunta de si existen componentes errantes para una función racional. El Teorema de Sullivan provee una respuesta.

Teorema 1.4.10. (Sullivan) *Si f es racional, no existen dominios errantes para f .*

La demostración involucra técnicas de aplicaciones cuasiconformes, tema que desarrollaremos más adelante. Ésta puede consultarse en [Sul85].

Corolario 1.4.11. *Todas las componentes de Fatou para una función racional son preperiódicas.*

1.4.3. Dominios de rotación

Definición 1.4.12. Sea f una función racional en $\hat{\mathbb{C}}$ con un punto fijo en $z_0 = 0$ con $\lambda = f'(0) = e^{2\pi i\theta}$ donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Decimos que f es linealizable alrededor de 0 si existe un cambio de coordenadas holomorfo φ que satisface la ecuación de Schröder

$$R_\theta \circ \varphi = \varphi \circ f$$

localmente alrededor de 0, con $R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} z$.

Notemos que también en este caso, como en el caso de componentes atractoras, la linealización es equivalente a que f sea conjugada a la función $z \rightarrow \lambda z$ cerca del origen.

Serán de nuestro interés los dominios máximos en los cuales la linealización es posible.

Definición 1.4.13. Sea f una función racional en $\hat{\mathbb{C}}$. \mathcal{S} es un disco de Siegel asociado a f si $\mathcal{S} \cong D(0, R)$ para algún $0 < R < \infty$ máximo y f es conformemente conjugada a una rotación irracional $R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z$ en $D(0, R)$.

\mathcal{H} es un anillo de Herman asociado a f si $\mathcal{H} \cong A_R$ con A_R un anillo canónico con R máximo y f es conformemente conjugada a una rotación irracional $R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z$ en A_R . Se define además el módulo conforme de \mathcal{H} como

$$\text{mod}(\mathcal{H}) = \text{mod}(A_R) = \pi^{-1} \log(R).$$

Notemos que para los anillos de Herman no existen puntos fijos o periódicos asociados. En este caso, la linealización de f viene dada por la existencia de un anillo de Herman.

Proposición 1.4.14. Sean f, g funciones holomorfas en $\hat{\mathbb{C}}$ conformemente equivalentes. Si f tiene un disco de Siegel centrado en 0 entonces g tiene un disco de Siegel centrado en $\phi(0)$, donde ϕ es la función que conjugua f y g .

Demostración. Supongamos que f tiene un disco de Siegel \mathcal{S} centrado en 0. Entonces existe un cambio de coordenadas local φ tal que

$$R_\theta \circ \varphi = \varphi \circ f.$$

Si $f = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$,

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ R_\theta \circ \varphi.$$

Así,

$$g = (\varphi \circ \phi)^{-1} \circ R_\theta \circ (\varphi \circ \phi).$$

Como ϕ es conforme, $\mathcal{J}(g) = \phi(\mathcal{J}(f))$, $\mathcal{F}(g) = \phi(\mathcal{F}(f))$, y $\varphi \circ \phi$ es un homeomorfismo y así, un cambio de coordenadas de linealización. Por lo tanto, g tiene un disco de Siegel centrado en $\phi(0)$. □

Tanto en la definición de disco de Siegel como en la de anillo de Herman, θ es el número de rotación de f . Definimos, para un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ que preserva orientación, su levantamiento $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

un homeomorfismo que satisface $F(t+1) = F(t) + 1$, y está determinado de forma única, salvo adición de una constante entera. Por otra parte,

$$\tau(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0)}{n} \in \mathbb{R}$$

es independiente de la elección de t_0 y se llama *número de traslación* de F . El *número de rotación* $\text{rot}(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ está definido por la clase de residuo de $\tau(F)$ (módulo \mathbb{Z}).

Una propiedad importante de los números de rotación es la siguiente, que puede consultarse en [KH97].

Proposición 1.4.15. *El número de rotación θ de una función f es invariante bajo conjugación por homeomorfismos.*

Existencia de discos de Siegel y anillos de Herman

Presentamos un repaso de las condiciones aritméticas sobre el ángulo asociado a un punto irracionalmente neutro para que exista linealización alrededor de éste. Para un estudio más profundo referimos los trabajos [Mil06], [Zak01], y [BC04].

Decimos que $\theta \in \mathbb{R}$ es *Diofantino de orden μ* si existe $c > 0$ y $\mu < \infty$ tal que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\mu} \quad \text{para todo } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0.$$

El conjunto de los números Diofantinos de orden ≥ 2 tiene medida completa en \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Teorema 1.4.16. (Siegel, 1942) *Sea θ un número Diofantino. Sea f una función racional en $\hat{\mathbb{C}}$ y z_0 un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \theta}$. Entonces f es linealizable alrededor de z_0 .*

Este resultado demuestra la existencia de funciones racionales a cuya dinámica están asociados discos de Siegel, pero también supuso un nuevo problema. ¿Qué tanto más grande puede ser el conjunto de números irracionales θ para los cuales una función racional con punto fijo de multiplicador $e^{2\pi i \theta}$ es localmente linealizable?

Consideremos θ irracional, y su expansión en fracciones continuadas

$$\theta = [a_1; a_2; a_3; \dots]$$

donde los a_i son enteros positivos y definidos de manera única de la siguiente manera: sea $A : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ dada por

$$A(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Hacemos, para $n \geq 1$,

$$\alpha_0 = \theta - [\theta], \quad \alpha_n = A^n(\alpha_0)$$

$$a_0 = [\theta], \quad \frac{1}{\alpha_{n-1}} = a_n - \alpha_n$$

Tenemos, así,

$$\theta = [a_1; a_2; \dots; a_n + \alpha_n]$$

Sea

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1; \dots; a_{n-1}]$$

en n -ésimo convergente de θ .

Definimos el *conjunto de Brjüno* como:

$$\mathcal{B} = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \sum_{n \geq 1} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty \right\}$$

y $\sum_{n \geq 1} \frac{\log q_{n+1}}{q_n}$ es la *suma de Brjüno*, donde $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \theta$ es la sucesión de convergentes dada por la expansión en fracciones continuadas de θ .

Teorema 1.4.17. (Brjüno, 1965) *Supongamos $\theta \in \mathcal{B}$. Sea f una función racional en $\hat{\mathbb{C}}$ y z_0 un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \theta}$. Entonces f es linealizable alrededor de z_0 .*

El conjunto de los números de Brjüno es el conjunto más grande de números irracionales tales que si θ está en este conjunto, entonces la función f es linealizable.

Teorema 1.4.18. (Yoccoz, 1988) Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\theta \notin \mathcal{B}$, existen funciones racionales f con un punto fijo z_0 de multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ que no son linealizables alrededor de z_0 .

Definición 1.4.19. Para $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se define la función de Brjüno como

$$B(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 \dots \alpha_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n}$$

Esta suma es una variante de la suma de Brjüno, y de hecho converge si y sólo si la suma de Brjüno converge ([Yoc02]).

Existe otra clase importante de números, la *clase de Herman*, definida por la siguiente condición aritmética:

Sean $\theta \in (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}$, y

$$r_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}(x - \log(\frac{1}{\theta}) + 1) & \text{si } x \geq \log(\frac{1}{\theta}) \\ e^x & \text{si } x \leq \log(\frac{1}{\theta}). \end{cases}$$

Ahora, para $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $k > 0$,

$$\Delta_k(\theta) := r_{\alpha_{k-1}} \circ \dots \circ r_{\alpha_0}(0)$$

Luego, se define, para $n \geq k \geq 0$,

$$\mathcal{H}_{k,n} = \{\theta \in \mathcal{B} : B(\alpha_n) \leq \Delta_k(\alpha_{n-k})\}$$

Finalmente,

$$\mathcal{H} = \bigcap_{m \geq 0} \left(\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{H}_{k,k+m} \right) = \{\theta \in \mathcal{B} : \forall m \geq 0, \exists k \geq 0, B(\alpha_{m+k}) \leq \Delta_k(\alpha_m)\}$$

Se tiene la relación

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{B}$$

donde \mathcal{D} denota a los números Diofantinos y \mathcal{H} a la clase de Herman.

Otro resultado importante del que haremos uso más adelante, también demostrado por Yoccoz en [Yoc02], es el siguiente teorema de conjugación, acá enunciado como en [Chu06]:

Teorema 1.4.20. (Teorema de Conjugación Local) *Si $\theta \in \mathcal{B}$, entonces existe $R = R(\theta)$ tal que todo difeomorfismo analítico de S^1 que se extienda de forma univalente al anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R\}$ es linealizable.*

Este teorema muestra, en particular, la existencia de funciones analíticas con un anillo de Herman. Más adelante veremos un ejemplo.

En [Shi87], se demuestra que si una función tiene un anillo de Herman, ésta tiene dos puntos críticos distintos cuyas órbitas se acumulan en las dos componentes distintas de su frontera.

Puntos críticos en la frontera

Sea $CP(f)$ el conjunto de puntos críticos de f . Este conjunto es finito por ser f racional. Definimos el conjunto postcrítico de f como

$$\mathcal{P}(f) = \bigcup_{n \geq 1} f^n(CP(f))$$

y denotamos $CL(f) = \overline{\mathcal{P}(f)}$. Notemos que todas las ramas de f^{-n} para $n \geq 1$ están localmente definidas y son analíticas en el complemento de $CL(f)$.

Teorema 1.4.21. *Si \mathcal{U} es un disco de Siegel o anillo de Herman, entonces la frontera de \mathcal{U} está contenida en $CL(f)$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un dominio de rotación invariante bajo f , y supongamos que $CL(f)$ no contiene a $\partial\mathcal{U}$. Sea D un disco abierto disjunto de $CL(f)$ pero que intersecta $\partial\mathcal{U}$. Podemos asumir también que D no toca algún abierto invariante $V \neq \emptyset$ de \mathcal{U} . Definimos h_n como alguna rama de f^{-n} en D . Como cada h_n se define fuera de V , esta familia es normal en D por ser éste un conjunto hiperbólico.

Por otra parte, f es inyectiva en \mathcal{U} , y por lo tanto, existen otras componentes de $f^{-1}(\mathcal{U})$ además de \mathcal{U} . Como los iterados inversos de puntos fijos de $\mathcal{J}(f)$ son densos en $\mathcal{J}(f)$, existe $m \geq 1$ tal que una componente W de $f^{-m}(\mathcal{U})$ distinta de \mathcal{U} intersecta a D .

Si $z \in D \cap W$, entonces $h_j(z)$ y $h_k(z)$ pertenecen a distintas componentes de $\mathcal{F}(f)$ para $j \neq k$. De otra forma, pertenecerían a una componente

periódica, que no podría iterarse hasta W y luego hasta \mathcal{U} . Por el Teorema de Sullivan, $h_k(z)$ converge a un punto en $\mathcal{J}(f)$ para todo $z \in D \cap W$, y como $\mathcal{J}(f)$ no tiene puntos interiores, cualquier límite normal de las h_k 's es constante en $D \cap W$. Pero por otra parte, como las $h_k|_{D \cap W}$'s son rotaciones, cualquier límite normal es no-constante en $D \cap \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción. Así, $\partial\mathcal{U}$ debe estar contenida en $CL(f)$. \square

Como $\partial\mathcal{U} \subset CL(f)$, es posible que $CP(f) \cap \partial\mathcal{U} \neq \emptyset$, esto es, que exista un punto crítico en $\partial\mathcal{U}$.

Radio conforme de un disco de Siegel

Definición 1.4.22. Sea \mathcal{S} un disco de Siegel para una función racional f de multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Se define el *radio conforme* de \mathcal{S} como el mayor número σ para el cual existe una función univalente $\psi : D(0, \sigma) \rightarrow \mathbb{C}$ que conjuga f en \mathcal{S} a la rotación irracional R_θ en $D(0, \sigma)$, y que satisface $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = 1$.

Denotamos el radio conforme de \mathcal{S} por $\sigma(\theta)$ o $\sigma(\mathcal{S})$ indistintamente. Si f no es localmente linealizable en una vecindad de un punto fijo z_0 con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, entonces definimos $\sigma(\theta) = 0$.

De manera similar, definimos el *radio interno* de un disco de Siegel como el radio del disco más grande centrado en $z_0 = 0$ contenido en \mathcal{S} . Lo denotamos por $\iota(\mathcal{S})$.

Proposición 1.4.23. $\sigma(\mathcal{S}) \leq 4 \cdot \iota(\mathcal{S})$

Demostración. Sea f como en la definición anterior. La función de linealización $\psi : D(0, \sigma) \rightarrow \mathbb{C}$ es univalente. Por el Teorema de 1/4 de Koebe (Teorema 1.2.3), la imagen de ψ contiene al disco $D(\psi(0), \frac{|\psi'(0)|}{4} \cdot \sigma)$. Esto nos dice que $\frac{1}{4}\sigma(\mathcal{S}) \leq \iota(\mathcal{S})$, de donde se sigue la desigualdad propuesta. \square

1.5. Familias polinomiales y productos de Blaschke

A continuación introducimos dos familias analíticas de funciones que serán de gran importancia en el trabajo.

1.5.1. Familia polinomial

Consideremos, para $d > 1$, la siguiente familia polinomial en $\hat{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{P}_d = \{P_\theta(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + e^{2\pi i \theta} z : \theta \in \mathbb{R}, a_d \neq 0\}$$

Notemos que $P_\theta(\infty) = \infty = P_\theta^{-1}(\infty)$. Existen $2d - 2$ puntos críticos contados con multiplicidad. Por otra parte,

$$P'_\theta(z) = da_d z^{d-1} + \dots + e^{2\pi i \theta} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{da_d}{z} + \dots + \frac{a_2}{z^{d-1}} \right) = \frac{-e^{2\pi i \theta}}{z^d}, \quad z \neq 0.$$

Por lo tanto, $z = \infty$ es un punto fijo crítico de multiplicidad $d - 1$ y es siempre superatractor. La cuenca de atracción de P_θ en ∞ viene dada por

$$\mathcal{A}_{P_\theta}(\infty) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : P_\theta^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\}.$$

Como P_θ no tiene polos, existe r_{P_θ} tal que todo punto z en la vecindad de infinito $|z| > r_{P_\theta}$ pertenece a $\mathcal{A}_{P_\theta}(\infty)$ y por lo tanto, $\mathcal{A}_{P_\theta}(\infty)$ es conexo. Además, no existen otras preimágenes de $\mathcal{A}_{P_\theta}(\infty)$ además de este mismo conjunto. En consecuencia, el *conjunto lleno de Julia*, definido por $\mathcal{K}(P_\theta) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_{P_\theta}(\infty)$ es completamente invariante y compacto.

Proposición 1.5.1. *P_θ no tiene anillos de Herman.*

Demostración. Sea $z_0 = 0$. P_θ es una función entera y $P_\theta(0) = 0$. Supongamos que P_θ tiene un anillo de Herman \mathcal{U} . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que \mathcal{U} contiene al origen en la componente acotada de su complemento. Entonces sea γ una curva cerrada alrededor del origen contenida en \mathcal{U} . Definamos $V = \text{int}(\gamma)$. Como P_θ es holomorfa en V , por el Principio del Módulo Máximo, P_θ alcanza su máximo en $\partial V = \gamma$. Así, P_θ^n está acotada en $P_\theta^n(V)$ para todo $n \geq 1$. Como V es un dominio acotado,

$\{P_\theta^n|_V\}_n$ es una familia normal, por el Teorema de Montel. Pero $\partial\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$ y $\partial\mathcal{U} \subset J(P_\theta)$, lo cual contradice la normalidad de $\{P_\theta^n|_V\}_n$. La contradicción proviene de suponer que P_θ posee un anillo de Herman. \square

En particular, la familia de polinomios cuadráticos ha sido ampliamente estudiada. Mencionamos algunos resultados referentes a discos de Siegel para $d = 2$.

Teorema 1.5.2. (Siegel, Brjüno, Yoccoz) *$P_\theta(z)$ es linealizable en el origen (es decir, posee un disco de Siegel) si y sólo si $\theta \in \mathcal{B}$.*

Teorema 1.5.3. (Herman) *Si $\theta \in \mathcal{H}$, la frontera del disco de Siegel asociado a P_θ contiene un punto crítico.*

Teorema 1.5.4. (Douady, Sullivan) *Si la frontera del disco de Siegel asociado a P_θ no contiene un punto crítico, entonces $\mathcal{J}(P_\theta)$ no es localmente conexo.*

Éstos teoremas, de hecho, se han generalizado para polinomios de cualquier grado $d \geq 2$, y se puede consultar estos resultados en [Zak01].

1.5.2. Productos de Blaschke

Definición 1.5.5. Un producto infinito de Blaschke es una función de la forma

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}$$

definida en $\hat{\mathbb{C}}$, con $a_n \in \mathbb{D}^*$ y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Ésta última condición se conoce como la condición de Blaschke.

Muchas propiedades analíticas importantes de los productos de Blaschke pueden consultarse en [Rud87], pero mencionamos algunas. La condición de Blaschke implica que la función $B(z)$ es acotada en \mathbb{D} y no tiene otros ceros además de los a_n 's y $z = 0$ si $k > 0$: notemos que el n -ésimo término de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n} \right|$$

es

$$\left| \frac{a_n + |a_n|z}{(1 - \bar{a}_n z)a_n} \right| (1 - |a_n|) = \left| \frac{a_n + |a_n|z}{a_n - |a_n|z} \right| (1 - |a_n|) \leq \frac{1+r}{1-r} (1 - |a_n|)$$

si $|z| \leq r$.

Como

$$\left| \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \right| = 1$$

si $|z| = 1$, $B(z)$ preserva el círculo unitario S^1 . Los productos de Blaschke se caracterizan por lo siguiente: si f es una función holomorfa en el disco unitario \mathbb{D} que se extiende a una función continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y que deja invariante a S^1 , entonces f es un producto de Blaschke finito de la forma

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \right)^{m_k}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$, $a_k \in \mathbb{D}$ y m_k es la multiplicidad de cada cero a_k .

Se puede extender la definición de producto de Blaschke permitiendo que los a_n 's pertenezcan a $\hat{\mathbb{C}} \setminus S^1$. Llamamos a estas funciones *productos de Blaschke generalizados*. Nos referiremos como productos de Blaschke también a los productos finitos de esta forma.

En el caso de los productos de Blaschke generalizados, éstos no necesariamente preservan el disco unitario, el cual puede contener preimágenes propias de sí mismo y de su complemento; pero siguen preservando el círculo unitario S^1 y son simétricos con respecto a éste.

Ahora, sea $d \in \mathbb{N}$, y consideremos la familia de productos finitos de Blaschke generalizados

$$\mathfrak{B}_d = \left\{ B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z - a}{1 - az} \right)^d, 0 \leq \alpha < 1, a \in \mathbb{R}, a > 2d + 1 \right\}.$$

Cada $B_{\alpha,a}$ es una función racional de grado $2d + 1$ y deja invariante al círculo unitario S^1 . Su derivada está dada por:

$$B'_{\alpha,a}(z) = \frac{-e^{2\pi i \alpha} z^d (z - a)^{d-1}}{(1 - az)^{d+1}} (a(d + 1)z^2 - (2d + 1 + a^2)z + a(d + 1)).$$

De aquí podemos concluir que $B_{\alpha,a}$ tiene $4d$ puntos críticos (contados con multiplicidad). Los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ son puntos críticos fijos, tienen multiplicidad d y, por lo tanto, son superatractores. El punto $z = a$ es un cero, $z = 1/a$ es un polo, y ambos son puntos críticos con multiplicidad $d - 1$. Los dos puntos críticos restantes vienen dados por

$$c_{\pm} = \frac{(2d + 1 + a^2) \pm \sqrt{(a^2 - 1)(a^2 - (2d + 1)^2)}}{2a(d + 1)}.$$

La razón por la que consideramos $a > 2d + 1$ queda establecida en el siguiente lema. Por completitud incluimos la demostración, basada en [Chu18].

Lema 1.5.6. *Si $a \leq 2d + 1$, $B_{\alpha,a}$ no tiene anillos de Herman.*

Demostración. Cuando $a < 1$, $B_{\alpha,a} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función propia y holomorfa en \mathbb{D} , y por el Lema de Schwarz, $z = 0$ es el único punto fijo atractor de $B_{\alpha,a}$ en \mathbb{D} y $\mathcal{A}(0) = \mathbb{D}$. Por simetría, $\mathcal{A}(\infty) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Así, $\mathcal{J}(B_{\alpha,a}) = S^1$, y $B_{\alpha,a}$ no puede tener anillos de Herman. Para $a = 1$, $B_{\alpha,a}$ no está formalmente definida en $z = a$.

Si $a = 2d + 1$, $c_+ = c_- = 1$ y si $1 < a < 2d + 1$, las órbitas críticas de c_+ y c_- pertenecen a S^1 , pero sabemos que una función racional con un anillo de Herman posee dos puntos críticos cuyas órbitas se acumulan en las dos componentes distintas de su frontera. Entonces, $B_{\alpha,a}$ no puede tener anillos de Herman. □

Cuando $a > 2d + 1$, los puntos críticos $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ son diferentes y simétricos con respecto a S^1 , y por lo tanto, podría tener anillos de Herman.

Consideremos, para $a > 3$

$$B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^2 \frac{(z - a)}{(1 - az)}. \quad (1.3)$$

Notemos que

$$\left| 1 - \frac{z(z - a)}{(1 - az)} \right| = \left| \frac{1 - az - z^2 + az^2}{1 - az} \right| = \left| \frac{1 - z^2}{1 - az} \right| \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow \infty)$$

Por lo tanto, cuando $a \rightarrow \infty$, $B_{\alpha,a}$ es uniformemente cercana a la rotación $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$. Es, además, un difeomorfismo que preserva orientación en S^1 . El número de rotación $\text{rot}(B_{\alpha,a}|_{S^1})$ se mueve continuamente con a y α (los parámetros del levantamiento de $B_{\alpha,a}$), es creciente en α y converge uniformemente a $\alpha \pmod{1}$ cuando $a \rightarrow \infty$. Luego, para un número $\theta \in \mathcal{H}$, podemos encontrar $\alpha = \alpha(\theta)$ tal que $\text{rot}(B_{\alpha,a}|_{S^1}) = \theta$. Más aún, $\alpha(\theta) \rightarrow \theta$ cuando $a \rightarrow \infty$.

Así, para a grandes, tenemos $B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i\theta}z\Phi(z)$ con $\Phi(z)$ una función analítica arbitrariamente cercana a 1. Entonces $B_{\alpha,a}$ es una función analítica que preserva S^1 . Sus puntos críticos c_- y c_+ son libres y simétricos con respecto a S^1 si $a > 3$. Entonces $B_{\alpha,a}$ es univalente en una vecindad anular de S^1 y por lo tanto en algún anillo A_R (notemos que $1/3$ es un polo de $B_{\alpha,a}$). Por el Teorema de Conjugación Local de Yoccoz, $B_{\alpha,a}$ es conjugada a una rotación en el anillo A_R que contiene a S^1 , el cual está contenido en una componente fija \mathcal{U} de $\mathcal{F}(B_{\alpha,a})$, y \mathcal{U} no puede ser atractora o parabólica, pues S^1 es invariante. Tampoco puede ser un disco de Siegel, pues 0 e ∞ son puntos atractores. Por lo tanto, \mathcal{U} debe ser un anillo de Herman.

Definimos

$$T_d(\rho) = \{(\alpha, a) \in [0, 1) \times (2d + 1, \infty) : \text{rot}(B_{\alpha,a}|_{S^1}) = \rho\}.$$

En [Chu18], Haifeng Chu presenta el siguiente resultado.

Teorema 1.5.7. *Sea $d \geq 1$ y $\rho \in \mathcal{B}$. Sea $(\alpha, a) \in T_d(\rho)$ tal que $B_{\alpha,a}$ tiene un anillo de Herman \mathcal{H} con S^1 como curva invariante. Sea $R \in (1, \infty)$ tal que $\text{mod}(\mathcal{H}) = \pi^{-1} \log(R)$. Entonces existe una función \mathbb{R} -analítica*

$$\begin{aligned} \gamma : (0, \infty) &\rightarrow T_d(\rho) \\ s &\mapsto (\alpha(s), a(s)) \end{aligned}$$

tal que:

1. Para cada $s \in (0, \infty)$, la función $B_{\alpha(s), a(s)}$ tiene un anillo de Herman \mathcal{H}_s con número de rotación ρ y módulo $\pi^{-1}s \log(R)$.

2. La función $s \mapsto a(s)$ es estrictamente creciente.
3. $\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = \infty$.
4. $\lim_{s \rightarrow 0} a(s) =: M(\rho) \geq 2d + 1$.
5. Para todo $(\alpha, a) \in T_d(\rho)$ tal que $a \leq M(\rho)$, la función $B_{\alpha, a}$ no tiene anillos de Herman.

Este resultado nos dice que las curvas $T_d(\rho)$ con $\rho \in \mathcal{B}$ se pueden parametrizar analíticamente por el módulo conforme del anillo de Herman de $B_{\alpha, a}$ cuando $(\alpha, a) \in T_d(\rho)$, hasta un punto $M(\rho)$ en que el anillo desaparece.

Podemos preguntarnos si es posible establecer un resultado análogo para discos de Siegel de familias de funciones racionales, es decir, si se pueden encontrar curvas analíticas parametrizadas por el radio conforme de los discos de Siegel de las funciones de la familia cuando éstos existan. Un problema que se interpone, sin embargo, es la dificultad para estimar el radio conforme de un disco de Siegel.

Capítulo 2

Funciones cuasiconformes

En este capítulo se introducirá la teoría de funciones cuasiconformes, que permitirá estudiar el proceso de cirugía cuasiconforme que tenemos por objetivo presentar. Se seguirá en gran medida el contenido de [BF14].

2.1. Coeficientes de Beltrami y estructuras casi complejas

Cosideremos el plano complejo \mathbb{C} como espacio vectorial real $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Podemos extender este espacio a un espacio vectorial complejo con la multiplicación por escalar estándar. Si $L : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ es una función \mathbb{R} -lineal, podemos escribirla de la forma

$$L(u) = a \cdot u + b \cdot \bar{u}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $u \in \mathbb{C}$. Esta función envía al cuadrado generado por los vectores 1 e i al paralelogramo generado por $L(1) = a + b$ y $L(i) = (a - b)i$. Definimos el coeficiente de Beltrami de L por

$$\mu(L) = \frac{b}{a} = \left| \frac{b}{a} \right| e^{i\theta}$$

con $\theta = \arg(\mu(L))$, y el determinante de L viene dado por $\det(L) = |a|^2 - |b|^2$. Nos interesan, en particular, las funciones que preservan orientación, esto es, aquellas tales que $\det(L) > 0$ ($|a| > |b|$). Notemos que, en

este caso, $\mu(L) \in \mathbb{D}$. L es holomorfa sí y sólo si $b = 0$, y por tanto, sí y sólo si $\mu(L) = 0$.

Si consideramos la imagen inversa de S^1 por L , $E(L) := L^{-1}(S^1)$ es una elipse si $\mu(L) \neq 0$ y un círculo si $\mu(L) = 0$. La *dilatación de la función* L se define como el radio de los ejes mayor y menor de $E(L)$:

$$K(L) = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|} = \frac{1 + |\mu(L)|}{1 - |\mu(L)|}.$$

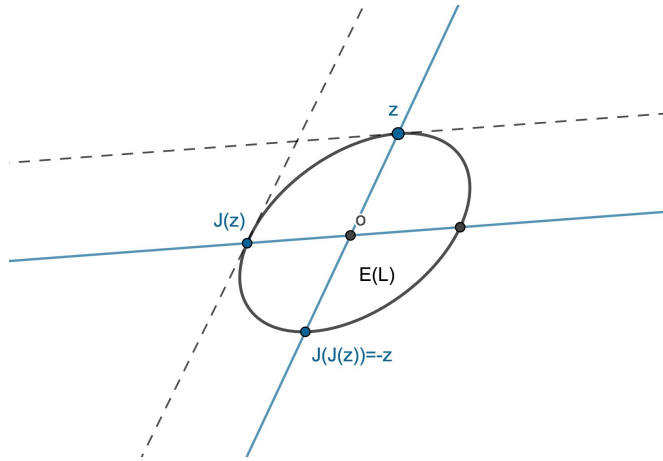
Mientras que la dilatación $K(L)$ determina la forma de la elipse salvo escala pero no la posición de los ejes, el coeficiente de Beltrami determina la forma y la posición de los ejes salvo escala. Para más detalles sobre cómo determinar los ejes de la elipse $E(L)$, recomendamos consultar [BF14].

Definición 2.1.1. Una estructura conforme en un espacio vectorial real V es un endomorfismo $J : V \rightarrow V$ que satisface $J \circ J = -id_V$.

Una estructura conforme nos permite dotar un espacio vectorial real con la estructura de un espacio vectorial complejo, definiendo una forma de multiplicación por escalares complejos. Ésto se puede hacer de la siguiente manera: si $c = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces definimos $c * v = xv + yJ(v)$ para todo $v \in V$. Notemos que $i^2 * v = i * i * v = J(J(v)) = -v$, por definición. Finalmente, la estructura inducida por L se define escogiendo $J = L^{-1} \circ I \circ L$, donde $I(z) = iz$, la multiplicación usual por i .

Denotamos por σ_0 a la estructura conforme estándar, es decir, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ con la estructura de espacio vectorial complejo definido por la multiplicación usual por escalares complejos. Esta estructura tiene coeficiente de Beltrami asociado $\mu_0 \equiv 0$.

Veamos cómo la elipse $E(L)$ nos permite definir una estructura conforme: dos diámetros de una elipse son *conjugados* si la recta tangente a la elipse en un punto extremo de uno de los diámetros es paralela al otro diámetro. Todo par de diámetros conjugados de una elipse tiene asociado entonces un paralelogramo tangente. En un círculo, dos diámetros son conjugados si y sólo si son perpendiculares. Bajo la función lineal L , diámetros


 Figura 2.1: Diámetros conjugados en la elipse $E(L)$.

conjugados de $E(L)$ se envían a diámetros conjugados de S^1 (ver Figura 2.1).

Así, si $z \in E(L)$, escogemos $J(z)$ de manera que z y $J(z)$ vistos como vectores en $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ son diámetros conjugados (recorriendo la elipse de z a $J(z)$ en dirección positiva). Luego, se tiene $J = L^{-1} \circ I \circ L$ con $I(z) = iz$ como antes.

Hemos visto que L determina una elipse definida salvo escala, es decir, tenemos determinada una familia infinita y concéntrica de elipses. Para cualquier $z \neq 0$, escogemos la elipse que contiene a z . Sea $J(z)$ el punto del diámetro conjugado al de z en la elipse recorrida en dirección positiva. La función J satisface entonces $J(J(z)) = -z$. Denotamos por σ a la estructura conforme inducida por L .

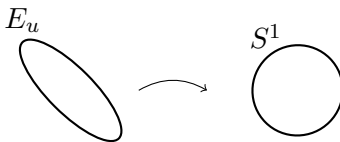
Consideremos ahora $U, V \subset \mathbb{C}$ y sea $\phi : U \rightarrow V$ una función \mathbb{R} -diferenciable en casi todo punto y que preserva orientación. Su diferencial $D_u\phi : T_uU \rightarrow T_{\phi(u)}V$ está dado por

$$D_u\phi = \partial_z\phi(u)dz + \partial_{\bar{z}}\phi(u)d\bar{z}$$

donde $\partial_z\phi(u) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(u)$ y $\partial_{\bar{z}}\phi(u) = \frac{\partial\phi}{\partial \bar{z}}(u)$.

$D_u\phi$ define una elipse infinitesimal en el espacio tangente en u dada por

$$E_u = (D_u\phi)^{-1}(S^1).$$



El coeficiente de Beltrami de ϕ en u esta dado por

$$\mu_\phi(u) = \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(u)}{\partial_z\phi(u)}. \quad (2.1)$$

Este coeficiente determina la posición y forma de la elipse salvo escala. Por lo tanto, tenemos en cada punto de U donde ϕ es diferenciable, una familia infinitesimal de elipses, y cada familia define una estructura conforme en el espacio tangente en u . Su dilatación está dada por

$$K_\phi(u) = \frac{1 + |\mu_\phi(u)|}{1 - |\mu_\phi(u)|}. \quad (2.2)$$

Definición 2.1.2. Una estructura casi compleja en U es un campo medible de elipses infinitesimales en TU .

Así, en el fibrado tangente $TU = \bigcup_u T_uU$ (para $u \in U$ en el cual ϕ es diferenciable) tenemos un campo infinitesimal de elipses que definen una estructura casi compleja σ_ϕ en U . La función

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto \mu_\phi(u) \end{aligned}$$

es medible con respecto a la medida de Lebesgue. Definimos la *dilatación de la estructura casi compleja* σ_ϕ como

$$K_\phi = K(\sigma_\phi) = \operatorname{ess\,sup}_{u \in U} \{K_\phi(u)\}.$$

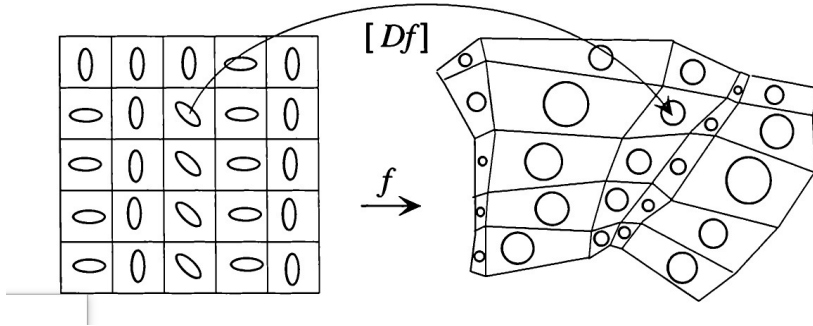
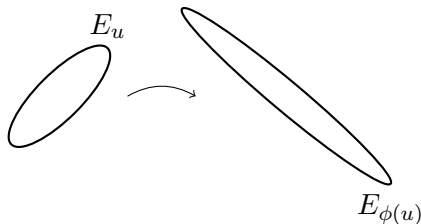


Figura 2.2: Acción de la derivada Df (J. Hubbard [Hub06])

Notemos que hemos construido una nueva estructura casi compleja σ_ϕ a partir de ϕ . Decimos que μ_ϕ es el *pullback* de μ_0 por ϕ , y lo denotamos por $\mu_\phi = \phi^* \mu_0$. De igual manera, nos referimos a σ_ϕ como el pullback de σ_0 , i.e., $\sigma_\phi = \phi^* \sigma_0$.

Más generalmente, supongamos que tenemos una estructura casi compleja σ en V y con coeficiente de Beltrami asociado μ . Consideremos el campo infinitesimal de elipses \mathcal{E} de σ . Sea $\phi : U \rightarrow V$ una función \mathbb{R} -diferenciable en casi todo punto, que preserva orientación, y que además es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue (esto es, ϕ envía conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero). Su diferencial $D_u \phi : T_u U \rightarrow T_{\phi(u)} V$ define un campo de elipses infinitesimales \mathcal{E}' en el espacio tangente en u . Cada elipse viene dada por $E_u = (D_u \phi)^{-1}(E_{\phi(u)})$ y está definida para casi todo $u \in U$. Este campo \mathcal{E}' da lugar a una estructura casi compleja σ' en U (*pullback* de σ) con coeficiente asociado μ' y escribimos

$$\mu' := \phi^* \mu.$$



Supongamos que tenemos

$$(U, \mu_1) \xrightarrow{f} (V, \mu_2) \xrightarrow{g} (W, \mu_3)$$

Esto es, $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$, $\mu_1 = f^* \mu_2$, y $\mu_2 = g^* \mu_3$ con f, g funciones \mathbb{R} -diferenciables en casi todo punto, que preservan orientación y son absolutamente continuas. Entonces $g \circ f : U \rightarrow W$ y

$$(g \circ f)^* \mu_3 = \mu_1 = f^* \mu_2 = f^*(g^* \mu_3).$$

Esta identidad se conoce como la propiedad de *covarianza* del pullback de funciones \mathbb{R} -diferenciables. Para la demostración de esta identidad en el caso de funciones más generales (funciones cuasiconformes, que definiremos más adelante), referimos a [Hub06].

Proposición 2.1.3. *Sea $\phi : U \rightarrow V$ diferenciable en casi todo punto, que preserva orientación y es absolutamente continua. Supongamos que tenemos un coeficiente de Beltrami μ dado por una función φ , esto es, $\mu = \mu_\varphi$, con $\varphi : V \rightarrow W$ diferenciable en casi todo punto y que preserva orientación. Entonces, para casi todo $u \in U$,*

$$\phi^* \mu(u) = \frac{\partial_{\bar{z}} \phi(u) + \mu(\phi(u)) \overline{\partial_z \phi(u)}}{\partial_z \phi(u) + \mu(\phi(u)) \overline{\partial_{\bar{z}} \phi(u)}}.$$

Demostración. Consideremos dos funciones lineales

$$L_1(u) = a_1 u + b_1 \bar{u}$$

$$L_2(u) = a_2 u + b_2 \bar{u}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} L_1 \circ L_2(u) &= a_1(a_2u + b_2\bar{u}) + b_1(\overline{a_2u + b_2\bar{u}}) \\ &= (a_1a_2 + b_1\bar{b}_2)u + (a_1b_2 + b_1\bar{a}_2)\bar{u}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mu(L_1 \circ L_2) = \frac{a_1b_2 + b_1\bar{a}_2}{a_1a_2 + b_1\bar{b}_2} = \frac{b_2 + \mu(L_1)\bar{a}_2}{a_2 + \mu(L_1)\bar{b}_2}. \quad (2.3)$$

donde $\mu(L_1) = \frac{b_1}{a_1}$ y $\mu(L_2) = \frac{b_2}{a_2}$.

Tenemos, por hipótesis y por la propiedad de covarianza del pullback,

$$\phi^* \mu_\varphi = \phi^* \mu = \phi^*(\varphi^* \mu_0) = (\varphi \circ \phi)^* \mu_0 = \mu_{\varphi \circ \phi}$$

Usando la ecuación (2.3) para

$$D_u \phi = \partial_z \phi(u).dz + \partial_{\bar{z}} \phi(u).d\bar{z}$$

y

$$D_u \varphi = \partial_z \varphi(u).dz + \partial_{\bar{z}} \varphi(u).d\bar{z},$$

obtenemos

$$\phi^* \mu(u) = \phi^* \mu_\varphi(u) = \frac{\partial_{\bar{z}} \phi(u) + \mu_\varphi(\phi(u)) \overline{\partial_z \phi(u)}}{\partial_z \phi(u) + \mu_\varphi(\phi(u)) \overline{\partial_{\bar{z}} \phi(u)}}.$$

□

Es importante notar que si ϕ es holomorfa, entonces $\partial_{\bar{z}} \phi(z) = 0$ y por lo tanto,

$$\phi^* \mu(u) = \mu(\phi(u)) \frac{\overline{\partial_z \phi(u)}}{\partial_z \phi(u)}. \quad (2.4)$$

Definición 2.1.4. Sea $\phi : U \rightarrow U$ un homeomorfismo que preserva orientación y es absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue. Si σ es una estructura casi compleja con coeficiente de Beltrami asociado μ , decimos que μ (o σ) es ϕ -invariante si $\phi^* \mu(z) = \mu(z)$ ($\phi^* \sigma = \sigma$) para casi todo $z \in U$.

Proposición 2.1.5. Si $\phi : U \rightarrow U$, $\psi : V \rightarrow V$, y $f : U \rightarrow V$ son funciones como en la definición anterior tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & U \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{\psi} & V \end{array}$$

Si σ es una estructura ψ -invariante en V , entonces $f^*\sigma$ es una estructura ϕ -invariante en U .

Demostración. Como σ es ψ -invariante en V , tenemos $\psi^*\mu = \mu$ c.t.p en V . Entonces,

$$\phi^*(f^*\mu) = (f \circ \phi)^*\mu = (\psi \circ f)^*\mu = f^*(\psi^*\mu) = f^*\mu$$

c.t.p en U . □

2.2. Funciones cuasiconformes

Existen al menos cuatro definiciones de funciones cuasiconformes, todas ellas equivalentes. En este trabajo presentamos dos de ellas, una analítica y una geométrica, las que consideramos más accesibles y útiles al momento de estudiar algunas propiedades de estas funciones.

2.2.1. Una definición analítica

Definición 2.2.1. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ con $I \subset \mathbb{R}$ es absolutamente continua en I si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_j |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$$

para toda sucesión finita de intervalos disjuntos (a_j, b_j) compactamente contenidos en I y tal que $\sum_j |b_j - a_j| < \delta$.

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, es absolutamente continua en líneas (ACL) en Ω si para todo disco D compactamente contenido en Ω y cualquier familia de líneas paralelas en D , f es absolutamente continua en casi toda línea de la familia.

Tales funciones tienen, en particular, derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial z}$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en casi todo punto de Ω .

Daremos ahora una definición de funciones cuasiconformes basada en [Ahl06].

Definición 2.2.2. Sea $K \geq 1$ dado. Un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ con $U, V \subset \mathbb{C}$ es K -cuasiconforme si :

- ϕ es ACL en U .
- $|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}| \leq k |\frac{\partial f}{\partial z}|$ en casi todo punto, y con $k = \frac{K-1}{K+1}$.

La segunda condición en la definición nos dice que la dilatación de la estructura casi compleja definida por $\phi^* \sigma_0$ debe estar acotada. Esto es, $K_\phi < \infty$. Equivalentemente, $\|\mu_\phi\|_\infty = \sup\{|\mu_\phi(u)| : u \in U\} < 1$.

2.2.2. Una definición geométrica

Definición 2.2.3. Un cuadrilátero $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un dominio de Jordan en \mathbb{C} donde sus vértices (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_j \in \partial Q$, forman una sucesión ordenada. Existe una función conforme φ que envía Q a un rectángulo (con la definición usual) y manda vértices a vértices preservando orientación. Se define el módulo conforme de Q como

$$\text{mod}(Q) = \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|\varphi(z_2) - \varphi(z_3)|}.$$

Si $\phi : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo que preserva orientación, con U, V dominios de \mathbb{C} , y Q es un cuadrilátero compactamente contenido en U , entonces $\phi(Q)$ es un cuadrilátero compactamente contenido en V .

Definición 2.2.4. Definimos la dilatación de Q bajo ϕ como

$$K(Q) = \frac{\text{mod}(\phi(Q))}{\text{mod}(Q)}.$$

La dilatación máxima de ϕ está dada por

$$K_\phi = \sup_{Q \subset U} K(Q) = \sup_{Q \subset U} \frac{\text{mod}(\phi(Q))}{\text{mod}(Q)}. \quad (2.5)$$

con Q compactamente contenido en U .

Si consideramos un reordenamiento de los vértices, obtenemos

$$\text{mod}(Q(z_2, z_3, z_4, z_1)) = \frac{1}{\text{mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))}.$$

Así, tenemos $K_\phi \geq 1$

Podemos ahora dar una definición geométrica de función cuasiconforme.

Definición 2.2.5. Sea $K \geq 1$. Una función $\phi : U \rightarrow V$ es K -cuasiconforme si y sólo si es un homeomorfismo que preserva orientación y satisface $K_\phi \leq K$, esto es,

$$\frac{1}{K} \text{mod}(Q) \leq \text{mod}(\phi(Q)) \leq K \text{mod}(Q)$$

para todo cuadrilátero Q compactamente contenido en U .

Observación 2.2.6. La definición analítica y la definición geométrica de función cuasiconforme son equivalentes. Ahlfors muestra esta equivalencia en [Ahl06].

2.2.3. Propiedades de funciones cuasiconformes

Podemos ahora estudiar algunas propiedades de las funciones cuasiconformes que permiten desarrollar procedimientos de cirugía. En particular el siguiente resultado.

Teorema 2.2.7. (Lema de Weyl) *Si ϕ es una función cuasiconforme y $\partial_{\bar{z}}\phi = 0$ en casi todo punto, entonces ϕ es conforme.*

Este resultado nos dice en particular que una función 1-cuasiconforme es conforme. Ésto se sigue de la definición geométrica. La idea de la demostración es usar la equivalencia de definiciones. La propiedad de ser cuasiconforme es equivalente a ser un homeomorfismo ACL tal que el módulo de sus derivadas parciales está acotado. Con ésto y la hipótesis $\partial_{\bar{z}}\phi = 0$ se puede concluir que ϕ es conforme.

Definición 2.2.8. Un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ con $U, V \subset \mathbb{C}$ es localmente K -cuasiconforme si es K -cuasiconforme en una vecindad de cada punto en U .

Proposición 2.2.9. (*Propiedades de funciones cuasiconformes*)

- (1) Si $\phi : U \rightarrow V$ es K -cuasiconforme, entonces ϕ^{-1} es K -cuasiconforme.
- (2) Si $\phi_1 : U \rightarrow V$ y $\phi_2 : V \rightarrow W$ son K_1 y K_2 -cuasiconformes respectivamente, entonces $\phi_2 \circ \phi_1$ es $K_1 K_2$ -cuasiconforme. En consecuencia, cualquier composición de una función K -cuasiconforme con una conforme es K -cuasiconforme.
- (3) ϕ es K -cuasiconforme si y sólo si es localmente K -cuasiconforme.

Demostración. (1) Por ser $\phi : U \rightarrow V$ homeomorfismo, para todo cuadrilátero Q' compactamente contenido en V existe un cuadrilátero Q compactamente contenido en U tal que $Q' = \phi(Q)$. Como

$$\frac{1}{K} \text{mod}(Q) \leq \text{mod}(\phi(Q)) \leq K \text{mod}(Q),$$

entonces

$$\frac{1}{K} \text{mod}(\phi^{-1}(Q')) \leq \text{mod}(Q')$$

y

$$\text{mod}(Q') \leq K \text{mod}(\phi^{-1}(Q')).$$

De aquí, obtenemos $\frac{1}{K} \text{mod}(Q) \leq \text{mod}\phi^{-1}(Q) \leq K \text{mod}(Q)$. Por lo tanto, ϕ^{-1} es K -cuasiconforme.

- (2) Si Q es un cuadrilátero contenido compactamente en U , $\phi_1(Q)$ es un cuadrilátero contenido compactamente en V . Tenemos

$$\frac{1}{K_1} \text{mod}(Q) \leq \text{mod}\phi_1(Q) \leq K_1 \text{mod}(Q)$$

y

$$\frac{1}{K_2} \text{mod}\phi_1(Q) \leq \text{mod}\phi_2(\phi_1(Q)) \leq K_2 \text{mod}\phi_1(Q).$$

Obtenemos así

$$\frac{1}{K_1 K_2} \text{mod}(Q) \leq \text{mod}\phi_1(Q)$$

y

$$\text{mod}\phi_1(Q) \leq K_1 K_2 \text{mod}(Q).$$

Notemos que si φ es conforme, por el Lema de Weyl, es 1-cuasiconforme, y por lo tanto

$$\text{mod}\varphi(\phi(Q)) = \text{mod}\phi(Q) = \text{mod}\phi(\varphi(Q)).$$

(3) Referimos a [Ahl06] para la demostración de esta propiedad. □

La Definición 2.2.2 puede generalizarse a funciones cuasiconformes entre superficies de Riemann. En particular, nos interesará estudiar funciones cuasiconformes en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 2.2.10. Sea $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un homeomorfismo. ϕ es cuasiconforme si existe $K \geq 1$ tal que ϕ es localmente K -cuasiconforme al expresarse en términos de cartas coordenadas.

Como las cartas coordenadas son funciones conformes, y por tanto 1-cuasiconformes, se sigue de la Proposición 2.2.8 sobre propiedades de funciones cuasiconformes, que la definición de función K -cuasiconforme es independiente de las cartas coordenadas.

Similarmente, se puede definir un coeficiente de Beltrami en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 2.2.11. Una forma de Beltrami en $\hat{\mathbb{C}}$ es un $(-1, 1)$ -diferencial expresado localmente como $\mu(z) \frac{d\bar{z}}{dz} = \mu(z) dz^{-1} d\bar{z}$.

Si $\varphi : U \rightarrow V$ y $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ son cartas coordenadas en $\hat{\mathbb{C}}$ que se solapan, $h = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es la función de transición conforme, y $z = \varphi(\zeta)$, $\tilde{z} = \tilde{\varphi}(\zeta)$ para $\zeta \in U \cap \tilde{U}$, entonces la forma de Beltrami queda determinada por

$$\mu_\varphi(z) = \mu_{\tilde{\varphi}}(\tilde{z}) \frac{\overline{\partial_z h(z)}}{\partial_z h(z)}.$$

2.3. Teorema de integrabilidad

Hemos visto que una función ϕ cuasiconforme define una estructura casi conforme σ con coeficiente de Beltrami asociado $\mu_\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$, con $U \subset \mathbb{C}$, y ésta es una función medible tal que $\|\mu_\phi\|_\infty < 1$. El Teorema de integrabilidad, demostrado por Ahlfors y Bers en 1960, muestra bajo qué condiciones sobre una estructura dada σ , podemos encontrar una función cuasiconforme que induzca σ en casi todo punto.

Teorema 2.3.1. (Teorema de integrabilidad) *Sea σ una estructura casi compleja definida en $\hat{\mathbb{C}}$ con forma de Beltrami μ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces existe un homeomorfismo cuasiconforme $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que satisface la ecuación de Beltrami*

$$\partial_z \phi = \mu \cdot \partial_z \phi$$

para casi todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Este homeomorfismo es único salvo por postcomposición con automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Se dice que la función ϕ integra μ , esto es, $\phi^* \mu_0 = \mu$. La demostración de este resultado conlleva un grado de dificultad comparable a la importancia del resultado en sí. Es éste la herramienta fundamental para el estudio de la teoría de funciones cuasiconformes, así como lo que permitirá realizar procedimientos de cirugía cuasiconforme. Referimos al texto de Ahlfors [Ahl06] para su demostración.

2.4. Funciones cuasisimétricas

Las funciones cuasiconformes fueron definidas en 2.2.2 y 2.2.5 sobre conjuntos abiertos. Una pregunta natural es bajo qué condiciones podemos extender estas funciones a las fronteras de sus dominios de definición. A continuación damos una definición de funciones cuasisimétricas y la estrecha relación que existe entre éstas y las funciones cuasiconformes.

Definición 2.4.1. Una función $h : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ es cuasisimétrica si es inyectiva y para cada tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in S^1$, existe $M \geq 1$ tal que

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \implies \frac{1}{M} \leq \frac{|h(z_1) - h(z_2)|}{|h(z_2) - h(z_3)|} \leq M.$$

Convendrá escribir esta condición en notación angular. Haciendo $H(t) = h(e^{2\pi it})$, se tiene

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|H(x+t) - H(x)|}{|H(x) - H(x-t)|} \leq M$$

para todo $x, x+t, x-t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con $t > 0$.

Lema 2.4.2. *Si $h : S^1 \rightarrow h(S^1)$ es un difeomorfismo de clase C^1 , entonces es una función cuasisimétrica.*

Demostración. Consideramos $H(t) = h(e^{2\pi it})$. Por ser h de clase C^1 , $H'(t)$ es uniformemente continua en S^1 . Entonces, para $x, t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tenemos

$$\left| \int_0^t (H'(x+\tau) - H'(x)) d\tau \right| \leq k|t|$$

para algún $k > 0$. Pero

$$|H(x+t) - H(x) - tH'(x)| = \left| \int_0^t (H'(x+\tau) - H'(x)) d\tau \right|.$$

Entonces existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K} \leq \left| \frac{H(x+t) - H(x)}{t} \right| \leq K$$

para todo par $x, x+t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Equivalentemente,

$$\frac{1}{K} \leq \left| \frac{H(x) - H(y)}{x - y} \right| \leq K$$

para todo par $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Esto es, H satisface la condición bi-Lipschitz

$$\frac{1}{K}|x - y| \leq |H(x) - H(y)| \leq K|x - y|$$

y por lo tanto, debe ser cuasisimétrica. □

Teorema 2.4.3. (Extensión de Beurling-Ahlfors) *Supongamos que $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo cuasisimétrico que preserva orientación. Entonces existe una extensión $\hat{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ que es cuasiconforme en \mathbb{D} .*

Beurling y Ahlfors desarrollaron gran parte de la teoría de extensión de funciones cuasiconformes en [Ahl06].

2.5. Modelos dinámicos

En el proceso de cirugía cuasiconforme la idea fundamental es construir funciones con ciertas propiedades dinámicas. Éstas funciones muy a menudo no son holomorfas, pero sí *cuasiregulares*.

2.5.1. Funciones cuasiregulares

Recordemos que una función holomorfa es localmente conforme excepto en un conjunto discreto de puntos (en la que no es inyectiva).

Definición 2.5.1. Una función $g : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ es K -cuasiregular si y sólo si puede expresarse como $g = f \circ \phi$ donde $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es K -cuasiconforme y $f : \phi(U) \rightarrow g(U)$ es holomorfa.

De esta definición se sigue que g es localmente K -cuasiconforme excepto en un conjunto discreto de puntos, que viene a ser el conjunto de puntos críticos de f , $CP(f)$ (puntos alrededor de los cuales f no es inyectiva).

Proposición 2.5.2. (Propiedades de las funciones cuasiregulares)

- (1) Si $g_1 : U \rightarrow V$ y $g_2 : V \rightarrow W$ son K_1 y K_2 -cuasiregulares respectivamente, entonces $g_2 \circ g_1$ es $K_1 K_2$ -cuasiregular.
- (2) Una función $g : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es holomorfa si y sólo si es 1-cuasiregular.
- (3) Si $f : U \rightarrow U'$ es holomorfa y $\phi : U' \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es K -cuasiconforme, entonces $g = \phi \circ f$ es K -cuasiregular.
- (4) Si $g : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es K -cuasiconformemente conjugada a $f : U \rightarrow V$ y f es holomorfa entonces g es K -cuasiregular.

Esta última propiedad da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.5.3. Una función g cuasiregular es un modelo dinámico de una función holomorfa f si existe ϕ cuasiconforme tal que $\phi \circ g = f \circ \phi$, esto es, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{g} & V \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 U & \xrightarrow{f} & V
 \end{array}$$

Esta definición nos dice, en cierto modo, que las propiedades dinámicas de una función holomorfa se preservan bajo conjugación cuasiconforme con una función cuasiregular.

Lema 2.5.4. (Lema de Weyl para funciones cuasiregulares) *Si $g : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función K -cuasiregular para algún $K \geq 1$ y $g^* \mu_0 = \mu_0$ en casi todo punto de U , entonces g es holomorfa.*

Demostración. Como g es K -cuasiregular, podemos escribirla como $g = f \circ \phi$ con f holomorfa y ϕ K -cuasiconforme. Entonces,

$$\mu_0 = g^* \mu_0 = (f \circ \phi)^* \mu_0 = \phi^* (f^* \mu_0) = \phi^* \mu_0$$

en casi todo punto de U . Del Lema de Weyl (2.2.7) se sigue que ϕ es conforme, y por lo tanto, holomorfa. Luego, g es holomorfa. □

El pullback por una función cuasiregular de una forma de Beltrami está bien definida en casi todo punto. Ésto se sigue de la continuidad absoluta de funciones cuasiconformes y holomorfas con respecto a la medida de Lebesgue. Como una función cuasiregular es de la forma $g = f \circ \phi$, con f holomorfa y ϕ cuasiconforme, entonces g y sus ramas inversas envían conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero.

2.5.2. Lema fundamental para cirugía

Estamos interesados ahora en construir un modelo dinámico para alguna propiedad dinámica prescrita.

Teorema 2.5.5. (Lema fundamental para cirugía, [Shi87]) *Sea $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cuasiregular. Supongamos que existe una estructura casi compleja σ g -invariante con forma de Beltrami μ tal que $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Entonces*

existe una función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa tal que g es cuasiconformemente conjugada a f .

Demostración. Por el Teorema de Integrabilidad (Teorema 2.3.1), existe una función cuasiconforme $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\phi^* \mu_0 = \mu$. Definimos $f = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Como g es cuasiregular, puede escribirse como $g = h \circ \varphi$ donde h es holomorfa y φ es cuasiconforme. Entonces

$$f = \phi \circ (h \circ \varphi) \circ \phi^{-1} = \phi \circ h \circ (\varphi \circ \phi^{-1}).$$

Tenemos así, que $h \circ (\varphi \circ \phi^{-1})$ es cuasiregular. Como una función cuasiconforme es una función cuasiregular inyectiva, y la composición de dos funciones cuasiregulares es cuasiregular (Propiedad (1) de 2.5.2), entonces f es cuasiregular, y

$$f^* \mu_0 = (\phi \circ g \circ \phi^{-1})^* \mu_0 = (\phi^{-1})^* \circ g^* \mu = (\phi^{-1})^* \mu = \mu_0$$

en casi todo punto, pues μ es g -invariante. Por el Lema de Weyl para funciones cuasiregulares (Lema 2.5.4), f es holomorfa. □

Capítulo 3

Generando discos de Siegel a partir de anillos de Herman

En este capítulo presentamos una demostración del Teorema de Cirugía de Ghys para el caso particular de una familia biparamétrica de funciones Blaschke. Este procedimiento nos permite generar discos de Siegel a partir de anillos de Herman. Finalmente estudiamos algunas propiedades de la familia resultante de la cirugía, su dinámica y el radio conforme asociado a sus discos de Siegel.

Definición 3.0.1. (*Número de rotación de curvas invariantes*) Sea γ una curva de Jordan orientada en $\hat{\mathbb{C}}$, y $f : \gamma \rightarrow \gamma$ un homeomorfismo. Sea $\varphi : S^1 \rightarrow \gamma$ un homeomorfismo conforme que parametriza a γ . Entonces $\tilde{f} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es un homeomorfismo de S^1 conjugado topológicamente a f . Definimos el número de rotación de f en γ como el número de rotación de \tilde{f} en S^1 , esto es,

$$\text{rot}(f, \gamma) := \text{rot}(\tilde{f}, S^1) = \text{rot}(\tilde{f}).$$

Procedemos ahora a enunciar el Teorema de Ghys en su forma general.

Teorema 3.0.2. (Teorema de Ghys) *Sea γ una curva de Jordan orientada en $\hat{\mathbb{C}}$ y $f : U \rightarrow V$ una función holomorfa donde U, V son vecindades de γ , y tal que $f|_{\gamma} : \gamma \rightarrow \gamma$ es un homeomorfismo que preserva orientación. Supongamos que $\rho = \text{rot}(f, \gamma)$ es irracional, y $f|_{\gamma}$ es una función cuasi-simétricamente conjugada a la rotación rígida R_{ρ} en S^1 . Entonces existe*

una función cuasiconforme $\phi : \text{int}(\gamma) \cup U \rightarrow \mathbb{D}$ y una función holomorfa de $F : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que F tiene un disco de Siegel con número de rotación ρ que contiene a $\phi(\text{int}(\gamma))$ y $F = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $\mathbb{D} \setminus \phi(\text{int}(\gamma))$.

La demostración del teoremas puede consultarse en [BF14].

3.1. Procedimiento de cirugía cuasiconforme sobre una familia Blaschke

Recordemos la familia definida en la sección 1.4.

$$\mathfrak{B}_d = \left\{ B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z-a}{1-az} \right)^d, 0 \leq \alpha < 1, a > 2d+1 \right\}.$$

Consideremos $B_{\alpha,a} \in \mathfrak{B}_d$, y recordamos la definición del conjunto de nivel

$$T_d(\rho) = \{(\alpha, a) \in [0, 1) \times (2d+1, \infty) : \text{rot}(B_{\alpha,a}, S^1) = \rho\}.$$

Teorema 3.1.1. *Sea $\rho \in \mathcal{B}$, y $(\alpha, a) \in T_d(\rho)$. Entonces existe una función cuasiconforme $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y una función racional $P : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que P tiene un disco de Siegel con número de rotación ρ que contiene a $\phi(\mathbb{D})$ y $P = \phi \circ B_{\alpha,a} \circ \phi^{-1}$ en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \phi(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sean $(\alpha, a) \in T(\rho)$ con $\rho \in \mathcal{B}$. $B_{\alpha,a}|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ es un difeomorfismo de S^1 y preserva orientación. Por el Teorema de Conjugación Local de Yoccoz (Teorema 1.4.20), $B_{\alpha,a}$ es linealizable, esto es, $B_{\alpha,a}$ tiene un anillo de Herman \mathcal{H} alrededor de S^1 , la cual es una curva invariante. Equivalentemente, ésto se sigue del Teorema de Chu (Teorema 1.5.7).

Sea $\psi : A_R \rightarrow \mathcal{H}$ la función conforme que conjuga $B_{\alpha,a}$ y $R_\rho(z) = e^{2\pi i \rho} z$, donde $A_R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R\}$ con R máximo. Podemos normalizar ψ apropiadamente tal que $\psi|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$, pues S^1 es una curva invariante en \mathcal{H} y en A_R bajo $B_{\alpha,a}$ y R_ρ respectivamente.

Por ser $\psi|_{S^1}$ un difeomorfismo, el Lema 2.4.2 nos permite concluir que es una función cuasisimétrica. Así, usando el Teorema de Extensión de

Beurling-Ahlfors (Teorema 2.4.3), esta función se puede extender a una función $\hat{\psi} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ que es cuasiconforme en \mathbb{D} . Usaremos $\hat{\psi}$ como “función de pegado”, esto es, definimos $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como sigue:

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} (\hat{\psi} \circ R_\rho \circ \hat{\psi}^{-1})(z) & \text{si } z \in \overline{\mathbb{D}} \\ B_{\alpha,a}(z) & \text{si } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}. \end{cases}$$

Como $\hat{\psi}^{-1}|_{S^1} = \psi^{-1}|_{S^1}$, $\hat{\psi}|_{S^1} = \psi|_{S^1}$, y $B_{\alpha,a}|_{S^1} = (\psi \circ R_\rho \circ \psi^{-1})|_{S^1}$, tenemos que \hat{f} es continua. Además, es cuasiregular en \mathbb{D} , por ser $\hat{\psi} \circ R_\rho \circ \hat{\psi}^{-1}$ cuasiconforme en \mathbb{D} .

Definimos ahora una forma de Beltrami sobre la esfera de Riemann recursivamente: para $n \geq 1$,

$$\mu = \begin{cases} (\hat{\psi}^{-1})^* \mu_0 & \text{en } \mathbb{D} \\ (\hat{f}^n)^* \mu & \text{en } \hat{f}^{-n}(\mathbb{D}) \\ \mu_0 & \text{en } \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_n \hat{f}^{-n}(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Estamos definiendo μ en \mathbb{D} como el pushforward de μ_0 por $\hat{\psi}$ (o el pullback por $\hat{\psi}^{-1}$) y luego propagando μ en $\hat{\mathbb{C}}$ por la dinámica de \hat{f} . Esta forma de Beltrami está bien definida: $\hat{\psi}$ es cuasiconforme en \mathbb{D} y por lo tanto, su dilatación es acotada en \mathbb{D} . Además, \mathbb{D} es invariante por \hat{f} . Fuera de \mathbb{D} , los pullbacks se hacen por $B_{\alpha,a}$, pues es ésta la definición de \hat{f} que genera las preimágenes de \mathbb{D} , y $B_{\alpha,a}$ es holomorfa. Así, μ tiene dilatación acotada en $\hat{\mathbb{C}}$.

Además, en \mathbb{D} , tenemos, por covarianza del pullback,

$$\hat{f}^* \mu = (\hat{\psi} \circ R_\rho \circ \hat{\psi}^{-1})^* (\hat{\psi}^{-1})^* \mu_0 = (R_\rho \circ \hat{\psi}^{-1})^* \mu_0 = (\hat{\psi}^{-1})^* \mu_0 = \mu$$

pues R_ρ es conforme. Así, μ es \hat{f} -invariante.

Luego, por el Lema Fundamental para Cirugía (Lema 2.5.5), existe $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cuasiconforme tal que $\phi^* \mu_0 = \mu$. Definimos $P = \phi \circ \hat{f} \circ \phi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Esta función es cuasiregular, y satisface

$$P^* \mu_0 = (\phi \circ \hat{f} \circ \phi^{-1})^* \mu_0 = (\phi^{-1})^* \circ \hat{f}^* (\phi^* \mu_0) = (\phi^{-1})^* (\hat{f}^* \mu) = (\phi^{-1})^* \mu = \mu_0.$$

Por el Lema de Weyl (Lema 2.5.4), P es holomorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ y por lo tanto, una función racional. Como P es cuasiconformemente conjugada a R_ρ en \mathbb{D} , $\phi(\mathbb{D})$ está contenido en un disco de Siegel de P . El disco de Siegel tiene número de rotación ρ , pues éste es invariante bajo conjugación por homeomorfismos.

□

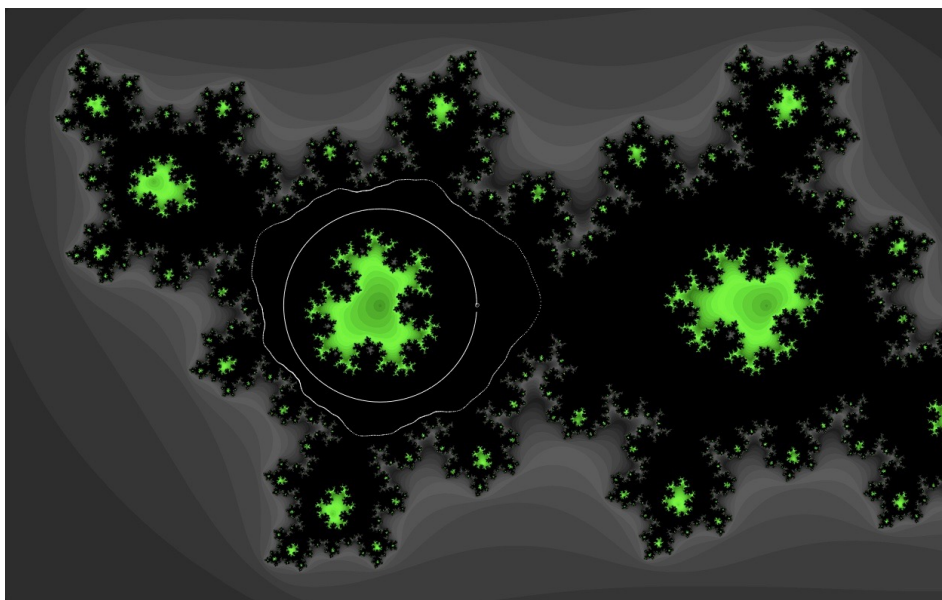


Figura 3.1: Anillo de Herman para la función $B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z-a}{1-az}\right)^d$ con $d = 1$, $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $a = 4$. Se muestra el círculo unitario contenido en el anillo y una órbita en el anillo bajo la acción de $B_{\alpha,a}$.

3.2. Propiedades de la familia polinomial resultante

La función ϕ cuasiconforme provista por el Lema Fundamental para Cirugía en el procedimiento descrito anteriormente es única salvo por post-

composición con automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$. Con cada normalización de ϕ , la función resultante puede tener distinta forma.

Teorema 3.2.1. *Bajo la normalización de ϕ dada por $\phi(0) = 0$, $\phi(\infty) = \infty$, y $\phi(a) = a$, la función P resultante del procedimiento dado por el Teorema 3.1.1 es un polinomio de grado $d + 1$ de la forma $P(z) = \lambda z(z - a)^d$, con $a > 2d + 1$.*

Demostración. Veamos que bajo la normalización de ϕ elegida, la función resultante no tiene polos, tiene un cero simple en $z = 0$, y uno de orden d en $z = a$. En efecto,

$$P(z) = \infty \implies \phi(\hat{f}(\phi^{-1}(z))) = \infty \implies \hat{f}(\phi^{-1}(z)) = \infty$$

por la normalización de ϕ dada como hipótesis. Pero por la definición de \hat{f} , obtenemos que $\phi^{-1}(z) = \infty$ y así, $z = \infty$. En consecuencia, P no tiene polos en \mathbb{C} (es entera en \mathbb{C}) y fija ∞ . Con la normalización de ϕ , $P^{-1}(\infty) = \infty$ y $z = \infty$ sigue siendo un polo de multiplicidad $d + 1$ para P .

Entonces P es un polinomio con un disco de Siegel alrededor de $z = 0$ y número de rotación ρ . Luego, $z = 0$ es un punto fijo y cero simple de P , y $P'(0) = e^{2\pi i \rho}$.

Finalmente, $B_{\alpha, a}$ sólo tiene un cero en $z = a$ fuera de $\overline{\mathbb{D}}$, y éste tiene multiplicidad d . Entonces, si $U = U(a), V = V(0)$ son vecindades suficientemente pequeñas de a y 0 respectivamente, $B_{\alpha, a}$ actúa $d : 1$ de U a V .

Como ϕ es un homeomorfismo, el punto $z = 0$ tiene d preimágenes bajo \hat{f} que se encuentran fuera de $\overline{\mathbb{D}}$. Pero en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, \hat{f} actúa como $B_{\alpha, a}$, por lo que todas estas preimágenes corresponden a $z = a$. Entonces, $z = a$ es un cero de P con multiplicidad d .

Así, P debe ser un polinomio de la forma

$$P(z) = \lambda z(z - a)^d$$

con $a > 2d + 1$, y donde λ es tal que $P'(0) = e^{2\pi i \rho}$.

□

Podemos calcular

$$P'(z) = \lambda[(z-a)^d + zd(z-a)^{d-1}] = \lambda(z-a)^{d-1}[(1+d)z-a].$$

$$\text{Luego, } P'(0) = \lambda(-a)^d = e^{2\pi i\rho} \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^{\pi i(2\rho-d)}}{a^d}.$$

Sea \mathcal{S} el disco de Siegel asociado a la dinámica de P . Los puntos críticos de P son $\frac{a}{d+1}$ y a , con $a > 2d + 1$, como se vio en el Teorema 3.2.1. La órbita del punto crítico $\frac{a}{d+1}$ debe acumularse en la frontera de \mathcal{S} , y de hecho, el punto $\frac{a}{d+1}$ pertenece a ella si $\rho \in \mathcal{H}$, en virtud del Teorema 1.5.3. Así, el radio interno $\iota(\mathcal{S}) \leq \frac{a}{d+1}$. Usando la desigualdad de la Proposición 1.4.23, obtenemos una cota para el radio conforme, que establecemos a continuación.

Proposición 3.2.2. *Con las consideraciones anteriores sobre \mathcal{S} , y $\rho \in \mathcal{H}$, $\sigma(\mathcal{S}) \leq \frac{4a}{d+1}$.*

Notemos que existe una dependencia de a sobre d : conforme d crezca, a también deberá hacerlo para asegurar la existencia de un anillo de Herman de $B_{\alpha,a}$ y con ello poder realizar el procedimiento de cirugía cuasiconforme.

Por otra parte, el punto crítico $\frac{a}{d+1}$ pertenece a la frontera del disco de Siegel \mathcal{S} si $\rho \in \mathcal{H}$, y en este caso el radio conforme del disco crece en función de a y d .

3.3. La función de radio conforme

En la sección 1.4.3 hemos definido el radio conforme para discos de Siegel. Tomando como referencia [Mil06], extenderemos esta definición para cuencas de atracción.

Definición 3.3.1. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional con un punto fijo en $z_0 = 0$ y multiplicador λ en $z_0 = 0$. Para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, y toda función racional $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con multiplicador λ , definimos el radio conforme $\sigma(\lambda)$ como el mayor número tal que existe una función univalente $\psi_\lambda : D(0, \sigma) \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfice

$$\psi_\lambda \circ f(z) = \psi_\lambda(\lambda z)$$

con $\psi_\lambda(0) = 0$ y $\psi'_\lambda(0) = 1$. Definimos $\sigma \equiv 0$ si tal función no existe. En particular, $\sigma(0) = 0$.

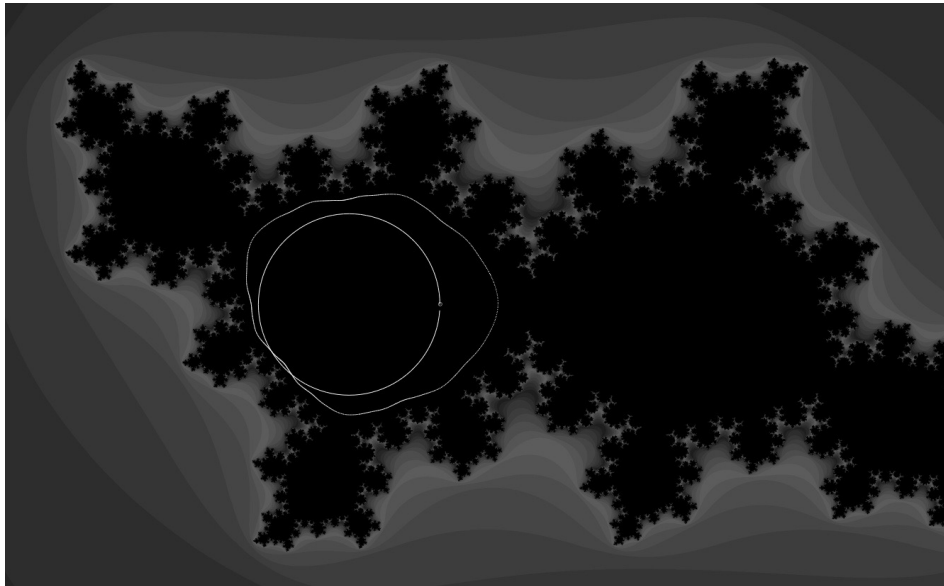


Figura 3.2: Disco de Siegel asociado al polinomio $P(z) = \lambda z(z - a)^d$ con $d = 1$, $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $a = 4$. Se muestra el círculo unitario y una órbita en el disco bajo la acción de P .

Sabemos, por el Teorema de Linealización de Koenigs (Teorema 1.4.7), que si $\lambda \in \mathbb{D}^*$, y 0 es un punto fijo atractor para f , existe una función definida en la cuenca de atracción $\mathcal{A}(0)$

$$\varphi_\lambda : \mathcal{A}(0) \rightarrow D(0, r)$$

que satisface la ecuación de Schröder en $\mathcal{A}(0)$

$$f \circ \varphi_\lambda(z) = \lambda \cdot \varphi_\lambda(z).$$

Existe una función inversa local de φ_λ que se puede extender a una región en cuya frontera hay un punto crítico de f . Ésta es la función que denotamos por ψ_λ .

Ahora, en lugar de considerar la normalización descrita en el Teorema 3.2.1, consideremos la normalización $\phi(0) = 0$, $\phi(\infty) = \infty$, $\phi(a) = b$ de la función cuasiconforme obtenida del procedimiento desarrollado en el inicio de esta sección, con $b \in \overline{\mathbb{D}}$. Recordemos que en el Teorema 3.2.1 teníamos $a > 2d + 1$, como consecuencia de las hipótesis sobre los productos de Blaschke $B_{\alpha,a}$ del Teorema 3.1.1.

El polinomio resultante con la nueva normalización de ϕ es de la forma

$$P_b(z) = z(z - b)^d.$$

Estudiemos la familia $\{P_b\}_{b \in \overline{\mathbb{D}}}$. Para cada $b \in \overline{\mathbb{D}}$ y $d \geq 1$,

$$P'_b(z) = (z - b)^{d-1}((d+1)z - b).$$

Por lo tanto, los puntos críticos de P_b vienen dados por $\{\frac{b}{d+1}, b\}$. Luego,

$$\lambda = P'_b(0) = (-b)^d \in \overline{\mathbb{D}} \iff b \in \overline{\mathbb{D}}. \quad (3.1)$$

Proposición 3.3.2. *Para P_b , con $b \in \overline{\mathbb{D}}$, la función $\sigma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es superiormente semicontinua. Si $b \in \mathbb{D}$, podemos definir $\sigma(b) = |\eta(b)|$, donde η es una función holomorfa en \mathbb{D} .*

Demostración. Consideremos $b \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, y sea $\mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}(0)$ la región a la que se puede extender de forma univalente la función $\psi_b : D(0, \sigma(b)) \rightarrow \mathcal{A}_c$, inversa de la función de Koenigs $\varphi_b : \mathcal{A}(0) \rightarrow D(0, \sigma(b))$, con $\varphi_b(0) = 0$, $\varphi'_b(0) = 1$, y $P_b \circ \varphi_\lambda(z) = \lambda \cdot \varphi_\lambda(z)$.

Si $|z| > 2$, entonces $|z - b|^d > 1$, y así, $|P_b(z)| = |z||z - b|^d > |z|$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_c \subset D(0, 2)$, esto es, ψ_b toma valores en $D(0, 2)$. Como $|\psi_b(z)| \leq 2$, y $\varphi'_b(0) = 1$, tenemos, por el Lema de Schwarz,

$$1 = \frac{1}{|\varphi'_b(0)|} = |\psi'_b(0)| \leq \frac{2}{\sigma(b)}$$

de donde se sigue que $\sigma(b) \leq 2$. Entonces σ está acotada.

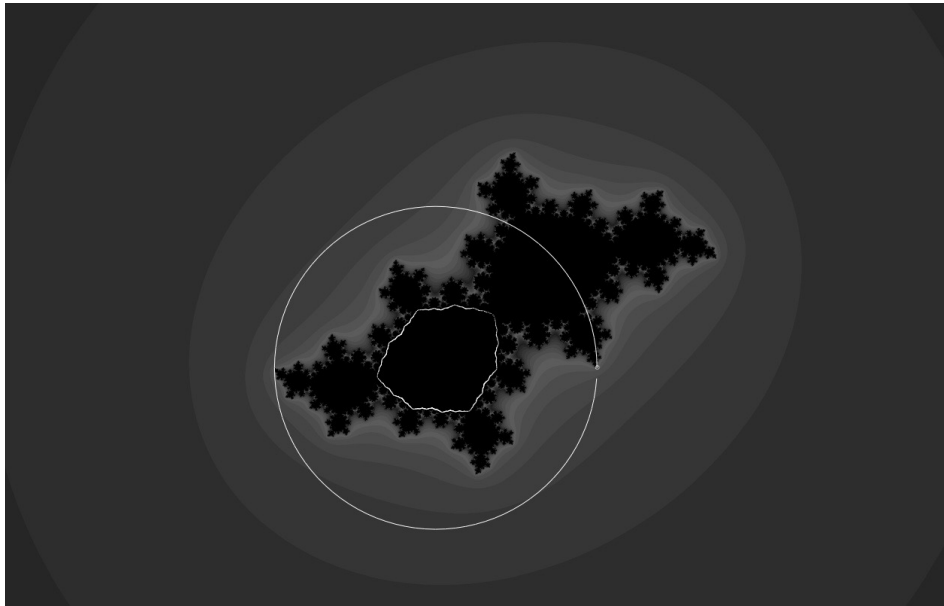


Figura 3.3: Disco de Siegel asociado al polinomio $P_b(z) = z(z - b)^d$ con $d = 1$ y $b = e^{2\pi ir}$, con $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Se muestra el círculo unitario y una órbita bajo la acción de P_b contenida en su disco de Siegel.

Queremos ver ahora que es superiormente semicontinua en \mathbb{D}^* , esto es,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sup_{z \neq z_0} \sigma(z) \leq \sigma(z_0)$$

para todo $z_0 \in \mathbb{D}$, o alternativamente, el conjunto $B_0 = \{z \in \mathbb{D}^* : \sigma(z) \geq \sigma_0\}$ es cerrado para cada $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Para ello, notemos que $\sigma(z) \geq \sigma_0$ si y sólo si existe una función univalente $\psi_{\sigma_0} : D(0, 2) \rightarrow D(0, \sigma_0)$ (restricción de ψ_b) que satisface la ecuación de Schröder

$$P_b \circ \varphi_{\sigma_0}(z) = \lambda \cdot \varphi_{\sigma_0}(z).$$

Definimos

$$\mathcal{F} = \{\psi : D(0, \sigma_0) \rightarrow D(0, 2) \mid \psi \text{ es univalente, } \psi(0) = 0, \psi'(0) = 1, P_b \circ \psi(z) = \psi(\lambda z)\}.$$

Como $D(0, \sigma_0)$ y $D(0, 2)$ son dominios acotados, el Teorema de Montel nos permite concluir que \mathcal{F} es normal. Por lo tanto, para toda sucesión $\{\psi_n\} \subset \mathcal{F}$ existe $\{\psi_{n_k}\} \subset \{\psi_n\}$ tal que $\psi_{n_k} \rightarrow \psi$ uniformemente en compactos de $D(0, \sigma_0)$. Veamos que $\psi \in \mathcal{F}$. Por la convergencia uniforme, tenemos $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ y $P_b \circ \psi(z) = \psi(\lambda z)$ en $D(0, \sigma_0)$. Como un corolario del Teorema de Hurwitz (Corolario 1.3.3), tenemos que la función límite de funciones univalentes que convergen uniformemente en compactos de $D(0, \sigma_0)$ es univalente o constante. Pero $\psi'(0) = 1$, lo que implica que ψ no puede ser constante y por lo tanto debe ser univalente. Así, $\psi \in \mathcal{F}$.

Veamos ahora cómo se traduce esta propiedad de \mathcal{F} a la cerradura de B_0 . Dada una sucesión $\{b_k\} \in B_0$ tal que $b_k \rightarrow b$ cuando $k \rightarrow \infty$, veremos que $b \in B_0$. Consideremos la sucesión de funciones $\{\psi_{\sigma(b_k)}\} = \{\psi_k\} \subset \mathcal{F}$. Por ser \mathcal{F} una familia normal, existe una subsucesión $\{\psi_{k_j}\}$ tal que $\psi_{k_j} \rightarrow \hat{\psi}$ uniformemente en compactos de $D(0, \sigma_0)$ y $\hat{\psi} \in \mathcal{F}$. Esto es, existe \hat{b} tal que $\hat{\psi} = \psi_{\sigma(\hat{b})}$ pues $\sigma(b_{k_j}) \geq \sigma_0$ para todo k_j y en consecuencia, $\sigma(\hat{b}) \geq \sigma_0$. Como $b_{k_j} \rightarrow \hat{b}$, y $\{b_{k_j}\} \subset \{b_k\}$, entonces $\hat{b} = b \in B_0$. Así, tenemos que B_0 es cerrado y σ es superiormente semicontinua.

Definamos ahora

$$\eta(b) = \varphi_b\left(\frac{b}{d+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_b^n\left(\frac{b}{d+1}\right)}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_b^n\left(\frac{b}{d+1}\right)}{(-b)^{dn}}.$$

Esto es, la evaluación de la función de Koenigs en el punto crítico $\frac{b}{d+1}$ para $b \in \mathbb{D}^*$. La última igualdad se debe a (3.1). El punto crítico $\frac{b}{d+1}$ pertenece a la cuenca inmediata de atracción $\mathcal{A}^*(0)$, como consecuencia del Lema 1.4.7. Como en el límite hay convergencia uniforme, la función $\varphi_b(z)$ depende de manera holomorfa de z y b . Por lo tanto, $\eta(b)$ es una función holomorfa de b . Nuevamente por el Lema 1.4.7, $\sigma(b) = |\eta(b)|$, con $b \in \mathbb{D}^*$. Podemos extender esta función a \mathbb{D} . En efecto, por la continuidad superior de σ , $\eta(b) \rightarrow 0$ cuando $b \rightarrow 0$. Entonces η tiene una singularidad removible en 0, y definimos $\eta(0) = \sigma(0) = 0$.

□

Hemos visto que $\eta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y acotada. Es posible tomar límites radiales $\lim_{r \rightarrow 1} \eta(re^{2\pi i\theta})$ para $\theta \in S^1$ fijo. Si este límite existe y es

positivo, $P_{e^{2\pi i\theta}}$ tiene un disco de Siegel con radio conforme

$$\sigma(e^{2\pi i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} \eta(re^{2\pi i\theta}).$$

En el caso en que $d = 1$, J.C. Yoccoz probó en [Yoc95] que el límite $\lim_{r \rightarrow 1} \eta(re^{2\pi i\theta})$ existe siempre. Si es positivo, es igual al radio conforme del disco de Siegel de $P_{e^{2\pi i\theta}}$. Esto ocurre cuando θ es un número de tipo Brjuno.

Para este caso también se puede estimar numéricamente la función η en el disco unitario \mathbb{D} desarrollándola en series de potencias alrededor del origen. El procedimiento puede verse en [Mil06].

3.4. Conclusiones

Entre las consecuencias inmediatas de desarrollar procedimientos de cirugía cuasiconforme se encuentra la posibilidad de estudiar propiedades de las funciones que resultan de las construcciones que en otros casos sería, probablemente, más complicado estudiar. Como trabajo a futuro nos interesaría encontrar cotas más precisas para el radio conforme de discos de Siegel para las familias polinomiales resultantes y estudiar con más profundidad las propiedades dinámicas del espacio de parámetros de estas familias.

El proceso de cirugía cuasiconforme que estudiamos en este trabajo muestra sólo una pequeña parte de los procedimientos de este tipo que pueden llevarse a cabo, así como el estudio de ciertos aspectos de la dinámica holomorfa que han tenido auge en las últimas décadas, a partir de los Principios de Cirugía de Shishikura, el Teorema de Enderezamiento de Sullivan, el estudio de funciones de tipo polinomial y la teoría de renormalización. Así mismo, la conjugación cuasiconforme da lugar a una relación de equivalencias que permite definir el espacio de Teichmüller de una superficie de Riemann, y con ello, aplicar herramientas de geometría diferencial y topología algebraica para estudiar estos espacios, lo que se conoce como Teoría de Teichmüller.

Referencias

- [Ahl73] Lars V. Ahlfors. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*. First Edition. Higher Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [Ahl06] Lars V. Ahlfors. *Lectures in quasiconformal mappings*. Second Edition. University Lecture Series. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2006.
- [BF14] Bodil Branner y Núria Fagella. *Quasiconformal surgery on holomorphic dynamics*. First Edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. New York: Cambridge University Press, 2014.
- [BC04] Artur Avila, Xavier Buff y Arnaud Chéritat. “Siegel disks with smooth boundary”. En: *Acta Mathematica* 193 (2004), págs. 1-30.
- [CG93] Lennart Carleson y Theodore Gamelin. *Complex Dynamics*. Tracts in Mathematics. New York: Springer, 1993.
- [Chu06] Haifeng Chu. “On the Blaschke circle diffeomorphisms”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 143.3 (2006), págs. 1169-1182.
- [Chu18] Haifeng Chu. “Surgery on Herman rings of the standard Blaschke family”. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 164.1 (2018), págs. 265-312. DOI: 10.3934/2018003.
- [Con95] John B. Conway. *Functions of one complex variable*. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [Hub06] John Hamal Hubbard. *Teichmüller Theory. Volume 1*. First Edition. Ithaca, NY: Matrix Editions, 2006.

- [KH97] Anatole Katok y Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. New York: Cambridge University Press, 1997.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Third Edition. Annals of Mathematics Studies. New Jersey: Princeton University Press, 2006.
- [Mon27] Paul Montel. *Leçons sur les familles normales*. First Edition. Paris: Gauthier-Villars, 1927.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third Edition. International Series. McGraw-Hill, 1987.
- [Shi87] Mitsuhiro Shishikura. “On the quasiconformal surgery of rational functions.” En: *Annales scientifiques de l’École Normal Supérieure* 20.1 (1987), págs. 1-29.
- [SS03] Elias M. Stein y Rami Shakarchi. *Complex analysis*. Second Edition. Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2003.
- [Sul85] Dennis Sullivan. “Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains.” En: *Annals of Mathematics* 122.2 (1985), págs. 401-418.
- [Yoc02] Jean Christophe Yoccoz. “Analytic linearization of circle diffeomorphisms”. En: *Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998)*. Berlin: Springer, 2002, págs. 125-173.
- [Yoc95] Jean Christophe Yoccoz. “Petits diviseurs en dimension 1”. En: *Astérisque. Soc. Math. France* 231 (1995).
- [Zak01] Saeed Zakeri. *Old and new on Siegel quadratic disks*. 2001. URL: <http://qcpages.qc.cuny.edu/~zakeri/papers/survey.pdf> (visitado 21-05-2018).