



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

DINÁMICA DE PRODUCTOS BLASCHKE DE GRADO $2d+1$

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias
con Orientación en
Matemáticas Básicas

Presenta

Melida Carranza Trejo

Directora de Tesis:

Dra. Mónica Moreno Rocha

Autorización de la versión final

Agradecimientos

En estas líneas me es imposible nombrar a todas las personas que contribuyeron de alguna forma a la realización de este trabajo.

En primer lugar, doy las gracias a mi familia que me ha apoyado y siempre ha estado presente en cualquier proyecto que he decidido emprender en mi vida. En particular a mis padres Fco. Javier Carranza Torres y Humbelina Trejo Valencia, cuya dirección me ha permitido concluir una carrera profesional y ahora una maestría.

Quisiera mencionar el aprecio que le tengo a mi directora de tesis, la Dra. Mónica Moreno Rocha, y reconocerle el tiempo, la paciencia y la confianza que me ha otorgado, sin lo cual no habría sido posible esta tesis.

Le agradezco a los sinodales, Dr. Xavier Gómez Mont Ávalos y Dr. Ricardo Vila Freyer, por su tiempo para leer este trabajo y por los comentarios para que este escrito mejore.

A Sebastian Quintanilla, por todo el apoyo brindado. Por siempre buscar la manera de tenerme de buenas, por su apoyo e infinita paciencia.

A Daniel Perales y Julio A. Barrera, con quienes tuve la fortuna de compartir departamento y sentirme como en casa.

A mis compañeros y amigos con quienes compartí tantos buenos momentos. En particular a mi amigo Carlos E. Díaz Aguilera, pues su amistad y alegría compartida hizo de estos dos años un trayecto de mi vida que nunca olvidaré.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca de maestría que me fue otorgada (no. 444848). Muy cierto es que cursar un posgrado sin apoyo económico como este sería mucho más complicado. Asimismo, agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT) por todas las facilidades ofrecidas para la conclusión y continuación de mis estudios.

Resumen

Dada una función racional f definida sobre la esfera de Riemann, consideramos el sistema dinámico obtenido al iterar f . Esta función descompone a la esfera en dos conjuntos ajenos, el conjunto donde los iterados de f forman una familia normal, el *conjunto de Fatou*, y su complemento, el *conjunto de Julia*. Estos conjuntos forman una partición dinámica de la esfera de Riemann.

El propósito de la presente tesis es estudiar la dinámica de la familia de *productos Blaschke generalizados* de grado $2d + 1$ dada por

$$B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)^d$$

donde $a, z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [0, 1)$ y $d \geq 1$.

Primero estudiamos sus propiedades básicas, analíticas y dinámicas, las cuales resultan depender fuertemente del parámetro a . Más aún, damos un criterio de conectividad del conjunto de Julia a partir de dicho parámetro, estudiando la conectividad de los tipos de *componentes de Fatou* que pueda tener $B_{\alpha,a}$.

Finalmente, proporcionamos un estudio de las simetrías del plano de parámetros, analizamos la dinámica asociada a ciertas regiones de espacio de a -parámetros que pueden ser descritas por elipses o rectas, y describimos algunas componentes hiperbólicas asociadas a $B_{0,a}$.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Familias normales y teorema de Montel	1
1.2. Dinámica racional	2
1.2.1. Los conjuntos de Fatou y Julia	3
1.2.2. Dinámica local de puntos periódicos	4
1.2.3. Componentes de Fatou	9
1.2.4. La fórmula de Riemann-Hurwitz	11
1.3. Productos de Blaschke y homeomorfismos del círculo	12
1.3.1. Número de rotación racional e irracional	13
1.3.2. Productos Blaschke	13
2. Plano dinámico	15
2.1. La familia Blaschke.	15
2.1.1. Propiedades de $B_{\alpha,a}$	16
2.2. Órbitas críticas	18
2.3. Conectividad del conjunto de Julia	22
3. Espacio de parámetros	28
3.1. Simetría del espacio de parámetros.	28
3.2. Líneas parabólicas	30
3.2.1. Bifurcación parabólica	31
3.3. Ciclos repulsores, atractores y parabólicos	34
3.4. Elipses repulsoras, atractoras y parabólicas	38
3.5. Parámetros hiperbólicos	43
Bibliografía	45

Introducción

Esta tesis pertenece al área de sistemas dinámicos discretos, particularmente a dinámica holomorfa en una variable compleja. La teoría de la dinámica holomorfa, cuyas raíces se encuentran en el siglo XIX, estudia la iteración de funciones holomorfas. Fueron Kœnigs, Schröder y otros, quienes comenzaron con un estudio local del problema, y la teoría creció notablemente durante la primera mitad del siglo XX, cuando muchas de las ideas centrales y técnicas se desarrollaron gracias a la investigación del método de Newton para encontrar raíces de polinomios. Pierre Fatou y Gaston Julia se enfrentaron al problema desde un punto de vista más general. Ellos dieron una clasificación de las órbitas estables e inestables en el sentido de *normalidad*, introducido por Paul Montel, ofreciendo al mundo las definiciones de *conjunto de Fatou* y *conjunto de Julia* de una función holomorfa. Estos conjuntos forman una partición dinámica de la esfera de Riemann.

Dada una función racional $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, donde $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la esfera de Riemann, consideramos el sistema dinámico obtenido al iterar f . La normalidad de la familia de iterados divide $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos conjuntos totalmente invariantes: el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, donde los iterados forman una familia normal, y su complemento, el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$. El conjunto $\mathcal{F}(f)$ es abierto, mientras que $\mathcal{J}(f)$ es cerrado.

Las componentes conexas de $\mathcal{F}(f)$ se llaman *componentes o dominios de Fatou*. En los 80's, Sullivan prueba que para una función racional de grado al menos 2, toda componente de Fatou es periódica o preperiódica, [Sul85]. Por otro lado, el teorema de clasificación de componentes periódicas describe la dinámica local de la función sobre una componente periódica U , la cual se reduce a una de cinco posibilidades: U determina un *dominio de atracción* (y se subclasifica como súperatractora, atractora o parabólica), o un *dominio de rotación* (U es un disco de Siegel o un anillo de Herman).

El propósito de la presente tesis es estudiar la dinámica de una familia particular de *productos Blaschke generalizados*. Un producto Blaschke es una función racional que se caracteriza por dejar invariante el círculo unitario, \mathbb{S}^1 . En consecuencia, es posible considerar la acción de un producto Blaschke sobre el círculo unitario como un endomorfismo del círculo. Bajo condiciones extra, el producto restringido a \mathbb{S}^1 se transforma en un difeomorfismo del círculo, y la teoría de Poincaré de levantamientos

y número de rotación es aplicable.

El estudio de iteración de productos Blaschke es muy importante para la dinámica holomorfa: por ejemplo, si el producto Blaschke tiene bien definido su número de rotación cuando se restringe a \mathbb{S}^1 , es posible prescribir dicho número para construir modelos dinámicos sobre dominios de rotación (ver, por ejemplo, [PZ04]). Ideas similares fueron empleadas por Michael Herman en los 70's para construir los primeros ejemplos de una función racional cuyo conjunto de Fatou tiene un dominio de rotación doblemente conexo, y que es ahora conocido como anillo de Herman, [Her79]. Dicha función resulta ser un producto Blaschke generalizado.

Nosotros nos concentraremos en estudiar la familia de grado $2d + 1$ dada por

$$B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i\alpha} z^{d+1} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^d \quad (0.1)$$

donde $a, z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [0, 1)$ y $d \geq 1$. Si bien la dinámica de los elementos es relativamente sencilla de describir, la dependencia no holomorfa del producto con respecto al parámetro dificulta el estudio de su espacio de parámetros $(\alpha, a) \in [0, 1) \times \mathbb{C}$.

En los últimos años se han estudiado la dinámica y espacio de parámetros de familias de productos Blaschke generalizados, similares a $B_{\alpha,a}$. En [BBM15], Araceli Bonifant, Xavier Buff y John Milnor estudian funciones racionales de la forma

$$f_q(z) = z^2 \frac{q-z}{1+\bar{q}z},$$

con $q \in \mathbb{C}^*$. Cada f_q conmuta con la involución antípoda $z \mapsto -1/\bar{z}$, la cual no tiene puntos fijos, pero ambas dejan invariante el círculo unitario. Dinámicamente, cada f_q lleva puntos antípodas a puntos antípodas, mientras que su espacio de q -parámetros muestra regiones donde f_q tiene un anillo de Herman que separa las cuencas súperattractoras del origen y de infinito.

En la tesis doctoral del 2016, [Can16], Jordi Canela presenta un estudio dinámico y paramétrico de la familia de productos Blaschke generalizado de grado 4 definida por

$$R_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i\alpha} z^3 \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

con $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$. En contraste con las familias f_q y $B_{\alpha,a}$, la familia $R_{\alpha,a}$ no tiene anillos de Herman. Bajo ciertas condiciones sobre los parámetros, se muestra cuando su conjunto de Julia es conexo.

El presente trabajo tiene su origen en el artículo de Heifeng Chu publicado a inicios del 2018. Para la familia $B_{\alpha,a}$, el autor demuestra en [Chu18] la existencia de curvas analíticas en el espacio de parámetros de la forma

$$T_d(\theta) = \{(\alpha, a) \in [0, 1] \times (2d + 1, \infty) : \rho(B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1}) = \theta\}$$

donde θ es irracional y $\mathcal{F}(B_{\alpha,a})$ tiene un anillo de Herman. Sin embargo, las propiedades dinámicas globales y su espacio de parámetros eran desconocidas hasta ahora.

En este trabajo, se presenta un estudio conciso del plano dinámico y de distintas regiones del espacio de parámetros de la familia $B_{\alpha,a}$ para $d \geq 1$. En comparación a la familia f_q , cada $B_{\alpha,a}$ conmuta con la involución $z \mapsto 1/\bar{z}$, la cual tiene como conjunto de puntos fijos todo \mathbb{S}^1 . Y en comparación a la familia $R_{\alpha,a}$, se describen regiones del plano de parámetros donde $B_{\alpha,a}$ tiene anillos de Herman, y se proporcionan condiciones suficientes para que su conjunto de Julia sea conexo.

Esta tesis está estructurada de la siguiente forma: en el capítulo 1 enunciamos los resultados preliminares de análisis y dinámica, que serán utilizados a lo largo del trabajo. Primero explicamos el concepto de normalidad y resumimos la teoría básica de iteración de funciones racionales. Después, presentamos la fórmula de Riemann-Hurwitz y discutimos algunas de sus aplicaciones sobre conectividad de componentes de Fatou. Damos una breve introducción a homeomorfismos del círculo y la teoría de Poincaré, para finalmente introducir la definición de producto Blaschke junto con algunas propiedades básicas.

Los capítulos 2 y 3 consisten principalmente de resultados originales: en el capítulo 2 presentamos la familia $B_{\alpha,a}$ y estudiamos sus propiedades analíticas y dinámicas básicas (por ejemplo, se describe la configuración de puntos críticos con respecto a \mathbb{S}^1 , la cual es dependiente de $|a|$). El resultado principal de este capítulo es la conectividad del conjunto de Julia y para ello se demuestra una serie de resultados que describen las posibles componentes periódicas de Fatou y su conectividad. Por ejemplo, $B_{\alpha,a}$ no tiene discos de Siegel (teorema 2.4) y para ciertos valores de $|a|$, $B_{\alpha,a}$ puede exhibir o no anillos de Herman (proposición 2.4). Finalmente, damos un criterio de conectividad del conjunto de Julia en el teorema 2.6.

En el capítulo 3 nos concentramos en el espacio de parámetros de la familia $B_{\alpha,a}$. Enfatizamos que debido a la dependencia no analítica de la familia con respecto al parámetro a , este estudio requiere de técnicas más directas. Primero, proporcionamos un estudio de las simetrías del plano de parámetros y demostramos cuando dos productos de la familia son conformemente conjugados (teorema 3.1). También se demuestra que es suficiente estudiar la dinámica de $B_{\alpha,a}$ con $\alpha = 0$. Con ello, describimos la dinámica asociada a ciertas regiones de espacio de a -parámetros que pueden ser foliadas por elipses (teorema 3.5), se demuestra la existencia de curvas analíticas en el mismo espacio donde cada $B_{0,a}$ tiene un punto fijo parabólico (teorema 3.3) y se hace un estudio de bifurcación parabólica sobre algunas de estas curvas. El capítulo cierra con la descripción de algunas componentes hiperbólicas.

Capítulo 1

Preliminares

Los sistemas dinámicos holomorfos se interesan en la iteración de funciones holomorfas sobre una superficie de Riemann simplemente conexa. En particular, el estudio de funciones racionales sobre la esfera de Riemann ha sido tema de estudio por más de un siglo en esta área.

En este capítulo veremos los principales resultados de la teoría de iteración de funciones racionales, los cuales serán de utilidad a lo largo de la tesis. Las demostraciones de los teoremas de este capítulo que no se incluyen en el mismo pueden encontrarse en [CG93], [Mil06], [MNTU00] y [Bea91].

1.1. Familias normales y teorema de Montel

En esta sección daremos la definición de familias normales y enunciaremos el teorema de Montel para familias normales. Consideraremos un dominio $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$, donde $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la esfera de Riemann, y una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas de Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 1.1. *Decimos que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ converge uniformemente en compactos de Ω si para todo compacto $K \subset \Omega$, la sucesión $\{f_n|_K\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.*

Definición 1.2. *Decimos que \mathcal{F} es normal si para cualquier sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión que converge uniformemente en compactos de Ω . Decimos que \mathcal{F} es normal en un punto $z_0 \in \Omega$ si existe una vecindad abierta U de z_0 tal que \mathcal{F} es normal en U .*

Observemos que las definiciones anteriores nos dicen que \mathcal{F} es normal en Ω si, y sólo si, \mathcal{F} es normal en todo $z \in \Omega$. Además, es importante hacer notar que la noción

de normalidad es similar a la noción de equicontinuidad local, en el sentido del teorema de Arzelà-Ascoli. Recordemos la definición de equicontinuidad local.

Definición 1.3. Decimos que \mathcal{F} es **localmente equicontinua** si para todo $z \in \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $f \in \mathcal{F}$, si $z_1, z_2 \in \Omega$ pertenecen a la bola de centro z y radio δ , entonces $d(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon$.

Dado que $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, podemos enunciar el teorema de Arzelà-Ascoli para la esfera de Riemann de la siguiente manera

Teorema 1.1 (Arzelà-Ascoli). \mathcal{F} es normal si, y sólo si, \mathcal{F} es localmente equicontinua.

Para finalizar esta sección enunciaremos el teorema de Montel, el cual es un criterio para identificar una familia normal.

Teorema 1.2 (Montel). Supongamos que existen tres puntos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que para toda $f \in \mathcal{F}$ se cumple $f(z) \notin \{w_1, w_2, w_3\}$, para todo $z \in \Omega$. Entonces \mathcal{F} es normal.

1.2. Dinámica racional

Una función racional es una función de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$ donde p y q son polinomios complejos no cero, que no tienen raíces en común. Toda función racional se puede extender a una función holomorfa sobre la esfera de Riemann y toda función holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional. El grado de una función racional se define como el máximo de los grados de los polinomios p y q , también es el número de preimágenes de un punto z .

En esta sección daremos una introducción a la dinámica holomorfa en una variable. Para $n \in \mathbb{N}$, la **enésima iteración de f** es la composición

$$f^n = f \circ \dots \circ f \text{ (n veces).}$$

Definición 1.4. Para $z_0 \in \Omega$, la **órbita positiva** de z_0 bajo f es

$$\mathcal{O}^+(z_0) = \{f^n(z_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

La **órbita negativa** de z_0 bajo f es

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \Omega : f^n(z) = z_0\}.$$

La **órbita** de z_0 bajo f es

$$\mathcal{O}(z_0) = \mathcal{O}^-(z_0) \cup \mathcal{O}^+(z_0).$$

Definición 1.5. *Los **puntos críticos** de f son soluciones a $f'(z) = 0$ y polos de orden mayor o igual a 2. El conjunto de puntos críticos se denotará por $\text{Crit}(f)$.*

1.2.1. Los conjuntos de Fatou y Julia

Toda función holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ descompone la esfera de Riemann en dos conjuntos ajenos, el conjunto donde los iterados $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ forman una familia normal, y su complemento.

Definición 1.6. *Dada una función holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, su **conjunto de Fatou** $\mathcal{F}(f)$ se define como el conjunto de puntos z_0 donde la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en alguna vecindad de z_0 . Su complemento $\mathcal{J}(f) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$ se llama **conjunto de Julia**.*

Dado que la condición de normalidad es una condición abierta, de la definición se sigue que $\mathcal{F}(f)$ es abierto, mientras que $\mathcal{J}(f)$ es cerrado. El conjunto de Fatou se considera *estable*, donde la dinámica es relativamente predecible, mientras que el conjunto de Julia tiene dinámica *caótica*. Algunas propiedades de estos conjuntos se enuncian a continuación.

Proposición 1.1. *El conjunto de Fatou, y por lo tanto el conjunto de Julia, es totalmente invariante bajo f . Esto es, $z \in \mathcal{F}(f)$ si, y sólo si, $f(z) \in \mathcal{F}(f)$. Además, $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Proposición 1.2. *Si $g = T \circ f \circ T^{-1}$ con $T \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces $\mathcal{F}(g) = T(\mathcal{F}(f))$ y $\mathcal{J}(g) = T(\mathcal{J}(f))$.*

Proposición 1.3. *Para una función racional de grado $d \geq 2$, su conjunto de Julia es no vacío. Más aún, o bien $\mathcal{J}(f)$ tiene interior vacío, o coincide con todo $\widehat{\mathbb{C}}$. Además, $\mathcal{J}(f)$ es un conjunto de cardinalidad infinita.*

Proposición 1.4. *Sean f una función racional de grado $d \geq 2$ y $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Entonces $\overline{\mathcal{O}^-(z_0)} = \mathcal{J}(f)$.*

Proposición 1.5. *El conjunto de Julia de una función racional de grado $d \geq 2$ no tiene puntos aislados. Más aún, su conjunto de Julia es conexo o tiene una cantidad infinita numerable de componentes.*

Proposición 1.6. *El conjunto de Julia de una función racional es conexo si, y sólo si todas sus componentes de Fatou son simplemente conexas.*

1.2.2. Dinámica local de puntos periódicos

De ahora en adelante consideremos f una función racional de grado $d \geq 2$. La teoría local es una herramienta fundamental para entender la dinámica global. Ha sido estudiada por más de cien años por matemáticos como Schröder, Koenigs, Leau, Böttcher, Fatou, Julia, Siegel, Herman y Yoccoz, entre otros. Mostraremos los resultados referentes a la linealización de f cerca de ciclos periódicos.

Definición 1.7. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es **punto periódico** de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z_0) = z_0$. Al mínimo entero que cumpla esta condición lo llamaremos **periodo** de z_0 .

Un p -ciclo de f es $\langle z_0 \rangle = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$, donde $f(z_i) = z_{i+1}$ y los subíndices se toman módulo p , con z_0 el punto base del ciclo. Definimos el **multiplicador** del ciclo como

$$\lambda(z_0) = (f^p)'(z_0) = f'(z_0) \cdots f'(z_{p-1}).$$

De acuerdo al valor que tome el módulo de su multiplicador, los ciclos se clasifican de la siguiente manera.

Definición 1.8. Un ciclo $\langle z_0 \rangle$ de una función holomorfa f es

- **atractor** si $|\lambda| < 1$ y **súperatractor** si $\lambda = 0$.
- **neutral o indiferente** si $|\lambda| = 1$.
 - **parabólico** si $\lambda = e^{2\pi ip/q}$ con $p/q \in \mathbb{Q}$,
 - **irracional** si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- **repulsor** si $|\lambda| > 1$.

Definición 1.9. Sea $\langle z_0 \rangle$ un ciclo atractor o súperatractor de una función racional f de grado $d \geq 2$. Si $z_0 = f^p(z_0)$ para algún $p \in \mathbb{N}$ entonces el conjunto

$$\mathcal{A}(z_0) := \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^{pn}(z) = z_0 \right\}$$

es la **cuenca de atracción** de z_0 . La **cuenca de atracción del ciclo** es

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=0}^{p-1} \mathcal{A}(f^j(z_0)).$$

A la componente conexa de $\mathcal{A}(z_0)$ que contiene al punto z_0 la denotamos por $\mathcal{A}^*(z_0)$ y se llama **cuenca inmediata de atracción** de z_0 .

Teorema 1.3. *La cuenca de atracción de cualquier órbita periódica está contenida en el conjunto de Fatou, mientras que todos los puntos periódicos repulsivos pertenecen al conjunto de Julia.*

Resulta útil observar que si z_0 es un punto periódico de f , de periodo p , entonces z_0 es punto fijo de f^p y como $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p)$ y $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^p)$, entonces reducimos el estudio a la dinámica cercana a puntos fijos para entender el comportamiento de órbitas de puntos cercanos a puntos periódicos.

Puntos fijos atractores: $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$

En esta subsección mostraremos resultados referentes a puntos fijos atractores. El más importante de ellos es el teorema de linealización de Kœnigs.

Definición 1.10. *Un punto fijo z_0 de f es **topológicamente atractor** si existe una vecindad U de z_0 tal que los iterados f^n están definidos en U , y la sucesión $\{f^n|_U : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente a la función constante $g(z) = z_0$.*

Lema 1.1 (Caracterización topológica de puntos atractores). *Un punto fijo de f es topológicamente atractor si, y sólo si, su multiplicador λ satisface $0 < |\lambda| < 1$.*

Teorema 1.4 (Linealización de Kœnigs). *Sean z_0 y λ como antes. Entonces existe un cambio de coordenadas holomorfo $w = \phi(z)$, con $\phi(z_0) = 0$, tal que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ es la función lineal $w \mapsto \lambda w$, para todo w en una vecindad del origen. Más aún, ϕ es única salvo multiplicación por una constante no cero.*

Sea $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto fijo atractor con cuenca de atracción $\mathcal{A}(z_0) \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Entonces en una vecindad pequeña $\mathbb{D}_\epsilon = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| < \epsilon\}$ de $0 \in \mathbb{C}$, la función $\phi : \mathcal{A}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una función inversa holomorfa bien definida $\psi_\epsilon : \mathbb{D}_\epsilon \rightarrow \mathcal{A}^*(z_0)$, con $\psi_\epsilon(0) = z_0$. El siguiente resultado muestra la existencia de un dominio máximo de definición donde la linealización es posible. Además, este dominio máximo tiene al menos un punto crítico en su frontera.

Lema 1.2. *La inversa local $\psi_\epsilon : \mathbb{D}_\epsilon \rightarrow \mathcal{A}^*(z_0)$ se extiende de forma analítica a un disco abierto máximo \mathbb{D}_r centrado en $0 \in \mathbb{C}$. Entonces obtenemos una única función holomorfa $\psi : \mathbb{D}_r \rightarrow \mathcal{A}^*(z_0)$ con $\psi(0) = z_0$ y $\phi(\psi(w)) = w$. Más aún, ψ se extiende de manera homeomorfa sobre la frontera $\partial\mathbb{D}_r$, y la imagen $\psi(\partial\mathbb{D}_r) \subset \mathcal{A}^*(z_0)$ necesariamente contiene un punto crítico de f .*

Al dominio $\psi(\mathbb{D}_r) \subset \mathcal{A}^*(z_0)$ le llamaremos **dominio de Schröder**. El siguiente resultado fundamental se debe a Fatou.

Lema 1.3 (de Fatou). *Toda cuenca inmediata de atracción de un ciclo atractor contiene un punto crítico. Entonces el número de órbitas periódicas atractoras es finito, y menor o igual al número de puntos críticos.*

Una sección de esta tesis tiene que ver con conectividad del conjunto de Julia, la cual está relacionada con la conectividad del conjunto de Fatou. Por ello enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 1.5. *Sea \mathcal{A}^* la cuenca inmediata de atracción de un punto fijo atractor. Entonces $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}^*$ es conexo o tiene una cantidad infinita numerable de componentes.*

Puntos fijos repulsores: $|\lambda| > 1$

Definición 1.11. *Un punto fijo z_0 de f es **topológicamente repulsor** si existe una vecindad U de z_0 tal que para todo $z \neq z_0$ en U existe $n \geq 1$ tal que la n -ésima iteración $f^n(z)$ sale de U . En otras palabras, la única órbita positiva completamente contenida en U es la órbita de z_0 .*

Lema 1.4 (Caracterización de puntos fijos repulsores). *Un punto fijo de f es topológicamente repulsor si, y sólo si, su multiplicador λ satisface $|\lambda| > 1$.*

Para este caso también existe una linealización de Koenigs como se enuncia en el teorema 1.4.

Puntos fijos súperatractores: $\lambda = 0$

Cuando $\lambda = 0$, f se puede expresar como

$$f(z) = z_0 + a(z - z_0)^n + \mathcal{O}(|z - z_0|^{n+1})$$

en una vecindad de z_0 con $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, y donde $n \geq 2$ es el grado local del punto fijo súperatractor. Así como para los casos atractor y repulsor existe un teorema de linealización, para este caso tenemos el siguiente resultado, debido a L. E. Böttcher.

Teorema 1.6 (Coordenadas de Böttcher). *Sea f una función racional de grado $d \geq 2$ con un punto fijo súperatractor z_0 de grado local n . Entonces existe un cambio de coordenadas local $w = \phi(z)$ con $\phi(z_0) = 0$ que conjugue a f con la función $w \mapsto w^n$ en una vecindad de z_0 . Más aún, ϕ es única salvo multiplicación por una $(n - 1)$ -ésima raíz de la unidad.*

Entonces, cerca de un punto crítico fijo, f es conjugada a una función

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \longrightarrow w^n$$

con $n \geq 2$.

Corolario 1.7 (Extensión de $|\phi|$). Sean f y z_0 como en el teorema 1.6. Entonces la función $z \mapsto |\phi(z)|$ tiene una extensión analítica a todo $\mathcal{A}(z_0)$ y satisface

$$|\phi(f(z))| = |\phi(z)|^n, \quad \forall z \in \mathcal{A}(z_0).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que 0 es un punto fijo súperatractor. Entonces las coordenadas de Böttcher están definidas en una vecindad de 0, $U(0)$. Como antes, podemos considerar, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la función inversa $\psi_\epsilon : \mathbb{D}_\epsilon \rightarrow V(0) \subset \mathcal{A}^*(0)$, donde $V(0)$ es una vecindad de 0. El siguiente teorema relaciona las cuencas súperatractoras y los puntos críticos de f .

Teorema 1.8 (Puntos críticos en cuenca súperatractora). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que 0 es punto fijo súperatractor. Sean $U(0)$ y $V(0)$ como antes. Entonces existe un radio $r_m \in (0, 1]$ tal que si $\psi_\epsilon : \mathbb{D}_\epsilon \rightarrow \mathcal{A}^*(0)$ denota la inversa local de $\phi : \mathbb{D}_r \rightarrow U(0)$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, entonces ψ_ϵ tiene extensión analítica a $\psi : \mathbb{D}_{r_m} \rightarrow V(0)$ tal que $\phi \circ \psi = Id|_{\mathbb{D}_{r_m}}$.

Si $r_m = 1$, entonces $\psi(\mathbb{D})$ va biholomorfamente a $\mathcal{A}^*(0)$ y $\text{Crit}(f) \cap \mathcal{A}^*(0) = \{0\}$.

Si $r_m < 1$, entonces $\partial\psi(\mathbb{D}_{r_m})$ contiene un punto crítico de f distinto del origen.

Puntos fijos parabólicos: $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}$

Consideremos ahora g una función racional de grado $d \geq 2$ con un punto fijo en z_0 con multiplicador $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}$ y $(p, q) = 1$. Observemos que el punto z_0 también es punto fijo de $f = g^q$, con multiplicador $\lambda^q = 1$. Entonces f se puede expresar como

$$f(z) = z + a(z - z_0)^{n+1} + \mathcal{O}(|z - z_0|^{n+2}),$$

donde $a \in \mathbb{C}^*$ y $n + 1 \geq 2$ es la multiplicidad del punto fijo parabólico.

En esta sección enunciaremos el teorema de la flor de Leau-Fatou. Para ello, necesitamos introducir los siguientes conceptos.

Definición 1.12. Un **pétalo atractor** es un dominio simplemente conexo $\mathcal{P}_+ \subset \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

1. $z_0 = f(z_0)$ es un punto fijo parabólico y $z_0 \in \partial\mathcal{P}_+$,
2. para todo $z \in \mathcal{P}_+$, la sucesión $\{f^k(z) : k \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente en compactos de \mathcal{P}_+ .

De manera análoga, un **pétalo repulsor** es un dominio simplemente conexo $\mathcal{P}_- \subset \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

1. $z_0 = f(z_0)$ es punto fijo parabólico y $z_0 \in \partial\mathcal{P}_-$,

2. para todo $z \in \mathcal{P}_-$, existe $z_k \in f^{-k}(z) \cap \mathcal{P}_-$ tal que $z_k \rightarrow z_0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Teorema 1.9 (La flor de Leau-Fatou). *Si z_0 es un punto fijo de multiplicidad $n+1 \geq 2$, entonces dentro de toda vecindad de z_0 existen pétalos \mathcal{P}_j , donde $j \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ y donde \mathcal{P}_j es atractor o repulsor de acuerdo a la paridad de j . Más aún, se pueden elegir de tal forma que $\{z_0\} \cup \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_{2n-1}$ sea una vecindad abierta de z_0 . Cuando $n > 1$, cada \mathcal{P}_j interseca $\mathcal{P}_{j\pm 1}$ en conjuntos simplemente conexos y ajenos a los \mathcal{P}_k restantes.*

Como en el caso atractor, repulsor y súperatractor, para el caso parabólico podemos encontrar un dominio máximo contenido en la cuenca inmediata parabólica $\mathcal{A}^*(z_0)$ de un punto fijo parabólico z_0 en donde la función f está conjugada a la traslación $z \mapsto z + 1$, como se verá a continuación. A la función de conjugación, denotada por $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, se le conoce como **coordenadas de Fatou**.

Teorema 1.10. *Dado cualquier pétalo atractor o repulsor \mathcal{P} existe un encaje conforme $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, único salvo composición con traslaciones del plano, que satisface la ecuación funcional de Abel*

$$\alpha(f(z)) = \alpha(z) + 1, \quad z \in \mathcal{P} \cap f^{-1}\mathcal{P}.$$

Lema 1.5. *Toda cuenca inmediata de atracción de z_0 contiene al menos un punto crítico de f .*

Puntos fijos irracionales

Consideremos ahora $\lambda = e^{2\pi it}$, donde t es irracional. Como en los casos anteriores, nos gustaría encontrar una solución ϕ a la ecuación funcional

$$\phi(f(z)) = \lambda\phi(z).$$

Sin embargo, es sabido que la solución a esta ecuación depende fuertemente de qué tan bien se puede aproximar λ por números racionales [Bru65], [Sie42], [Cre33].

Definición 1.13. *Un punto fijo irracionalmente indiferente es llamado **punto de Siegel** si existe linealización, y **punto de Cremer** si no existe linealización.*

Los siguientes teoremas nos dicen cuándo tenemos un punto de Siegel o un punto de Cremer.

Teorema 1.11 (Linealización de Siegel). *Sea f analítica en una vecindad del punto fijo z_0 con multiplicador $\lambda = e^{2\pi it}$, con t irracional. Si para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $1/|\lambda^k - 1|$ está acotado por una función polinomial de k , entonces f es localmente linealizable y conjugada a $z \mapsto \lambda z$.*

Teorema 1.12 (No linealización de Cremer). *Dados $\lambda = e^{2\pi it}$ con t irracional y $d \geq 2$, si la sucesión $\left\{ \sqrt[d^k]{\frac{1}{|\lambda^k - 1|}} \right\}$ es no acotada, entonces ningún punto fijo de una función racional de grado d con multiplicador λ es linealizable.*

Además, se sabe que todo punto de Siegel pertenece al conjunto de Fatou, mientras que todo punto de Cremer pertenece al conjunto de Julia. Como en los casos anteriores, cuando tenemos un punto de Siegel z_0 , podemos encontrar un dominio máximo de linealización al cual llamaremos **disco de Siegel** alrededor de z_0 . Todo disco de Siegel Δ es simplemente conexo, donde la dinámica es conjugada a la función $z \mapsto \lambda z$.

Para finalizar esta sección haremos mención de un resultado en particular que necesitaremos más adelante.

Definición 1.14. *Sea f una función racional de grado $d \geq 2$. El **conjunto postcrítico** de f es*

$$P_f = \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \{f^k(c) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 1.13. *Todo p -ciclo de Cremer de una función racional está contenido en $\overline{P_f}$. Además, si existe un p -ciclo de discos de Siegel $\langle \Delta \rangle$, entonces $\partial\Delta_i \subset \overline{P_f}$ para $i = 1, \dots, p - 1$.*

Teorema 1.14 (De Shishikura). *Si una función racional tiene anillo de Herman, entonces tiene dos puntos críticos distintos cuyas órbitas se acumulan, bajo iteración, en dos componentes distintas de su frontera.*

1.2.3. Componentes de Fatou

En esta sección presentaremos los diferentes tipos de componentes de Fatou para una función racional f de grado $d \geq 2$. Mencionaremos el teorema de Fatou para componentes periódicas y el teorema de Sullivan para componentes no errantes.

Definición 1.15. *Decimos que $U \subset \mathcal{F}(f)$ es una **componente o dominio de Fatou** si U es abierto conexo máximo donde $\{f^n|_U : n \in \mathbb{N}\}$ es normal.*

Decimos que una componente de Fatou U es

1. **fija** si $f(U) = U$.
2. **p -periódica** si $f^p(U) = U$ para $p > 0$,
3. **estrictamente preperiódica** si $f^k(U)$ es periódica para algún $k > 0$ pero U no lo es,

4. **errante** si $f^k(U) \cap f^m(U) = \emptyset$ para todo $k, m \geq 0$, con $k \neq m$.

De la definición se puede observar que si U es una componente de Fatou, entonces $\partial U \subset \mathcal{J}(f)$. Algunas propiedades de las componentes de Fatou son las siguientes.

Proposición 1.7. *Si $U \subset \mathcal{F}(f)$ es una componente de Fatou, entonces $f(U)$ también es una componente de Fatou.*

Teorema 1.15. *Supongamos que $V \subset \mathcal{F}(f)$ es una componente de Fatou totalmente invariante. Esto es, $f^{-1}(V) = V = f(V)$. Entonces $\partial V = \mathcal{J}(f)$ y cualquier otra componente de Fatou es simplemente conexa.*

Teorema 1.16 (Número de componentes de Fatou). *Si f es una función racional de grado $d \geq 2$ y $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{F}(f)$ tiene una, dos o un número infinito de componentes.*

En la sección anterior vimos tres tipos de componentes de Fatou, a saber, cuencas atractoras y súperatractoras, cuencas parabólicas y discos de Siegel. El siguiente teorema nos da la clasificación completa de las componentes periódicas de Fatou de funciones racionales.

Teorema 1.17 (Teorema de clasificación). *Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d \geq 2$ y sea U una componente periódica de Fatou de periodo $p \geq 1$. Entonces la dinámica de f restringida en U está descrita por una de las siguientes posibilidades.*

1. U contiene un punto periódico atractor z_0 de periodo p tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in U$. Decimos que U es una **componente atractora**.
2. ∂U contiene un punto parabólico z_0 tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in U$. Decimos que U es una **componente parabólica**.
3. U es simplemente conexa y f^p es conformemente conjugada a una rotación irracional $R_t(z) = e^{2\pi it}z$, para algún t irracional. Esto es, U es un **disco de Siegel**. El único punto fijo bajo f^p es un punto fijo irracional con multiplicador $e^{2\pi it}$ y se le conoce como el centro del disco de Siegel o punto de Siegel. Respectivamente, el número irracional t se llama **número de rotación** de U .
4. U es doblemente conexa y f^p es conformemente conjugado a una rotación irracional $R_t(z) = e^{2\pi it}$ en un anillo redondo, para t irracional. Entonces U se llama **anillo de Herman** y el número irracional t se llama número de rotación del anillo de Herman.

Lema 1.6. *Si U es un anillo de Herman, entonces todo punto frontera de U pertenece a la clausura del conjunto postcrítico. La frontera ∂U tiene dos componentes conexas y cada una es un conjunto de cardinalidad infinita.*

La existencia de anillos de Herman fue probada por Herman en [Her79], quien utilizó una familia de productos Blaschke de grado 3. Por otro lado, en [Sul85], Sullivan demuestra que las funciones racionales no tienen componentes errantes de Fatou.

Teorema 1.18 (de Sullivan). *Sea f una función racional de grado $d \geq 2$. Entonces $\mathcal{F}(f)$ no tiene componentes errantes.*

1.2.4. La fórmula de Riemann-Hurwitz

La fórmula de Riemann-Hurwitz es muy importante y a menudo utilizada en el estudio de sistemas dinámicos complejos en una variable. Ésta relaciona el grado de una función holomorfa $f : U \rightarrow V$, la conectividad de los dominios U y V , y el número de puntos críticos de la función en U .

Definición 1.16. *La **conectividad** m_U de un dominio abierto $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es el número de componentes conexas de ∂U .*

Definición 1.17. *Sea $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ una función holomorfa sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Decimos que f es una función **propia** si $f : \Omega \xrightarrow{k:1} \Omega'$, donde k es el grado topológico de f .*

Teorema 1.19 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sean U y V dos dominios conexos de $\widehat{\mathbb{C}}$ de conectividad finita m_U y m_V , respectivamente. Sea $f : U \rightarrow V$ una función propia de grado k . Si $r = |\text{Crit}(f|_U)|$, entonces*

$$m_U - 2 = k(m_V - 2) + r.$$

De esta fórmula surgen los siguientes dos corolarios. Uno de ellos nos da el número de puntos críticos de una función racional. El otro resulta útil cuando se quiere demostrar que una componente de Fatou es simplemente conexa.

Corolario 1.20. *Sea f una función racional de grado $d \geq 2$. Entonces f tiene $2d - 2$ puntos críticos.*

Corolario 1.21. *Sea f una función racional y sea V un dominio simplemente conexo. Sea U una componente conexa de $f^{-1}(V)$. Si U contiene a lo más un punto crítico, entonces U es simplemente conexa.*

1.3. Productos de Blaschke y homeomorfismos del círculo

En esta sección introduciremos conceptos sobre homeomorfismos del círculo y algunos resultados que serán utilizados durante el desarrollo de la tesis. Las demostraciones de los resultados y más información sobre esto pueden encontrarse en [dMvS12].

Definimos el círculo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\pi(x) = x \pmod{1}$ la proyección canónica. Identificamos el círculo con $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\pi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}$ dada por $\pi(x) = e^{2\pi ix}$. Trabajaremos con ambas nociones indistintamente.

Definición 1.18. Decimos que una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un **levantamiento** de una función continua $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ si

$$\pi \circ F = f \circ \pi. \quad (1.1)$$

Observación. Cada función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tiene una infinidad de levantamientos. De hecho, si F_1 y F_2 son dos levantamientos de f , entonces $F_1 = F_2 + k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

De (1.1) se deduce que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x+1) = F(x) + m$, donde m no depende del levantamiento.

Definición 1.19. Llamamos **grado de f** , $\deg(f)$, al entero m tal que $F(x+1) = F(x) + m$, donde F es un levantamiento de f .

Al conjunto de funciones f tales que $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo que preserva orientación, lo denotaremos por $\text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$. Sea $f \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$. Entonces si F es un levantamiento de f , se tiene que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente y $\deg(f) = 1$.

Teorema 1.22 (Poincaré). Sean $f \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$ y F un levantamiento de f . Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe y es independiente de x .

Definición 1.20. Sea F un levantamiento de $f \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$. Definimos el **número de traslación del levantamiento F** como

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

En otras palabras, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, la distancia en la recta real entre un punto y su n -ésimo iterado por F es, aproximadamente, $n\rho(F)$.

Definición 1.21. Sea $f \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$. Llamamos **número de rotación** de f a $\rho(f) = \rho(F) \pmod{1}$, donde F es un levantamiento de f .

Proposición 1.8. El número de rotación es invariante por conjugaciones. Es decir, si $f, g \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$ donde $g = h^{-1} \circ f \circ h$, para cierta $h \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.

1.3.1. Número de rotación racional e irracional

En esta subsección daremos dos resultados referentes a funciones $f \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$ con número de rotación racional o irracional. Veremos que el comportamiento de éstas es muy distinto.

Proposición 1.9. Sea $f \in \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$. Entonces $\rho(f) \in \mathbb{Q} \pmod{1}$ si, y sólo si, f tiene puntos periódicos. En este caso, si $\rho(f) = p/q$, con $(p, q) = 1$, todos los puntos periódicos tienen periodo q .

Observación. Supongamos que f tiene puntos fijos. Entonces $\rho(f) \in \mathbb{Q} \pmod{1}$, digamos $\rho(f) = p/q$. Luego, todos los puntos periódicos tienen periodo q , pero como existe al menos un punto de periodo 1, entonces $q = 1$. Por lo tanto, $\rho(f) = p \pmod{1} = 0$.

Teorema 1.23. Consideremos una familia uniparamétrica de levantamientos de la forma $F_\alpha(t) = F_0(t) + \alpha$. Entonces el número de traslación crece continua y monótonamente con α , creciendo por $+1$ mientras α crece por $+1$. Esta dependencia no es estrictamente monótona. Existe un intervalo de constancia correspondiente a cada valor racional del número de traslación, de donde se sigue que F_0 es no lineal.

Teorema 1.24 (Herman, Yoccoz). Si f es un difeomorfismo real analítico de \mathbb{S}^1 y su número de rotación $\rho(f)$ es Diofantino, entonces f es conjugado a la rotación $x \mapsto x + \rho(f) \pmod{1}$.

1.3.2. Productos Blaschke

En esta última subsección hablaremos sobre productos Blaschke, qué son y qué propiedades tienen. Más información sobre éstos se puede encontrar en [GMR15] y [Mil06].

Definición 1.22. Un **producto Blaschke finito** de grado $d \geq 1$ es una función de la forma

$$B(z) = e^{2\pi i \alpha} \prod_{i \geq 1}^d \frac{a_i - z}{1 - \bar{a}_i z},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|a_i| < 1$ para todo i . Decimos que B es un **producto Blaschke generalizado** si $a_i \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{S}^1$.

Algunas propiedades de los productos Blaschke son

Proposición 1.10. *Sea B un producto Blaschke y sea $\mathcal{I}(z) = 1/\bar{z}$. Entonces el producto preserva \mathbb{S}^1 , y por lo tanto es simétrico respecto a la inversión a través de \mathbb{S}^1 . Es decir, $B(z) = \mathcal{I} \circ B \circ \mathcal{I}(z)$.*

Lema 1.7. *Una función racional de grado $d \geq 1$ manda el círculo en sí mismo si, y sólo si, se puede escribir como un producto Blaschke generalizado.*

Capítulo 2

Plano dinámico

Para $d \geq 1$, consideremos la familia de productos Blaschke de grado $2d+1$ dada por $B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} (z-a)^d / (1-\bar{a}z)^d$ con $a \in \mathbb{C}$. Como todos los productos Blaschke, B_a deja invariante el círculo unitario. Además esta familia tiene dos puntos críticos libres. Si éstos están en el círculo unitario entonces sus órbitas son independientes una de la otra, lo cual puede llevar a diferentes dinámicas. Por otro lado, si los puntos críticos libres no pertenecen al círculo unitario, sus órbitas son simétricas con respecto al círculo unitario y por lo tanto $B_{\alpha,a}$ tiene exactamente una órbita crítica libre.

El objetivo de este capítulo es dar una visión general del plano dinámico de la familia de productos Blaschke $B_{\alpha,a}$.

2.1. La familia Blaschke.

Consideremos la familia de productos Blaschke generalizado de grado $2d+1$ dada por

$$B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^d \quad (2.1)$$

donde $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [0,1)$ y $d \geq 1$. Como todos los productos Blaschke, $B_{\alpha,a}$ deja invariante a \mathbb{S}^1 , por lo que

$$B_{\alpha,a}(z) = \mathcal{I} \circ B_{\alpha,a} \circ \mathcal{I}(z), \quad (2.2)$$

donde $\mathcal{I}(z) = 1/\bar{z}$ es la reflexión respecto a \mathbb{S}^1 . Más aún, \mathcal{I} es una involución y su conjunto de puntos fijos es todo \mathbb{S}^1 . No es difícil ver que la acción de $B_{\alpha,a}$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$ es simétrica con respecto a \mathbb{S}^1 .

2.1.1. Propiedades de $B_{\alpha,a}$.

A continuación mostraremos algunas propiedades de $B_{\alpha,a}$, de las cuales algunas se heredan al ser productos Blaschke y otras más debido a la simetría mencionada en (2.2). Claramente cada $B_{\alpha,a}$ es una función racional, y composición de dos productos $B_{\alpha,a}$ y $B_{\beta,b}$ es un producto Blaschke. Además, si $z \in \mathbb{S}^1$, entonces $|B_{\alpha,a}(z)| = 1$.

Puesto que nos interesa iterar la función $B_{\alpha,a}$, la siguiente proposición es relevante ya que nos permite encontrar una simetría entre las órbitas de $z \in \mathbb{C}^*$ y $1/\bar{z}$.

Proposición 2.1. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $B_{\alpha,a}^n(z) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple*

$$\overline{B_{\alpha,a}^n(z)} \cdot B_{\alpha,a}^n(1/\bar{z}) = 1.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n . Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \overline{B_{\alpha,a}(1/\bar{z})} &= \overline{e^{2\pi i \alpha} (1/\bar{z}^{d+1}) \left(\frac{1/\bar{z} - a}{1 - \bar{a}(1/\bar{z})} \right)^{d+1}} \\ &= e^{-2\pi i \alpha} (1/z^{d+1}) \left(\frac{1/z - \bar{a}}{1 - a(1/z)} \right)^{d+1} \\ &= e^{-2\pi i \alpha} (1/z^{d+1}) \left(\frac{1 - z\bar{a}}{z - a} \right)^{d+1} \\ &= \frac{1}{B_{\alpha,a}(z)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{B_{\alpha,a}(z)} \cdot B_{\alpha,a}(1/\bar{z}) = 1$.

Supongamos ahora que $\overline{B_{\alpha,a}^{n-1}(z)} \cdot B_{\alpha,a}^{n-1}(1/\bar{z}) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} B_{\alpha,a}^n(z) &= B_{\alpha,a}(B_{\alpha,a}^{n-1}(z)) = B_{\alpha,a} \left(\frac{1}{\overline{B_{\alpha,a}^{n-1}(1/\bar{z})}} \right) = \frac{1}{B_{\alpha,a} \left(\frac{1}{\overline{B_{\alpha,a}^{n-1}(1/\bar{z})}} \right)} \\ &= \frac{1}{\overline{B_{\alpha,a}(B_{\alpha,a}^{n-1}(1/\bar{z}))}} = \frac{1}{\overline{B_{\alpha,a}^n(1/\bar{z})}}. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\overline{B_{\alpha,a}^n(z)} \cdot B_{\alpha,a}^n(1/\bar{z}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $B_{\alpha,a}^n(z) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. \square

Proposición 2.2. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces*

$$B_{\alpha,-a}^n(z) = -B_{\alpha,a}^n(-z),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n . Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
B_{\alpha,-a}(z) &= e^{2\pi i\alpha} z^{d+1} \left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z} \right)^d \\
&= (-1)^{2d+1} e^{2\pi i\alpha} (-z)^{d+1} \left(\frac{-z-a}{1-\bar{a}(-z)} \right)^d \\
&= -e^{2\pi i\alpha} (-z)^{d+1} \left(\frac{-z-a}{1-\bar{a}(-z)} \right)^d \\
&= -B_{\alpha,a}(-z).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $B_{\alpha,-a}^{n-1}(z) = -B_{\alpha,a}^{n-1}(-z)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
B_{\alpha,-a}^n(z) &= B_{\alpha,-a}(B_{\alpha,-a}^{n-1}(z)) \\
&= -B_{\alpha,a}(-B_{\alpha,-a}^{n-1}(z)) \\
&= -B_{\alpha,a}(B_{\alpha,-a}^{n-1}(-z)) \\
&= -B_{\alpha,a}^n(-z)
\end{aligned}$$

Concluimos así que $B_{\alpha,-a}^n(z) = -B_{\alpha,a}^n(-z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$. \square

Corolario 2.1. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces*

$$B_{\alpha,a}^n(z) \longrightarrow p \Leftrightarrow B_{\alpha,-a}^n(-z) \longrightarrow -p,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Observemos que por la proposición 2.2 tenemos

$$|B_{\alpha,a}^n(z) - p| = |-B_{\alpha,-a}^n(-z) - p| = |B_{\alpha,-a}^n(-z) + p|,$$

de donde la conclusión se sigue inmediatamente. \square

Corolario 2.2. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces*

$$B_{\alpha,a}^n(z) \longrightarrow p \Leftrightarrow B_{\alpha,a}^n(1/\bar{z}) \longrightarrow 1/\bar{p}.$$

Demostración. Por propiedades de límite, la continuidad de $f(z) = \bar{z}$ y la proposición 2.1 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
B_{\alpha,a}^n(z) \longrightarrow p &\Leftrightarrow \overline{B_{\alpha,a}^n(z)} \longrightarrow \bar{p} \\
&\Leftrightarrow 1/B_{\alpha,a}^n(1/\bar{z}) \longrightarrow \bar{p} \\
&\Leftrightarrow B_{\alpha,a}^n(1/\bar{z}) \longrightarrow 1/\bar{p},
\end{aligned}$$

de donde se concluye lo deseado. \square

El siguiente lema nos muestra que dado cualquier $\alpha \in [0, 1)$ podemos encontrar una conjugación que lleva $B_{\alpha,a}$ a $B_{0,b}$, para algún $b \in \mathbb{C}$. Es decir, el siguiente resultado nos permite trabajar con $\alpha = 0$.

Lema 2.1. *Sean $t \in \mathbb{R}$ y $\eta(z) = e^{-2\pi it}z$. Entonces η conjugua las funciones $B_{\alpha,a}$ y $B_{\beta,b}$, donde $\beta = \alpha + 2dt$ y $b = ae^{-2\pi it}$. En particular, $B_{\alpha,a}$ es conjugado a $B_{0,ae^{\frac{2\pi it}{2d}}}$.*

Demostración. La prueba es un cálculo directo, como mostraremos a continuación. Consideremos $t \in \mathbb{R}$ y $\eta(z) = e^{-2\pi it}z$. Entonces $\eta^{-1}(z) = e^{2\pi it}z$, de donde

$$\begin{aligned} \eta \circ B_{\alpha,a} \circ \eta^{-1}(z) &= \eta \left(e^{2\pi i\alpha} \cdot e^{2\pi it(d+1)} z^{d+1} \left(\frac{e^{2\pi it}z - a}{1 - \bar{a}e^{2\pi it}z} \right)^d \right) \\ &= e^{2\pi i(-t+\alpha+dt+t+dt)} z^{d+1} \left(\frac{z - e^{-2\pi it}a}{1 - \bar{a}\bar{a}e^{2\pi it}z} \right)^d \\ &= e^{\alpha+2dt} z^{d+1} \left(\frac{z - e^{-2\pi it}a}{1 - \bar{a}\bar{a}e^{2\pi it}z} \right)^d. \end{aligned}$$

En particular, si $t = -\alpha/2d$ entonces $\beta = 0$, de donde se sigue directamente la conclusión. \square

2.2. Órbitas críticas

Para tener una idea de la dinámica estable que podría tener $B_{\alpha,a}$, es útil conocer los puntos críticos y tener control sobre sus órbitas. En esta sección estudiaremos los puntos críticos y sus propiedades.

Corolario 2.3. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces*

$$B'_{\alpha,a}(c) = 0 \Leftrightarrow B'_{\alpha,-a}(-c) = 0.$$

Demostración. En la proposición 2.2 probamos que

$$B_{\alpha,-a}(z) = -B_{\alpha,a}(-z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, por lo que

$$\begin{aligned} B'_{\alpha,-a}(z) &= -B'_{\alpha,a}(-z)(-1) \\ &= B'_{\alpha,a}(-z). \end{aligned}$$

Así, $B'_{\alpha,-a}(c) = 0$ si, y sólo si, $B'_{\alpha,a}(-c) = 0$. \square

Proposición 2.3. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces*

$$B'_{\alpha,a}(w) = 0 \Leftrightarrow B'_{\alpha,a}(1/\bar{w}) = 0.$$

Demostración. De la proposición 2.2 tenemos para $z \in \mathbb{C}^*$ y $B_{\alpha,a}(z) \neq 0, \infty$,

$$B_{\alpha,a}(z)\overline{B_{\alpha,a}(1/\bar{z})} = 1.$$

Así, al derivar la expresión anterior nos queda

$$B'_{\alpha,a}(z)\overline{B_{\alpha,a}(1/\bar{z})} + B_{\alpha,a}(z)\overline{B'_{\alpha,a}(1/\bar{z})} = 0.$$

Además, por regla de la cadena y dado que $\overline{B_{\alpha,a}(\bar{z})}' = \overline{B'_{\alpha,a}(z)}$ se sigue

$$\overline{B_{\alpha,a}(1/\bar{z})}' = \overline{B'_{\alpha,a}(1/\bar{z})} (1/\bar{z})' = -\frac{1}{z^2} \overline{B'_{\alpha,a}(1/\bar{z})},$$

entonces

$$B'_{\alpha,a}(z)\overline{B_{\alpha,a}(1/\bar{z})} - \frac{1}{z^2} B_{\alpha,a}(z)\overline{B'_{\alpha,a}(1/\bar{z})} = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} B'_{\alpha,a}(w) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{w^2} B_{\alpha,a}(w)\overline{B'_{\alpha,a}(1/\bar{w})} = 0 \\ &\Leftrightarrow B_{\alpha,a}(w) = 0 \text{ o } \overline{B'_{\alpha,a}(1/\bar{w})} = 0. \end{aligned}$$

Pero $B_{\alpha,a}(w) \neq 0$, por lo tanto

$$B'_{\alpha,a}(w) = 0 \Leftrightarrow B'_{\alpha,a}(w) = 0.$$

□

Como $B_{\alpha,a}$ tiene grado $2d+1$, de acuerdo al corolario 1.20, entonces tiene $4d$ puntos críticos, contando multiplicidad. La derivada de (2.1) es

$$B'_{\alpha,a}(z) = \frac{-e^{2\pi i \alpha} z^d (z-a)^{d-1}}{(1-\bar{a}z)^{d+1}} \cdot h(z) \tag{2.3}$$

donde

$$h(z) = \bar{a}(d+1)z^2 - (2d+1+|a|^2)z + a(d+1). \tag{2.4}$$

Los puntos fijos $z = 0$ y $z = \infty$ son puntos críticos de multiplicidad d y por lo tanto puntos fijos súperatractores de multiplicidad $d+1$, para $d \geq 2$. El cero $z_0 = a$ y el

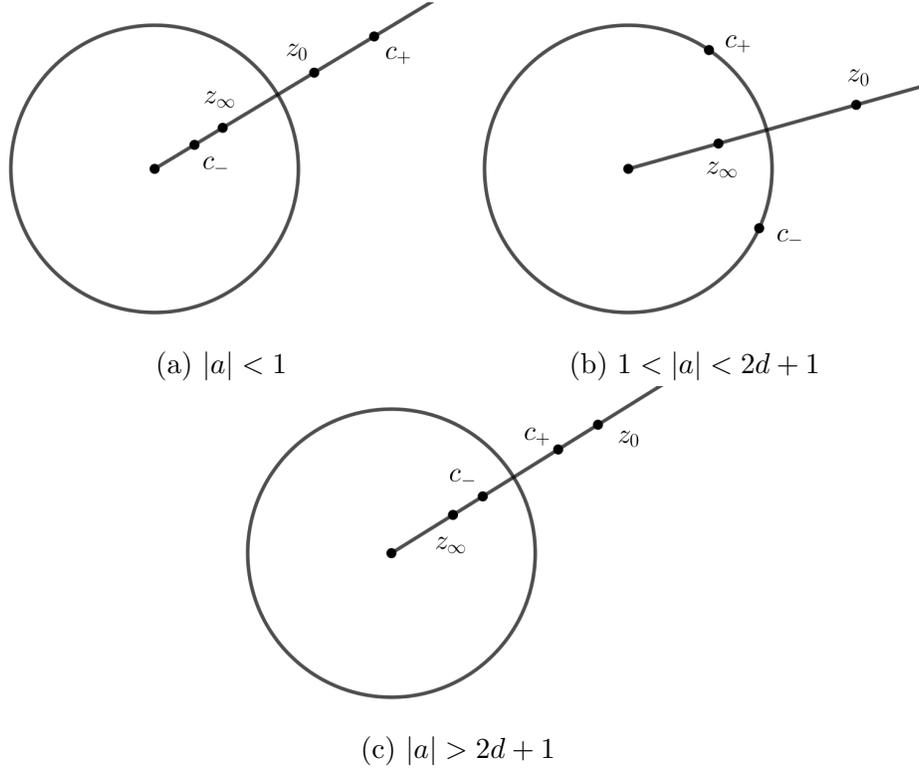


Figura 2.1: Bosquejo de la posición de los puntos críticos c_{\pm} de acuerdo al valor de $|a|$. Los puntos representan el círculo unitario.

polo $z_{\infty} = 1/\bar{a}$ son puntos críticos de multiplicidad $d - 1$ [Chu18]. Los otros dos puntos críticos están dados por los ceros de (2.4),

$$c_{\pm} = a \cdot \frac{(2d + 1 + |a|^2) \pm \sqrt{(|a|^2 - (2d + 1)^2)(|a|^2 - 1)}}{2|a|^2(d + 1)} \quad (2.5)$$

y su posición en el plano complejo depende de $|a|$, como se muestra en la figura 2.1.

Si $1 < |a| < 2d + 1$ entonces los puntos críticos están dados por $c_+ = a \cdot k$ y $c_- = a \cdot \bar{k}$, donde

$$k = \frac{(2d + 1 + |a|^2) + i\sqrt{((2d + 1)^2 - |a|^2)(|a|^2 - 1)}}{2|a|^2(d + 1)}.$$

En este caso, $c_+, c_- \in \mathbb{S}^1$ y por tanto, sus órbitas no son simétricas respecto a \mathbb{S}^1 , puesto que en caso contrario habría dos puntos críticos más.

Por otro lado, si $|a| < 1$ o $|a| > 2d + 1$ los puntos críticos c_{\pm} satisfacen $|c_+| > 1$, $|c_-| < 1$, y $c_+ = 1/\bar{c_-}$. Por tanto, sus órbitas son simétricas respecto a \mathbb{S}^1 .

Si $|a| > 2d + 1$, entonces $B_{\alpha,a}$ es un difeomorfismo del círculo y por lo tanto, el número de rotación de $B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1}$ está bien definido.

Si $|a| < 1$, ambos puntos críticos c_{\pm} se encuentran en el rayo que contiene al parámetro a . Además, $|c_+| > 1$ y $|c_-| < 1$. El único polo $z_{\infty} = 1/\bar{a}$ se encuentra en el complemento del disco unitario cerrado. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Si $|a| < 1$, la cuenca inmediata de atracción $\mathcal{A}^*(0) = \mathbb{D}$ y, por simetría, $\mathcal{A}^*(\infty) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Luego, el conjunto de Julia de $B_{\alpha,a}$ es $J(B_{\alpha,a}) = \mathbb{S}^1$.*

Demostración. Sabemos que $z = 0$ es un punto fijo súperatractor. Además, como $|a| < 1$, entonces $1/\bar{a} \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Luego, $B_{\alpha,a}$ no tiene polos en \mathbb{D} y así $B_{\alpha,a}|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es holomorfa. Por el lema de Schwarz, dado que $B_{\alpha,a}(0) = 0$ y $|B_{\alpha,a}| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, tenemos que $B_{\alpha,a}$ es una rotación o una contracción.

Supongamos que $B_{\alpha,a}$ es una rotación. Es decir, que existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $|B_{\alpha,a}(z)| = |z|$. Entonces

$$\begin{aligned} |z|^{d+1} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^d = |z| &\Leftrightarrow \left(|z| \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \right)^d = 1 \\ &\Leftrightarrow |z| \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1 \end{aligned}$$

Como $z \in \mathbb{D}$, entonces $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$. Luego, lo anterior se cumple si, y sólo si, $|z| > 1$, lo cual es una contradicción.

Entonces $B_{\alpha,a}|_{\mathbb{D}}$ es una contracción y así $B_{\alpha,a}^n(z) \rightarrow 0$, para todo $z \in \mathbb{D}$, de donde $\mathcal{A}^*(0) = \mathbb{D}$. Por simetría de la proposición 2.1, concluimos que $\mathcal{A}^*(\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Por lo tanto, $J(B_{\alpha,a}) = \mathbb{S}^1$. \square

Si $|a| = 1$ entonces de (2.1) notamos que c_+ , c_- y las preimágenes de cero e infinito, z_0 y z_{∞} , colapsan en $z = a$, donde la función no está definida dinámicamente. Además, para todo $z \neq a$ tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} B_{\alpha,a}(z) &= e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z-a}{1-\frac{a\bar{a}z}{a}} \right)^d \\ &= e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(-\frac{a(a-z)}{a-z} \right)^d \\ &= e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} (-a)^d. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Entonces la ecuación de punto fijo está dada por

$$z = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} (-a)^d,$$

cuyas soluciones son $z_0 = 0$, $z_1 = \infty$ y z_j raíz d -ésima de $w = \frac{e^{-2\pi i \alpha}}{(-a)^d}$, con $j = 2, \dots, d+1$ y $|w| = 1$. Como estas raíces son distintas de $z = a$, por (2.6) tenemos

$$\begin{aligned} B'_{\alpha,a}(z_j) &= -(d+1)e^{2\pi i \alpha}(z_j)^d \\ &= -(d+1)e^{2\pi i \alpha}w, \end{aligned}$$

de donde

$$|B'_{\alpha}(z_j)| = d+1.$$

Como $d \geq 1$, por la clasificación de puntos fijos de la definición 1.8 concluimos que z_j es repulsor, con $j = 2, \dots, d+1$. Por lo tanto, éstos pertenecen al conjunto de Julia. Con lo anterior podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Para $|a| = 1$ y todo $\alpha \in [0, 1)$ se cumple que el conjunto de Fatou de $B_{\alpha,a}$ está dado por*

$$\mathcal{F}(B_{\alpha,a}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_{\alpha,a}^{-n}(\mathcal{A}^*(0)) \cup B_{\alpha,a}^{-n}(\mathcal{A}^*(\infty))).$$

Es decir, cualquier punto en el conjunto de Fatou de $B_{\alpha,a}$ converge al origen o a infinito bajo iterados positivos.

Si $|a| = 2d+1$ los puntos críticos c_+ y c_- colapsan en uno sólo ya que de (2.3) tenemos

$$B'_{\alpha,a}(z) = -(d+1) \frac{e^{2\pi i \alpha} z^d (z-a)^{d-1}}{(1-\bar{a}z)^{d+1}} (\bar{a}z^2 - 2(2d+1)z + a), \quad (2.7)$$

de donde $c_{\pm} = \frac{a}{2d+1}$.

Para el caso $1 < |a| < 2d+1$ tenemos que los puntos críticos $c_{\pm} \in \mathbb{S}^1$. Luego, no es posible garantizar que $B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1}$ siga siendo homeomorfismo, por lo que se pueden presentar casos para los cuales existan intervalos de rotación y no números de rotación bien definidos (ver [Boy86]). Además sabemos que la dinámica varía de acuerdo a los valores que tome a y de la paridad de d .

2.3. Conectividad del conjunto de Julia

Como pudimos ver en el lema 2.2, el conjunto de Julia es conexo cuando $|a| < 1$. De manera natural podemos preguntarnos por la conectividad del conjunto de Julia para $|a| \geq 1$. El propósito de esta sección es dar condiciones sobre los valores de

$|a|$ para obtener un conjunto de Julia conexo. Recordemos la proposición 1.6 que establece que un conjunto de Julia conexo si y sólo si todas sus componentes de Fatou son simplemente conexas. Como un anillo de Herman es por definición doblemente conexo, veamos primero bajo qué condiciones $B_{\alpha,a}$ exhibe un anillo en su conjunto de Fatou.

Proposición 2.4. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Si $|a| \leq 2d + 1$ entonces $B_{\alpha,a}$ no tiene anillos de Herman.*

Demostración. De acuerdo al teorema 1.14, si una función racional tiene anillos de Herman, entonces tiene dos puntos críticos distintos cuyas órbitas se acumulan en dos componentes distintas de su frontera.

Si $|a| < 1$, hemos visto que $J(B_{\alpha,a}) = \mathbb{S}^1$, por lo que $B_{\alpha,a}$ no tiene anillos de Herman. Si $1 \leq |a| \leq 2d + 1$, los dos puntos críticos están en \mathbb{S}^1 y en consecuencia, no puede haber anillos de Herman. \square

Observación. Si $|a| > 2d + 1$ entonces $B_{\alpha,a}$ sí puede tener anillos de Herman, puesto que $|c_-| < 1$, $|c_+| > 1$ y por lo tanto, $B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1}$ es un difeomorfismo. Luego, de acuerdo al teorema 1.23 podemos ajustar $\rho = \rho(B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1})$ para que sea la constante de nuestra elección. Si por ejemplo, el número ρ es Diofantino, de acuerdo al teorema 1.24, entonces existe un difeomorfismo real analítico de \mathbb{S}^1 que conjuga a B_a con la rotación $z \mapsto e^{2\pi i \rho} z$.

Lema 2.4. *Si z_0 es un punto fijo súperatractor tal que $\text{Crit}(B_{\alpha,a}) \cap \mathcal{A}^*(z_0) = \{z_0\}$, entonces existen d puntos fijos en $\partial\mathcal{A}^*(z_0)$, sin contar multiplicidad.*

Demostración. Como no hay puntos críticos distintos de z_0 en $\mathcal{A}^*(z_0)$, entonces las coordenadas de Böttcher, $\phi : \mathcal{A}^*(z_0) \rightarrow \mathbb{D}$, se extienden a toda la cuenca inmediata $\mathcal{A}^*(z_0)$, y de manera continua a $\overline{\mathcal{A}^*(z_0)}$, donde $B_{\alpha,a}$ es conjugada a la función $z \mapsto z^d$. Puesto que $f(z) = z^d$ tiene d puntos fijos en $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$, entonces $B_{\alpha,a}$ tiene d puntos fijos en $\mathcal{A}^*(z_0)$. \square

Teorema 2.4. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces para todo $a \in \mathbb{C}$, $B_{\alpha,a}$ no tiene discos de Siegel.*

Demostración. Si $|a| < 1$, por el lema 2.2, sabemos que las únicas componentes de Fatou son $\mathcal{A}(0)$ y $\mathcal{A}(\infty)$. Por lo tanto, no hay discos de Siegel.

Si $1 \leq |a| \leq 2d + 1$, entonces los puntos críticos libres c_{\pm} pertenecen a \mathbb{S}^1 . Si existe un disco de Siegel Δ , entonces la órbita de alguno de estos puntos críticos libres se acumula en la frontera de Δ (ver teorema 1.13). Como \mathbb{S}^1 es invariante bajo $B_{\alpha,a}$, entonces $\partial\Delta = \mathbb{S}^1$. Luego, $\Delta = \mathbb{D}$ o $\Delta = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. En cualquiera de los dos casos tenemos una contradicción puesto que $0 \in \mathbb{D}$ y $\infty \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ son puntos fijos súperatractores.

Si $|a| > 2d + 1$ entonces los puntos críticos libres cumplen $|c_-| < 1$ y $|c_+| > 1$, por lo que $B_{\alpha,a} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un difeomorfismo analítico de \mathbb{S}^1 que preserva orientación. Por lo tanto, el número de rotación $\rho(B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1})$ existe y está bien definido.

Notemos que un disco de Siegel Δ no puede intersectar a \mathbb{S}^1 , pues por definición, $B_{\alpha,a}|_{\Delta}$ es conjugado a una rotación irracional mientras que por la invarianza de \mathbb{S}^1 , los puntos en $\Delta \cap \mathbb{S}^1$ se mantienen en el círculo unitario bajo iteración de $B_{\alpha,a}$, lo cual implicaría $\mathbb{S}^1 \subset \Delta$ y esto es imposible.

Supongamos ahora que existen dos discos de Siegel Δ_+ y Δ_- , cuyas fronteras están asociadas a los puntos críticos libres c_+ y c_- , respectivamente. Claramente Δ_+ y Δ_- no intersectan \mathbb{S}^1 , por lo que Δ_+ está contenido en $\mathbb{C} - \mathbb{D}$ y por simetría, $\Delta_- \subset \mathbb{D}$. Denotemos por p_{\pm} los puntos fijos que son centros de los discos de Siegel.

La función racional $B_{\alpha,a}$ tiene $2d + 2$ puntos fijos sobre la esfera de Riemann. Dos de ellos, a saber ∞ y 0 , son súperatractores y dos son los puntos Siegel, p_{\pm} . Por lo tanto, los $2d - 2$ puntos fijos restantes deben ser repulsores, de lo contrario tendrían un punto crítico asociado, pero no hay más puntos críticos libres. Por otro lado, $\mathcal{A}^*(0) \cap \text{Crit}(B_{\alpha,a}) = \{0\}$ y $\mathcal{A}^*(\infty) \cap \text{Crit}(B_{\alpha,a}) = \{\infty\}$, y por el lema 2.4 obtenemos la existencia de d puntos fijos en $\partial\mathcal{A}^*(0)$ y d puntos fijos en $\partial\mathcal{A}^*(\infty)$, sin contar multiplicidad. En consecuencia, existen al menos dos puntos fijos repulsores que pertenecen a la intersección $\partial\mathcal{A}^*(0) \cap \partial\mathcal{A}^*(\infty)$. Por la simetría descrita en el lema 2.2, se sigue que estos puntos fijos pertenecen a \mathbb{S}^1 .

Ya que existen al menos dos puntos fijos de $B_{\alpha,a}$ en \mathbb{S}^1 , la proposición 1.9 implica que $\rho(B_{\alpha,a}|_{\mathbb{S}^1}) = 0$.

Finalmente, \mathbb{S}^1 es un conjunto compacto positivamente invariante bajo la acción de $B_{\alpha,a}$. Dado que todo punto fijo de $B_{\alpha,a}$ en \mathbb{S}^1 es repulsor, entonces cualquier punto $z \in \mathbb{S}^1 - \text{Fix}(B_{\alpha,a})$ tiene una órbita positiva asintótica a un punto fijo repulsor, lo cual es imposible. \square

Lema 2.5. *Si U es una componente periódica de Fatou tal que $U \cap \mathbb{S}^1 \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{I}(U) = U$, con $\mathcal{I}(z) = 1/\bar{z}$.*

Demostración. Notemos primero que si U es una componente de Fatou fija atractora, súperatractora o parabólica, entonces contiene un punto fijo $p \in \mathbb{S}^1$, pues $U \cap \mathbb{S}^1 \neq \emptyset$ y el círculo unitario es invariante bajo $B_{\alpha,a}$. Luego, por la proposición 2.1 y el lema 2.2, dado $z \in \mathbb{C}$ se sigue que $B_{\alpha,a}^n(z) \rightarrow p$ si, y sólo si, $B_{\alpha,a}(1/\bar{z}) \rightarrow 1/\bar{p}$. Y como $p \in \mathbb{S}^1$, entonces $p = 1/\bar{p}$. Es decir, $z \in U$ si, y sólo si, $1/\bar{z} \in U$. Por lo tanto, $\mathcal{I}(U) = U$.

Si U es un anillo de Herman, entonces $\mathbb{S}^1 \subset U$ y U es simétrico respecto a \mathbb{S}^1 pues c_{\pm} se acumulan en sus fronteras y éstos son simétricos.

Finalmente, si U es una componente periódica atractora, súperatractora o parabólica entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\alpha,a}^k(U) = U$ y así, por el mismo argumento anterior $z \in U$ si, y sólo si, $\mathcal{I}(z) \in U$. \square

Proposición 2.5. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1). Entonces para todo $|a| > 2d + 1$, $B_{\alpha,a}$ no tiene cuencas súperatractoras distintas a $\mathcal{A}(0)$ y $\mathcal{A}(\infty)$.*

La demostración es esencialmente la misma que para el caso $|a| > 2d + 1$ en el teorema 2.4.

Proposición 2.6. *Si $|a| > 1$ entonces $c_+ \notin \mathcal{A}^*(\infty)$ (y por lo tanto, $c_- \notin \mathcal{A}^*(0)$).*

Demostración. Si $1 < |a| \leq 2d + 1$, entonces los puntos críticos libres pertenecen a \mathbb{S}^1 , y por ser este conjunto positivamente invariante, se sigue que $\{c_+, c_-\}$ no pertenecen a $\mathcal{A}^*(\infty) \cup \mathcal{A}^*(0)$.

Supongamos $|a| > 2d + 1$ y procederemos por contradicción. Supongamos que $c_+ \in \mathcal{A}^*(\infty)$. Sabemos que 0 e ∞ son puntos fijos súperatractores para $B_{\alpha,a}$. Entonces existe un abierto máximo $U_0 \subset \mathcal{A}^*(\infty)$ que contiene al punto ∞ , donde las coordenadas de Böttcher están definidas y $c_+ \in \partial U_0$. Sea $U_1 = B_{\alpha,a}(U_0)$. Claramente $\infty \in U_1$ y $v_+ \in \partial U_1$. Como c_+ es un punto crítico simple, tenemos que $B_{\alpha,a}^{-1}(U_1) = U_0 \cup V_0$, donde V_0 es un disco topológico y $c_+ \in \partial U_0 \cap \partial V_0$. Además, V_0 debe contener un polo, puesto que $\infty \in U_1 = B_{\alpha,a}(V_0)$. Como el único polo de $B_{\alpha,a}$ es $z_\infty = 1/\bar{a} \in \mathbb{D}$, entonces $V_0 \cap \mathbb{S}^1 \neq \emptyset$. Es decir, $\mathcal{A}^*(\infty) \cap \mathbb{S}^1 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{A}^*(\infty)$ es simétrica respecto a \mathbb{S}^1 , conteniendo así al cero $z_0 = a$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{A}^*(0)$ y $\mathcal{A}^*(\infty)$ son disjuntas. Por lo tanto, $c_+ \notin \mathcal{A}^*(\infty)$, para todo $a \in \mathbb{C}$. Por simetría con respecto a \mathbb{S}^1 , se sigue que $c_- \notin \mathcal{A}^*(0)$. \square

La siguiente proposición demuestra que toda componente preperiódica a las cuencas inmediatas súperatractoras de 0 y de ∞ son simplemente conexas.

Proposición 2.7. *Cada componente de Fatou de las cuencas $\mathcal{A}(0)$ y $\mathcal{A}(\infty)$ es simplemente conexa.*

Demostración. Por simetría, las componentes conexas de $\mathcal{A}(0)$ son simplemente conexas si, y sólo si, lo son las componentes conexas de $\mathcal{A}(\infty)$. Entonces nos enfocaremos solamente en estudiar las componentes $U \subset \mathcal{A}(\infty)$.

Por la proposición 2.6 tenemos que $c_+ \notin \mathcal{A}^*(\infty)$ y por la invarianza de \mathbb{S}^1 tenemos que $c_- \notin \mathcal{A}^*(\infty)$. Así, como $B_{\alpha,a} : \mathcal{A}^*(\infty) \xrightarrow{2:1} \mathcal{A}^*(\infty)$ y es propia, de la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que, si m es el número de conectividad de $\mathcal{A}^*(\infty)$, entonces

$$m - 2 = 2(m - 2) + 1,$$

lo que implica $m = 1$. Por lo tanto, $\mathcal{A}^*(\infty)$ es simplemente conexa. Sea ahora $U \subset B_{\alpha,a}^{-1}(\mathcal{A}^*(\infty))$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $U \cap \text{Crit}(B_{\alpha,a}) = \emptyset$, entonces $B_{\alpha,a} : U \rightarrow \mathcal{A}^*$ actúa propiamente con grado 1. Por la Fórmula de Riemann-Hurwitz, se sigue que la conectividad de U es 1.

2. Si U contiene un punto crítico (necesariamente libre), entonces $B_{\alpha,a} : U \rightarrow \mathcal{A}^*$ actúa propiamente con grado 2. De nuevo se obtiene $m_U - 2 = 2(-1) + 1$, esto es $m_U = 1$.

Ambos casos implican que si U es una componente de $B_{\alpha,a}^{-1}(\mathcal{A}^*(\infty))$, entonces U es un disco topológico. Para cada $n \geq 1$, las componentes de $B_{\alpha,a}^{-n}(\mathcal{A}^*(\infty))$ vuelven a ser disjuntas de \mathbb{S}^1 y tienen a lo más un punto crítico. Argumentos similares muestran que cada una de estas preimágenes son discos topológicos, por lo que hemos demostrado lo deseado. □

Corolario 2.5. *Si $\alpha \in [0, 1)$ y $|a| > 1$ son tales que los puntos críticos libres de $B_{\alpha,a}$ pertenecen al conjunto de Julia, entonces $\mathcal{J}(B_{\alpha,a})$ es simplemente conexo.*

Proposición 2.8. *Sea $B_{\alpha,a}$ como en (2.1) con $|a| \geq 2d+1$. Sea U una componente en $\mathcal{F}(B_{\alpha,a})$. Si U no es un anillo de Herman entonces U es simplemente conexa.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos primero que U es una componente fija. Si U es súperatractora, entonces por la proposición 2.5 se sigue que U es la cuenca inmediata de 0 o de ∞ . Y por la proposición 2.7, U es simplemente conexa.

Por hipótesis, U no es un anillo de Herman y del teorema 2.4, U no puede ser un disco de Siegel. Por lo tanto, queda asumir que U es una cuenca inmediata de un punto fijo z_0 atractor o parabólico. Por los resultados del capítulo 1, U contiene al menos un punto crítico libre. Tenemos dos casos:

1. Si U sólo contiene un punto crítico, se sigue de la fórmula de Riemann-Hurwitz que $m_U - 2 = 2(m_U - 2) + 1$, esto es $m_U = 1$.
2. Si U tiene dos puntos críticos (necesariamente c_{\pm}) entonces por su simetría con respecto al círculo unitario, se sigue que $U \cap \mathbb{S}^1 \neq \emptyset$. En consecuencia, $z_0 \in \mathbb{S}^1$. Supongamos primero que U es una cuenca inmediata de atracción. Sea $U_0 \subset U$ el disco topológico más grande donde las coordenadas de Koenigs son un biholomorfismo y ∂U_0 contiene al menos un punto crítico. Luego, por simetría con respecto a \mathbb{S}^1 , la frontera de U_0 contiene a ambos puntos críticos, c_+ y c_- . Si U_1 es la componente de $B_{\alpha,a}^{-1}(U_0)$ que contiene a z_0 , se sigue que $B_{\alpha,a} : U_1 \rightarrow U_0$ es propia de grado 3 y, por la fórmula de Riemann-Hurwitz, $m_{U_1} - 2 = 3(1 - 2) + 2$, esto es, $m_{U_1} = 1$. Como las siguientes preimágenes de U_1 que contienen a z_0 vuelven a contener sólo dos puntos críticos y el grado topológico no cambia, se sigue que cada componente $U_n \subset B^{-n}(U_0)$ con $z_0 \in U_n$ es un disco topológico. Hemos obtenido una sucesión anidada de discos topológicos $\{U_n\}_{n \geq 0}$ que define una extenuación simplemente conexa de U . Se concluye que U es simplemente conexa.

Por otro lado, si U es una cuenca inmediata parabólica, definimos U_0 como el pétalo atractor máximo en U donde las coordenadas de Fatou definen un encaje conforme. En consecuencia U_0 contiene en su frontera un punto crítico, y por simetría, contiene a ambos críticos libres. Como U_0 es un pétalo atractor, es por definición simplemente conexo. El resto de la demostración es similar al caso de punto fijo atractor.

Ahora si U es una componente periódica de periodo p , entonces consideramos al acción de $B_{\alpha,a}^p$ sobre U , lo cual se reduce al caso de componente fija y no hay nada más que demostrar. Sea ahora U una componente de Fatou preperiódica a un ciclo de componentes U_1, U_2, \dots, U_p de tipo atractor o parabólico. Por los resultados de Fatou, el ciclo contiene al menos un punto crítico. Esto implica que U contiene a lo más un punto crítico, por lo que $B_{\alpha,a}$ actúa de U a su imagen propiamente y a lo más con grado 2. La fórmula de Riemann-Hurwitz implica que U es simplemente conexa. \square

Concluimos este capítulo con el resultado principal de conectividad del conjunto de Julia, el cual se sigue de los resultados anteriores.

Teorema 2.6. *Sea $\alpha \in [0, 1)$ arbitrario. Las condiciones suficientes sobre el parámetro a que implican la conectividad de $\mathcal{J}(B_{\alpha,a})$ son:*

1. $|a| \leq 1$.
2. $1 < |a| \leq 2d + 1$ y ninguna componente de Fatou contiene más de un punto crítico.
3. $|a| > 2d + 1$ y el conjunto de Fatou de $B_{\alpha,a}$ no contiene anillos de Herman.

Conjetura 2.1. *El conjunto de Julia de $B_{\alpha,a}$ es conexo si, y sólo si, $B_{\alpha,a}$ no tiene anillos de Herman.*

Capítulo 3

Espacio de parámetros

En este capítulo nos concentraremos en el estudio del espacio de parámetros de la familia

$$B_a(z) = z^{d+1} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^d \quad (3.1)$$

para valores de $a, z \in \mathbb{C}$. En virtud del lema 2.1, esta familia hereda todas las propiedades de $B_{\alpha,a}$ con $\alpha \in [0, 1)$ que se vieron en el capítulo 2.

3.1. Simetría del espacio de parámetros.

En la figura 3.1 se muestra el espacio de parámetros de B_a con $d = 3$. Lo que vemos es el resultado de iterar el punto crítico c_+ . Mirando con atención, podemos identificar algunas simetrías. Por ejemplo, parece que el espacio de parámetros es simétrico respecto a la conjugación compleja y respecto a la rotación por raíces sextas de la unidad. El siguiente teorema establece estas simetrías.

Teorema 3.1. *Sean $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$. Entonces B_a y B_b son conformemente conjugados si, y sólo si, $b = wa$ o $b = w\bar{a}$, donde w es una raíz $2d$ -ésima de la unidad.*

Demostración. Supongamos que B_a es conformemente conjugada a otro producto Blaschke B_b . Entonces existe una transformación de Möbius $\eta(z) = (cz - d)/(ez - f)$ tal que $B_b = \eta^{-1} \circ B_a \circ \eta$, donde $c, d, e, f \in \mathbb{C}$ y $cf - de \neq 0$.

Como η manda puntos fijos súperatractores en puntos fijos súperatractores preservando el grado local, entonces concluimos que existen dos opciones. La primera opción es que $\eta(0) = 0$ y $\eta(\infty) = \infty$, mientras que segunda opción es $\eta(0) = \infty$ y $\eta(\infty) = 0$. En el primer caso concluimos que $\eta(z) = wz$ y en el segundo, $\eta(z) = w/z$, con $w \in \mathbb{C}^*$.

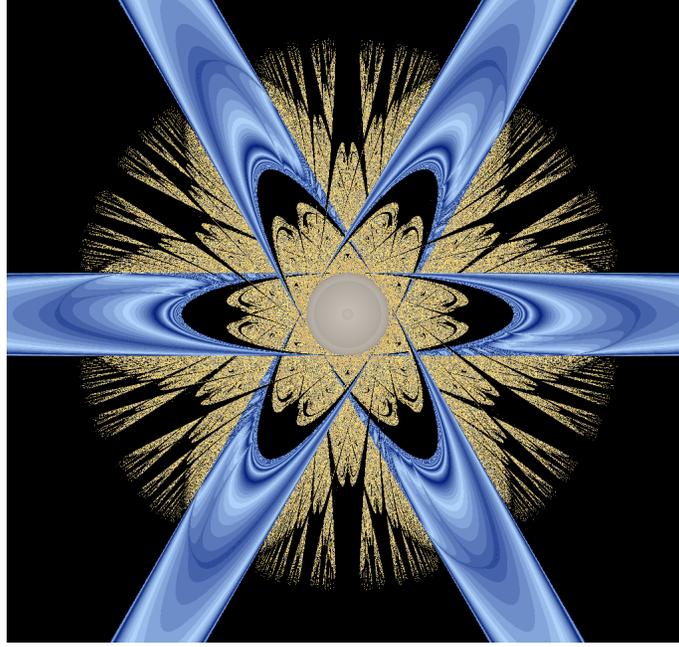


Figura 3.1: Espacio de parámetros de B_a , con $d = 3$. El parámetro a se colorea de gris si la órbita de c_+ tiende a cero, de azul si la órbita de c_+ converge a un ciclo súperatractor, atractor o parabólico de \mathbb{S}^1 , de negro si ambas órbitas críticas son acotadas y de amarillo si c_+ pertenece al conjunto de Julia.

Supongamos que $\eta(z) = wz$. Entonces

$$B_b(z) = \eta^{-1} \circ B_a \circ \eta(z) = w^{2d} z^{d+1} \left(\frac{z - aw^{-1}}{1 - \bar{a}wz} \right)^d.$$

Notamos así que B_b pertenece a la familia de nuestro interés si, y sólo si, se cumple $w^{2d} = 1$ y $aw^{-1} = b = \bar{a}w$, de donde $\bar{a}w^{-1} = \bar{a}w$ y así $\bar{w} = w^{-1}$. Es decir, B_b pertenece a la familia si, y sólo si, w es una raíz $2d$ -ésima de la unidad y $b = wa$.

Supongamos ahora que $\eta(z) = w/z$. Entonces

$$B_b(z) = \eta^{-1} \circ B_a \circ \eta(z) = w^{-2d} z^{d+1} \left(\frac{z - \bar{a}w}{1 - aw^{-1}z} \right)^d.$$

De nuevo, B_b pertenece a la familia de nuestro interés si, y sólo si, se cumple $w^{2d} = 1$ y $\bar{a}w = b = \overline{aw^{-1}}$, de donde $\bar{w} = w^{-1}$. Es decir, B_b pertenece a la familia si, y sólo si, w es una raíz $2d$ -ésima de la unidad y $b = w\bar{a}$. \square

Corolario 3.2. Sea B_a como en (3.1). Entonces $B_a(z) = \overline{B_{\bar{a}}(\bar{z})}$.

3.2. Líneas parabólicas

En la figura 3.1 podemos notar regiones color azul que están delimitadas por las rectas $z = (t + i)w$, con $w^{2d} = 1$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En esta sección se explicará un poco sobre el comportamiento dinámico de B_a cuando a se encuentra en estas rectas.

Lema 3.1. *Si $a = t + i$ con $t > 0$, entonces $z = i$ es punto fijo parabólico con multiplicador $+1$, para todo $d \geq 1$.*

Demostración. Sean $t > 0$ y $a = t + i$. Primero veamos que $z = i$ es punto fijo. En efecto,

$$B_{t+i}(i) = i^{d+1} \left(\frac{i - t - i}{1 - (t - i)i} \right)^d = i^{d+1} \left(\frac{-t}{-ti} \right)^d = i.$$

Por lo tanto, $z = i$ es punto fijo. Calculemos ahora su multiplicador. Al sustituir $\alpha = 0$, $a = t + i$ y $z = i$ en (2.3) obtenemos lo siguiente

$$B'_{t+i}(i) = -i^d \frac{(i - t - i)^{d-1}}{(1 - (t - i)i)^{d+1}} \cdot h(i) = -i^d \frac{(-t)^{d-1}}{(-ti)^{d+1}} \cdot h(i) = -\frac{h(i)}{t^2 i},$$

con

$$h(i) = 2i(d + 1) - 2di - i - t^2 i - i = -t^2 i,$$

por lo que $B'_{t+i}(i) = 1$. □

El teorema 3.1 nos permite generalizar el lema 3.1 como veremos a continuación. Al multiplicar a y $z = i$ por una raíz $2d$ -ésima de la unidad, digamos w , obtenemos un punto fijo parabólico también. Es decir, $z' = wi$ es punto fijo parabólico de $B_{a'}$, donde $a' = aw$. En otras palabras, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3 (Líneas parabólicas). *Si $a = (t + i)w$, con $w^{2d} = 1$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $z = iw$ es punto fijo parabólico de B_a con multiplicador $+1$, para todo $d \geq 1$.*

Para dar una idea más clara del teorema 3.3 consideremos $a = 1 + i$. Entonces para d par, los puntos $z_0 = i$ y $z_1 = 1$ son puntos fijos parabólicos, cada uno con multiplicador $+1$. Además, alrededor de $z_0 = i$ tenemos

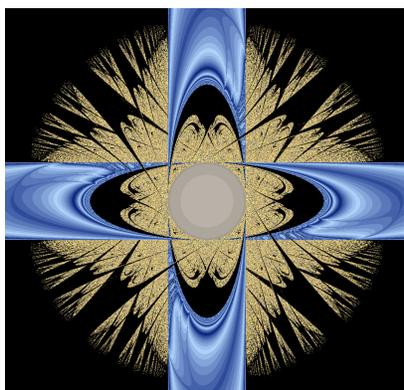
$$B(z) = -1 + z(z - 2i) + R_i(z),$$

donde $R_i \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow i$. De igual forma, alrededor de $z_1 = 1$ tenemos

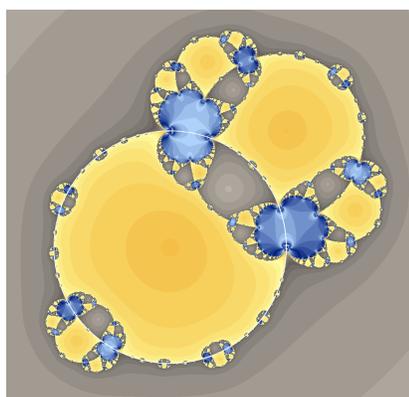
$$B(z) = 1 + z(z - 1) + R_1(z),$$

donde $R_1 \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 1$.

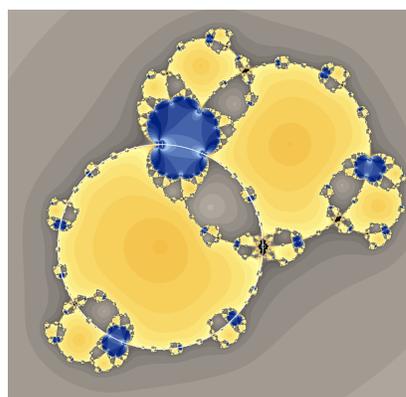
Luego, por el teorema 1.9, cada uno de ellos tiene un único pétalo atractor con un único punto crítico. Si consideramos ahora $a = 1,261 + i$, entonces $z_0 = i$ sigue siendo punto fijo parabólico, pero el punto $z_1 = 1$ bifurca a una órbita atractora de periodo 3, asociada a c_- .



(a)



(b)



(c)

Figura 3.2: En todas las figuras $d = 2$. En (a) se muestra el espacio de parámetros de B_a . Los colores como en la figura 3.1. En (b) se observa el plano dinámico $a = 1 + i$ y en (c) para $a = 1,261 + i$.

3.2.1. Bifurcación parabólica

Denotaremos al conjunto de puntos fijos de $B_{\alpha,a}$ por $\text{Fix}(B_{\alpha,a})$. Para $d \geq 2$ par, y $a = (x, y) \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, consideremos la familia dada por (3.1). Cuando $a = (1, 1)$, $\text{Fix}(B_{(1,1)}) = \{0, \infty, 1, i\}$, donde ∞ y 0 son puntos fijos súperattractores mientras que i y 1 son puntos fijos parabólicos con multiplicador $+1$. Bajo un cambio de variable conforme $T_1 : z \mapsto z + 1$ y $\tilde{a} = (1 + \epsilon, 1)$, con $|\epsilon|$ suficientemente pequeño, consideremos

$$\begin{aligned}
F_{\tilde{a}}(z) &= T_1^{-1} \circ B_{\tilde{a}} \circ T_1(z) \\
&= (z+1)^{d+1} \left(\frac{z - \epsilon - i}{1 - (1 + \epsilon - i)(z+1)} \right)^d - 1.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Si $\epsilon = 0$, entonces $\text{Fix}(F_{(1,1)}) = T^{-1}(\text{Fix}(B_{(1,1)})) = \{-1, \infty, 0, -1 + i\}$, y la estabilidad de los puntos fijos se mantiene, pues T es una transformación de Möbius. En particular, 0 y $-1 + i$ son parabólicos con multiplicador $+1$.

Queremos perturbar el punto fijo parabólico de $F_{(1,1)}$ en el origen, por lo que estudiaremos los puntos fijos de $F_{\tilde{a}}$ con $\tilde{a} = (1 + \epsilon, 1)$ para $|\epsilon|$ suficientemente pequeño. De la ecuación del punto fijo para la ecuación (3.2) obtenemos

$$(z+1)^{d+1} \left(\frac{z - \epsilon - i}{-\epsilon + i - (1 + \epsilon - i)z} \right)^d = z + 1,$$

que se factoriza como

$$(z+1) \left((z+1)^d \left(\frac{z - \epsilon - i}{-\epsilon + i - (1 + \epsilon - i)z} \right)^d - 1 \right) = 0.$$

Podemos observar entonces que $\{-1, \infty\} \subset \text{Fix}(F_{\tilde{a}})$. Los otros puntos fijos son soluciones a la ecuación

$$(z+1)^d(z - \epsilon - i)^d = (-\epsilon + i - (1 + \epsilon - i)z)^d. \tag{3.3}$$

Como $d > 1$ es par, podemos considerar dos casos particulares:

1. Si $1^{1/d} = 1$, la ecuación (3.3) se reduce a

$$z^2 + 2(1 - i)z - 2i = (z - (-1 + i))^2 = 0,$$

de donde $-1 + i \in \text{Fix}(F_{\tilde{a}})$.

2. Si $1^{1/d} = -1$, entonces la ecuación (3.3) se reduce a $z^2 - 2\epsilon z - 2\epsilon = 0$ cuyas soluciones están dadas por

$$z_{\epsilon}^{\pm} = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon},$$

con $|\epsilon|$ pequeño.

Análisis de z_ϵ^\pm

Primero observemos que para $|\epsilon|$ pequeño, los nuevos puntos fijos permanecen en una vecindad del origen. Ahora estudiaremos su localización y estabilidad como una dependencia directa de ϵ .

Caso $\epsilon > 0$

En este caso, ambos puntos fijos son reales y satisfacen $z_\epsilon^- < 0 < z_\epsilon^+$. Un cálculo directo muestra que si $\epsilon \rightarrow \infty$, entonces $z_\epsilon^+ \rightarrow \infty$ mientras que $z_\epsilon^- \rightarrow -1$. Numéricamente podemos ver que tanto z_ϵ^+ como z_ϵ^- son repulsores.

En términos del correspondiente producto Blaschke, obtenemos que para $\epsilon > 0$ y suficientemente pequeño, el punto fijo parabólico en $z = 1$ para $B_{(1,1)}$ bifurca en dos puntos fijos repulsores reales, llamémoslos

$$\zeta_\epsilon^\pm = 1 + \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon}$$

para $B_{(1+\epsilon,1)}$. Ver figura 3.3.

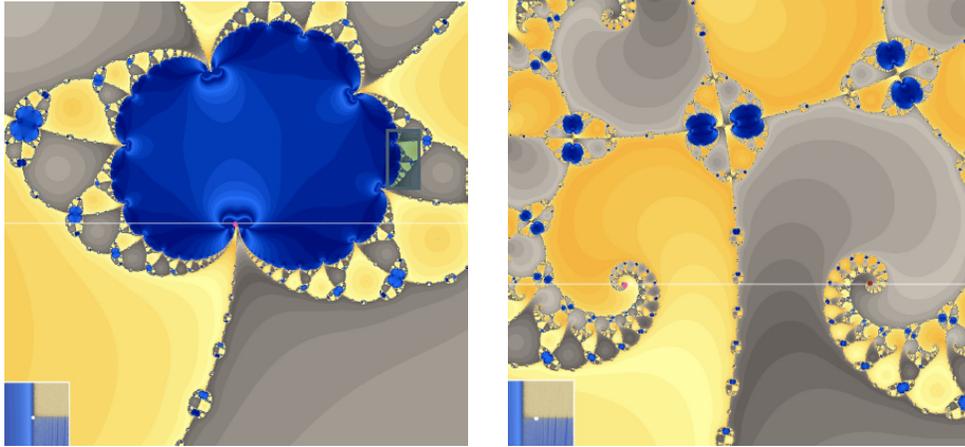


Figura 3.3: A la izquierda, el punto fijo parabólico $z_0 = 1$ para $a = 1 + i$. A la derecha, z_0 bifurca en dos puntos fijos repulsores ζ_ϵ^\pm para $\epsilon > 0$ pequeño y $\tilde{a} = 1 + \epsilon + i$. Los puntos fijos están en rosa. La línea real está en blanco.

Caso $\epsilon < -2$

En este caso, el parámetro perturbado $\tilde{a} = (1 + \epsilon, 1)$ se puede reinterpretar como una perturbación real de $a = (-1, 1)$ por $\delta > 0$. En cualquier caso, z_ϵ^\pm son de nuevo puntos fijos reales repulsores, y su posición respecto al origen es $z_\epsilon^- < -1 < z_\epsilon^+ < 0$. Más aún, si $\epsilon \rightarrow -\infty$, entonces $z_\epsilon^+ \rightarrow -1$ y $z_\epsilon^- \rightarrow -\infty$.

Caso $-2 < \epsilon < 0$

Podemos escribir las expresiones de los puntos fijos como

$$z_\epsilon^\pm = \epsilon \pm i\sqrt{-(2\epsilon + \epsilon^2)}.$$

Luego, los puntos fijos son números complejos en una vecindad del origen. Más aún, numéricamente se puede ver que si $-1 < \epsilon < 0$, entonces z_ϵ^+ es atractor, mientras que z_ϵ^- es repulsor. Ver figura 3.4.

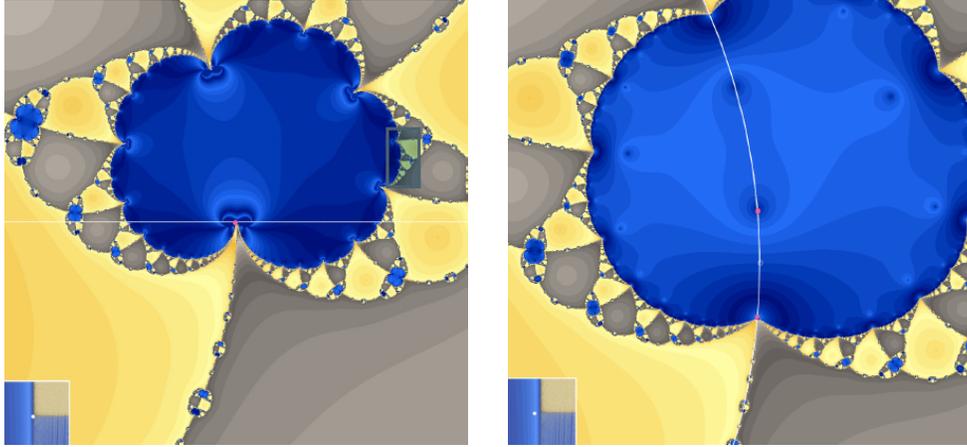


Figura 3.4: A la izquierda, el punto fijo parabólico $z_0 = 1$ para $a = 1 + i$. A la derecha, z_0 bifurca a dos puntos fijos, z_ϵ^+ atractor y z_ϵ^- repulsor, para $\epsilon > 0$ pequeño y $\tilde{a} = 1 + \epsilon + i$. Los puntos fijos están en rosa. La línea real y el círculo unitario están en blanco.

3.3. Ciclos repulsores, atractores y parabólicos

En el capítulo anterior se mencionó que la paridad de d afecta la dinámica de la familia (3.1). En esta sección mostraremos un ejemplo de ello.

Proposición 3.1. *Sea B_a como en (3.1). Si $a = ti$, con $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ y d es par, entonces el punto $z = i$ es punto fijo, mientras que d impar genera un 2-ciclo $\langle i \rangle = \{i, -i\}$.*

Demostración. En efecto, tenemos que

$$B_{ti}(i) = i^{d+1} \left(\frac{i - ti}{1 - (-ti)i} \right)^d = i^{d+1} \left(\frac{i(1-t)}{1-t} \right)^d = i^{2d+1}.$$

Así, si $d = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $i^{2d+1} = i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$, mientras que si $d = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $i^{2d+1} = i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$. Un cálculo análogo muestra que $B_{ti}(-i) = i$ cuando $d = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. \square

Nos concentraremos en el caso impar, pues el caso par es consecuencia del teorema 3.1 y de un corolario que veremos en la siguiente sección. Entonces tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2. *Consideremos B_a como en (3.1), con d impar, $a = ti$ y $t \in [0, 1) \cup (1, \infty)$. Entonces el ciclo $\langle i \rangle = \{i, -i\}$ es*

1. *súperatractor* $\Leftrightarrow t = 2d + 1$,
2. *atractor* $\Leftrightarrow t \in (\sqrt{2d^2 + 2d + 1}, \infty) \setminus \{2d + 1\}$,
3. *parabólico de multiplicador -1* $\Leftrightarrow t = \sqrt{2d^2 + 2d + 1}$,
4. *repulsor* $\Leftrightarrow t \in [0, \sqrt{2d^2 + 2d + 1}) \setminus \{1\}$.

Demostración. Ya vimos que en efecto $\langle i, -i \rangle$ forma un ciclo para d impar. Veamos ahora la expresión de su multiplicador. Para ello debemos conocer la derivada de B_{ti} en cada punto del ciclo. De acuerdo a (2.3), al sustituir $\alpha = 0$, $a = ti$ y $z = i$ obtenemos

$$B'_{it}(i) = -i^d \frac{(i - ti)^{d-1}}{(1 + ti^2)^{d+1}} \cdot h(i) = -i^{2d-1} \frac{(1 - t)^{d-1}}{(1 - t)^{d+1}} \cdot h(i) = -i \frac{h(i)}{(1 - t)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} h(i) &= (d + 1)(-ti)i^2 - (2d + 1 + t^2)i + ti(d + 1) \\ &= 2t(d + 1)i - (2d + 1 + t^2)i \\ &= i(t - (2d + 1))(t - 1). \end{aligned}$$

Así,

$$B'_{it}(i) = -\frac{i^2(t - 1)(t - (2d + 1))}{(t - 1)^2} = \frac{t - (2d + 1)}{t - 1}.$$

De manera similar, para $z = -i$ tenemos

$$B'_{it}(-i) = -(-i)^d \frac{(-i - ti)^{d-1}}{(1 + ti(-i))^{d+1}} \cdot h(-i) = -(-i)^{2d-1} \frac{(1 + t)^{d-1}}{(1 + t)^{d+1}} \cdot h(-i) = i \frac{h(-i)}{(1 + t)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} h(i) &= (d + 1)(-ti)(-i)^2 - (2d + 1 + t^2)(-i) + ti(d + 1) \\ &= 2t(d + 1)i + (2d + 1 + t^2)i \\ &= i(t + (2d + 1))(t + 1). \end{aligned}$$

Así,

$$B'_{ti}(-i) = \frac{i^2(t+1)(t+(2d+1))}{(t+1)^2} = -\frac{t+(2d+1)}{t+1}.$$

Luego, el multiplicador del ciclo es

$$\lambda = B'_{ti}(i)B'_{ti}(-i) = -\frac{(t+2d+1)(t-2d-1)}{(t+1)(t-1)}.$$

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Nos interesa entonces conocer los valores de t para los cuales el ciclo $\langle i \rangle$ es atractor, súperatractor, parabólico o repulsor. Entonces, al resolver los sistemas de desigualdades respectivos, obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} |\lambda| = 0 &\Leftrightarrow |t+2d+1| \cdot |t-2d-1| = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 2d+1, \\ |\lambda| < 1 &\Leftrightarrow |t+2d+1| \cdot |t-2d-1| < |t+1| \cdot |t-1| \\ &\Leftrightarrow t \in (\sqrt{2d^2+2d+1}, \infty) \setminus \{2d+1\}, \\ |\lambda| = 1 &\Leftrightarrow |t+2d+1| \cdot |t-2d-1| = |t+1| \cdot |t-1| \\ &\Leftrightarrow t = \sqrt{2d^2+2d+1}, \\ |\lambda| > 1 &\Leftrightarrow |t+2d+1| \cdot |t-2d-1| > |t+1| \cdot |t-1| \\ &\Leftrightarrow t \in [0, \sqrt{2d^2+2d+1}) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Ahora veamos que el multiplicador del ciclo parabólico es -1 . En efecto, para $\langle i \rangle$ parabólico, $t = \sqrt{2d^2+2d+1}$. Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{t^2 - (2d+1)^2}{t^2 - 1} = \frac{2d^2 + 2d + 1 - 4d^2 - 4d - 1}{2d^2 + 2d + 1 - 1} = \frac{-2(d^2 + 1)}{d^2 + 1} = -1.$$

□

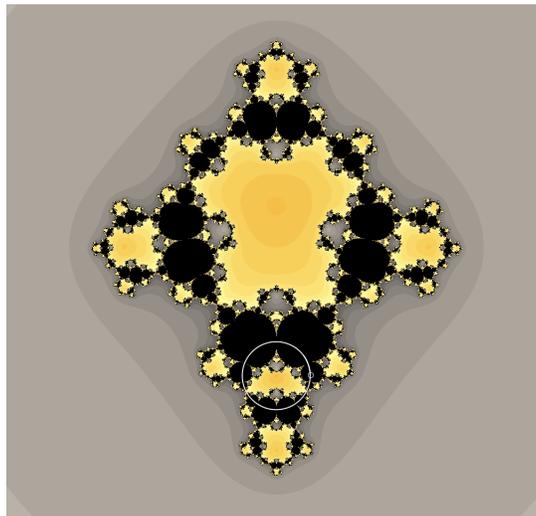


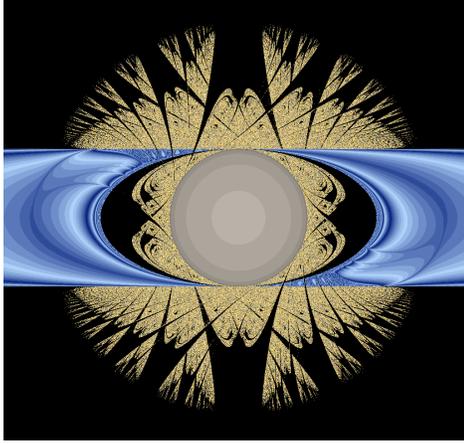
Figura 3.5: Plano dinámico con $d = 3$ y $a = ti$ con $t = \sqrt{2d^2 + 2d + 1} = \sqrt{25} = 5$. En blanco el círculo unitario. En amarillo la cuenca de atracción de 0, en gris la de ∞ y en negro la cuenca parabólica de $\langle i \rangle$. Cada punto del ciclo tiene asociados dos pétalos atractores.

El teorema 3.1 nos permite generalizar el lema 3.2 como veremos a continuación. Al multiplicar a y $z = i$ una raíz $2d$ -ésima de la unidad, digamos w , obtenemos un 2-ciclo, cuya naturaleza depende igualmente de t . Es decir, $\langle wi \rangle = \{wi, -wi\}$ es un 2-ciclo de $B_{a'}$, donde $a' = aw$. De esta manera tenemos lo siguiente,

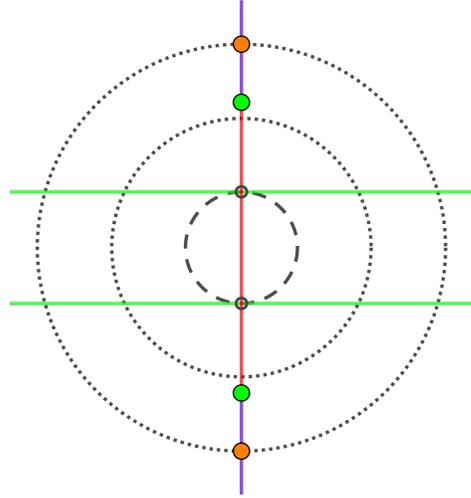
Teorema 3.4. *Si $d \geq 1$ es impar y $a = wti$, con $w^{2d} = 1$ y $t \in [0, 1) \cup (1, \infty)$, entonces el ciclo $\langle wi \rangle = \{wi, -wi\}$ es*

1. *súperatractor* $\Leftrightarrow t = 2d + 1$,
2. *atractor* $\Leftrightarrow t \in (\sqrt{2d^2 + 2d + 1}, \infty) \setminus \{2d + 1\}$,
3. *parabólico de multiplicador -1* $\Leftrightarrow t = \sqrt{2d^2 + 2d + 1}$,
4. *repulsor* $\Leftrightarrow t \in [0, \sqrt{2d^2 + 2d + 1}) \setminus \{1\}$.

La figura 3.6 muestra un esbozo del espacio de parámetros, y de manera resumida, lo que sabemos del mismo hasta el momento.



(a) Plano de parámetros para $d = 1$.



(b) Esbozo de plano de parámetros.

Figura 3.6: Los colores de (a) como en la figura 3.1. En (b), los parámetros correspondientes a ciclos parabólicos se colorean de verde, los atractores de morado, los súperatractores de anaranjado y los repulsores de rojo. El círculo rayado es \mathbb{S}^1 y los punteados son los círculos de radio 2 y 3.

3.4. Elipses repulsoras, atractoras y parabólicas

En la figura 3.1 se observan una región azul conformada por curvas parametrizadas por

$$a(t) = \frac{r+1}{2}e^{it} + \frac{r-1}{2}e^{-it}, \quad (3.4)$$

con $t \in [0, 2\pi)$ y $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. En esta sección veremos que para cada $a = a(t)$, el punto $z = e^{it}$ es un punto fijo, cuya naturaleza cambia de acuerdo al parámetro r .

Proposición 3.2. *Si a es como en (3.4) con $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, entonces para todo $t \in [0, 2\pi)$ y todo $d \geq 1$, el punto $z = e^{it}$ es punto fijo de B_a .*

Demostración. La prueba es un cálculo directo, como se mostrará a continuación.

$$\begin{aligned}
B_a(e^{it}) &= e^{t(d+1)i} \left(\frac{e^{it} - \frac{r+1}{2}e^{it} - \frac{r-1}{2}e^{-it}}{1 - \left(\frac{r+1}{2}e^{-it} + \frac{r-1}{2}e^{it} \right) e^{it}} \right)^d \\
&= e^{t(2d+1)i} \left(\frac{\frac{1-r}{2} - \frac{r-1}{2}e^{-2it}}{\frac{1-r}{2} - \frac{r-1}{2}e^{2it}} \right)^d \\
&= e^{it} \left(\frac{\frac{1-r}{2}e^{2it} - \frac{r-1}{2}}{\frac{1-r}{2} - \frac{r-1}{2}e^{2it}} \right)^d \\
&= e^{it} \left(\frac{\frac{1-r}{2} - \frac{r-1}{2}e^{2it}}{\frac{1-r}{2} - \frac{r-1}{2}e^{2it}} \right)^d \\
&= e^{it}
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema nos muestra cómo cambia la naturaleza de $z = e^{it}$ en función de r .

Lema 3.3. *Si a es como en (3.4) con $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, entonces para todo $t \in [0, 2\pi)$ y todo $d \geq 1$, el punto fijo de B_a , $z = e^{it}$ es*

1. *súperatractor* $\Leftrightarrow r = 2d + 1$,
2. *atractor* $\Leftrightarrow r \in (d + 1, \infty) \setminus \{2d + 1\}$,
3. *parabólico de multiplicador -1* $\Leftrightarrow r = d + 1$,
4. *repulsor* $\Leftrightarrow r \in [0, d + 1) \setminus \{1\}$.

Demostración. Ya vimos que en efecto $z = e^{it}$ es punto fijo de B_a . Veamos ahora la expresión de su multiplicador. De acuerdo a (2.3), con un cálculo directo (pero

cuidadoso) de cada uno de los términos que conforman $B'_a(e^{it})$, obtenemos

$$\begin{aligned} B'_a(z) &= -\frac{z^d(z-a)^{d-1}}{(1-\bar{a}z)^{d+1}} \cdot h(z) = -\frac{\left(\frac{1-r}{2}\right)^d (1+e^{2it})^{d-1} e^{it}}{\left(\frac{1-r}{2}\right)^{d+1} (1+e^{2it})^{d+1}} \cdot h(e^{it}) \\ &= -\frac{e^{it}h(e^{it})}{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 (1+e^{2it})^2}, \end{aligned}$$

donde, de nuevo calculando con cuidado y término a término las expresiones que conforman a $h(e^{it})$, se obtiene

$$\begin{aligned} h(e^{it}) &= (d+1)\bar{a}e^{2it} - (2d+1+|a|^2)e^{it} + a(d+1) \\ &= \frac{dr+r-r^2-3d-2+(d+1)(r+1)}{2}e^{it} + \frac{(2d-r+1)(r-1)}{4}e^{3it} \\ &\quad + \left(\frac{(d+1)(r-1)}{2} - \frac{(r+1)(r-1)}{4}\right)e^{it} \\ &= \frac{2dr+2r-2d-r^2-1}{2}e^{it} + \frac{(2d+1-r)(r-1)}{4}e^{3it} \\ &\quad + (r-1)\frac{2d+1-r}{4}e^{-it}. \end{aligned}$$

Así, el multiplicador de $z = e^{it}$ está dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= B'_a(e^{it}) = -\frac{e^{it}h(e^{it})}{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 (1+e^{2it})^2} \\ &= -\frac{2(r-1)(2d+1-r)e^{2it} + (2d+1-r)(r-1)e^{4it} + (r-1)(2d+1-r)}{(1-r)^2 (1+e^{2it})^2} \\ &= -\frac{(r-1)(2d+1-r)(2e^{2it} + e^{4it} + 1)}{(1-r)^2 (1+e^{2it})^2} \\ &= \frac{(1-r)(2d+1-r)(1+e^{2it})^2}{(1-r)^2 (1+e^{2it})^2} \\ &= \frac{2d+1-r}{1-r}. \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Nos interesa entonces conocer los valores de r para los cuales el punto $z = e^{it}$ es atractor, súperatractor, parabólico o

repulsor. Entonces, al resolver los sistemas de desigualdades respectivos, obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
|\lambda| = 0 &\Leftrightarrow |2d + 1 - r| = 0 \\
&\Leftrightarrow r = 2d + 1, \\
|\lambda| < 1 &\Leftrightarrow |2d + 1 - r| < |1 - r| \\
&\Leftrightarrow r \in (d + 1, \infty) \setminus \{2d + 1\}, \\
|\lambda| = 1 &\Leftrightarrow |2d + 1 - r| = |1 - r| \\
&\Leftrightarrow r = d + 1, \\
|\lambda| > 1 &\Leftrightarrow |2d + 1 - r| > |1 - r| \\
&\Leftrightarrow r \in [0, d + 1) \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que si $r = d + 1$, entonces el multiplicador de e^{it} es $+1$. Tenemos que

$$\lambda = \frac{2d + 1 - d - 1}{1 - d - 1} = \frac{d}{-d} = -1.$$

□

De nuevo, el teorema 3.1 nos permite generalizar el lema 3.3 como veremos a continuación. Al multiplicar a y $z = e^{it}$ una raíz $2d$ -ésima de la unidad, digamos w , obtenemos un punto fijo, cuya naturaleza depende igualmente de t . Es decir, $z' = we^{it}$ es un 2-ciclo de $B_{a'}$, donde $a' = aw$. De esta manera tenemos el siguiente resultado.

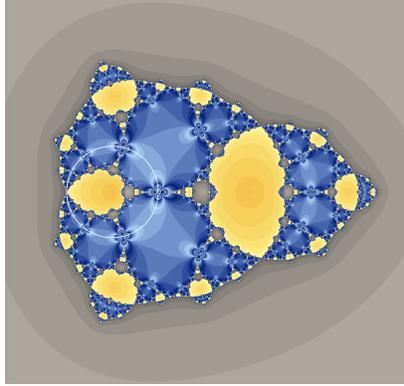
Teorema 3.5. *Si $a' = aw$, donde a es como en (3.4) con $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ y $w^{2d} = 1$, entonces para todo $t \in [0, 2\pi)$ y todo $d \geq 1$, el punto fijo de $B_{a'}$, $z = we^{it}$ es*

1. *súperatractor* $\Leftrightarrow r = 2d + 1$,
2. *atractor* $\Leftrightarrow r \in (d + 1, \infty) \setminus \{2d + 1\}$,
3. *parabólico de multiplicador -1* $\Leftrightarrow r = d + 1$,
4. *repulsor* $\Leftrightarrow r \in [0, d + 1) \setminus \{1\}$.

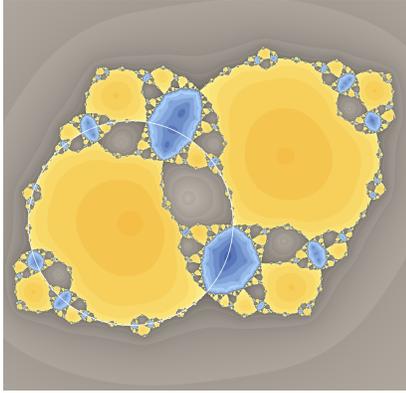
El siguiente corolario se refiere a situaciones cuando $a \in \mathbb{R}$.

Corolario 3.6. *En el teorema 3.5 con $t = 0$ se tiene que $z = 1$ es punto fijo de B_r cuya naturaleza cambia de acuerdo a r .*

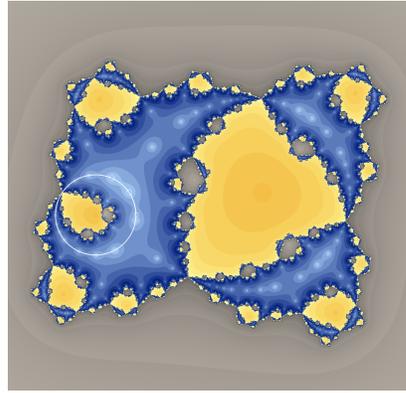
Proposición 3.3. *Si $a = re^{2\pi i\phi}$ y $z = te^{2\pi i\phi}$, entonces $B_a(z) = e^{2\pi(2d+1)i\phi} B_r(t)$. Más aún, $B'_a(z) = e^{-2\pi i\phi} B'_r(t)$.*



(a) $d = 2$ y $a = 3$



(b) $d = 3$ y $a = 1,5072+i0,65628$



(c) $d = 3$ y $a = 4,1414+i0,56021$

Figura 3.7: Plano dinámico de B_a con los valores de d y a indicados en cada figura. En blanco el círculo unitario. En amarillo la cuenca de atracción de 0, en gris la de ∞ y en azul (a) la cuenca parabólica, (b) atractora y (c) súperatractora de $z = e^{it}$ para cada caso.

Demostración. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} B_a(z) &= e^{2\pi(d+1)i\phi} t^{d+1} \left(\frac{te^{2\pi i\phi} - re^{2\pi i\phi}}{1 - re^{-2\pi i\phi} t e^{2\pi i\phi}} \right)^d = e^{2\pi(2d+1)i\phi} \left(\frac{t-r}{1-rt} \right)^d \\ &= e^{2\pi(2d+1)i\phi} B_r(t). \end{aligned}$$

De igual manera, al calcular directamente las derivadas (2.3) para $B_a(z)$ y $B_r(t)$, obtenemos

$$B'_a(z) = -\frac{e^{2\pi i\phi} r^d (r-t)^{d-1}}{(1-tr)^{d+1}} ((d+1)(r^2+1)t - (2d+t^2+1)r),$$

mientras que

$$B'_r(t) = -\frac{r^d(r-t)^{d-1}}{(1-tr)^{d+1}}((d+1)(r^2+1)t - (2d+t^2+1)r),$$

lo cual prueba lo deseado. \square

3.5. Parámetros hiperbólicos

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ a(t) = \frac{r+1}{2}e^{it} + \frac{r-1}{2}e^{-it} : |a| > 2d+1 \right\},$$

el cual define una de región abierta, conexa, que contiene al rayo $(2d+1, \infty)$ y está acotada por las rectas parabólicas $r \mapsto r+i$ y $r \mapsto r-i$. Enseguida estudiaremos la región \mathcal{H} , recordando que, en virtud del teorema 3.1, el resultado obtenido también corresponde a las regiones $w\mathcal{H}$, donde w es una raíz $2d$ -ésima de la unidad.

Sea $a = a(t) \in \mathcal{H}$. De acuerdo al lema 3.3, el punto $z_0 = e^{it}$ es punto fijo atractor de B_a .

Lema 3.4. *Sean $a = a(t) \in \mathcal{H}$ y $z_0 = e^{it}$ punto fijo atractor de B_a . Entonces $c_{\pm} \in \mathcal{A}(z_0)$.*

Demostración. Sean a y z_0 como en el enunciado. Entonces la cuenca $\mathcal{A}^*(z_0)$ tiene asociado un punto crítico. Es decir, uno de los puntos críticos libres, llamémoslo c , cumple $c \in \mathcal{A}^*(z_0)$. Por lo tanto, $B_a^n(c) \rightarrow z_0$. Por el corolario 2.2 y teniendo presente que $z_0 \in \mathbb{S}^1$, tenemos que $B_a^n(1/\bar{c}) \rightarrow z_0$. Como $|a| > 2d+1$, entonces $c_+ = 1/c_-$ y así, ambos puntos críticos c_{\pm} son atraídos por el mismo punto fijo z_0 . \square

Proposición 3.4. *Si $a \in \mathcal{H}$, entonces B_a no tiene anillos de Herman.*

Demostración. Sea $a = a(t) \in \mathcal{H}$. Entonces el punto e^{it} es punto fijo atractor o súperatractor para B_a . Tenemos entonces dos casos de acuerdo a la norma de a :

1. Si $1 < |a| \leq 2d+1$, entonces por el teorema 2.4 sabemos que B_a no tiene anillos de Herman.
2. Si $|a| > 2d+1$, el lema 3.4 nos indica que $c_{\pm} \in \mathcal{A}(z_0)$, por lo que no existen más puntos críticos libres para asociar a un anillo de Herman.

En cualquier caso, concluimos que B_a no tiene anillos de Herman para $a \in \mathcal{H}$. \square

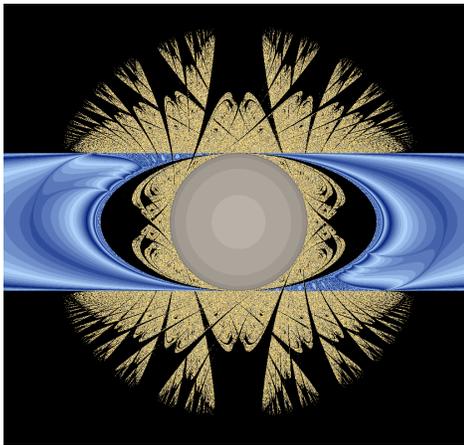
Definición 3.1. Una función racional f es **hiperbólica** si todos sus puntos críticos son atraídos por ciclos atractores. Una **componente hiperbólica** es una componente conexa del espacio de las funciones racionales donde cada elemento de la componente es una función hiperbólica.

Corolario 3.7. El conjunto \mathcal{H} es una componente hiperbólica del espacio de parámetros de B_a .

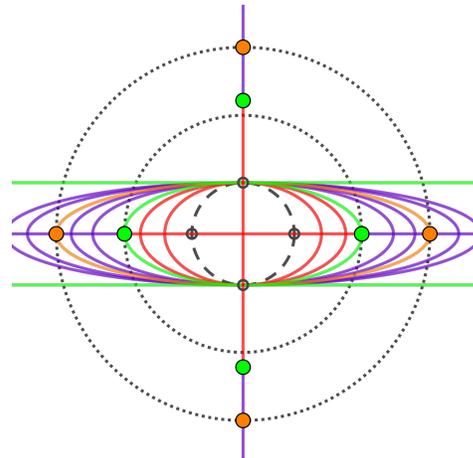
Demostración. En el capítulo 2 vimos que los puntos críticos de B_a son $\text{Crit}(B_a) = \{0, \infty, c_+, c_-\}$, donde ∞ y 0 son puntos fijos súperatractores. Por lo tanto, éstos pertenecen a sus propias cuencas de atracción. Los puntos críticos restantes, de acuerdo al lema 3.4, son atraídos por el punto fijo atractor e^{it} . Luego, todos los puntos críticos de B_a son atraídos por ciclos atractores, para todo $a \in \mathcal{H}^+$. Concluimos entonces que \mathcal{H}^+ es una componente hiperbólica de B_a . \square

Corolario 3.8. Sea $a \in \mathcal{H}$. Entonces todo punto en el conjunto de Fatou de B_a converge a $0, \infty$ o e^{it} bajo iterados positivos de B_a .

La figura 3.8 muestra el espacio de parámetros para $d = 1$ y un esbozo de éste, donde podemos observar las elipses que describimos anteriormente, junto con lo estudiado en las secciones anteriores.



(a) Plano de parámetros para $d = 1$.



(b) Esbozo de plano de parámetros.

Figura 3.8: En (a) los colores son como en la figura 3.1. En (b), los parámetros correspondientes a ciclos parabólicos se colorean de verde, los atractores de morado, los súperatractores de anaranjado y los repulsores de rojo. El círculo rayado es \mathbb{S}^1 y los punteados son los círculos de radio 2 y 3.

Bibliografía

- [BBM15] Araceli Bonifant, Xavier Buff, and John Milnor. On antipode preserving cubic maps. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2015.
- [Bea91] Alan Beardon. *Iteration of Rational Functions*, volume 132 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Complex analytic dynamical systems.
- [Boy86] Philip L Boyland. Bifurcations of circle maps: Arnol'd tongues, bistability and rotation intervals. *Communications in Mathematical Physics*, 106(3):353–381, 1986.
- [Bru65] Alexander Dmitrievich Bruno. On convergence of transforms of differential equations to the normal form. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 165, pages 987–989. Russian Academy of Sciences, 1965.
- [Can16] Jordi Canela. *On a Family of Degree 4 Blaschke Products*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, 2016.
- [CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex Dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Chu18] Haifeng Chu. Surgery on Herman rings of the standard Blaschke family. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 38(1):63–74, 2018.
- [Cre33] Hubert Cremer. *Über die Schrödersche funktionalgleichung und das Schwarzsche eckenabbildungsproblem*. Hirzel, 1933.
- [dMvS12] Welington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Fat19] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France*, 47(48):1920, 1919.

- [GMR15] Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi, and William T Ross. Finite Blaschke products: a survey. *arXiv preprint arXiv:1512.05444*, 2015.
- [Her79] Michael Robert Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 49(1):5–233, 1979.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton University Press, 2006.
- [MNTU00] Shunsuke Morosawa, Yasuihiro Nishimura, Masahiko Taniguchi, and Tetsuo Ueda. *Holomorphic dynamics*, volume 66. Cambridge University Press, 2000.
- [PZ04] Carsten L Petersen and Saeed Zakeri. On the julia set of a typical quadratic polynomial with a siegel disk. *Annals of mathematics*, pages 1–52, 2004.
- [Shi87] Mitsuhiro Shishikura. On the quasiconformal surgery of rational functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.(4)*, 20(1):1–29, 1987.
- [Sie42] Carl Ludwig Siegel. Iteration of analytic functions. *Annals of Mathematics*, pages 607–612, 1942.
- [Sul85] Dennis Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Annals of mathematics*, 122(2):401–418, 1985.