CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

FUNCIÓN DE GERBER-SHIU EN UN MODELO DE RIESGO DE RENOVACIÓN PERTURBADO POR DIFUSIÓN Y SALTOS POSITIVOS

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

Presenta

Sonny Alberto Medina Jiménez

Director de Tesis:

Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 13 de julio de 2018

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mis padres y hermanos el apoyo incondicional en cada decisión que he tomado.
A mi asesora, la Dra. Ekaterina Todorova, le agradezco las clases recibidas, las ideas, el ánimo y la supervisión, pero sobre todo, la confianza en que este trabajo se realizaría con éxito. Fue una gran experiencia trabajar al lado de una investigadora tan capaz y al mismo tiempo tan humana.
Le agradezco a mis sinodales, los doctores Antonio Murillo y Jose Luis Pérez sus valiosos comentarios y correcciones. Especialmente agradezco al Dr. Ehyter Martín quien oportunamente me dio correcciones y brindó consejos fundamentales durante la escritura de la tesis.
A todos los amigos que conocí en Guanajuato les agradezco su tiempo y amable compañía, agradecimientos especiales a mis compañeros de clase y al equipo Cuba Libre, así como a mis amigos más cercanos: Sebastián, Fernanda y Jorge Javier. A Melina le agradezco afectuosamente las largas charlas y los numerosos consejos.
Al Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT agradezco el apoyo económico recibido durante los dos años que duraron mis estudios de maestría. Por último, el más importante de mis agradecimientos es para el CIMAT y la gente que en él trabaja, para ellos toda mi admiración y cariño.

Índice

Resumen

En este texto se investiga el funcional de penalidades de Gerber-Shiu para un modelo de riesgo de renovación, perturbado por un proceso de ganancias aleatorias y un movimiento browniano. Los tiempos de interarribo de las reclamaciones tienen distribución Erlang(n) generalizada (dada por la suma de n exponenciales independientes, con parámetros posiblemente distintos); las ganancias llegan de acuerdo a un proceso de Poisson y su magnitud sigue una distribución exponencial. Los resultados expuestos son originales, y generalizan el estudio de los modelos expuestos por Li y Garrido [1] y Zhao y Yin [2]. Mediante el uso de funciones auxiliares se deriva una expresión matricial para la transformada de Laplace del funcional de Gerber-Shiu, se verifica que el funcional satisface una ecuación integral y se encuentra una expresión más sencilla de él cuando la magnitud de las reclamaciones pertenece a la familia racional. Se obtiene un resultado asintótico para la probabilidad de ruina cuando la distribución de los saltos hacia abajo es un tipo de distribución de colas pesadas. Por último, se ilustra la influencia de los parámetros del modelo en casos particulares de importancia, encontrando la probabilidad de ruina explícitamente.

Palabras clave: proceso de riesgo de renovación, difusión, proceso de Poisson compuesto, resultado asintótico.

Introducción

El modelo de riesgo clásico para compañías aseguradoras fue introducido por Cramer y Lundberg [3]. En este modelo el capital al tiempo t está dado por $S(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, donde u denota el capital inicial, $c > 0$ la tasa de recolección de primas y $\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, $Y_k > 0$ es un proceso de Poisson compuesto. El modelo clásico perturbado por un movimiento browniano fue introducido por Gerber [4] y ha sido estudiado por varios autores, entre ellos Dufresne [5] y Schmidli [6]. Buscando que los modelos sean cada vez más adecuados a la realidad se ha estudiado el modelo perturbado, cuando los reclamos llegan de acuerdo a un proceso de renovación. En [1], Li y Garrido estudian un modelo riesgo de renovación perturbado por un movimiento browniano y obtienen ecuaciones de renovación para el funcional de Gerber-Shiu. Además, se han estudiado modelos de riesgo de renovación, perturbados por un proceso de Poisson compuesto con saltos hacia positivos. En [2], Zhao y Yin consideran un modelo de renovación perturbado por saltos positivos de acuerdo a un proceso de Poisson y altura exponencial, ahí obtienen una fórmula explícita para el funcional de Gerber-Shiu y ecuaciones de renovación para el mismo, así como resultados particulares para la familia racional de distribuciones y la probabilidad de ruina.

Para este trabajo consideramos el siguiente modelo

$$U(t) = u + ct + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j + \sqrt{2D}B(t), \tag{1}$$

donde $\sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ es un proceso de Poisson compuesto, con tasa de llegadas μ y $X_i \sim \exp(\beta)$; $N(t)$ es un proceso de renovación con tiempos de interarribo $W_i \sim \text{Erlang}(n;\lambda_1,...,\lambda_n)$ (i.e. $W_i \stackrel{d}{=} V_1 + V_2 ... + V_n$, con $V_i \sim \exp(\lambda_i)$ y $Y_j \sim F$) con F una distribución en $(0,\infty)$, con cola $\overline{F}(y) = 1 - F(y)$ y media $\mu_y = \int_0^\infty \overline{F}(y)dy$ y $B(t)$ un movimiento browniano estándar. En (1) asumimos la independencia de $\sum_{i=1}^{M(t)} X_i$, $\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$ y $B(t)$.

Definimos el tiempo de ruina como el primer momento en que el proceso U toca o rebasa el nivel cero desde arriba, es decir $T = \text{ínf}\{t \geq 0 : U(t) \leq 0\}$ y la probabilidad de ruina empezando con capital u por $\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u)$. A los supuestos de independencia en el modelo añadimos la condición de ganancia neta $c + \frac{\mu}{\beta} > \frac{\mu_y}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}}$, una condición necesaria y suficiente para que $\psi(u) < 1$ para toda $u > 0$. Debe observarse que se puede llegar a la ruina debido a la oscilación ocasionada por la difusión o por las reclamaciones. Más generalmente definimos el funcional de penalidades de Gerber-Shiu como

$$\begin{aligned}\phi(u) = & E\left[e^{-\delta T}\omega(U(T^-), -U(T))\mathbb{1}_{\{T<\infty, U(T)<0\}} | U(0) = u\right] \\ & + E\left[e^{-\delta T}\omega_0 \mathbb{1}_{\{T<\infty, U(T)=0\}} | U(0) = u\right],\end{aligned}$$

donde $\delta \geq 0$ es constante, $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es llamada función de penalización y $U(T-) = \text{lím}_{t\uparrow T} U(t)$. También podemos escribir $\phi(u) = \phi_s(u) + \phi_d(u)$, con

$$\phi_s(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega(U(T^-), -U(T))\mathbb{1}_{\{T<\infty, U(T)<0\}} | U(0) = u\right] \text{ y}$$

$$\phi_d(u) = E\left[e^{-\delta T}\omega_0 \mathbb{1}_{\{T<\infty, U(T)=0\}} | U(0) = u\right].$$

Si tomamos $\omega(x,y) \equiv 1$ para $x, y \geq 0$ y $\delta = 0$, entonces $\phi(u) = \psi(u)$. Bajo los mismos supuestos pero con $\delta > 0$ tenemos la transformada de Laplace del tiempo de ruina, o si $\omega(x,y) = \mathbb{1}_{\{x>a, y>b\}}$ se obtiene la cola conjunta del capital previo a la ruina y la severidad de la ruina.

En la Sección 2 damos una ecuación general para la transformada de Laplace de ϕ, la cual, debido a la falta de propiedad de Markov en el modelo, es obtenida con ecuaciones recursivas para ciertas funciones auxiliares relacionadas con el funcional que sí cumplen la propiedad de Markov. En la Sección 3 enunciamos nuestro teorema principal, en el cual damos una expresión explícita para la transformada de Laplace del funcional, con la que se puede mostrar que ϕ satisface una ecuación integral particular. En la Sección 4 se da una forma más sencilla del funcional (como convolución de funciones exponenciales y de operadores aplicados a la función de penalización) cuando la distribución de los saltos hacia abajo pertenece a la familia racional, este caso es importante pues la familia racional es densa en el conjunto de las distribuciones positivas. Usando las fórmulas de la Sección 4, en la Sección 5 se da una expresión para la transformada de Laplace de la probabilidad de ruina. Las fórmulas de la Sección 5 y resultados de [7] y [8] nos permiten obtener, en la Sección 6, una expresión asintótica para la probabilidad de ruina cuando la distribución de los saltos hacia abajo pertenece a cierta clase de distribuciones de colas pesadas. Por último en la Sección 7 se dan resultados numéricos y gráficas que ilustran las fórmulas de las secciones 5 y 6, las cuales permiten observar la influencia de los parámetros de difusión y la media de los saltos hacia arriba.

1. Preliminares

Las siguientes definiciones y lemas son de gran importancia y serán usados a lo largo de todo el trabajo. Comenzamos definiendo las siguientes familias de funciones de distribución, que serán relevantes en la sección 5,

Definición. *Decimos que una distribución F definida sobre $[0,\infty)$ es subexponencial si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-(F*F)(x)}{1-F(x)} = 2,$$

donde $(F*F)(x) = \int_0^x F(x-y)dF(y)$. A la familia de todas las distribuciones subexponenciales la denotamos por $\mathscr{S}$. En el Teorema 2.5.2 de [8] se muestra que si $F \in \mathscr{S}$ entonces

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{-\log \overline{F}(x)}{x} = 0,$$

luego por el Teorema 4 de [15], se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} e^{sx}\overline{F}(x) = \infty, \tag{2}$$

para cualquier $s > 0$.

Definición. *Denotamos por $\mathscr{R}_0$ a la familia de funciones de distribución que cumple*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\overline{F}(x)} = 0,$$

donde f es la densidad de F.

A continuación enunciamos los siguientes lemas que serán útiles para el resultado asintótico,

Lema 1.1. *(Lema 2.5.2 de [8]) Sean F y G dos funciones de distribución definidas en $[0,\infty)$ tales que $F \in \mathscr{S}$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c$ para alguna constante $c \in [0,\infty)$. Entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{(F*G)}(x)}{\overline{F}(x)} = 1+c.$$

El siguiente lema se debe a Embrechts et al. [7].

Lema 1.2. *Sea $\alpha \in (0,1)$ y G una distribución propia en $[0,\infty)$.*
Si $F(x) = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n G^{*(n)}(x)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $F \in \mathscr{S}$.

(ii) $G \in \mathscr{S}$.

(iii) $\overline{F}(x)/\overline{G}(x) \to \alpha/(1-\alpha)$ *cuando* $x \to \infty$.

El siguiente lema nos permite la representación de un cociente de polinomios en fracciones parciales

Lema 1.3. *Sea $\nu(s)$ un polinomio de grado p, $m \leq p-1$ y $h(s) = \frac{\nu(s)}{\prod_{i=1}^{m}(a_i+s)}$, con $a_1,\ldots,a_m$ números complejos diferentes. Entonces podemos representar a h como la siguiente suma*

$$h(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{(a_i+s)}, \qquad \beta_i = \frac{\nu(-a_i)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{m}(a_k-a_i)}.$$

Usaremos también el siguiente lema de teoría de interpolación (véase [9]) en las secciones 2 y 5 de este trabajo,

Lema 1.4. *Sean $a_1 \ldots a_m$ números complejos distintos y s un complejo arbitrario. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{(a_j-s)^k}{\prod_{l=1,l\neq j}^{m}(a_l-a_j)} = \begin{cases} (-1)^{m-1} & si\ k = m-1, \\ 0 & si\ k = 0,1,\ldots,m-2, \\ \frac{1}{\prod_{j=1}^{m}(a_j-s)} & si\ k = -1. \end{cases}$$

Por lo tanto si $P_r(a_j) = \alpha_0 + \alpha_1 a_j^1 + \ldots + \alpha_r a_j^r$ es un polinomio de grado r

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{P_r(a_j)}{\prod_{l=1,l\neq j}^{m}(a_l-a_j)} = 0, \qquad r = 0,1,\ldots,m-2.$$

2. Ecuación matricial para la transformada de Laplace del funcional

Sean W_i los tiempos entre arribos del proceso de renovación $N(t)$, se tiene que

$$W_i \stackrel{\mathrm{d}}{=} V_1 + \ldots + V_n,$$

donde $V_1,...,V_n$ son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros $\lambda_1,...,\lambda_n$ respectivamente.

Para cada $j\in\{0,1,...,n\}$ y $u>0$ definamos $S_j := V_1+...+V_j$, $S_0=0$ y sea

$$\phi_s^{(j)}(u)=E\left[e^{-\delta(T-t)}\omega(U(T^-),-U(T))\mathbb{1}_{\{T<\infty,U(T)<0\}}|U(t)=u,S_j=t\right].$$

Notamos que $\phi_s(u)=\phi_s^{(0)}(u)=\phi_s^{(n)}(u)$ y que debido a la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial de V_i, las funciones $\phi_s^{(j)}(u)$ no dependen de t. Análogamente definimos $\phi_d^{(j)}(u)$ para $j\in\{0,...,n\}$ como

$$\phi_d^{(j)}(u)=E\left[e^{-\delta(T-t)}\omega_0\mathbb{1}_{\{T<\infty,U(T)=0\}}|U(t)=u,S_j=t\right].$$

Primero obtendremos ecuaciones recursivas para las funciones $\phi_s^{(j)}(u)$ y $\phi_d^{(j)}(u)$.

Analizando la dinámica local de $\phi_s^{(j)}(u)$ se tiene para h pequeña y $j\in\{0,1,...,n-2\}$ fijo

$$\begin{aligned}\phi_s^{(j)}=(1-\delta h)\Bigg[&(1-\lambda_{j+1}h)(1-\mu h)E\left[\phi_s^{(j)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h)\right]\\&+\lambda_{j+1}h(1-\mu h)E\left[\phi_s^{(j+1)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h)\right]\\&+(1-\lambda_{j+1}h)\mu h\int_0^\infty E\left[\phi_s^{(j)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h+x)\right]G(dx)\Bigg]+o(h),\end{aligned}$$

para $j=n-1$ tenemos

$$\begin{aligned}\phi_s^{(n-1)}=(1-\delta h)\Bigg[&(1-\lambda_n h)(1-\mu h)E\left[\phi_s^{(n-1)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h)\right]\\&+\lambda_n h(1-\mu h)\int_0^\infty E\left[\phi_s^{(n)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h-y)\right]F(dy)\\&+(1-\lambda_n h)\mu h\int_0^\infty E\left[\phi_s^{(n-1)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h+x)\right]G(dx)\Bigg]+o(h).\end{aligned}$$

Definimos el operador T_s, usado por primera vez en [10] por Dickson y Hipp, aplicado a una función real valuada g, con respecto al número complejo s como

$$T_sg(x)=\int_x^\infty e^{-s(y-x)}g(y)dy,\qquad \text{para } x\geq 0.$$

El operador T cumple que

$$T_sT_rg(x)=T_rT_sg(x)=\frac{T_sg(x)-T_rg(x)}{r-s},\qquad \text{para } r\neq s,$$

y claramente $T_sg(0)=\hat{g}(s)$ es la transformada de Laplace de g.

Por la fórmula de Itô tenemos que $E[\phi_s^{(j)}(u+ch+\sqrt{2D}B_h)] = \phi_s^{(j)}(u)+[c\phi_s'^{(j)}(u)+D\phi_s''^{(j)}(u)]h+o(h)$, usando esto, dividiendo entre h y haciendo h tender a cero tenemos, para $j\in\{0,1,...,n-2\}$,

$$\phi_s^{(j)}(u)(\lambda_{j+1}+\mu+\delta) = c\phi_s'^{(j)}(u)+\lambda_{j+1}\phi_s^{(j+1)}(u)+D\phi_s''^{(j)}(u)+\mu\beta T_\beta\phi_s^{(j)}(u). \tag{3}$$

De la misma manera para el caso $j=n-1$ se tiene

$$\begin{aligned}\phi_s^{(n-1)}(u)(\lambda_n+\mu+\delta) = c\phi_s'^{(n-1)}(u)+\lambda_n\left(\int_0^u \phi_s^{(n-1)}(u-y)F(dy)+\int_u^\infty \omega(u,y-u)F(dy)\right)\\ +D\phi_s''^{(n-1)}(u)+\mu\beta T_\beta\phi_s^{(n-1)}(u).\end{aligned} \tag{4}$$

Tomando transformada de Laplace en (3) y (4) y usando que $\hat{\phi}_s'^{(j)}(r) = r\hat{\phi}_s^{(j)}(r)-\phi_s^{(j)}(0)$ obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:
Para $j\in\{0,1,...,n-2\}$ se cumple

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_s^{(j)}(r)(\lambda_{j+1}+\mu+\delta) = c\left[r\hat{\phi}_s^{(j)}(r)-\phi_s^{(j)}(0)\right]+\lambda_{j+1}\hat{\phi}_s^{(j+1)}(r)+D\left[r^2\hat{\phi}_s^{(j)}(r)-r\phi_s^{(j)}(0)-\phi_s'^{(j)}(0)\right]\\ +\mu\beta\hat{T}_\beta\phi_s^{(j)}(r),\end{aligned} \tag{5}$$

y para $j=n-1$ tenemos

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_s^{(n-1)}(r)(\lambda_n+\mu+\delta) = c\left[r\hat{\phi}_s^{(n-1)}(r)-\phi_s^{(n-1)}(0)\right]+\lambda_n\left(\hat{f}(r)\hat{\phi}_s^{(0)}(r)+\hat{\xi}(r)\right)\\ +D\left[r^2\hat{\phi}_s^{(n-1)}(r)-r\phi_s^{(n-1)}(0)-\phi_s'^{(n-1)}(0)\right]+\mu\beta\hat{T}_\beta\phi_s^{(n-1)}(r).\end{aligned} \tag{6}$$

Análogamente para el funcional asociado a la ruina por oscilación $\phi_d(u)$, se tienen las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\phi_d^{(j)}(u)(\lambda_{j+1}+\mu+\delta) = c\phi_d'^{(j)}(u)+\lambda_{j+1}\phi_d^{(j+1)}(u)+D\phi_d''^{(j)}(u)+\mu\beta T_\beta\phi_d^{(j)}(u) \quad, j\in\{0,1,...,n-2\},$$

$$\phi_d^{(n-1)}(u)(\lambda_n+\mu+\delta) = c\phi_d'^{(n-1)}(u)+\lambda_n[\phi_d^{(0)}*f(u)]+D\phi_d''^{(n-1)}(u)+\mu\beta T_\beta\phi_d^{(n-1)}(u).$$

Aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones anteriores se tiene que,

$$\begin{aligned}&\hat{\phi}_d^{(j)}(s)\left[(\lambda_{j+1}+\mu+\delta-cs-Ds^2)(\beta-s)-\mu\beta\right]-\lambda_{j+1}(\beta-s)\hat{\phi}_d^{(j+1)}(s)\\ &= -(c+Ds)(\beta-s)-D(\beta-s)\phi_d'^{(j)}(0)-\mu\beta\hat{\phi}_d^{(j)}(\beta), \quad j\in\{0,1,...,n-2\},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\hat{\phi}_d^{(n-1)}(s)\left[(\lambda_n+\mu+\delta-cs-Ds^2)(\beta-s)-\mu\beta\right]-\lambda_n(\beta-s)\hat{\phi}_d^{(0)}(s)\hat{f}(s)\\ &= -(c+Ds)(\beta-s)-D(\beta-s)\phi_d'^{(n-1)}(0)-\mu\beta\hat{\phi}_d^{(n-1)}(\beta).\end{aligned} \tag{8}$$

Observación 1. *Note que si* $\mu = 0$ *entonces, las ecuaciones* (5) *y* (6) *se obtienen inmediatamente al aplicar transformada de Laplace a las ecuaciones (7) y (8) de [1]. Si* $D = 0$ *se obtienen las ecuaciones (2.1) y (2.2) de [2].*

Usando que $\phi_s^{(j)}(0) = 0$ y las propiedades del operador de T podemos representar las ecuaciones anteriores de manera matricial como

$$A(r)\hat{\Phi}_s(r) = -D(\beta - r)\Phi_s'(0) - \mu\beta\hat{\Phi}_s(\beta) + \bar{e}\lambda_n(\beta - r)\hat{\xi}(r), \tag{9}$$

donde

- $\hat{\Phi}_l(r) = (\hat{\phi}_l^{(0)}(r), ..., \hat{\phi}_l^{(n-1)}(r))^T$,
- $\Phi_l'(0) = (\phi_l^{(0)}(0), ..., \phi_l^{(n)}(0))^T$,
- $\hat{\Phi}_l(\beta) = (\hat{\phi}_l^{(0)}(\beta), ..., \hat{\phi}_l^{(n-1)}(\beta))^T$,
- $A(r) = B(r) + \Lambda(r)$ con $A(r) \in M_{n\times n}$,
- $\Lambda(r) = diag\,(\Lambda_1(r), ..., \Lambda_n(r))$ con $\Lambda_j(r) = (\lambda_j + \mu + \delta - cr - Dr^2)(\beta - r) - \mu\beta$ y $l \in \{s, d\}$.

$$B(r) = (-1)(\beta - r) \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n\hat{f}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De la ecuación matricial anterior, multiplicando por la inversa de $A(r)$, se obtiene una expresión para el vector $\hat{\Phi}_s(r)$, del cual nos interesa sólo la primer componente, $\hat{\phi}_s^{(0)}(r)$, es decir

$$\hat{\phi}_s(r) = A_1^*(r)\frac{-D(\beta - r)\Phi_s'(0) - \mu\beta\widehat{\Phi}_s(\beta) + \bar{e}\lambda_n(\beta - r)\hat{\xi}(r)}{|A(r)|} =: \frac{N_s(r)}{|A(r)|}, \tag{10}$$

donde $|A(r)|$ denota el determinante de $A(r)$, $A_1^*(r) = \left(\prod_{i=2}\Lambda_i(r), \lambda_1(\beta - r)\prod_{i=3}\Lambda_i(r), ..., \frac{\lambda^{[n]}}{\lambda_n}(\beta - r)^{n-1}\right)$ denota el primer renglón de la matriz adjunta de $A(r)$ y $\mathbb{1} = (1, ..., 1)^T$.
Análogamente, a partir de (7), (8) y usando que $\phi_d^j(0) = 1$ tenemos

$$\hat{\phi}_d(r) = A_1^*(r)\frac{-(c + Dr)(\beta - r)\mathbb{1} - D(\beta - r)\Phi_d'(0) - \mu\beta\widehat{\Phi}_d(\beta)}{|A(r)|} =: \frac{N_d(r)}{|A(r)|}. \tag{11}$$

Llamaremos **Ecuación de Lundberg** a la siguiente ecuación:

$$|A(r)| = \prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda_i + \mu + \delta - cr - Dr^2)(\beta - r) - \mu\beta\right] - \lambda^{[n]}(\beta - r)^n\hat{f}(r) = 0. \tag{12}$$

Nuestro siguiente paso será demostrar que esta ecuación tiene $2n$ raíces con parte real no negativa. Para esto enunciamos el siguiente resultado

Teorema 2.1 (Teorema de Rouché)**.** *Sean f y g dos funciones complejas holomorfas sobre una región K con contorno cerrado ∂K. Si*

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|,$$

entonces $f(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo número de raíces dentro de K, donde cada raíz es contada tantas veces como su multiplicidad.

Teorema 2.2. *La ecuación de Lundberg* (12) *tiene $2n$ raíces en $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0\}$.*

Demostración. Sean $J(r) = \prod_{i=1}^{n}[(\lambda_i+\mu+\delta-cr-Dr^2)(\beta-r)-\mu\beta]$ y $J_k(r) = (\lambda_k+\mu+\delta-cr-Dr^2)(\beta-r)-\mu\beta$.

Lema 2.3. *$J_k(r)$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ tiene 2 raíces reales no negativas y una raíz real negativa.*
Demostración: Considere la función $N_k(r) = \frac{J_k(r)}{\beta-r}$, esta función cumple lo siguiente

a) $N_k(0) = \lambda_k + \delta > 0$.

b) $N_k'(0) = -c - \frac{\mu}{\beta} < 0$.

c) $\lim_{r\to\beta-} N_k(r) = -\infty$, $\lim_{r\to\beta+} N_k(r) = \infty$.

d) $\lim_{r\to\infty} N_k(r) = -\infty$.

e) $\lim_{r\to-\infty} N_k(r) = -\infty$.

De esta forma podemos observar que $J_k(r)$ tiene 2 raíces positivas, lo cual también implica que $J(r)$ tiene $2n$ raíces reales positivas. Usaremos el Teorema de Rouche para ver que $L(r) := |A(r)|$ tiene $2n$ raíces en $\mathbb{C}_+$. También podemos observar que e) implica que $J_k(r)$ tiene una raíz negativa, por lo que $J(r)$ tiene n raíces negativas. ▶

Sea $\mathscr{C}_R$ el semicírculo cerrado de radio R parametrizado en el sentido de las manecillas del reloj. Por el Teo. de Rouché, si $|L(s)-J(s)| < |L(s)|$ con $s \in \mathscr{C}_R$, entonces $L(s)$ y $J(s)$ tienen el mismo número de raíces en el interior de $\mathscr{C}_R$. Como $|L(s)-J(s)| = |(\beta-s)^n\lambda^{[n]}\hat{f}(s)|$, y $|\hat{f}(s)| \leq 1$ en $\mathscr{C}_R$, basta con demostrar que $|N_k(s)| > |\lambda_k|$ para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. Si s está en el eje imaginario y $\mathscr{C}_R$, entonces $s = ir$ con $r \in [-R,R]$, y

$$N_k(s) = \lambda_k + \mu + \delta + Dr^2 - \frac{\mu\beta^2}{\beta^2+r^2} - i\left[\frac{\mu\beta r}{\beta^2+r^2} + cr\right].$$

Debido a que $\mu - \frac{\mu\beta^2}{\beta^2+r^2} > 0$, de lo anterior se sigue que $Re(N_k(s)) > \lambda_k$, por lo tanto $|N_k(s)| > |\lambda_k|$. Por otro lado si $s \neq ir$, $r \in \mathbb{R}$, se tiene que para R suficientemente grande $|N_k(s)| = |\lambda_k + \mu + \delta - cs - Ds^2 - \frac{\mu\beta}{\beta-r}| > |\lambda_k|$. Por lo tanto $|L(s)-J(s)| < |L(s)|$, lo cual implica que $L(s)$ tiene $2n$ raíces en $\mathbb{C}_+$.

□

Hipótesis: En lo siguiente supondremos, por simplicidad de los cálculos, que las raíces de (12) en $\mathbb{C}_+$ son distintas.

Observación 2. *Note que las raíces $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{2n}$ de la ecuación de Lundberg satisfacen las siguientes igualdades,*

$$A_1^*(\rho_j)\left[D(\beta-\rho_j)\Phi_s'(0)+\mu\beta\hat{\Phi}_s(\beta)\right]=\lambda^{[n]}(\beta-\rho_j)^n\hat{\xi}(\rho_j) \qquad j\in\{1,2,...,2n\},$$

$$A_1^*(\rho_j)\left[-(c+D\rho_j)(\beta-\rho_j)\mathbb{1}-D(\beta-\rho_j)\Phi_d'(0)-\mu\beta\widehat{\Phi}_d(\beta)\right]=0 \qquad j\in\{1,2,...,2n\}, \tag{13}$$

estas igualdades dan lugar a 2 sistemas de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas, que son las entradas de los vectores $\Phi'(0), \hat{\Phi}(\beta)$ y $\Phi_d'(0), \hat{\Phi}_d(\beta)$.

3. Transformada de Laplace de ϕ

En esta sección obtendremos las transformadas de Laplace de $\phi_s(u)$ y $\phi_d(u)$ a partir de (10) y (11). Después obtendremos ecuaciones de renovación impropias para $\phi_s(u)$ y $\phi_d(u)$.

Teorema 3.1. *Las transformadas de Laplace de $\phi_s(u)$ y $\phi_d(r)$ están dadas por*

$$\hat{\phi}_s(r)=\frac{\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^n\frac{d_i(\delta)}{(r+a_i)}-\frac{1}{\prod_{k=1}^n(r+a_k)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{B_\delta\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)}{1-\left[-\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{T}_{\rho_i}f(r)-\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{f}(r)\hat{T}_{\rho_i}h(r)\right]}, \tag{14}$$

$$\hat{\phi}_d(r)=\frac{\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^n\frac{e_i(\delta)}{(r+a_i)}}{1-\left[-\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{T}_{\rho_i}f(r)-\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{f}(r)\hat{T}_{\rho_i}h(r)\right]}, \tag{15}$$

donde $B_\delta=D^n\prod_{k=1}^{2n}(b_k/\rho_k)+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)}\frac{\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i}$, $d_i(\delta)=\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^n(a_j-a_i)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}(-a_i)^{k-1}\right)$ *y* $e_i(\delta)=\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^n(a_j-a_i)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}(-a_i)^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)$.

Demostración. Usaremos las ecuaciones (10) y (11). Comenzamos con el denominador en tales ecuaciones,

$$J(r)=\prod_{i=1}^n\left[(\lambda_i+\mu+\delta-cr-Dr^2)(\beta-r)-\mu\beta\right]=D^n\prod_{k=1}^n(r+a_k)\prod_{k=1}^{2n}(r-b_k)=D^n\prod_{k=1}^n(r+a_k)P_{2n}(r), \tag{16}$$

donde b_k con $k=1,2,...,2n$ son las $2n$ raíces positivas de J, $-a_k$ las n raíces negativas de J y $P_{2n}(r):=\prod_{k=1}^{2n}(r-b_k)$. Entonces, como ρ_i es raíz de la ecuación (12),

$$J(\rho_i)=D^n\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)P_{2n}(\rho_i)=\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n\hat{f}(\rho_i).$$

Despejando obtenemos

$$P_{2n}(\rho_i)=\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n\hat{f}(\rho_i)}{D^n\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)},\ \ i\in\{1,2,...,2n\},\ \text{ y }\ P_{2n}(0)=\prod_{k=1}^{2n}(-b_k).$$

Sea $\rho_{2n+1} := 0$, por interpolación de Lagrange tenemos la siguiente representación de P_{2n} :

$$
\begin{aligned}
P_{2n}(s) &= \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\pi_{2n+1,i}(s)}{\pi_{2n+1,i}(\rho_i)} P_{2n}(\rho_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n+1,i}(s)}{\pi_{2n+1,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}}{D^n} \frac{(\beta-\rho_i)^n \hat{f}(\rho_i)}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} + \frac{\pi_{2n+1,2n+1}(s)}{\pi_{2n+1,2n+1}(0)} \prod_{k=1}^{2n}(-b_k) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(s)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{s}{\rho_i} \frac{\lambda^{[n]}}{D^n} \frac{(\beta-\rho_i)^n \hat{f}(\rho_i)}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} + \frac{\prod_{i=1}^{2n}(s-\rho_i)}{\prod_{i=1}^{2n}(-\rho_i)} \prod_{k=1}^{2n}(-b_k) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\pi_{k,i}(s) = \prod_{j=1, j\neq i}^{k} (s-\rho_j), \quad i \le k \le 2n+1.
$$

De (16), (17), (12) y el Lema 1.4 obtenemos

$$
\begin{aligned}
|A(r)| &= D^n \prod_{j=1}^{n}(r+a_j) \left[\sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{r}{\rho_i} \frac{\lambda^{[n]}}{D^n} \frac{(\beta-\rho_i)^n \hat{f}(\rho_i)}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} + \frac{\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)}{\prod_{i=1}^{2n}(\rho_i)} \prod_{k=1}^{2n}(b_k) \right] - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(s)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \lambda^{[n]} (\beta-r)^n \hat{f}(r) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left(\frac{r}{\rho_i} \lambda^{[n]} \frac{(\beta-\rho_i)^n \hat{f}(\rho_i)}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} \prod_{j=1}^{n}(r+a_j) - \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \hat{f}(r) \right) \\
&\quad + D^n \prod_{j=1}^{n}(r+a_j) \prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i) \prod_{k=1}^{2n}(b_k/\rho_k) \\
&=: L_1(r) + L_2(r). \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Para $L_1(r)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
L_1(r) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left(\frac{r-\rho_i+\rho_i}{\rho_i} \lambda^{[n]} \frac{(\beta-\rho_i)^n \hat{f}(\rho_i)}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) - \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \hat{f}(r) \right) \\
&= \prod_{k=1}^{2n}(r-\rho_k) \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{j=1}^{n}(\rho_i+a_j)} \frac{\prod_{j=1}^{n}(r+a_j)}{\rho_i} \hat{f}(\rho_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left(\left[\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} \right] \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) \hat{f}(\rho_i) - \lambda^{[n]}(\beta-r) \hat{f}(r) \right) \\
&=: \prod_{k=1}^{2n}(r-\rho_k) \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{j=1}^{n}(\rho_i+a_j)} \frac{\prod_{j=1}^{n}(r+a_j)}{\rho_i} \hat{f}(\rho_i) + H(r) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Desarrollando la expresión para $H(r)$ y llamando $g(\rho_i)$ a lo que se encuentra en corchetes se tiene

$$
\begin{aligned}
H(r) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left(g(\rho_i) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k)\hat{f}(\rho_i) - \lambda^{[n]}(\beta - r)\hat{f}(r) \pm g(\rho_i) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k)\hat{f}(r) \right) \\
&= \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) \sum_{i=1}^{2n} \frac{g(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\hat{f}(\rho_i)-\hat{f}(r)}{r-\rho_i} \\
&+ \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left[g(\rho_i) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) - \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \right] \\
&=: H_1(r) + H_2(r).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Para $H_2(r)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
H_2(r) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left[g(\rho_i) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) - \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \pm \lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n \right] \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left[\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n - \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \right] + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left[g(\rho_i) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) - \lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n \right]. \\
&=: H_{2,1}(r) + H_{2,2}(r).
\end{aligned}
$$

Demostraremos que $H_2'(r) = 0$. Sea $R_i(r) = -\sum_{k=0}^{n-1}(\beta-\rho_i)^k(\beta-r)^{n-k-1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
H_{2,1}(r) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \lambda^{[n]} \left[(\beta-\rho_i)^n - (\beta-r)^n \right] \\
&= \lambda^{[n]}\hat{f}(r) \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{(\beta-\rho_i)^n - (\beta-r)^n}{(r-\rho_i)} \\
&= \lambda^{[n]}\hat{f}(r) \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{(r-\rho_i)R_i(r)}{(r-\rho_i)} \\
&= \lambda^{[n]}\hat{f}(r) \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \sum_{i=1}^{2n} \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}(\beta-\rho_i)^k(\beta-r)^{n-k-1}}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \\
&= \lambda^{[n]}\hat{f}(r) \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \left(-\sum_{k=0}^{n-1}(\beta-r)^{n-k-1} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(\beta-\rho_i)^l}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{21}
$$

donde la última igualdad se debe al Lema 1.4.

Para $H_{2,2}(r)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
H_{2,2}(r) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left[\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) - \lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n \right] \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,i}(r)\hat{f}(r)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n \left[\frac{\prod_{k=1}^{n}(r+a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} - 1 \right] \\
&= \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) \sum_{i=1}^{2n} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \hat{f}(r) \left[\frac{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(r+a_k)}}{r-\rho_i} \right] \\
&= \prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) \sum_{i=1}^{2n} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \hat{f}(r) \hat{T}_{\rho_i} h(r),
\end{aligned} \tag{22}
$$

donde $\hat{h}(r) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(r+a_k)}$. De (22), (20), (19) y (18) se sigue

$$
|A(r)| = \prod_{k=1}^{2n}(r-\rho_k) \prod_{k=1}^{n}(r+a_k) \left[\sum_{i=1}^{2n} \frac{g(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \hat{T}_{\rho_i} f(r) + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \hat{f}(r) \hat{T}_{\rho_i} h(r) + B_\delta \right], \tag{23}
$$

con $B_\delta = D^n \prod_{k=1}^{2n}(b_k/\rho_k) + \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)} \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i}$.

Ahora analizaremos el numerador $N_s(r)$ de la expresión (10). Notando que $A_1^*(r)\left[-D(\beta-r)\Phi'(0) - \mu\beta\widehat{\Phi}(\beta)\right]$ es un polinomio de grado $3n-2$ tenemos

$$
N_s(r) = P_{2n-1}(r) + r^{2n} Q_{n-2}(r) + \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \hat{\xi}(r),
$$

donde P_{2n-1} y Q_{n-2} son dos polinomios de grados $2n-1$ y $n-2$, respectivamente. Además, $N_s(\rho_j) = 0,\ j = 1, ..., 2n$. Luego por interpolación de Lagrange tenemos

$$
P_{2n-1}(r) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)} \left(-\lambda^{[n]}(\beta-\rho_j)^n \hat{\xi}(\rho_j) - \rho_j^{2n} Q_{n-2}(\rho_j) \right).
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
N_s(r) &= \sum_{j=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)} \left[-\lambda^{[n]}(\beta-\rho_j)^n \hat{\xi}(\rho_j) - \rho_j^{2n} Q_{n-2}(\rho_j) + \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \hat{\xi}(r) + r^{2n} Q_{n-2}(r) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)} \left[-\lambda^{[n]}(\beta-\rho_j)^n \hat{\xi}(\rho_j) - \rho_j^{2n} Q_{n-2}(\rho_j) + \lambda^{[n]}(\beta-r)^n \hat{\xi}(r) + r^{2n} Q_{n-2}(r) \pm r^{2n} Q_{n-2}(\rho_j) \right],
\end{aligned}
$$

usando que $a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}b^{n-k}$, de lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
N_s(r)=&\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\Bigg\{-\lambda^{[n]}(\beta-\rho_j)^n\hat{\xi}(\rho_j)+\lambda^{[n]}(\beta-r)^n\hat{\xi}(r)+(r-\rho_j)\left(\sum_{k=1}^{2n}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)Q_{n-2}(\rho_j)\\
&+r^{2n}\left[Q_{n-2}(r)-Q_{n-2}(\rho_j)\right]\Bigg\}\\
=&\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\lambda^{[n]}\left[(\beta-r)^n\hat{\xi}(r)-(\beta-\rho_j)^n\hat{\xi}(\rho_j)\right]\\
&+\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}(r-\rho_j)\left(\sum_{k=1}^{2n}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)Q_{n-2}(\rho_j)\\
&+\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}r^{2n}\left[Q_{n-2}(r)-Q_{n-2}(\rho_j)\right]\\
=:&C_1(r)+C_2(r)+C_3(r).
\end{aligned}\tag{24}$$

Veamos que $C_3(r)$ es cero,

$$Q_{n-2}(r)-Q_{n-2}(\rho_j)=\sum_{k=1}^{n-2}\alpha_k(r^l-\rho_j^k)=\sum_{k=1}^{n-2}\alpha_k(r-\rho_j)\left(\sum_{m=1}^{k}r^{k-m}\rho_j^{m-1}\right)$$

Esto implica que

$$C_3(r)=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}r^{2n}\left[Q_{n-2}(r)-Q_{n-2}(\rho_j)\right]=r^{2n}\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\sum_{k=1}^{n-2}a_k\left(\sum_{m=1}^{k}r^{k-m}\rho_j^{m-1}\right)=0,$$

donde la última igualdad se debe al Lema 1.4. A continuación analizaremos $C_1(r)$.

$$\begin{aligned}
C_1(r)&=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\lambda^{[n]}\left[(\beta-r)^n\hat{\xi}(r)-(\beta-\rho_j)^n\hat{\xi}(\rho_j)\right]\\
&=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\lambda^{[n]}\left[(\beta-r)^n\hat{\xi}(r)-(\beta-\rho_j)^n\hat{\xi}(\rho_j)\pm(\beta-\rho_j)^n\hat{\xi}(r)\right]\\
&=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\lambda^{[n]}\hat{\xi}(r)\left[(\beta-r)^n-(\beta-\rho_j)^n\right]+\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\lambda^{[n]}(\beta-\rho_j)^n\left[\hat{\xi}(r)-\hat{\xi}(\rho_j)\right]\\
&=\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\hat{\xi}(r)\lambda^{[n]}\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\frac{(\beta-r)^n-(\beta-\rho_j)^n}{r-\rho_j}-\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)\\
&=-\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r),
\end{aligned}$$

donde última igualdad se debe al mismo argumento con el que se probó $H_2'(r) = 0$. Por último, para analizar $C_2(r)$, separamos la suma dentro de la expresión y obtenemos

$$\begin{aligned} C_2(r) = &\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\left[\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n}^{2n}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)\right] \\ =&\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right), \end{aligned}$$

usando en la última igualdad el Lema 1.4. Se sigue que el numerador $N_s(r)$ de (10) está dado por

$$N_s(r) = \prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\left[-\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\widehat{T_{\rho_j}\xi}(r)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)\right]. \tag{25}$$

Seguimos con un procedimiento similar para el numerador $N_d(r)$ de (11), para el que tenemos la representación

$$N_d(r) = p_{2n-1}(r) + r^{2n}q_{n-1}(r),$$

donde

$$p_{2n-1}(r) = \sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}(-\rho_j^{2n}q_{n-1}(\rho_j)).$$

Así,

$$\begin{aligned} N_d(r) &= p_{2n-1}(r) + r^{2n}q_{n-1}(r) \\ &= \sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left[r^{2n}q_{n-1}(r)-\rho_j^{2n}q_{n-1}(\rho_j)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left[r^{2n}q_{n-1}(r)-\rho_j^{2n}q_{n-1}(\rho_j)\pm r^{2n}q_{n-1}(\rho_j)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left\{r^{2n}\left[q_{n-1}(r)-q_{n-1}(\rho_j)\right]+q_{n-1}(\rho_j)\left[r^{2n}-\rho_j^{2n}\right]\right\}, \end{aligned}$$

usando que $a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}b^{n-k}$ y el Lema 1.4, se tiene

$$\begin{aligned}
N_d(r)=&r^{2n}\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\frac{[q_{n-1}(r)-q_{n-1}(\rho_j)]}{r-\rho_j}+\sum_{j=1}^{2n}\frac{\pi_{2n,j}(r)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}q_{n-1}(\rho_j)(r-\rho_j)\left(\sum_{k=1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)\\
=&\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)\\
=&\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\left\{\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)\right\}\\
=&\prod_{i=1}^{2n}(r-\rho_i)\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right) \qquad (26)
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos el Lema 1.4. De (25) y (26) se sigue que

$$\hat{\phi}_s(r)=\frac{\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)-\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\widehat{T_{\rho_j}\xi}(r)}{\prod_{k=1}^{n}(r+a_k)\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{g(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{T}_{\rho_i}f(r)+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{f}(r)\hat{T}_{\rho_i}h(r)+B_\delta\right]}. \qquad (27)$$

$$\hat{\phi}_d(r)=\frac{\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)}{\prod_{k=1}^{n}(r+a_k)\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{g(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{T}_{\rho_i}f(r)+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{f}(r)\hat{T}_{\rho_i}h(r)+B_\delta\right]}. \qquad (28)$$

De (27) y (28) al dividir el numerador y el denominador por $\prod_{k=1}^{n}(r+a_k)$, y usando el Lema 1.3 se obtienen (14) y (15).

□

Corolario 3.1.1. *Las funciones $\phi_s(u)$ y $\phi_d(u)$ satisfacen las siguientes ecuaciones de renovación ïmpropias”*

$$\phi_s(u)=\int_0^u\phi_s(u-y)\kappa(y)dy+H(u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(\delta)}{B_\delta}e^{-a_iu}, \qquad (29)$$

$$\phi_d(u)=\int_0^u\phi_d(u-y)\kappa(y)dy+\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i(\delta)}{B_\delta}e^{-a_iu}, \qquad (30)$$

donde $H(u)=-h(u)*\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{B_\delta\pi_{2n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}\xi(u)$,
$\kappa(u)=\left[-\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^{2n}\frac{g(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}T_{\rho_i}f(u)-\frac{1}{B_\delta}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\left(f(u)*T_{\rho_i}h(u)\right)\right]$,
$h(u)=e^{-a_iu}*e^{-a_2u}*\ldots*e^{-a_nu}$
$B_\delta=D^n\prod_{k=1}^{2n}(b_k/\rho_k)+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i+a_k)}\frac{\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i}$.

El teorema anterior generaliza los resultados en las ecuaciones (25) y (26) de [1] y (3.7) de [2].

4. Reclamos con transformada de Laplace racional

Cuando las reclamaciones Y_i tienen distribución cuya transformada de Laplace pertenece a la familia racional, $\hat{f}(r) = \dfrac{l_{m-1}(r)}{l_m(r)}$, donde $l_{(m)}$ es un polinomio de grado m y $l_{(m-1)}$ es un polinomio de grado a lo más$m-1$, se puede obtener una expresión más simple de la función $\hat{\phi}(r)$ usando representación en fracciones parciales. Más aún es posible invertirla y dar una forma explícita del funcional de Gerber-Shiu, como veremos a continuación.

Teorema 4.1. *Si $\hat{f}(r) = \dfrac{l_{m-1}(r)}{l_m(r)}$, donde $l_{(m)}$ y $l_{(m-1)}$ son polinomios de grados m y $m-1$ respectivamente, la transformada de Laplace del funcional de Gerber-Shiu se puede escribir de la siguiente forma,*

$$\hat{\phi}(r) = D^{-n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{\alpha_k}{r+R_k}\right)\left[\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i+\varepsilon_i}{r+R_i}\right], \tag{31}$$

donde $\tau_i = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(R_j-R_i)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}(-R_i)^{k-1}\right)$ *y* $\varepsilon_i = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(R_j-R_i)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}(-R_i)^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)$.

Demostración. Usando (27) y (23) tenemos lo siguiente,

$$\hat{\phi}_s(r) = \frac{\prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j)\left[\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)\right]}{J(r)-\lambda^{[n]}(\beta-r)^n\hat{f}(r)}$$

donde $J(r) = \prod_{i=1}^{n}[(\lambda_i+\mu+\delta-cr-Dr^2)(\beta-r)-\mu\beta]$ y usando $\hat{f}(r) = \dfrac{l_{m-1}(r)}{l_m(r)}$, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_s(r) &= \frac{l_m(r)\prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j)\left[\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)\right]}{l_m(r)J(r)-\lambda^{[n]}(\beta-r)^n l_{m-1}(r)} \\ &= \frac{l_m(r)\prod_{j=1}^{2n}(r-\rho_j)\left[\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)\right]}{\prod_{k=1}^{2n}(r-\rho_k)\prod_{j=1}^{n+m}(r+R_k)D^n},\end{aligned} \tag{32}$$

usando que el denominador de (32) es un polinomio de grado $3n+m$ y el coeficiente del grado mayor es D^n y que $-R_k < 0$, $k = 1,\ldots,n+m$ son las raíces negativas de la ecuación de Lundberg. Entonces

$$\hat{\phi}_s(r) = \frac{l_m(r)}{\prod_{j=n+1}^{n+m}(r+R_k)}\frac{\left[\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)D^n}. \tag{33}$$

Haciendo fracciones parciales se tiene

$$\frac{l_m(r)}{\prod_{k=n+1}^{n+m}(r+R_k)} = 1+\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{\alpha_k}{r+R_k}, \qquad \alpha_k = \frac{(-1)^{m-1}l_m(-R_k)}{\prod_{j=n+1,j\neq k}^{n+m}(R_k-Rj)}.$$

Por otro lado, usando representación en fracciones parciales como en (14), la expresión

$$\frac{\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T}_{\rho_j}\xi(r)+\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}r^{k-1}\right)}{\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)D^n},$$

se puede representar como

$$\frac{1}{D^n\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T_{\rho_j}}\xi(r)+\frac{1}{D^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{r+R_i},$$

con

$$\tau_i = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(R_j-R_i)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{Q_{n-2}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\rho_j^{2n-k}(-R_i)^{k-1}\right).$$

Así, (33) se puede escribir de la siguiente manera,

$$\hat{\phi}_s(r) = D^{-n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{\alpha_k}{r+R_k}\right)\left[\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\hat{T_{\rho_j}}\xi(r)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{r+R_i}\right]. \tag{34}$$

Para el funcional asociado a la ruina partimos de (28), y sustituyendo el denominador por (23) tenemos lo siguiente,

$$\hat{\phi}_d(r) = \frac{l_m(r)\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)}{\prod_{j=n+1}^{n+m}(r+R_k)\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)D^n},$$

y por fracciones parciales

$$\frac{\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}r^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right)}{\prod_{j=1}^{n}(r+R_j)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{r+R_i},$$

donde

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(R_j-R_i)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{q_{n-1}(\rho_j)}{\pi_{2n,j}(\rho_j)}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}(-R_i)^{2n-k}\rho_j^{k-1}\right),$$

por lo tanto

$$\hat{\phi}_d(r) = D^{-n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{\alpha_k}{r+R_k}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{r+R_i}. \tag{35}$$

De (34) y (35) se obtiene el resultado. □

Observación 3. *Invirtiendo la expresión* (31) *se tiene que*

$$\phi(u) = D^{-n}\left[(h_R * H)(u) + h_e(u) + \left(h_R * H * \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k e^{-R_k \bullet}\right)(u) + \left(h_e * \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k e^{-R_k \bullet}\right)(u)\right],$$

donde $h_R(u) = e^{-R_1 u} * e^{-R_2 u} * \ldots * e^{-R_n u}$, $h_e(u) = \sum_{i=1}^{n}(\tau_i + \varepsilon_i)e^{-R_i u}$ *y* $H(u) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(\beta-\rho_j)^n \lambda^{[n]}}{\pi_{2n,j}(\rho_j)} T_{\rho_j}\xi(u)$.

5. El caso de la probabilidad de ruina

Para obtener una expresión de la probabilidad de ruina en nuestro modelo, hacemos $\omega(x,y) \equiv 1$ y $\delta = 0$ en (14) y (15). Cuando $\delta \to 0$, $\lim_{\delta\to 0} \rho_j(\delta) = \rho_j(0)$, con $j = 1, \ldots, 2n$, y por lo tanto $\lim_{\delta\to 0} \rho_1(\delta) = \rho_1(0) = 0$. El siguiente lema garantiza la existencia de $\lim_{\delta\to 0} B_\delta$.

Lema 5.1. *Para* B_δ *definido como en* (14) *y* (15) *tenemos*

$$\lim_{\delta\to 0} B_\delta =: B_0 = \frac{\lambda^{[n]}\beta^n\left[\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{b_j} - \sum_{j=2}^{2n}\frac{1}{\rho_j}\right]}{\left(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j\right)\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sum_{i=2}^{2n} \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\rho_i \prod_{k=1}^{n}(\rho_i + a_k)}. \tag{36}$$

Demostración. Debido a que $\left(\prod_{j=1}^{2n} b_k\right)\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{\beta^n \lambda_\delta^{[n]}}{D^n}$, con $\lambda_\delta^{[n]} = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \delta)$, se tiene la siguiente representación de B_δ,

$$B_\delta = \frac{\beta^n \lambda_\delta^{[n]}}{\left(\prod_{j=1}^{2n}\rho_j\right)\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i + a_k)} \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
B_\delta &= \frac{\beta^n(\lambda_\delta^{[n]} - \lambda^{[n]})}{\left(\prod_{j=1}^{2n}\rho_j\right)\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sum_{i=2}^{2n} \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\rho_i \prod_{k=1}^{n}(\rho_i + a_k)} + \frac{\hat{f}(\rho_1)}{\pi_{2n,1}(\rho_1)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_1)^n}{\rho_1 \prod_{k=1}^{n}(\rho_1 + a_k)} + \frac{\beta^n \lambda^{[n]}}{\left(\prod_{j=1}^{2n}\rho_j\right)\prod_{k=1}^{n} a_k} \\
&= \frac{\beta^n(\lambda_\delta^{[n]} - \lambda^{[n]})}{\left(\prod_{j=1}^{2n}\rho_j\right)\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sum_{i=2}^{2n} \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\rho_i \prod_{k=1}^{n}(\rho_i + a_k)} + \frac{\hat{f}(\rho_1)}{\prod_{j=2}^{2n}(\rho_1 - \rho_j)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_1)^n}{\rho_1 \prod_{k=1}^{n}(\rho_1 + a_k)} - \frac{\beta^n \lambda^{[n]}}{\rho_1 \prod_{j=2}^{2n}(-\rho_j)\prod_{k=1}^{n} a_k} \\
&=: V_1(\delta) + V_2 + V_3(\delta) - V_4(\delta).
\end{aligned}$$

Definiendo $\nu(x) = \frac{\lambda^{[n]}(\beta-x)^n \hat{f}(x)}{\prod_{j=2}^{2n}(x-\rho_j)\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)}$, se tiene $V_3(\delta) - V_4(\delta) = \frac{\nu(\rho_1)-\nu(0)}{\rho_1}$. Por cálculo directo tenemos que

$$\left.\frac{\partial \nu(\rho_1)}{\partial \rho_1}\right|_{\rho_1=0} = \lambda^{[n]} \frac{\beta^n \mu_y + n\beta^{n-1} + \beta^n\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \sum_{j=2}^{2n}\frac{1}{\rho_j}\right]}{\prod_{j=2}^{2n}\rho_j \prod_{k=1}^{n} a_k}. \tag{37}$$

Por lo tanto, cuando $\delta \to 0$, $V_3(\delta) - V_4(\delta)$, se convierten en (37). Ahora analizaremos $V_1(\delta)$. Debido a que ρ_1 es raíz de (12) se tiene que

$$\beta^n \lambda_\delta^{[n]} = \lambda^{[n]}(\beta - \rho_1)^n \hat{f}(\rho_1) - P_{3n}(\rho_1),$$

donde P_{3n} es un polinomio de grado $3n$ sin término constante. Se sigue que

$$\begin{aligned} V_1(\delta)(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)\prod_{k=1}^{n} a_k &= \frac{\beta^n(\lambda_\delta^{[n]} - \lambda^{[n]})}{\rho_1} \\ &= \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_1)^n \hat{f}(\rho_1) - P_{3n}(\rho_1) - \lambda^{[n]}\beta^n \pm \lambda^{[n]}\beta^n \hat{f}(\rho_1)}{\rho_1} \\ &= \lambda^{[n]} \frac{\hat{f}(\rho_1)(\beta-\rho_1)^n - \beta^n}{\rho_1} - \frac{P_{3n}(\rho_1)}{\rho_1} + \lambda^{[n]}\beta^n \frac{\hat{f}(\rho_1) - 1}{\rho_1}. \end{aligned} \tag{38}$$

Tomando límite cuando $\delta \to 0$ en (38) se obtiene

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \frac{P_{3n}(\rho_1)}{\rho_1} = D^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{2n}(-b_j)(\prod_{k=1}^{n} a_k)}{a_k} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\prod_{j=1}^{2n}(-b_j)(\prod_{k=1}^{n} a_k)}{b_i} \right). \tag{39}$$

Utilizando (39) y $D^n \prod_{j=1}^{2n}(-b_j)(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \lambda^{[n]}\beta^n$ tenemos lo siguiente,

$$\lim_{\delta \to 0} V_1(\delta) = \frac{1}{(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)\prod_{k=1}^{n} a_k} \left[-\lambda^{[n]} n \beta^{n-1} - \lambda^{[n]}\beta^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{b_j} \right) - \lambda^{[n]}\beta^n \mu_y \right], \tag{40}$$

De (37) y (40) obtenemos el resultado. □

Observación 4. *Si $\omega(x,y) \equiv 1$, para todo $x, y \geq 0$, entonces*

1. $\xi(u) = \int_u^\infty \omega(u, x-u) f(x) dx = \int_u^\infty f(x) dx = \bar{F}(u)$.
2. $T_r \xi(u) = \int_u^\infty e^{-r(y-u)} \bar{F}(y) dy \overset{Fubini}{=} \frac{1}{r}\bar{F}(u) - \frac{1}{r} T_r f(u)$.
3. $T_0 f(u) = \int_u^\infty f(y) dy = \bar{F}(u)$.
4. $T_0 \xi(u) = \int_u^\infty \bar{F}(y) dy = \mu_y \bar{F}_I(u)$.
5. $T_0 h(u) = \int_u^\infty h(y) dy = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k} \int_u^\infty a_1 e^{-a_1 u} * a_2 e^{-a_2 u} * \ldots * a_n e^{a_n u} du = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k} \bar{F}_E(u)$.

donde $\bar{F}_E(u)$ es la cola de una distribución generalizada $Erlang(a_1, \ldots, a_n)$ y $F_I(u) = \frac{1}{\mu_y}\int_0^u \overline{F}(x) dx$ la distribución de cola integrada de F.

Teorema 5.2. *La probabilidad de ruina para el modelo (1), $\psi(u) = P[T < \infty | U(0) = u]$, está dada por*

$$\psi(u) = \left(\theta * \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{*(n)} \right)(u), \tag{41}$$

donde

$$\kappa(u) = -\frac{\lambda^{[n]}}{B_0}\left[\frac{\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k}\left(\bar{F}(u)+f(u)*\bar{F}_E(u)\right)+\sum_{i=2}^{2n}\frac{(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,1}(\rho_i)}\left(\frac{T_{\rho_i}f(u)}{\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)}+f(u)*T_{\rho_i}h(u)\right)\right], \tag{42}$$

y

$$\theta(u) = \frac{1}{B_0}\left[h(u)*\left(-\frac{\lambda^{[n]}\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)}\mu_y\bar{F}_I(u)-\sum_{i=2}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}T_{\rho_i}\xi(u)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(d_i(0)+e_i(0)\right)e^{-a_iu}\right]. \tag{43}$$

Demostración. Sustituyendo $\omega(x,y)\equiv 1$ y $\delta=0$ en (14) y (15) y usando el Lema 4.1 en conjunto con la observación 4, se tiene que el denominador de (14) y (15) está dado por

$$1-\hat{\kappa}(r) = 1-\left[-\frac{1}{B_0}\left\{\frac{\lambda^{[n]}\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k}\left(\hat{\bar{F}}(r)+\hat{f}(r)\hat{\bar{F}}_E(r)\right)+\sum_{i=2}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\left(\frac{\hat{T}_{\rho_i}f(r)}{\prod_{k=1}^n(\rho_i+a_k)}+\hat{f}(r)\hat{T}_{\rho_i}h(r)\right)\right\}\right]. \tag{44}$$

Invirtiendo esta transformada de Laplace se tiene la expresión de $\kappa(u)$.
Por otro lado, el numerador en (14) queda

$$\frac{1}{B_0}\left[\frac{1}{\prod_{k=1}^n(r+a_k)}\left(-\frac{\lambda^{[n]}\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)}\mu_y\hat{\bar{F}}_I(r)-\sum_{i=2}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{T}_{\rho_i}\xi(r)\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(0)}{r+a_i}\right],$$

y el numerador de (15) es

$$\frac{1}{B_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i(0)}{r+a_i}.$$

Usando que $\hat{\psi}(r)=\hat{\psi}_s(r)+\hat{\psi}_d(r)$ y que $\hat{\theta}(r)$ está dado por la suma de los numeradores de (14) y (14), obtenemos

$$\hat{\psi}(r) = \frac{\hat{\theta}(r)}{1-\kappa(r)} = \hat{\theta}(r)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\hat{\kappa}(r)\right]^n, \tag{45}$$

donde

$$\hat{\theta}(r) = \frac{1}{B_0}\left[\frac{1}{\prod_{k=1}^n(r+a_k)}\left(-\frac{\lambda^{[n]}\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)}\mu_y\hat{\bar{F}}_I(r)-\sum_{i=2}^{2n}\frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)}\hat{T}_{\rho_i}\xi(r)\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(0)}{r+a_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i(0)}{r+a_i}\right].$$

Si invertimos la transformada $\hat{\theta}(r)$ obtenemos el resultado buscado para $\theta(u)$. Por último $\psi(u)$ se obtiene invirtiendo la transformada de Laplace (45). $\square$

6. Resultados asintóticos para la probabilidad de ruina

Debido a que a partir de la fórmula (41) es complicado obtener la probabilidad de ruina, aquí damos un resultado asintótico para $\psi(u)$ cuando $F \in \mathscr{S} \cap \mathscr{R}_0$. Esto se cumple en el caso de las distribuciones tipo Pareto. Para la prueba del resultado asintótico usaremos el Lema 1.2.

Lema 6.1. *Se tiene el siguiente límite*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int_u^\infty \kappa(s)ds}{\overline{F_I}(u)} = \frac{-\lambda^{[n]}\beta^n\mu_y}{B_0\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k}.$$

Demostración. Usando (42), tenemos que analizar los siguientes límites

$$A = \frac{\int_u^\infty \overline{F}(s)ds}{\overline{F_I}(u)}, \qquad B = \frac{\int_u^\infty F * \overline{F_E}(s)ds}{\overline{F_I}(u)},$$

$$C = \frac{\int_u^\infty T_{\rho_i} f(s)ds}{\overline{F_I}(u)}, \qquad D = \frac{\int_u^\infty F * T_{\rho_i} h(s)ds}{\overline{F_I}(u)}.$$

Usando que $\overline{F_I}(u) = \int_u^\infty \frac{1}{\mu_y}(1-F(s))ds$, tenemos para A,

$$A = \lim_{u\to\infty} \frac{\int_u^\infty (1-F(s))ds}{\frac{1}{\mu_y}\int_u^\infty (1-F(s))ds} = \mu_y. \tag{46}$$

Para B primero notamos que

$$F * \overline{F_E}(s) = \int_0^s f(s-x)[1-F_E(x)]dx = F(s) - F * F_E(s) = \overline{F_E * F}(s) - \overline{F}(s), \tag{47}$$

por lo tanto

$$B = \lim_{u\to\infty} \frac{\int_u^\infty \overline{F_E * F(s)}ds}{\frac{1}{\mu_y}\int_u^\infty \overline{F}(s)ds} - A.$$

Aplicando L'Hôpital y el Lema 1.1 tenemos el límite

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F_E * F}(u)}{\frac{1}{\mu_y}\overline{F}(s)} = \mu_y(1+c) = \mu_y, \tag{48}$$

donde $c = \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F_E}(u)}{\overline{F}(u)}$ y este límite es igual a cero por (2). Entonces de (46), (47) y (48) se tiene que $B = 0$.

Usando (3.5) de [11], tenemos que

$$C = \lim_{u\to\infty} \frac{\int_u^\infty T_{\rho_i} f(s)ds}{\overline{F_I}(u)} = 0.$$

Por último, para el límite D tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty f(s)*T_{\rho_i}h(s)ds}{\overline{F_I}(u)} &\leq \lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty\int_0^s |f(s-x)T_{\rho_i}h(x)|dxds}{\overline{F_I}(u)}\\ &\leq \lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty\int_0^s f(s-x)\int_x^\infty |e^{-\rho_i(y-x)}|h(y)dydxds}{\overline{F_I}(u)}\\ &\leq \lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty\int_0^s f(s-x)\frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}\overline{F_E}(x)dxds}{\overline{F_I}(u)}\\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}\lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty F*\overline{F_E}(s)ds}{\overline{F_I}(u)} = 0,\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe a 5 de la Observacion 4, y en la última igualdad se usó que $B=0$. El resultado se obtiene sustituyendo los límites A,B, C y D en (42).

$\square$

Lema 6.2. *Se tiene el siguiente límite para $\theta(u)$:*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\theta(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{-\lambda^{[n]}\beta^n\mu_y}{B_0\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k}. \tag{49}$$

Demostración. En vista de la expresión (43), hay que calcular los siguientes límites

$$\mathtt{E} = \lim_{u\to\infty}\frac{h*\overline{F_I}(u)}{\overline{F_I}(u)}, \qquad \mathtt{F} = \lim_{u\to\infty}\frac{h*T_{\rho_j}\xi(u)}{\overline{F_I}(u)},$$

$$\mathtt{G} = \lim_{u\to\infty}\frac{e^{-a_iu}}{\overline{F_I}(u)}.$$

Para $\mathtt{E}$, usando que $h*\overline{F_I}(u) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}\left[\overline{f_E*F_I}(u) - \overline{F_E}(u)\right]$, tenemos

$$\mathtt{E} = \lim_{u\to\infty}\frac{h*\overline{F_I}(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}\left(\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{f_E*F_I}(u)}{\overline{F_I}(u)} - \lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F_E}(u)}{\overline{F_I}(u)}\right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}(1-0),$$

donde la última igualdad se debe a los lemas 1.1 y 6.1, así como la ecuación (2). De esta forma $\mathtt{E} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}$.

Ahora, por la Observación 4, para el límite $\mathtt{F}$ tenemos,

$$\mathtt{F} = \lim_{u\to\infty}\frac{h*\left[\frac{1}{\rho_j}\overline{F}(u) - \frac{1}{\rho_j}T_{\rho_i}f(u)\right]}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\rho_j}\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F_E*F}(u) - \overline{F_E}(u)}{\overline{F_I}(u)} - \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\rho_j}\lim_{u\to\infty}\frac{f_E*T_{\rho_j}f(u)}{\overline{F_I}(u)}. \tag{50}$$

Analizaremos el primer sumando de (50), que usando el Lema 1.1 y la ecuación (2) se vuelve

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\rho_j}\left(\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F_E * F}(u)}{\overline{F}(u)}\frac{\overline{F}(u)}{\overline{F_I}(u)}-\frac{\overline{F_E}(u)}{\overline{F_I}(u)}\right)=\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\rho_j}\left[\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F}(u)}{\overline{F_I}(u)}\right]=0,$$

donde la última igualdad se debe a la regla de L'Hôpital y a la hipótesis $F\in\mathscr{R}_0$,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F}(u)}{\overline{F_I}(u)}=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{\frac{1}{\mu_y}\overline{F}(u)}=0$$

En el segundo sumando de 50 podemos acotar el límite de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{f_E * T_{\rho_j}f(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \lim_{u\to\infty}\frac{\int_0^u f_E(u-x)\int_x^\infty |e^{-\rho_j(y-x)}|f(y)dydx}{\overline{F_I}(u)}\\ &\leq \lim_{u\to\infty}\frac{\int_0^u f_E(u-x)\overline{F}(x)dx}{\overline{F_I}(u)}\\ &= \lim_{u\to\infty}\frac{f_E * \overline{F}(u)}{\overline{F_I}(u)}=0,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $\mathtt{B}=0$ en el Lema 6.1.
Por último $\mathtt{G}=0$ debido a (2). Sustituyendo los límites $\mathtt{E},\mathtt{F}$ y $\mathtt{G}$ en (43), se tiene el resultado.

□

Sea $\eta(x)=\frac{\kappa(x)}{\alpha}$, con $\alpha=\int_0^\infty \kappa(s)ds$, entonces la probabilidad de ruina puede escribirse como sigue

$$\psi(u)=\theta * \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\eta^{*(n)}(u), \tag{51}$$

sean $g(x)=(1-\alpha)\sum_{n=0}^\infty \alpha^n\eta^{*(n)}(x)$, $\overline{\Theta}(u)=\frac{\theta(u)}{a}$ con $a=\theta(0)$, entonces $\psi(u)=\frac{a}{1-\alpha}\overline{\Theta}*G(u)$.

Por los lemas 6.1, 6.2 y 1.2 se tienen, respectivamente, los siguientes límites

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1-\int_0^u\eta(x)dx}{\overline{F_I}(u)}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{-\lambda^{[n]}\beta^n\mu_y}{B_0\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k}\right). \tag{52}$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{\Theta}(u)}{\overline{F_I}(u)}=\frac{1}{a}\left(\frac{-\lambda^{[n]}\beta^n\mu_y}{B_0\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k}\right). \tag{53}$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty(1-\alpha)\sum_{n=0}^\infty\alpha^n\eta^{*(n)}(x)dx}{\int_u^\infty\eta(y)dy}=\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{G}(u)}{\int_u^\infty\eta(x)dx}=\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{54}$$

El siguiente lema es usado en la parte final del teorema principal de esta sección.

Lema 6.3. *Sean $r_1,\dots,r_n$ números complejos distintos $n \geq 2$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j^2 \pi_{n,j}(r_j)} = \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n} r_j} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \right), \quad \textit{donde} \quad \pi_{n,j}(r) = \prod_{k=1,k\neq j}^{n} (r-r_k), \;\; j \leq n.$$

Demostración. Usaremos inducción. Para $n=2$ del lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^2(r_1-r_2)} + \frac{1}{r_2^2(r_2-r_1)} &= \frac{r_2^2-r_1^2}{r_1^2 r_2^2 (r_1-r_2)} \\ &= \frac{(-1)^1}{r_1 r_2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{r_j}. \end{aligned}$$

Supongamos que se vale para n, luego para $n+1$, del lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{r_j^2 \pi_{n+1,j}(r_j)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{n+1}-r_j+r_j}{r_j^2 \pi_{n+1,j}(r_j) r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}^2 \pi_{n+1,n+1}(r_{n+1})} \\ &= \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{n+1}-r_j}{r_j^2 \pi_{n+1,j}(r_j)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j \pi_{n+1,j}(r_j) r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}^2 \pi_{n+1,n+1}(r_{n+1})} \\ &= \frac{-1}{r_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j^2 \pi_{n,j}(r_j)} + \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{r_j \pi_{n+1,j}(r_j)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\prod_{j=1}^{n+1} r_j} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \right) + \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{r_j \pi_{n+1,j}(r_j)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\prod_{j=1}^{n+1} r_j} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \right) + \frac{(-1)^n}{r_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} r_j}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad está dada por el Lema 1.4.

□

Teorema 6.4. *La probabilidad de ruina cumple el siguiente límite*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\mu_y}{\left(c + \frac{\mu}{\beta}\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} - \mu_y} \tag{55}$$

por lo tanto

$$\psi(u) \approx C\overline{F_I}(u), \qquad u \to \infty.$$

Demostración. Usando las ecuaciones (47), (51), (52), (53) y (54) tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \frac{a}{1-\alpha} \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Theta}*G(u)}{\overline{F_I}(u)}. \\
&= \frac{a}{1-\alpha} \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\overline{\Theta*G}(u) - \overline{G}(u)}{\overline{F_I}(u)} \right) \\
&= \frac{a}{1-\alpha} \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\overline{\Theta*G}(u)}{\overline{\Theta}(u)} \frac{\overline{\Theta}(u)}{\overline{F_I}(u)} - \frac{\overline{G}(u)}{\overline{F_I}(u)} \right) \\
&= \frac{a}{1-\alpha} \left\{ \left(1 + \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u)}{\overline{\Theta}(u)} \right) \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Theta}(u)}{\overline{F_I}(u)} - \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u)}{\overline{F_I}(u)} \right\} \\
&= \frac{a}{1-\alpha} \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Theta}(u)}{\overline{F_I}(u)} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \frac{-\lambda^{[n]}\beta^n \mu_y}{B_0 \pi_{2n,1}(0) \prod_{k=1}^n a_k}.
\end{aligned} \tag{56}
$$

Ahora analizaremos este último resultado. Primero observemos que, por (44), tenemos que

$$
\alpha = \frac{-1}{B_0} \left\{ \frac{\lambda^{[n]}\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k} (\mu_y + \mu_E) + \sum_{i=2}^{2n} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left(\frac{1}{\rho_i \prod_{k=1}^n a_k} - \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i \prod_{k=1}^n (\rho_i + a_k)} \right) \right\},
$$

donde $\mu_E = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$, mientras que

$$
B_0 = \frac{\lambda^{[n]}\beta^n \left[\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{b_j} - \sum_{j=2}^{2n} \frac{1}{\rho_j} \right]}{(\prod_{j=2}^{2n} \rho_j) \prod_{k=1}^n a_k} + \sum_{i=2}^{2n} \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\rho_i \prod_{k=1}^n (\rho_i + a_k)}.
$$

Usando esto, la ecuación (56) se convierte en

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \frac{\lambda^{[n]}\beta^n \mu_y}{\left[B_0 + \frac{\lambda^{[n]}\beta^n}{\pi_{2n,1}(0)\prod_{k=1}^n a_k} (\mu_y + \mu_E) + \sum_{i=2}^{2n} \frac{\lambda^{[n]}(\beta-\rho_i)^n}{\pi_{2n,i}(\rho_i)} \left(\frac{1}{\rho_i \prod_{k=1}^n a_k} - \frac{\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i \prod_{k=1}^n (\rho_i + a_k)} \right) \right] \prod_{k=1}^n a_k \prod_{j=2}^{2n} \rho_j} \\
&= \frac{\mu_y}{\left[\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{b_j} - \sum_{j=2}^{2n} \frac{1}{\rho_j} \right] - (\mu_y + \mu_E) + (\prod_{j=2}^{2n} \rho_j) \sum_{i=2}^{2n} \frac{(\beta-\rho_i)^n}{\beta^n \rho_i \pi_{2n,i}(\rho_i)}}.
\end{aligned}
$$

En el denominador de la expresión anterior tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)}{\beta^n}\sum_{i=2}^{2n}\frac{(\beta-\rho_i)^n}{\rho_i\pi_{2n,i}(\rho_i)} &= \frac{(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)}{\beta^n}\sum_{i=2}^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^{n-k}(-\rho_i)^k\frac{1}{\rho_i\pi_{2n,i}(\rho_i)}\\
&= \frac{(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)}{\beta^n}\sum_{i=2}^{2n}\left[\beta^n-n\beta^{n-1}\rho_i+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\beta^{n-k}(-\rho_i)^k\right]\frac{1}{\rho_i\pi_{2n,i}(\rho_i)}\\
&= \frac{(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)}{\beta^n}\sum_{i=2}^{2n}\left[\beta^n-n\beta^{n-1}\rho_i\right]\frac{1}{\rho_i\pi_{2n,i}(\rho_i)}\\
&= (\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)\sum_{i=2}^{2n}\frac{1}{\rho_i^2\prod_{k=2,k\neq i}^{2n}(\rho_i-\rho_k)}-\frac{(\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)}{\beta}\sum_{i=2}^{2n}\frac{n}{\rho_i\prod_{k=2,k\neq i}^{2n}(\rho_i-\rho_k)}\\
&= (\prod_{j=2}^{2n}\rho_j)\sum_{i=2}^{2n}\frac{1}{\rho_i^2\prod_{k=2,k\neq i}^{2n}(\rho_i-\rho_k)}-\frac{n}{\beta}\\
&= \sum_{j=2}^{2n}\frac{1}{\rho_j}-\frac{n}{\beta},
\end{aligned}$$

donde la penúltima y la última igualdad se siguen por el Lema 1.4 y el Lema 6.3, respectivamente.
Entonces,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)}=\frac{\mu_y}{-\frac{n}{\beta}-\mu_y-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{b_j}}. \tag{57}$$

Por (16)

$$J(r)=\prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda_i+\mu+\delta-cr-Dr^2)(\beta-r)-\mu\beta\right]=D^n\prod_{k=1}^{n}(r+a_k)\prod_{k=1}^{2n}(r-b_k)$$

por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{b_j}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{-J'(0)}{J(0)}.$$

Usando que $J(s)=\prod_{i=1}^{n}[Ds^3+s^2(c-D\beta)+s(-\mu-\lambda_i-c\beta)+\beta\lambda_i]$ obtenemos

$$\begin{aligned}
J'(0) &= \sum_{i=1}^{n}(-\lambda_i-\mu-c\beta)\left[\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_j\beta\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda^{[n]}\beta^n\left[-\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{\beta\lambda_i}-\frac{c}{\lambda_i}\right]\\
&= \lambda^{[n]}\beta^n\left[\frac{-n}{\beta}-(c+\frac{\mu}{\beta})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right],
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{b_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \left[c + \frac{\mu}{\beta}\right] \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} + \frac{n}{\beta}.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (57), se tiene el resultado. Es importante observar que el denominador es positivo, debido a la condición de ganancia neta.

$\square$

7. Resultados numéricos

En la sección 4 se dieron resultados sobre la probabilidad de ruina, a continuación se ilustra la influencia de los parámetros; D la constante que multiplica a $B(t)$ y β el recíproco de la media de los saltos hacia arriba X_i, sobre $\psi_s(u)$ y $\psi_d(u)$. Para estos ejemplos tomamos $n = 2$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 0.5$ $\mu = 1$ $c = 2$ y $\hat{f}(r) = \left(\frac{1}{1+3r}\right)^2$ es decir $Y_j \sim \text{Gamma}(2, (1/3))$. Para varios valores de D y β, dados en las figuras 1 y 2, obtenemos usando el software Mathematica las raíces de la Ec. de Lundberg (12) y las gráficas de $\psi_s(u)$ y $\psi_d(u)$.

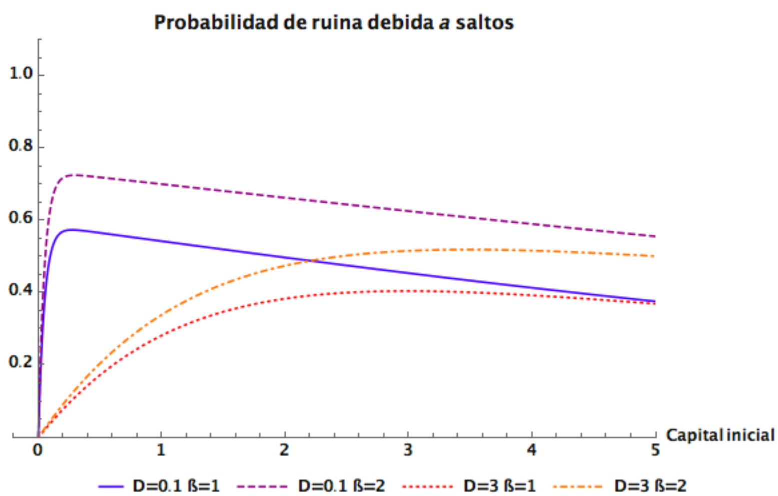

Figura 1: $\psi_s(u)$ con diferentes combinaciones de D y β.

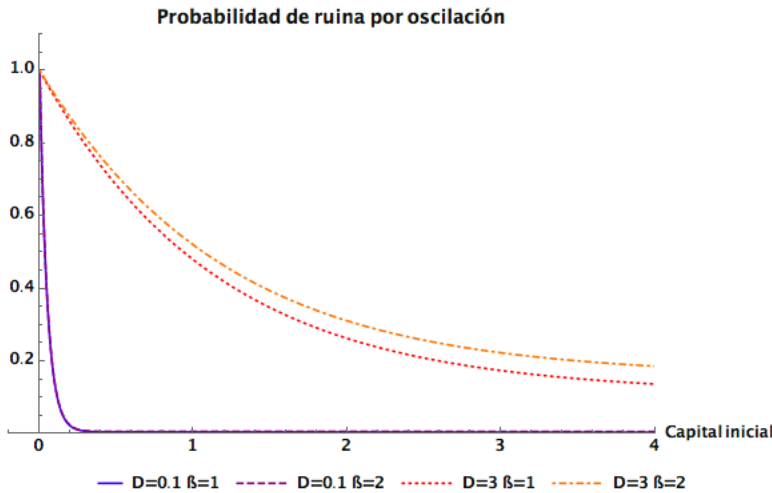

Figura 2: $\psi_d(u)$ con diferentes combinaciones de D y β.

Notamos en la gráfica que la probabilidad de ruina debido a las reclamaciones $\psi_s(u)$ es creciente para valores de u cercanos a cero, debido a que deja de ser segura la ruina por oscilación, posteriormente $\psi_s(u)$ decrece confome u crece. Observamos que la influencia que tienen los saltos hacia arriba sobre la ruina por oscilación es muy poca. Las funciones $\psi_d(u)$ cuando $D = 0.1$ y u es pequeño son muy parecidas, sin importar la media de los saltos hacia arriba, debido a que para u pequeña el movimiento browniano domina sobre los procesos de saltos.

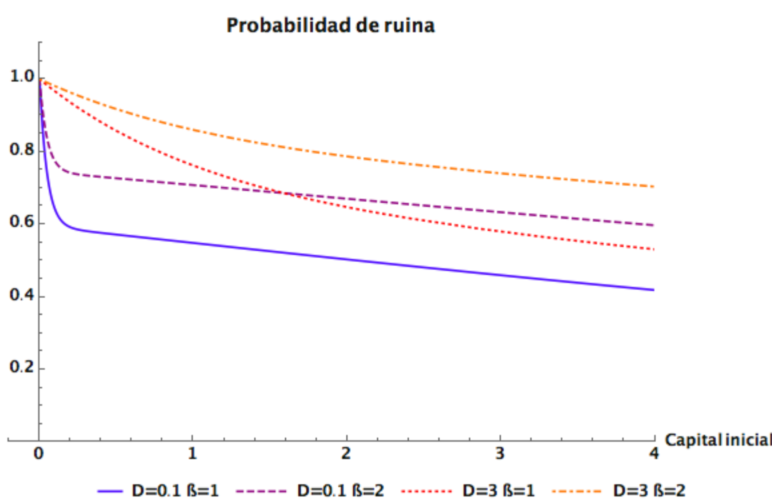

Figura 3: $\psi(u)$ con diferentes combinaciones de D y β.

Puede observarse que incluso para diferentes valores de D, si el capital inicial es grande, la probabilidad de ruina se asemeja más a la probabilidad de ruina ocasionada por saltos, pues la ruina por oscilación es cada vez menos probable.

La siguiente tabla muestra con mayor precisión la probabilidad de ruina para algunos valores de capital inicial u y distintas combinaciones de D y β.

$\psi(u)$	$u = 0.01$	$u = 0.1$	$u = 0.5$	$u = 1$	$u = 5$
$D = 0.1$ $\beta = 1$	0.924015	0.641709	0.57184	0.54879	0.380969
$D = 0.1$ $\beta = 2$	0.952205	0.774151	0.726983	0.70823	0.56288
$D = 3$ $\beta = 1$	0.996523	0.966526	0.85741	0.761954	0.489905
$D = 3$ $\beta = 2$	0.998018	0.980863	0.917435	0.860085	0.671634

Cuadro 1: $\psi(u)$ para diferentes valores de u y combinaciones de D y β.

El cruce de curvas en la figura 3 se puede apreciar en la tabla para $u = 5$ donde el efecto de la difusión deja de impactar sobre la probabilidad de ruina y ésta comienza a parecerse más para los mismos valores de β.

Aproximación a la probabilidad de ruina

En el Teorema 5.3 se estableció una relación asintótica entre la probabilidad de ruina y la condición de ganancia neta, cuando la distribución de los saltos pertenecen a cierta familia de colas pesadas. La distribución Pareto satisface las condiciones para utilizar este teorema. Bajo los supuestos $n = 2 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0.5 \quad \mu = 1 \quad c = 2$ y $F \sim \text{Pareto}(2,4)$, $\overline{F}(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^a$ si $x > b$; por (55), se tiene que para u grande

$$\overline{F}_I(u) \approx \frac{1}{u}, \quad \psi(u) \approx \frac{8}{u}.$$

Notamos que esta aproximación es independiente del coeficiente D. La gráfica de la aproximación a la probabilidad de ruina está dada como sigue.

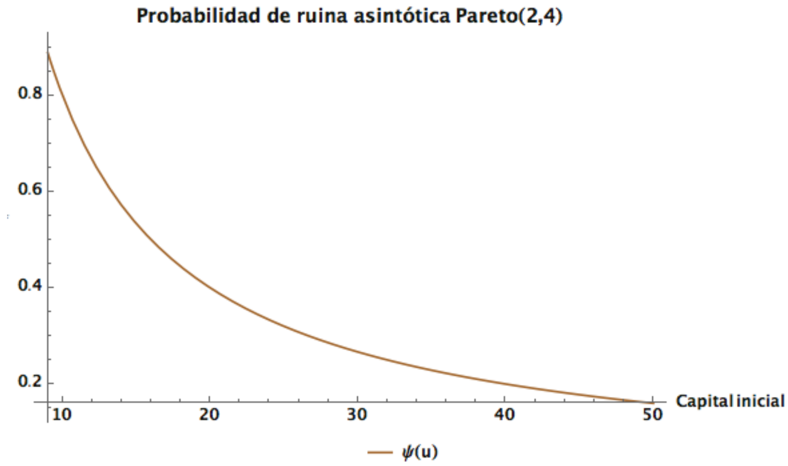

Figura 4: Aproximación $\psi(u)$ para saltos con distribución en la familia subexponencial.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió el funcional de Gerber-Shiu o función de penalidad descontada esperada, para un modelo de renovación perturbado por saltos hacia arriba dados por un proceso de Poisson compuesto y una difusión. Debido a que el modelo no es markoviano y, por lo tanto, no permite usar el método tradicional de condicionamiento al primer salto, se planteó una ecuación para la transformada de Laplace del funcional a través de ecuaciones recursivas, en términos de funciones auxiliares $\phi^{(j)}(u)$, que nos permitieron usar la propiedad de Markov. A través de manipulaciones algebráicas y resultados sobre teoría de interpolación, se encontró una manera de invertir dicha transformada. En el caso en que la distribución de los saltos hacia abajo pertenece a la familia racional, esta expresión es más simple. También se pudo verificar que la influencia de los parámetros que hacen de este modelo una generalización del modelo de renovación es como se esperaba, reforzando la idea de que la influencia de la difusión es importante únicamente con capital inicial pequeño. A partir de las expresiones obtenidas para el funcional de Gerber-Shiu fue posible obtener un resultado asintótico para la probabilidad de ruina cuando el capital inicial es grande y la distribución de los saltos hacia abajo pertenece a cierta clase de distribuciones de cola pesada. Esta aproximación resulta independiente del coeficiente D.

Una posible extensión del trabajo es considerar que la distribución de las ganancias es una mezcla de distribucones exponenciales del tipo $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x}$ con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ y $\alpha_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. En este caso, los mismos métodos utilizados en el trabajo podrían usarse para obtener una fórmula matricial análoga, sin otra complicación que una notación más pesada.

Referencias

[1] S. Li y J. Garrido*, "The Gerber–Shiu function in a Sparre-Andersen risk process perturbed by diffusion," *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2005, no. 3, pp. 161–186, 2005.

[2] Y. Zhao y C. Yin, "The expected discounted penalty function under a renewal risk model with stochastic income," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp. 6144–6154, 2012.

[3] H. Cramér, *On the mathematical theory of risk*. Centraltryckeriet, 1930.

[4] H. U. Gerber, "An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk," *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1970, no. 3-4, pp. 205–210, 1970.

[5] F. Dufresne y H. U. Gerber, "Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion," *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 10, no. 1, pp. 51–59, 1991.

[6] H. Schmidli, "Cramér-Lundberg approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion," *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 16, no. 2, pp. 135–149, 1995.

[7] P. Embrechts, C. M. Goldie, y N. Veraverbeke, "Subexponentiality and infinite divisibility," *Probability Theory and Related Fields*, vol. 49, no. 3, pp. 335–347, 1979.

[8] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, y J. L. Teugels, *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley & Sons, 2009, vol. 505.

[9] Z. Zhang, H. Yang, y S. Li, "The perturbed compound Poisson risk model with two-sided jumps," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 233, no. 8, pp. 1773–1784, 2010.

[10] D. C. Dickson y C. Hipp, "Ruin probabilities for Erlang (2) risk processes," *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 22, no. 3, pp. 251–262, 1998.

[11] E. T. Kolkovska y E. M. Martin-González, "Asymptotic results for the severity and surplus before ruin for a class of Lévy insurance processes," *To appear in: XII Symposium of Probability and Stochastic Processes, Birkhäuser Basel.*, 2018.

[12] E. S. Gerber, H. U. & Shiu, "On the time value of ruin," *North American Actuarial Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 48–72, 1998.

[13] E. T. Kolkovska y E. M. Martin-González, "Path functionals of a class of Lévy insurance risk processes", *Communications on Stochastic Analysis*, vol. 10, no. 3, p. 6, 2016.

[14] E. T. Kolkovska y E. M. Martin-González, "The distribution and asympotic behaviour of the negative Wiener-Hopf factor for Lévy processes with rational positive jumps," *Submitted*, 2018.

[15] C. Fengyang y W. Yuebao, "Hazard function and characterizations on distribution tails of nonnegative random variables.", *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2003.