CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

ERGODICIDAD DEL PROCESO DE DIFUSIÓN DE COX-INGERSOLL-ROSS CON SALTOS

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

Presenta

Camilo González González

Director de Tesis:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Co-Directora de Tesis:

Dra. Hélène Madeleine Thérèse Leman

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 5 de Julio de 2018

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

Resumen

El objetivo general del presente trabajo es estudiar propiedades ergódicas de la difusión de Cox-Ingersoll-Ross con saltos (JCIR), que es una extensión del conocido proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Sus saltos son descritos por un subordinador. Se elaboró un documento autocontenido que estudia la teoría de los procesos de Lévy y su estructura de saltos, así como los procesos de ramificación continua. Ambas familias de procesos están relacionadas con los procesos CIR y JCIR. Además se estudia la estabilidad de procesos de Markov; tema que es indispensable para la problemática en estudio. Como resultado fundamental, se prueban condiciones suficientes sobre la medida de Lévy asociada a los saltos del proceso JCIR que determinan si este último es ergódico o exponencialmente ergódico. Además, se prueba una caracterización de la existencia de los momentos truncados de la difusión JCIR, íntimamente relacionada con la medida de Lévy del subordinador asociado. A su vez se mejoró la metodología de algunos trabajos previos, en el sentido de que presentamos demostraciones alternativas.

Dedicado a mis padres

Agradecimientos

Es muy difícil expresar en pocas palabras mi gratitud para todos aquellos que de una forma u otra influyeron en el desarrollo de este trabajo. En primer lugar, quiero agradecer a mi asesor el Dr. Juan Carlos Pardo, por su apoyo durante todo el proceso de admisión desde Cuba y por su tutoría e interés durante la maestría. Por todo lo que aprendí en sus cursos y que fueron una motivación importante de esta tesis, por su amistad y sinceridad, por sus consejos oportunos en el ámbito personal y académico, su exigencia para siempre hacer el mejor trabajo y su interés en formarme como investigador y mejor persona. A mi asesora la Dr. Hélène Leman, por su paciencia y dedicación a la construcción de este trabajo y sus aportaciones siempre bienvenidas.

A mis sinodales el Dr. Arnaud Charles Leo Jégousse y Dr. José Luis Pérez Garmendia, por las sugerencias que dieron para generalizar esta tesis y por el tiempo que dedicaron a la lectura de la misma.

Quiero agradecer mis padres, por su humildad y mostrarme lo que es valioso, por todas las conversaciones productivas, por estar incondicionalmente a pesar de la distancia y permitirme crecer como ser humano. Por su cariño y apoyo económico y emocional. A Yaima, por ser mi amiga y compañera constante además de hermana, por su confianza y su sarcasmo casi infinito.

Especialmente quiero agradecer a Karito, por el profundo conocimiento que hemos compartido juntos en poco tiempo, por su compañía en este transitar lejos de casa, por su risa y su arte, sus ganas de vivir y regalarme los momentos más bellos. Gracias también a su familia por la confianza depositada, por su afecto y amabilidad.

A mis compañeros de maestría y de oficina, por su amistad y compañía durante estos dos años. Por todas las discusiones matemáticas que mantuvimos y todos los buenos momentos vividos fuera del ámbito académico.

A mis profesores durante la maestría, en especial a Juan Carlos, Andrés y Víctor Manuel Pérez-Abreu, por darle tanta importancia a sus estudiantes, por siempre tener tiempo para nosotros y saber cómo motivarnos. Por su apoyo durante la aplicación al doctorado, por toda la intuición en sus clases y desarrollar en mí el gusto por las probabilidades. También quiero agradecer a mis profesores en Cuba, en particular a Gerardo, Morell y Morgado por todo su apoyo e interés en mis estudios de posgrado.

Por último, quiero agradecer al CONACyT por la beca proporcionada y al Centro de Investigación en Matemáticas A.C por hacerme parte de una maravillosa comunidad, por todas las facilidades y apoyos que brinda a sus estudiantes. Finalmente quiero expresar mi gratitud a México por hacerme sentir como en casa y engrandecer mi amor y compromiso por nuestra mayúscula América.

Índice

Introducción

El estudio matemático del comportamiento promedio a largo plazo de un sistema dinámico aleatorio, cuyo estado evoluciona con el tiempo, es un aspecto fundamental en la teoría ergódica y la teoría de procesos estocásticos. En este trabajo estamos interesados en un modelo en particular, el proceso de difusión de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) con saltos, el cual se puede interpretar como un modelo de dinámica de poblaciones y que ha sido usado en el área de finanzas para modelar tazas de interés y volatilidad. Véase por ejemplo Cox, Ingersoll Jr y Ross [10], Duffie y Garleanu [13] y Filipović [14].

Intuitivamente, la difusión CIR con saltos se puede ver como un proceso que toma valores en $[0, \infty)$, que cumple la propiedad de Markov y la propiedad de ramificación y cuyos saltos se pueden interpretar como la inmigración, en otras palabras, la incorporación de nuevos individuos a la población de forma independiente.

Una aplicación directa de esta difusión la podemos encontrar en Barletta y Nicolato [5], donde la volatilidad del precio de los activos de ciertas opciones es modelado a través de dicha difusión. Por otra parte, un asunto de trascendencia en las aplicaciones y comprensión del modelo CIR con saltos es la estimación de sus parámetros. En Xu [46] y Barczy, Alaya, Kebaier y col. [4], se propusieron estimadores no paramétricos y de máxima verosimilitud, respectivamente, y se mostró que el estudio de las propiedades ergódicas del modelo en cuestión, es fundamental para lograr buenas estimaciones. Por tanto, la ergodicidad del proceso CIR con saltos se establece como un tema de importancia en la actualidad, debido a las aplicaciones que encuentra y al propio desarrollo de su teoría.

Existen varios resultados previos relacionados a la ergodicidad de la difusión CIR con saltos. En Jin, Rüdiger y Trabelsi [22] se encontraron condiciones sobre los saltos que garantizan la ergodicidad exponencial del proceso en estudio. Por otro lado, en Jin, Kremer y Rüdiger [21] se fue un poco más lejos, y se estudiaron condiciones más generales, de igual forma relacionadas a los saltos, bajo las que se tiene ergodicidad, ergodicidad exponencial y la existencia de momentos.

Nuestro trabajo tiene como objetivo estudiar las propiedades ergódicas del proceso CIR con saltos, siguiendo básicamente las ideas desarrolladas en Jin, Rüdiger y Trabelsi [22] y Jin, Kremer y Rüdiger [21]. Específicamente, se persigue establecer condiciones sobre los saltos que aseguren que el proceso sea ergódico, en otras palabras, que en promedio la ley del proceso converja a una medida invariante para dicha ley. También estamos interesados en determinar la velocidad de convergencia para la ergodicidad, por lo que queremos establecer condiciones sobre los saltos que garanticen que la difusión es exponencialmente ergódica, es decir, que es ergódica y que la convergencia se tiene a una velocidad exponencial. De esta forma, podemos establecer una relación directa entre los saltos del proceso y sus propiedades ergódicas.

Con estos propósitos, se desarrolló un documento autocontenido que estudia diversos objetos de manera formal. A su vez se procuró mejorar la metodología de varios trabajos previos sobre este tema como Jin, Rüdiger y Trabelsi [22] y Jin, Kremer y Rüdiger [21]. En el desarrollo de esta tesis se consultaron varios libros como son

Kyprianou [29], Sato [42] e Ikeda y Watanabe [18]. Además se consultaron diversos artículos de investigación, entre los que destacan Li [31], Fu y Li [15] y Meyn y Tweedie [36]. Todo esto con el propósito de recopilar información y analizar la teoría necesaria para entender y desarrollar el problema y la estructura de los preliminares teóricos. A continuación describimos el esquema en que el que está desarrollado el trabajo.

En el capítulo 1 introducimos a las medidas aleatorias de Poisson y realizamos la construcción de las mismas y vemos algunas de sus propiedades más significativas. También se estudian algunas martingalas importantes asociadas a dichos objetos. Estas medidas constituyen herramientas fundamentales en la descripción de los saltos del modelo CIR.

El capítulo 2 se centra en los procesos de Lévy, los cuales están estrechamente relacionados con los procesos de ramificación y con la estructura de inmigración de la difusión CIR con saltos. En particular, mostramos que esta clase de procesos satisface la propiedad de Markov y estudiamos la descomposición de Lévy-Itô, la cual establece que cualquier proceso de Lévy se puede descomponer como la suma de tres procesos independientes, un movimiento Browniano con deriva, un proceso de Poisson compuesto y una martingala cuadrado integrable que proviene de los saltos del proceso de Lévy con magnitud menor a uno. Por último se profundiza en dos clases de procesos de Lévy, el caso no decrecientes (subordinadores) y el caso en el que solo hay saltos positivos.

El capítulo 3 trata sobre los proceso de ramificación continua, donde estudiamos el comportamiento a largo plazo de este tipo de proceso, el fenómeno de extinción y cuando el proceso es conservativo. Finalmente presentamos el caso de inmigración. Este capítulo proporciona muchas de las propiedades y características del proceso CIR con saltos que son utilizadas en la obtención de los resultados.

En el capítulo 4 estudiamos la estabilidad de procesos de Markov, donde presentamos las nociones de recurrencia, explosión e irreducibilidad y estudiamos los criterios de Foster-Lyapunov para determinar cuando el proceso es recurrente, ergódico y exponencialmente ergódico.

Finalmente, en el capítulo 5 nos centramos en el problema de este trabajo, que es el estudio de propiedades ergódicas del proceso de Cox-Ingersoll-Ross con saltos. En este apartado se usa toda la teoría desarrollada en los capítulos previos, y explicamos a detalle la aplicación de los resultados del capítulo 4 para esta clase de procesos. Para ello, es necesario estudiar la la transformada de Laplace de dicho proceso, su generador infinitesimal, sus momentos y probabilidades de transición.

Capítulo 1

Medidas aleatorias de Poisson

En este capítulo haremos un análisis detallado sobre las medidas aleatorias de Poisson, las cuales están estrechamente relacionadas con la estructura de saltos de muchos procesos estocásticos. Vamos a introducir funcionales de medidas aleatorias de Poisson y estudiar algunas martingalas importantes asociadas a las mismas.

1.1. Motivación y definición

Para entender bien la relación entre medidas aleatorias de Poisson y la estructura de saltos de un proceso estocástico, vamos a comenzar su estudio con el caso más sencillo, los procesos de Poisson compuestos.

Un proceso de Poisson compuesto con deriva $X = (X_t : t \geq 0)$ tiene la siguiente forma

$$X_t = \delta t + \sum_{i=1}^{M_t} \xi_i, \qquad t \geq 0,$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$ y $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) con función de distribución F y $M = (M_t : t \geq 0)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. Denotemos por $\{T_i\}_{i\geq 1}$ a los tiempos de saltos de M, los cuales son independientes de $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$.

Vamos a construir una familia de variables aleatorias íntimamente relacionadas a la estructura de saltos del proceso X. Para cada conjunto $A \in \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, definamos la siguiente variable aleatoria

$$N(A) = \#\{i \geq 1 : (T_i, \xi_i) \in A\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{(T_i,\xi_i)\in A\}}. \tag{1.1}$$

Por construcción del proceso de Poisson compuesto, X tiene casi seguramente un número finito de saltos sobre un intervalo finito. Esto se debe a que la cantidad de saltos está determinada por el proceso M, los cuales son finitos sobre intervalos finitos casi seguramente. Esto implica que $N(A) < \infty$ casi seguramente cuando $A \subseteq \mathcal{B}[0,t) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $t \geq 0$.

A continuación enunciamos un lema relacionado con las variables aleatorias Poisson, que muestra tres resultados que serán de mucha utilidad en la comprensión de la familia de variables aleatorias $\{N(A) : A \in \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})\}$.

Lema 1. *Sea $\{M_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que se distribuyen Poisson con parámetro λ_i, para $i = 1, 2, \ldots,$ respectivamente. Además sean $S_n = \sum_{i=1}^n M_i$, $S = \sum_{i\geq 1} M_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $\sigma = \sum_{i\geq 1} \lambda_i$, entonces*

(i) S_n se distribuye Poisson con parámetro σ_n,

(ii) si $\sigma < \infty$, S se distribuye Poisson con parámetro σ, en particular, $P(S < \infty) = 1$,

(iii) si $\sigma = \infty$, $P(S = \infty) = 1$.

Demostración: (i) Probemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, tenemos que $S_1 = M_1$ por definición, lo que implica que S_1 se distribuye Poisson de parámetro λ_1. Supongamos ahora que S_n se distribuye Poisson de parámetro σ_n, y probemos que se cumple para $n+1$, es decir, probemos que S_{n+1} se distribuye Poisson de parámetro σ_{n+1}. Usando independencia, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_n + M_{n+1} = k) &= \sum_{r=0}^{k} \mathbb{P}(S_n = r, M_{n+1} = k - r) \\
&= \sum_{r=0}^{k} \frac{\sigma_n^r e^{-\sigma_n}}{r!} \frac{\lambda_{n+1}^{k-r} e^{-\lambda_{n+1}}}{(k-r)!} \\
&= \frac{e^{-(\sigma_n + \lambda_{n+1})}}{k!} \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{k} \sigma_n^r \lambda_{n+1}^{k-r} \\
&= \frac{(\sigma_n + \lambda_{n+1})^k e^{-(\sigma_n + \lambda_{n+1})}}{k!} \\
&= \frac{(\sigma_{n+1})^k e^{-(\sigma_{n+1})}}{k!},
\end{aligned}$$

con lo que queda probado (i).

(ii) Por otra parte,

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(S_n = k).$$

Notemos que los eventos $\{S_n \leq r\}$ decrecen cuando n crece para un r fijo, y además $\cap_{n \geq 1}\{S_n \leq r\} = \{S \leq r\}$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \leq r) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq r) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{r} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^k e^{-\sigma_n}}{k!} = \sum_{k=0}^{r} \frac{(\sigma)^k e^{-\sigma}}{k!},
\end{aligned}$$

con lo que se concluye que $\mathbb{P}(S = r) = \frac{(\sigma)^r e^{-\sigma}}{r!}$, y por tanto S es finita con distribución Poisson de parámetro σ, para $\sigma < \infty$.

(ii) Ahora, si σ_n se va a ∞,

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{(\sigma_n)^k e^{-\sigma_n}}{k!} = e^{-\sigma_n} \sum_{k=0}^{r} \frac{(\sigma_n)^k}{k!} \to 0,$$

cuando n tiende a ∞. Por lo que $\mathbb{P}(S > r) = 1$. Dado que esto ocurre para toda r, S diverge con probabilidad 1. $\square$

Estudiemos ahora algunas de las propiedades interesantes que cumple la variable aleatoria $N(A)$, para $A \in \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, definida en (1.1).

Lema 2. *Sea $k \geq 1$ y sean $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos disjuntos de $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Entonces $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ son mutuamente independientes y se distribuyen Poisson con parámetros $\lambda_i := \lambda \int_{A_i} \mathrm{d}t \times F(\mathrm{d}x)$ respectivamente. Además, para $\mathbb{P}$-casi toda realización de X, $N : \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ es una medida.*

Demostración: El Teorema 24 del Apéndice A, nos dice que la ley de $\{T_1, \ldots, T_n\}$ condicionado al evento $\{M_t = n\}$ es la misma que la ley de una muestra independiente y ordenada de tamaño n de la distribución uniforme en $[0, t]$, para $t \geq 0$. Notemos que las variables aleatorias $\{\xi_i\}_{i\leq n}$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F, y son independientes de $\{T_i\}_{i\geq 1}$. Entonces, la ley conjunta de los pares $\{(T_i, \xi_i)\}_{i\leq n}$ condicionado al evento $\{M_t = n\}$, es la de n variables aleatorias bivariadas $\{(U_i, \xi_i)\}_{i\leq n}$ independientes y ordenadas temporalmente, con distribución común $\frac{1}{t}\mathrm{d}s \times F(\mathrm{d}x)$ sobre $[0, t] \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$.

A partir de lo anterior, tenemos que para cada $i \geq 1$, $\mathbf{1}_{\{(U_i,\xi_i)\in A\}}$ tiene distribución Bernoulli con parámetro $p = \int_A t^{-1}\mathrm{d}s \times F(\mathrm{d}x)$. Entonces la variable aleatoria $N(A)$, para $A \subseteq \mathcal{B}[0, t) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, condicionada a $\{M_t = n\}$, es una variable aleatoria binomial con probabilidad de éxito p. Esto se debe a que

$$\mathbb{P}\left(N(A)\Big|M_t = n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{(T_i,\xi_i)\in A\}} = k\Big|M_t = n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{(U_i,\xi_i)\in A\}} = k\right).$$

Vamos a generalizar esta idea para $(N(A_1), \ldots, N(A_k))$, donde $A_1, \ldots, A_k$ son mutuamente disjuntos y pertenecientes a $\mathcal{B}[0, t) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Supongamos que $A_0 = \{[0, t] \times \mathbb{R}\backslash\{A_1 \cup \ldots \cup A_k\}\}$, $\sum_{i=1}^k n_i \leq n$, $n_0 = n - \sum_{i=1}^k n_i$ y $\lambda_0 = \int_{A_0} \lambda\mathrm{d}s \times F(\mathrm{d}x) = \lambda t - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k$, entonces $(N(A_1), \ldots, N(A_k))$ tiene la siguiente ley multinomial,

$$\mathbb{P}\Big(N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_k) = n_k\Big|M_t = n\Big) = \frac{n!}{n_0!n_1!\cdots n_k!}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda t}\right)^{n_i}.$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(N(A_1){=}n_1, \ldots, N(A_k){=}n_k\Big) &= \sum_{n\geq\sum_{i=1}^k n_i} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{n!}{n_0!\cdots n_k!}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda t}\right)^{n_i}\mathbb{P}(M_t{=}n) \\
&= \sum_{n\geq\sum_{i=1}^k n_i} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{n!}{n_0!n_1!\cdots n_k!}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda t}\right)^{n_i} \\
&= \sum_{n\geq\sum_{i=1}^k n_i} e^{\lambda_0}\frac{\lambda_0^{(n-\sum_{i=1}^k n_i)}}{(n-\sum_{i=1}^k n_i)!}\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!}, \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

con lo que se muestra que $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ son independientes y se distribuyen Poisson, como se quería.

Ahora, necesitamos probarlo para conjuntos arbitrarios disjuntos $A_1, \ldots, A_k$. Para hacerlo, vamos a escribir a A_i, para cada $i = 1, \ldots, k$, como una unión numerable de conjuntos disjuntos cada uno perteneciente a $\mathcal{B}[0, t') \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, para alguna $t' > 0$. En otras palabras, para cada $i = 1, \ldots, k$ hacemos $A_i = \bigcup_{j\geq 1} A_{i,j}$, donde $\{A_{i,j}\}_{j\geq 1}$ son disjuntos y pertenecen a $\mathcal{B}[0, t') \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, para alguna $t' > 0$. Luego

$$\begin{aligned}
N(A_i) &= \sum_{m\geq 1}\mathbf{1}_{\{(T_m,\xi_m)\in A_i\}} = \sum_{m\geq 1}\sum_{j\geq 1}\mathbf{1}_{\{(T_m,\xi_m)\in A_{i,j}\}} \\
&= \sum_{j\geq 1}\sum_{m\geq 1}\mathbf{1}_{\{(T_m,\xi_m)\in A_{i,j}\}} = \sum_{j\geq 1} N(A_{i,j}).
\end{aligned}$$

Dado que cada $N(A_{i,j})$ se distribuye Poisson, usando directamente el Lema 1 obtenemos que $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ son independientes y se distribuyen Poisson.

Finalmente, que N sea una medida $\mathbb{P}$-casi seguramente se sigue de su propia definición en (1.1). Para ilustrar esto notemos que $N(\emptyset) = 0$ y que si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, entonces

$$N(\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1} N(A_j).$$

Con esto queda probado el resultado. □

Motivados por los resultados del lema anterior, vamos a definir ahora rigurosamente las medidas aleatorias de Poisson. Se puede observar que la variable $N : \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \{0,1,\ldots\} \cup \{\infty\}$ cumple dicha definición.

Definición 1 (Medidas Aleatorias de Poisson)**.** *Sea $(S, \mathcal{S}, \eta)$ un espacio de medida σ-finita y sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $N : \Omega \times \mathcal{S} \to \{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ de tal forma que $\{N(A) : A \in \mathcal{S}\}$ es una familia de variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces N es una medida aleatoria de Poisson sobre $(S, \mathcal{S}, \eta)$ (o puede ser llamada una medida aleatoria de Poisson sobre S con intensidad η) si*

(i) para $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos mutuamente disjuntos en $\mathcal{S}$, las variables aleatorias $N(A_1)$, $\ldots$,$N(A_n)$ son independientes,

(ii) para cada $A \in \mathcal{S}$, $N(A)$ se distribuye Poisson con parámetro $\eta(A)$ (donde tenemos $0 < \eta(A) \leq \infty$),

(iii) $N(\cdot)$ es una medida $\mathbb{P}$-casi seguramente.

Observemos que en la condición (ii) de la definición anterior, si $\eta(A) = 0$, entonces se entiende que $N(A) = 0$ con probabilidad 1 y si $\eta(A) = \infty$ entonces $N(A)$ es infinito con probabilidad 1. Observemos además, que si trasladamos el contexto de esta definición al caso de (1.1), tenemos que $S = [0,\infty) \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ y $\mathrm{d}\eta = \lambda \mathrm{d}t \times \mathrm{d}F$.

Hasta ahora, hemos definido rigurosamente las medidas aleatorias de Poisson y hemos dado posiblemente el ejemplo más básico, un proceso de Poisson compuesto, para ilustrar la relación de dichas medidas con la estructura de saltos del proceso.

1.2. Construcción y propiedades

En esta sección queremos probar que las medidas aleatorias de Poisson existen. Vamos a probarlo por construcción, haciendo uso del Lema 2.

Teorema 1. *Existe una medida aleatoria de Poisson $N(\cdot)$.*

Demostración. Primeramente consideremos el caso en que $0 < \eta(S) < \infty$. Existe una construcción estándar de un espacio producto infinito, digamos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sobre el cual las variables aleatorias independientes M y $\{v_i\}_{i\geq 1}$ se definen tal que M tiene una distribución Poisson con parámetro $\eta(S)$ y cada una de las variables v_i tiene distribución $\eta(\mathrm{d}x)/\eta(S)$ sobre S. Para cada $A \in \mathcal{S}$, sea

$$N(A) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{v_i \in A\}},$$

de forma tal que $M = N(S)$. Para cada $A \in \mathcal{S}$ e $i \geq 1$, las variables aleatorias $\mathbf{1}_{\{v_i \in A\}}$ y M son $\mathcal{F}$-medibles, por lo que $N(A)$ también lo es.

Si razonamos análogamente a la prueba del Lema 2, encontramos que para $A \in \mathcal{S}$ la variable aleatoria $\mathbf{1}_{\{v_i \in A\}}$ se distribuye Bernoulli con parámetro $p = \int_A \frac{\eta(\mathrm{d}x)}{\eta(\mathcal{S})}$. Luego, $N(A)$ condicionado al evento $\{M = n\}$ sigue una distribución Binomial con probabilidad de éxito p, pues

$$\mathbb{P}\left(N(A) = k \middle| M = n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{v_i \in A\}} = k\right).$$

Al igual que el la demostración del Lema 2, vamos a generalizar esta idea para $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos disjuntos de $\mathcal{S}$. En otras palabras, si $\sum_{i=1}^{k} n_i \leq n$ y $n_0 = n - \sum_{i=1}^{k} n_i$ para enteros no negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tenemos que

$$\mathbb{P}\left(N(A_1), \ldots, N(A_k) \middle| M = n\right) = \frac{n!}{n_0! \ldots n_k} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\eta(A_i)}{\eta(\mathcal{S})}\right)^{n_i}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en (1.2), de la igualdad anterior obtenemos que

$$\mathbb{P}\Big(N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_k) = n_k\Big) = \prod_{i=1}^{k} e^{-\eta(A_i)} \frac{\eta(A_i)^{n_i}}{n_i!}, \tag{1.3}$$

para enteros no negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Ahora, regresando a la definición de medidas aleatorias de Poisson, podemos ver de (1.3) que $N(\cdot)$ cumple las condiciones $(i) - (iii)$. Análogamente al caso tratado en el Lema 2, la tercera condición es inmediata pues $N(\cdot)$ es una medida numerable por definición.

Por otra parte, consideremos el caso en que $(S, \mathcal{S}, \eta)$ es un espacio de medida σ-finita. Existe una sucesión numerable de conjuntos disjuntos $B_1, B_2, \ldots$ cuya unión es todo S tal que $0 < \eta(B_i) < \infty$, para toda $i \geq 1$. Ahora, para cada $i \geq 1$, definamos $\eta_i(\cdot) = \eta(\cdot \cap B_i)$. Vamos a probar que para cada $i \geq 1$, existe algún espacio de probabilidad, digamos $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, sobre el cual podemos definir una medida aleatoria de Poisson, digamos $N_i(\cdot)$, en $(B_i, \mathcal{S} \cap B_i, \eta_i)$, donde $\mathcal{S} \cap B_i = \{A \cap B_i : A \in \mathcal{S}\}$. Mostremos entonces que

$$N(\cdot) = \sum_{i \geq 1} N_i(\cdot \cap B_i),$$

es una medida aleatoria de Poisson sobre S, con parámetro η, definido sobre

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \prod_{i \geq 1} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i).$$

Tenemos, por definición, que $N(\cdot)$ es una medida $\mathbb{P}$-casi seguramente. Entonces, para conjuntos disjuntos $A_1, A_2, \ldots$, usando el teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned}
N\Big(\bigcup_{j \geq 1} A_j\Big) &= \sum_{i \geq 1} N_i\Big(\bigcup_{j \geq 1} A_j \cap B_i\Big) = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} N\Big(A_j \cap B_i\Big) \\
&= \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} N(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j \geq 1} N(A_j).
\end{aligned}$$

Luego, para cada $i \geq 1$, tenemos que $N_i(A \cap B_i)$ se distribuye Poisson con intensidad $\eta_i(A)$. El Lema 1 nos dice que bajo $\mathbb{P}$, la variable $N(A)$ se distribuye Poisson con parámetro $\eta(A)$ pues es suma de variables aleatorias Poisson. Para completar la prueba, basta mostrar que para conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_k$ en $\mathcal{S}$, las variables $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ son independientes bajo $\mathbb{P}$. Pero esto se sigue de que el conjunto

$$\{N_i(A_j \cap B_i)\}_{i \geq 1, 1 \leq j \leq k}$$

es también una sucesión de variables aleatorias independientes. $\square$

De la construcción de la medida aleatoria de Poisson anterior, se pueden deducir los siguientes corolarios, que serán de mucha utilidad en lo adelante.

Corolario 1. *Supongamos que $N(\cdot)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Entonces, para cada $A \in \mathcal{S}$, $N(\cdot \cap A)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $(S \cap A, \mathcal{S} \cap A, \eta(\cdot \cap A))$. Además, si A, $B \in \mathcal{S}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $N(\cdot \cap A)$ y $N(\cdot \cap B)$ son independientes.*

Demostración. Tenemos que $N(\cdot)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Sea $A \in \mathcal{S}$ fijo y sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos mutuamente disjuntos en $\mathcal{S}$. Entonces, los conjuntos $A_1 \cap A, \ldots, A_n \cap A$ son mutuamente disjuntos y pertenecen a $\mathcal{S}$. Como $N(\cdot)$ es medida aleatoria de Poisson, entonces $N(A_1 \cap A), \ldots, N(A_n \cap A)$ son independientes. Además, para $B \in \mathcal{S}$, como $B \cap A \in \mathcal{S}$, tenemos que $N(B \cap A)$ se distribuye Poisson con parámetro $\eta(B \cap A)$. Por último, como $N(\cdot)$ es una medida $\mathbb{P}$-casi seguramente, entonces $N(\cdot \cap A)$ también lo es.

Además, si $A, B \in \mathcal{S}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces para conjuntos A_1, $A_2 \in \mathcal{S}$, $N(A_1 \cap A)$ y $N(A_2 \cap B)$ son independientes por ser $N(\cdot)$ una medida aleatoria de Poisson. Esto implica que $N(\cdot \cap A)$ y $N(\cdot \cap B)$ son independientes. $\square$

Corolario 2. *Supongamos que $N(\cdot)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Entonces, el soporte de $N(\cdot)$ es $\mathbb{P}$-casi seguramente numerable. Si además, η es una medida finita, entonces el soporte es $\mathbb{P}$-casi seguramente finito.*

Demostración. En el contexto de la demostración del Teorema 1, tenemos que

$$N(S) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{v_i \in S\}},$$

para $\eta(S) < \infty$. Sabemos que M se distribuye Poisson con parámetro $\eta(S) < \infty$, por lo que $M < \infty$, $\mathbb{P}$-casi seguramente. Además $\mathbb{P}(v_i \in A) = \eta(A)/\eta(S)$, para $i \geq 1$ y $A \in \mathcal{S}$. Luego, el conjunto $\{v_i\}_{1 \leq i \leq \mathrm{M}}$ tiene una cantidad finita de elementos casi seguramente y se cumple que $N(S \backslash \{v_i\}_{1 \leq i \leq \mathrm{N}}) = 0$ y $N(\{v_i\}) = 1$ para $1 \leq i \leq M$, así $N(S) = \sum_{1 \leq i \leq M} \delta_{\{v_i\}}$ con M finito $\mathbb{P}$-casi seguramente. Esto prueba el caso finito.

Para el caso de que $(S, \mathcal{S}, \eta)$ sea σ-finito, al igual que en la prueba del Teorema 1, podemos escribir

$$N(\cdot) = \sum_{i \geq 1} N_i(\cdot \cap B_i),$$

donde $N_i(\cdot \cap B_i)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $(B_i, \mathcal{S} \cap B_i, \eta_i)$ para cada $i \geq 1$ y $\eta_i(\cdot) = \eta(\cdot \cap B_i)$ con $\eta(B_i) < \infty$. Debido a que para cada $i \geq 1$, η_i es finita, las variables aleatorias $N_i(\cdot \cap B_i)$ tienen soporte $\mathbb{P}$-casi seguramente finito. Esto implica que el soporte de $N(\cdot)$ es la unión numerable de soportes finitos $\mathbb{P}$-casi seguramente, y por tanto, el soporte de $N(\cdot)$ es $\mathbb{P}$-casi seguramente numerable. $\square$

Observación 1. *Notemos que si η es una medida con un átomo en un singulete $s \in S$ y $\{s\} \in \mathcal{S}$, entonces se sigue de la construcción de la medida aleatoria de Poisson que $\mathbb{P}(N(\{s\}) \geq 1) > 0$. Por otro lado, si η no tiene átomos entonces $\mathbb{P}(N(\{s\}) = 0) = 1$ para todos los singuletes $s \in S$ tal que $\{s\} \in \mathcal{S}$.*

1.3. Funcionales de medidas aleatorias de Poisson

Vamos a estudiar ahora integrales con respecto a medidas aleatorias de Poisson. Sea $N(\cdot)$ una medida aleatoria de Poisson sobre $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Teniendo en cuenta que $N(\cdot)$ es una medida $\mathbb{P}$-casi seguramente, podemos escribir

$$\int_S f(x) N(\mathrm{d}x), \tag{1.4}$$

como un variable aleatoria bien definida en $[-\infty, \infty]$, donde $f : S \to [-\infty, \infty]$ es una función medible. A continuación enunciamos como lema un resultado de teoría de la medida (ver Ejercicio 2.3 de Kyprianou [29]) que usaremos en el estudio de funcionales de medidas aleatorias de Poisson.

Lema 3. *Sea η una medida sobre $(S, \mathcal{S})$ y $f : S \to [0, \infty)$ una función medible. Entonces*

$$\int_S (1 - e^{-\alpha f(x)}) \eta(\mathrm{d}x) < \infty, \text{ para todo } \alpha > 0$$

si y solo si

$$\int_S (1 \wedge f(x)) \eta(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Teorema 2. *Supongamos que N es una medida aleatoria de Poisson sobre $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces*

(i)

$$X = \int_S f(x) N(\mathrm{d}x),$$

es casi seguramente convergente si y solo si

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|) \eta(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{1.5}$$

(ii) Bajo la condición (1.5), se tiene

$$\mathbb{E}[e^{i\beta X}] = \exp\left\{ - \int_S (1 - e^{i\beta f(x)}) \eta(\mathrm{d}x) \right\}, \tag{1.6}$$

para $\beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Además

$$\mathbb{E}[X] = \int_S f(x) \eta(\mathrm{d}x) \qquad si \qquad \int_S |f(x)| \eta(\mathrm{d}x) < \infty, \tag{1.7}$$

y

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_S f(x)^2 \eta(\mathrm{d}x) + \left(\int_S f(x) \eta(\mathrm{d}x) \right)^2,$$

si

$$\int_S f(x)^2 \eta(\mathrm{d}x) < \infty \qquad y \qquad \int_S |f(x)| \eta(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{1.8}$$

Demostración. (i) Vamos a probarlo primero para funciones simples, o sea, de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$, donde α_i es constante para cada i, y $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ son disjuntos en $\mathcal{S}$ y además $\eta(A_1 \cup \ldots \cup A_n) < \infty$. Para estas funciones, se tiene que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N(A_i)$$

es finito casi seguramente pues $N(A_i)$ se distribuye Poisson con parámetro $\eta(A_i) < \infty$. Luego, para $\theta \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\theta X}] &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{-\theta\alpha_i N(A_i)}] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-(1-e^{-\theta\alpha_i})\eta(A_i)\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-\theta\alpha_i})\eta(A_i)\right\}. \end{aligned}$$

Dado que $1 - e^{-\theta f(x)} = 0$, sobre $S\backslash(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$, podemos decir que

$$\mathbb{E}[e^{-\theta X}] = \exp\left\{-\int_S (1-e^{-\theta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}.$$

Ahora, vamos a probar la igualdad anterior para el caso de funciones medibles positivas f. Para este tipo de funciones, existe una sucesión crecientes de funciones simples, $\{f_n\}_{n\geq 1}$, tal que $\lim_{n\uparrow\infty} f_n = f$ puntualmente. Como N es una medida σ-finita casi seguramente, el teorema de convergencia monótona garantiza que

$$\lim_{n\uparrow\infty} \int_S f_n(x)N(\mathrm{d}x) = \int_S f(x)N(\mathrm{d}x), \qquad \mathbb{P}-\text{c.s.}.$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada y teorema de convergencia monótona encontramos que, para $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\theta X}] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\theta\int f(x)N(\mathrm{d}x)\right\}\right] \\ &= \lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\theta\int f_n(x)N(\mathrm{d}x)\right\}\right] \\ &= \lim_{n\uparrow\infty} \exp\left\{-\int_S (1-e^{-\theta f_n(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_S (1-e^{-\theta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Observemos que la integral del lado derecho de la ecuación anterior es, o infinita para todo $\theta > 0$ si $X = \infty$ casi seguramente, o finita para todo $\theta > 0$ si $X = \infty$ con probabilidad menor que 1. Supongamos que $\int_S (1-e^{-\theta f(x)})\eta(\mathrm{d}x) < \infty$ para $\theta > 0$ y notemos que para toda $x \in S$ y $0 < \theta < 1$ se cumple que $(1-e^{-\theta f(x)}) \leq (1-e^{-f(x)})$, donde $1-e^{-f(x)}$ es integrable con respecto a η. Entonces podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para obtener

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \int_S (1-e^{-\theta f(x)})\eta(\mathrm{d}x) = 0, \qquad \text{para } 0 < \theta < 1.$$

Además, bajo el supuesto de que $\int_S(1-e^{-\theta f(x)})\eta(\mathrm{d}x) < \infty$ para $\theta > 0$, se sigue de (1.9) que $\mathbb{E}[e^{-\theta X}] < \infty$ para $\theta > 0$. Esto nos permite aplicar el teorema de convergencia dominada nuevamente a la ecuación (1.9) cuando θ decrece a 0, con lo que obtenemos que $\mathbb{P}(X=\infty) = 0$. Entonces, tenemos que $X < \infty$ casi seguramente si y solo si $\int_S(1-e^{-\theta f(x)})\eta(\mathrm{d}x) < \infty$, para todo $\theta > 0$. Además, del Lema 3, se verifica que esto pasa si y solo si

$$\int_S (1\wedge f(x))\eta(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Notemos que ambos lados de (1.9) son continuos para θ. Además, si reemplazamos θ por $\theta - i\beta$ para $\beta \in \mathbb{R}$, nos queda

$$\mathbb{E}[e^{-(\theta-i\beta)X}] = \exp\left\{-\int_S(1-e^{-(\theta-i\beta)f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}.$$

Entonces ambos lados de la ecuación anterior son analíticamente continuos, pues vienen dados como composición de funciones continuas de la expresión $e^{\theta-i\beta}$, la cual a su vez es continua en todo el plano complejo. Entonces, tomando límites en ambos lados cuando θ decrece a 0, obtenemos (1.6).

Ahora, consideremos f una función medible sin la restricción de ser positiva. Podemos escribir $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son ambas medibles. Entonces $X = X_+ - X_-$, donde

$$X_+ = \int_S f(x)N_+(\mathrm{d}x) \qquad X_- = \int_S f(x)N_-(\mathrm{d}x)$$

y $N_+ = N(\cdot \cap \{x \in S : f(x) \geq 0\})$ y $N_- = N(\cdot \cap \{x \in S : f(x) < 0\})$. Del Corolario 1, N_+ y N_- son medidas aleatorias de Poisson con intensidades respectivas $\eta(\cdot \cap \{f \geq 0\})$ y $\eta(\cdot \cap \{f < 0\})$. También son independientes y por tanto, X_+ y X_- también lo son. Luego tenemos que, casi seguramente, X converge absolutamente si y solo si X_+ y X_- son convergentes. Pero, el análisis realizado para el caso de f positiva puede usarse para las sumas de X_+ y X_-, y obtenemos que X converge absolutamente si y solo si

$$\int_S (1\wedge |f(x)|)\eta(\mathrm{d}x) < \infty,$$

con lo que queda probado (i).

Para realizar la prueba de (ii), supongamos que la desigualdad anterior se cumple. Como X_+ y X_- son independientes, al igual que en la conclusión de la prueba de (i), tenemos que para $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i\beta X}] &= \mathbb{E}[e^{i\beta X_+}]\mathbb{E}[e^{-i\beta X_-}] \\
&= \exp\left\{-\int_{\{f\geq 0\}}(1-e^{i\beta f^+(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}\times\exp\left\{-\int_{\{f<0\}}(1-e^{-i\beta f^-(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_S(1-e^{i\beta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\},
\end{aligned}$$

con lo que completamos la prueba de (ii).

Para la prueba de (iii), en la expresión (1.6),

$$\mathbb{E}[e^{i\beta X}] = \exp\left\{-\int_S(1-e^{i\beta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\},$$

vamos a diferenciar en ambos lados. Si suponemos que $\int_S |f(x)|\eta(\mathrm{d}x) < \infty$ podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para diferenciar bajo el signo de la integral, con lo que obtenemos

$$\mathbb{E}[iX \cdot e^{i\beta X}] = \exp\left\{-\int_S (1-e^{i\beta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}\left(-\int_S \left(-if(x)e^{i\beta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right).$$

Luego, evaluando en $\beta = 0$ se sigue que

$$\mathbb{E}[X] = \int_S f(x)\eta(\mathrm{d}x).$$

Además, diferenciando nuevamente, usando la hipótesis (1.8) y aplicando el Teorema de Convergencia Dominada para diferenciar bajo el signo de la integral, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[-X^2 e^{i\beta X}] &= \exp\left\{-\int_S (1-e^{i\beta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}\left(\int_S \left(if(x)e^{i\beta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right)^2 \\ &+ \exp\left\{-\int_S (1-e^{i\beta f(x)})\eta(\mathrm{d}x)\right\}\left(-\int_S f(x)^2 e^{i\beta f(x)}\eta(\mathrm{d}x)\right),\end{aligned}$$

y evaluando en $\beta = 0$, obtenemos que

$$\mathbb{E}[X^2] = \left(\int_S f(x)\eta(\mathrm{d}x)\right)^2 + \int_S f(x)^2\eta(\mathrm{d}x),$$

como se quería. □

1.4. Martingalas cuadrado integrables

En general, vamos a usar mucho las identidades del Teorema 2 para medidas aleatorias de Poisson, $N(\cdot)$, sobre $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times\Pi(\mathrm{d}x))$, donde Π es una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Estamos interesados en integrales de la forma

$$\int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x), \tag{1.10}$$

con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Las integrales que trabajamos en el Teorema 2, de la ecuación (1.5) a la (1.8), poniendo $f(x) = x$, para la medida aleatoria de Poisson de arriba, se pueden reescribir como

$$\int_{[0,t]\times B}(1\wedge|x|)\mathrm{d}s\times\Pi(\mathrm{d}x) = t\int_B (1\wedge|x|)\Pi(\mathrm{d}x),$$

$$\int_{[0,t]\times B}(1-e^{i\beta x})\mathrm{d}s\times\Pi(\mathrm{d}x) = t\int_B (1-e^{i\beta x})\Pi(\mathrm{d}x),$$

$$\int_{[0,t]\times B}|x|\mathrm{d}s\times\Pi(\mathrm{d}x) = t\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x),$$

$$\int_{[0,t]\times B}x^2\mathrm{d}s\times\Pi(\mathrm{d}x) = t\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x),$$

donde t aparece multiplicando a cada una, como consecuencia de la implicación de la medida de Lebesgue $\lambda(\cdot)$ sobre $[0,\infty)$ en la intensidad de N, pues $\lambda([0,t]) = t$. A continuación probaremos dos lemas fundamentales para entender el contexto en el cual usaremos expresiones del tipo (1.10).

Lema 4. *Supongamos que $N(\cdot)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre el espacio de medida $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times\Pi(\mathrm{d}x))$, donde Π es una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $0<\Pi(B)<\infty$. Entonces*

$$X_t := \int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}u\times\mathrm{d}x), \qquad t\geq 0,$$

es un proceso de Poisson compuesto con intensidad $\Pi(B)$ y distribución de saltos dada por $\Pi(B)^{-1}\Pi(\mathrm{d}x)|_B$.

Demostración. Por hipótesis $\Pi(B)<\infty$, entonces del Corolario 2, tenemos que, para $t>0$, X_t puede ser escrito como la suma sobre una cantidad finita de puntos casi seguramente. Como este tipo de funciones son continuas por la derecha con límites por la izquierda, se deduce que $X=(X_t:t\geq 0)$ es càdlàg (ver también Teorema 2 (i) para finitud). Luego, notemos que para $0\leq s<t<\infty$,

$$X_t - X_s = \int_{(s,t]}\int_B xN(\mathrm{d}u\times\mathrm{d}x),$$

y es independiente de $\{X_u : u\leq s\}$ pues sobre regiones disjuntas $N(\cdot)$ tiene la propiedad de independencia. De la construcción de $N(\cdot)$, en el Teorema 1, y del hecho de que su medida de intensidad tiene la forma $\mathrm{d}t\times\Pi(\mathrm{d}x)$, se sigue que $X_t - X_s$ tiene la misma distribución que X_{t-s}. Además, usando nuevamente el Teorema 2, parte (ii), se tiene que, para toda $\theta\in\mathbb{R}$ y $t\geq 0$,

$$\mathbb{E}[e^{i\theta X_t}] = \exp\left\{-t\int_B(1-e^{i\theta x})\Pi(\mathrm{d}x)\right\}. \tag{1.11}$$

La función característica anterior corresponde a la de un proceso de Poisson compuesto con distribución de saltos y tasa de llegada dadas por $\Pi(B)^{-1}\Pi(\mathrm{d}x)|_B$ y $\Pi(B)$, respectivamente. □

Lema 5. *Supongamos que $N(\cdot)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre el espacio de medida $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times\Pi(\mathrm{d}x))$, donde Π es una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $0<\Pi(B)<\infty$. Supongamos que B cumple $\int_B|x|\Pi(\mathrm{d}x)<\infty$.*

(i) El proceso de Poisson compuesto con deriva

$$M_t := \int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x) - t\int_B x\Pi(\mathrm{d}x), \qquad t\geq 0$$

es una $\mathbb{P}$-martingala con respecto $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_t : t\geq 0\}$, la filtración generada por X.

(ii) Si además $\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x)<\infty$, entonces es una martingala cuadrado integrable.

Demostración. (i) Notemos que el proceso $M=\{M_t : t\geq 0\}$ es adaptado a la filtración $\mathcal{F}$, pues $M_t = X_t - t\int_B x\Pi(\mathrm{d}x)$. Notemos además que, para $t>0$,

$$\begin{aligned} |M_t| &\leq \left|\int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x)\right| + |t|\left|\int_B x\Pi(\mathrm{d}x),\right| \\ &\leq \int_{[0,t]}\int_B |x|N(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x) + t\int_B|x|\Pi(\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

que implica que

$$\mathbb{E}[|M_t|] \leq \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]}\int_B |x|N(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x) + t\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x)\right],$$

la cual, del Teorema 2 (iii), es finita pues $\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x)$ lo es. Luego, usando el hecho de que M tiene incrementos estacionarios encontramos que, para $0 \leq s \leq t < \infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_{t-s}]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_{(s,t]}\int_B xN(\mathrm{d}u\times \mathrm{d}x)\right] - (t-s)\int_B x\Pi(\mathrm{d}x) = 0,\end{aligned}$$

donde usamos el Teorema 2 (iii) nuevamente.

Para probar (ii), necesitamos ver que M es cuadrado integrable. Usando el Teorema 2, la propiedad de martingala de $\mathbb{E}[M_t] = 0$ y que $\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, podemos deducir que

$$\mathbb{E}\left[\left\{M_t + t\int_B x\Pi(\mathrm{d}x)\right\}^2\right] = t\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x) + t^2\left(\int_B x\Pi(\mathrm{d}x)\right)^2$$

Entonces, desarrollando la parte izquierda de la ecuación anterior se tiene

$$\mathbb{E}[M_t^2] = t\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$$

como queríamos.

□

Observación 2. *Notemos que en este caso estamos trabajando con integrales de la forma*

$$\int_{[0,t]}\int_B f(x,s)N(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x),$$

para $f(x,s) = x$. Sin embargo, el Lema 5 se cumple para funciones medibles f en general. En otras palabras, si B cumple $\int_B |f(x,s)|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, entonces

$$M_t = \int_{[0,t]}\int_B f(x,s)N(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x) - \int_{[0,t]}\int_B f(x,s)\mathrm{d}s\Pi(\mathrm{d}x),$$

es una martingala cuadrado integrable cuando $\int_{[0,t]}\int_B f(x,s)^2\mathrm{d}s\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Ver Lema 3.1 y página 62 de Ikeda y Watanabe [18] para más detalle.

En el contexto del Lema 5, hemos considerado conjuntos B que cumplen lo siguiente

$$\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty,$$

esto se debe a que existen casos en que esta integral se va a ∞. Consideremos, por ejemplo, el caso de $\Pi(\mathrm{d}x) = \mathbf{1}_{x>0}x^{-(1+\alpha)}\mathrm{d}x + \mathbf{1}_{x\leq 0}|x|^{-(1+\alpha)}\mathrm{d}x$ para $\alpha \in (0,1)$ y $B = (-1,0)\cup(0,1)$. En este caso, tenemos que $\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x) = \infty$ mientras que $\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Por tanto existen conjuntos $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para los cuales no necesariamente se cumplen las hipótesis del lema. Sin embargo, resultará fundamental en la comprensión de la descomposición de Lévy-Itô entender el límite de la martingala en el Lema 5 para conjuntos de la forma B_ϵ cuando $\epsilon \downarrow 0$. Para atacar esto, probaremos un teorema, que muestra que existe un proceso con ciertas características, al cual converge uniformemente las martingalas del tipo considerado en el Lema 5.

Antes de enunciar este resultado, que es fundamental en esta sección, necesitamos establecer una serie de hechos generales sobre las martingalas cuadrado integrables. Fijemos un horizonte temporal $T > 0$. Asumamos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ es una espacio de probabilidad filtrado, donde la filtración $(\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$ satisface las condiciones naturales.

Definición 2. *Sea $T > 0$. Definamos a $\mathcal{M}_T^2 = \mathcal{M}_T^2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}, \mathbb{P})$ como el espacio de las $\mathbb{P}$-martingalas cuadrado integrables real valuadas, de media cero, casi seguramente continuas por la derecha, con respecto a la filtración dada sobre un intervalo finito $[0,T]$.*

Gracias a los supuestos hechos sobre $\mathcal{F}_t$, tenemos que cualquier martingala cuadrado integrable con media cero con respecto a esta filtración tiene una modificación continua por la derecha, que también pertenece a $\mathcal{M}_T^2$. Además, sabemos que el espacio $\mathcal{M}_T^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con elemento nulo $M_t = 0$, para $t \in [0,T]$ y todo $\omega \in \Omega$. Más aún, es conocido que definiendo el producto interno

$$\langle M, N \rangle = \mathbb{E}[M_T N_T],$$

donde $M, N \in \mathcal{M}_T^2$, tenemos que $\mathcal{M}_T^2$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 3. *Supongamos que $N(\cdot)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre el espacio $([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t \times \Pi(\mathrm{d}x))$, donde Π es una medida concentrada en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $\int_{(-1,1)} x^2 \Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Para cada $\epsilon \in (0,1)$ definamos la martingala*

$$M_t^\epsilon = \int_{[0,t]} \int_{B_\epsilon} x N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) - t \int_{B_\epsilon} x \Pi(\mathrm{d}x), \qquad t \geq 0.$$

Entonces existe una martingala $M = (M_t : t \geq 0)$ con las siguientes propiedades:

(i) para cada $T > 0$, existe una subsucesión $\{\epsilon_n^T\}_{n \geq 1}$ con $\epsilon_n^T \downarrow 0$ tal que

$$P\left(\lim_{n\uparrow\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} (M_s^{\epsilon_n^T} - M_s)^2 = 0 \right) = 1,$$

(ii) es adaptada a la filtración $\mathcal{F}$,

(iii) tiene trayectorias càdlàg casi seguramente,

(iv) tiene, a lo más, una cantidad numerable de discontinuidades sobre $[0,T]$ casi seguramente,

(iv) tiene incrementos independientes y estacionarios.

En otras palabras, existe un proceso, que es también una martingala, con una cantidad numerable de saltos a la cual, para un $T > 0$ fijo, la sucesión de martingalas $(M_t^\epsilon : t \leq T)$ converge uniformemente sobre $[0,T]$ con probabilidad 1.

Demostración. (i) Sea $0 < \eta < \epsilon < 1$, fijemos $T > 0$ y definamos $M^\epsilon = (M_t^\epsilon : t \in [0,T])$. Realizando un cálculo análogo al hecho en el Lema 5 (ii) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_T^\epsilon - M_T^\eta)^2\right] &= \mathbb{E}\left\{\left(\int_{[0,T]}\int_{\eta\le|x|<\epsilon} xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x) - T\int_{\eta<|x|<\epsilon} x\Pi(\mathrm{d}x)\right)^2\right\}\\ &= T\int_{\eta\le|x|<\epsilon} x^2\Pi(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Notemos que la parte derecha de la igualdad anterior es igual a $\|M^\epsilon - M^\eta\|^2$, donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interior sobre $\mathcal{M}_T^2$. Por hipótesis,

$$\int_{(-1,1)} x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty,$$

por tanto obtenemos que

$$\lim_{\epsilon,\eta\downarrow 0}\|M^\epsilon - M^\eta\| = 0,$$

lo que significa que $(M^\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}_T^2$. Ahora, como $\mathcal{M}_T^2$ es un espacio de Hilbert, existe una martingala continua por la derecha $M = (M_s : s \in [0,T]) \in \mathcal{M}_T^2$ tal que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\|M - M^\epsilon\| = 0.$$

Aplicando la desigualdad maximal de Doob encontramos que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}(M_s - M_s^\epsilon)^2\right] \le 4\lim_{\epsilon\downarrow 0}\|M - M^\epsilon\| = 0, \tag{1.12}$$

de donde podemos deducir que el límite $(M_s : s \in [0,T])$ no depende de T. De hecho, supongamos que si depende y reajustemos nuestra notación a $(M_{s,T} : s \le T)$, que representa este límite. Entonces, a partir de (1.12), vemos que para cualquier $0 < T' < T$,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T'}(M_s^\epsilon - M_{s,T'})^2\right] \le \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}(M_s^\epsilon - M_{s,T})^2\right] = 0.$$

Por tanto, usando que para dos sucesiones reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, $\sup_n (a_n)^2 = (\sup_n |a_n|)^2$ y que $\sup_n |a_n + b_n| \le \sup_n |a_n| + \sup_n |b_n|$ y la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T'}(M_{s,T'} - M_{s,T})^2\right]^{1/2} &\le \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T'}(M_s^\epsilon - M_{s,T'})^2\right]^{1/2}\\ &\quad + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T'}(M_s^\epsilon - M_{s,T})^2\right]^{1/2} = 0,\end{aligned}$$

lo que muestra que los procesos $M_{\cdot,T}$ y $M_{\cdot,T'}$ son uniformemente iguales sobre $[0,T']$ casi seguramente. Pero, dado que T y T' puede ser elegidos arbitrariamente, podemos hablar de una martingala límite bien definida $M = (M_t : t \ge 0)$.

Por otra parte, del hecho de que la convergencia en L^2 de una sucesión de variables aleatorias implica convergencia casi segura de una subsucesión determinista, y de la ecuación (1.12), deducimos que existe una subsucesión determinista $(\epsilon_n^T)_{n\ge 0}$

tal que

$$\lim_{\epsilon_n^T \downarrow 0} \sup_{0\leq s\leq T} (M_s^{\epsilon_n^T} - M_s)^2 = 0,$$

casi seguramente.

(ii),(iii) Dado que, para cada $T < \infty$, $\{M_s : s \in [0,T]\} \in \mathcal{M}_T^2$, es inmediato de la definición de este espacio de martingalas que M es adaptado a la filtración $\mathcal{F}$ con trayectorias continuas por la derecha. Falta probar entonces que las trayectorias de M tienen límites por la izquierda. Para ello, notemos que las trayectorias de M^ϵ son continuas por la derecha con límites por la izquierda. Luego, convergencia uniforme casi segura a lo largo de una subsucesión sobre intervalos finitos implica que el proceso límite, M, también tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda.

(iv) Usando el Corolario 2, hay a lo más una cantidad numerable de puntos en el soporte de N, donde N es una medida aleatoria de Poisson. Además, usando la Observación 1, como la medida $\mathrm{d}t \times \Pi(\mathrm{d}x)$ no tiene átomos, la medida aleatoria $N(\cdot)$ es necesariamente $\{0,1\}$-valuada sobre el espacio de los singuletes. Por tanto, cada discontinuidad en $\{M_s : s \geq 0\}$ corresponde a un único punto en el soporte de $N(\cdot)$. Lo que implica que M tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.

(v) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t_n \leq T < \infty$ y $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$, el teorema de convergencia dominada y convergencia uniforme casi segura a través de una subsucesión $\{\epsilon_n^T\}_{t\geq 0}$ nos dan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n e^{i\theta_j(M_{t_j} - M_{s_j})}\right] &= \lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n e^{i\theta_j(M_{t_j}^{\epsilon_n^T} - M_{s_j}^{\epsilon_n^T})}\right] \\
&= \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left[e^{i\theta_j M_{t_j - s_j}^{\epsilon_n^T}}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left[e^{i\theta_j M_{t_j - s_j}}\right],
\end{aligned}$$

lo que prueba que M tiene incrementos independientes y estacionarios. $\square$

Capítulo 2

Procesos de Lévy

En este capítulo vamos a definir y caracterizar a los procesos de Lévy. Vamos a explorar brevemente su relación con las distribuciones infinitamente divisibles, lo cual nos permitirá probar la descomposición de Lévy-Itô. Dicha descomposición es imprescindible para obtener muchos de los resultados fundamentales de gran parte de este trabajo. Finalmente, vamos a visualizar a los procesos de Lévy como procesos de Markov fuerte y vamos a introducir como caso particular de procesos de Lévy a los subordinadores y a los procesos espectralmente positivos.

2.1. Definición y propiedades

Antes de definir formalmente los procesos de Lévy, consideremos el modelo de la caminata aleatoria. Ésta se construye a partir de la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) $\xi_1, \xi_2, \ldots$, de la siguiente forma

$$X_t = \sum_{j=1}^{t} \xi_j, \qquad X_0 = 0, t = 1, 2, \ldots.$$

Este proceso está caracterizado por los incrementos $\xi_{t+1} = X_{t+1} - X_t$, que son independientes e idénticamente distribuidos. Una pregunta natural es: ¿cuál es la versión continua de la caminata aleatoria?

Una primera idea podría ser el movimiento Browniano, sin embargo, podemos pensar en una clase de procesos mucho más general: los procesos de Lévy. Esta clase es muy variada y en los últimos años se ha vuelto muy popular por sus aplicaciones en diversas ciencias y porque son analíticamente "tratables". Veamos su definición formal.

Definición 3 (Proceso de Lévy). *Un proceso $(X_t : t \geq 0)$, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es un proceso de Lévy si satisface las siguientes condiciones:*

(i) *Para $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ es igual en distribución a X_{t-s}.*

(ii) *Para $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ es independiente de $\sigma\{X_u : u \leq s\}$.*

(iii) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.

(iv) *Las trayectorias de X son $\mathbb{P}$-casi seguramente continuas por la derecha con límites por la izquierda.*

El proceso de Lévy más simple es la "función lineal", vista como proceso determinista. El movimiento Browniano es otro ejemplo, que además tiene trayectorias continuas. Los procesos de Poisson y procesos de Poisson compuestos son también ejemplos importantes de procesos de Lévy.

En lo adelante, vamos a asociar a X la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, donde, para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la filtración natural de la σ-álgebra generada por $\{X_s : s \leq t\}$. Dado que los procesos de Lévy tienen trayectorias $\mathbb{P}$-casi seguramente continuas por la derecha, esto asegura que para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es continua por la derecha, i.e $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$. Estudiemos algunas de las propiedades de los procesos de Lévy.

Lema 6. *La suma finita de procesos de Lévy independientes es un proceso de Lévy.*

Demostración: Probemos para la suma de dos procesos de Lévy, el caso general se muestra por inducción usando el mismo argumento. Sean X y Y dos procesos de Lévy independientes. Probemos que $Z = (Z_t : t \geq 0)$, donde $Z_t = X_t + Y_t$ es un proceso de Lévy.

(i) Sean $0 \leq s \leq t$, entonces $X_t - X_s \sim X_{t-s}$ y es independiente de $Y_t - Y_s \sim Y_{t-s}$, por ser procesos de Lévy independientes, donde $\sim$ significa que se distribuyen igual. Luego,

$$Z_t - Z_s = (X_t + Y_t) - (X_s + Y_s) \sim X_{t-s} + Y_{t-s} = Z_{t-s}.$$

(ii) Sean $0 \leq s \leq t$, entonces $X_t - X_s$ es independiente de $\sigma\{X_u : u \leq s\}$ y $Y_t - Y_s$ es independiente de $\sigma\{Y_u : u \leq s\}$, por ser procesos de Lévy. Como X y Y son independientes, tenemos que $Z_t - Z_s = (X_t + Y_t) - (X_s + Y_s) = (X_t - X_s) + (Y_t - Y_s)$ es independiente de $\sigma\{Z_u = X_u + Y_u : u \leq s\}$.

(iii) $\mathbb{P}(Z_0 = 0) = \mathbb{P}(X_0 + Y_0 = 0) = 1$ pues X_0 y Y_0 son cero casi seguramente.

(iv) Como las trayectorias de X y de Y son continuas por la derecha con límite por la izquierda casi seguramente, las trayectorias de la suma tienen la misma propiedad. Esto se debe a que la suma de funciones continuas por la derecha es continua por la derecha. Además, el límite de la suma de funciones es la suma de los límites. $\square$

Con el propósito de caracterizar a los procesos de Lévy y explorar la gran variedad de procesos que representan, vamos a introducir las distribuciones infinitamente divisibles.

Definición 4 (Distribuciones infinitamente divisibles)**.** *Una variable aleatoria real Θ tiene una distribución infinitamente divisible si, para cada $n = 1, 2, \ldots$, existe una sucesión de variables aleatorias independientes i.i.d $\Theta_{1,n}, \ldots, \Theta_{n,n}$ tal que*

$$\Theta \overset{(d)}{=} \Theta_{1,n} + \ldots + \Theta_{n,n},$$

donde $\overset{(d)}{=}$ significa igualdad en distribución.

Alternativamente podemos expresar la Definición 4 en términos de leyes de probabilidad: la ley μ de una variable aleatoria en los reales es infinitamente divisible si, para cada $n = 1, 2, \ldots$, existe una ley μ_n tal que $\mu = \mu_n^{*n}$, donde μ_n^{*n} denota la n-ésima convolución de μ_n.

También podemos tratar la definición en términos del exponente característico. Supongamos que Θ tiene exponente característico $\Psi(u) := -\log \mathbb{E}[e^{iu\Theta}]$, definido para todo $u \in \mathbb{R}$. Entonces, Θ tiene distribución infinitamente divisible si, para $n \geq 1$, existe un exponente característico Ψ_n de una distribución de probabilidad, tal que $\Psi(u) = n\Psi_n(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Una forma adecuada de caracterizar una distribución infinitamente divisible es a través de la forma que tiene su exponente característico Ψ, como muestra el siguiente teorema, que enunciaremos sin demostración. Una demostración detallada de este resultado podemos encontrarla en Sato [42].

Teorema 4. *(Fórmula de Lévy-Khintchine) Una ley de probabilidad μ de una variable aleatoria real es infinitamente divisible con exponente característico Ψ si y solo si existe una tripleta (a, σ, Π), donde $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ y Π una medida concentrada en $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ que satisface $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$, tal que*

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{\{|x|>1\}}\right) \Pi(\mathrm{d}x),$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$. Además, la tripleta (a, σ^2, Π) es única.

Definición 5. *La medida Π es llamada la medida de Lévy.*

Entre las propiedades más importantes de los procesos de Lévy se encuentra su relación con las distribuciones infinitamente divisible, que se puede ver en los siguientes lemas.

Lema 7. *Sea $X = (X_t : t \geq 0)$ un proceso de Lévy , entonces X_t es infinitamente divisible para cada $t \geq 0$.*

Demostración: De la Definición 3, tenemos que para $t > 0$, y $n \geq 1$,

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \ldots + (X_t - X_{(n-1)t/n}), \tag{2.1}$$

usando que X tiene incrementos independientes y estacionarios y que $X_0 = 0$ c.s, queda probado el resultado. □

Lema 8. *Sea $X = (X_t : t \geq 0)$ un proceso de Lévy , entonces para cada $t \geq 0$, se tiene la propiedad*

$$\mathbb{E}[e^{i\theta X_t}] = e^{-t\Psi(\theta)},$$

donde $\Psi(\theta)$ es el exponente característico de X_1. Llamaremos a Ψ como el exponente característico del proceso de Lévy.

Demostración: Para $\theta \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, sea

$$\Psi_t(\theta) = -\log \mathbb{E}[e^{i\theta X_t}].$$

Usando (2.1), tenemos, para enteros positivos m y n, que

$$m\Psi_1(\theta) = \Psi_m(\theta) = n\Psi_{m/n}(\theta).$$

Luego, para cualquier racional $t > 0$, se cumple

$$\Psi_t(\theta) = t\Psi_1(\theta).$$

Para $t > 0$ real, podemos tomar una sucesión decreciente de racionales $\{t_n\}_{n \geq 0}$ tal que $t_n \downarrow t$ cuando n tiende a infinito, por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$. Además, como X es continuo por la derecha casi seguramente por definición, implica que $e^{-\Psi_t(\theta)}$ también lo es, debido al teorema de convergencia dominada. Deducimos que $\Psi_t(\theta) = t\Psi_1(\theta)$ para todo $t \geq 0$. □

2.2. Descomposición de Lévy-Itô

Hasta ahora sabemos que cada proceso de Lévy puede ser asociado con una distribución infinitamente divisible. Sin embargo, no sabemos si esto se tiene en el sentido opuesto, i.e si dada una distribución infinitamente divisible podemos construir un proceso de Lévy X tal que X_t tiene esa distribución. La respuesta la encontramos en la descomposición de Lévy-Itô, que nos permitirá realizar un análisis riguroso de la estructura de las trayectorias de un proceso de Lévy.

Usando el Teorema 4, podemos reorganizar la expresión general del exponente característico de una distribución infinitamente divisible de la forma

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) = \left\{ ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 \right\} + \left\{ \Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1)) \int_{\{|x|\geq 1\}} (1-e^{i\theta x}) \frac{\Pi(\mathrm{d}x)}{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))} \right\} \\ + \left\{ \int_{\{0<|x|<1\}} (1-e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(\mathrm{d}x) \right\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, donde $a, \sigma \in \mathbb{R}$ y Π es una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ que satisface $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Vamos a denotar los tres sumandos de la ecuación (2.2) como $\Psi^{(1)}(\theta)$, $\Psi^{(2)}(\theta)$ y $\Psi^{(3)}(\theta)$ respectivamente. La descomposición de Lévy-Itô muestra que $\Psi^{(1)}(\theta)$, $\Psi^{(2)}(\theta)$ y $\Psi^{(3)}(\theta)$ corresponden a los exponentes característicos de tres tipos diferentes de procesos de Lévy. Esto implica que Ψ se puede ver como el exponente característico de la suma independiente de estos tres procesos, que es también un proceso de Lévy, gracias al Lema 6. Las expresiones de $\Psi^{(1)}$ y $\Psi^{(2)}$ corresponden, respectivamente, a un movimiento Browniano con deriva $X^{(1)} = (X_t^{(1)} : t \geq 0)$ donde

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - at, \qquad t \geq 0, \tag{2.3}$$

y a un proceso de Poisson compuesto $X^{(2)} = (X_t^{(2)} : t \geq 0)$ donde

$$X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \qquad t \geq 0, \tag{2.4}$$

con $(N_t : t \geq 0)$ proceso de Poisson con intensidad $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))$ y $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d con distribución $\Pi(\mathrm{d}x)/\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))$ concentrada en $\{x : |x| > 1\}$.

Por tanto, el peso de la descomposición de Lévy-Itô, que enunciamos y probamos a continuación, cae sobre la existencia del proceso $X^{(3)}$, donde usaremos los resultados del Capítulo 1.

Teorema 5 (Descomposición de Lévy-Itô)**.** *Dados $a, \sigma \in \mathbb{R}$ y Π una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ que cumple*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty,$$

existe un espacio de probabilidad sobre el cual existen tres procesos de Lévy independientes, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$; donde $X^{(1)}$ es un movimiento Browniano con deriva dado por (2.3), $X^{(2)}$ es un proceso de Poisson compuesto dado por (2.4) y $X^{(3)}$ es una martingala cuadrado integrable con una cantidad numerable de saltos casi seguramente sobre un intervalo finito, que son de magnitud menor que 1, y con exponente característico dado por $\Psi^{(3)}$, como en (2.2). Además, tomando $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$, existe un espacio de probabilidad sobre el cual se define un proceso de Lévy con exponente característico

$$\Psi(\theta) = ai\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{|x|<1})\Pi(\mathrm{d}x), \tag{2.5}$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración: Tomemos $X^{(1)}$ el movimiento Browniano con deriva (2.3), definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. Usando el Teorema 1 del Capítulo 1, dada la medida Π con las hipótesis del enunciado, sabemos que existe un espacio de probabilidad $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$ sobre el cual podemos construir una medida aleatoria de Poisson N sobre $([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathrm{d}t \times \Pi(\mathrm{d}x))$. El soporte de N se interpreta como puntos en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Definamos

$$X_t^{(2)} = \int_{[0,t]} \int_{\{|x|\geq 1\}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0,$$

y usando el Lema 4 del Capítulo 1, dado que $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1)) < \infty$, tenemos que $X_t^{(2)}$ es un proceso de Poisson compuesto con intensidad $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))$ y distribución de saltos dada por $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))^{-1}\Pi(\mathrm{d}x)|_{\mathbb{R}\backslash(-1,1)}$.

Sin pérdida de generalidad vamos a asumir que $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1)) > 0$, pues en otro caso podemos tomar el proceso $X^{(2)}$ idénticamente cero.

Luego, vamos a construir un proceso de Lévy con saltos "pequeños", i.e para cada $0 < \epsilon < 1$, definamos el proceso de Poisson compuesto con deriva,

$$X_t^{(3,\epsilon)} = \int_{[0,t]} \int_{\{\epsilon \leq |x| < 1\}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) - t\int_{\{\epsilon \leq |x| < 1\}} x\Pi(\mathrm{d}x), \qquad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Asumiremos nuevamente sin pérdida de generalidad que $\Pi(\{x : |x| < 1\}) > 0$, pues en otro caso podemos tomar a $X^{(3)}$ como idénticamente cero. Ahora, usando el Teorema 2 (ii) del Capítulo 1, podemos calcular el exponente característico de $X^{(3,\epsilon)}$,

$$\Psi^{(3,\epsilon)}(\theta) = \int_{\{\epsilon \leq |x| < 1\}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(\mathrm{d}x).$$

De acuerdo con el Teorema 3 del Capítulo 1 y usando la Definición 3, existe un proceso de Lévy que es además una martingala cuadrado integrable, definido sobre $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$, al cual $X^{(3,\epsilon)}$ converge uniformemente sobre $[0, T]$ a lo largo de una subsucesión en ϵ, donde hemos usado que $\int_{(-1,1)} x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Evidentemente, el exponente característico converge a

$$\Psi^{(3)}(\theta) = \int_{\{|x|<1\}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(\mathrm{d}x),$$

que es precisamente el exponente característico de dicho proceso de Lévy.

Del Corolario 1 del Capítulo 1, sabemos que para cada $t > 0$, N realiza conteos independientes sobre los dominios $[0,t] \times \{\mathbb{R}\backslash(-1,1)\}$ y $[0,t] \times (-1,1)$, por tanto $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$ son independientes.

Para terminar la prueba, definamos el proceso

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}, \qquad t \geq 0. \tag{2.7}$$

Este proceso está definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}') \times (\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$, tiene incrementos estacionarios e independientes, tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda y tiene exponente característico

$$\begin{aligned}
\Psi(\theta) &= \Psi^{(1)}(\theta) + \Psi^{(2)}(\theta) + \Psi^{(3)}(\theta) \\
&= ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

como se quería probar. □

2.3. Propiedad de Markov fuerte

Ahora, queremos analizar otra de las propiedades importantes de los proceso de Lévy, la propiedad de Markov fuerte. Vamos a definir, para cualquier tiempo de paro T, la σ-álgebra generada por T como

$$\mathcal{F}_T = \{A \subset \Omega : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Lema 9. *Sean $X = (X_t : t \geq 0)$ un proceso de Lévy y T un tiempo de paro. Para $t \geq 0$, definamos $Y_t = X_{T+t} - X_T$. Entonces, bajo el evento $\{T < \infty\}$, el proceso Y tiene la misma distribución que el proceso X y es independiente de $\mathcal{F}_T$.*

Demostración: Vamos a probar que, para $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, toda función acotada $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y todo $A \in \mathcal{F}_T$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T<\infty\}} f(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_m})\right] = \mathbb{P}[A \cap \{T < \infty\}]\mathbb{E}[f(X_{t_1,\ldots,X_{t_m}})].$$

Haciendo uso del teorema de clases monótonas (ver Teorema 25 del Apéndice A), es suficiente probar la identidad anterior para $m = 2$, y $f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$ donde $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y acotadas.

Definamos, para cada $n \geq 1$,

$$T^n = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T \leq \frac{k}{2^n}\}},$$

y para cada $n \geq 1$ y $t \in \mathbb{R}_+$, definimos $Y_t^n = X_{T^n+t} - X_{T^n}$. Tenemos que casi seguramente $T^n \downarrow T$ cuando n tiende a infinito. Como el proceso X es continuo por la derecha y f_1, f_2 son continuas y acotadas, se tiene que $f_i(Y_{t_i}^n) \to f_i(Y_{t_i})$ casi seguramente, cuando n tiende a infinito, para $i = 1, 2$. Luego, usando el teorema de convergencia dominada se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{A\cap\{T^n<\infty\}\}} f_1(Y_{t_1}^n) f_2(Y_{t_2}^n)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{A\cap\{T<\infty\}\}} f_1(Y_{t_1}) f_2(Y_{t_2})\right].$$

Denotemos por $A_k = \left\{\frac{k-1}{2^n} < T \leq \frac{k}{2^n}\right\}$, para $k \geq 1$. Luego, para $A \in \mathcal{F}_T$, usando que X tiene incrementos independientes y estacionarios, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{A\cap\{T^n<\infty\}\}} f_1(Y_{t_1}^n) f_2(Y_{t_2}^n)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{A\cap A_k\}} f_1\left(X_{\frac{k}{2^n}+t_1} - X_{\frac{k}{2^n}}\right) f_2\left(X_{\frac{k}{2^n}+t_2} - X_{\frac{k}{2^n}}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{A\cap A_k\}} f_1\left(X_{\frac{k}{2^n}+t_1} - X_{\frac{k}{2^n}}\right) f_2\left(X_{\frac{k}{2^n}+t_2} - X_{\frac{k}{2^n}}\right) \Big| \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{A\cap A_k\}} \mathbb{E}\left[f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2})\right]\right] \\
&= \mathbb{P}[A \cap \{T^n < \infty\}]\mathbb{E}[f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2})],
\end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de incrementos independientes y estacionarios y el hecho de que para $k \geq 1$ y $A \in \mathcal{F}_T$, el evento $A \cap A_k \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$. Tomando límite cuando n tiende a infinito en ambos lados de la ecuación anterior, queda probado nuestro resultado. $\square$

Teorema 6. *Todo proceso de Lévy es proceso de Markov fuerte.*

Demostración: Sea T tiempo de paro, queremos mostrar que para toda funcional acotada f, se cumple

$$\mathbb{E}[f((X_{t+T}, t \geq 0))|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[f((X_{t+T}, t \geq 0))|X_T].$$

Sea $Y = (Y_t : t \geq 0)$ definido como $Y_t = X_{T+t} - X_T$. Observemos que $X_{t+T} = Y_t + X_T$, por tanto $\mathbb{E}[f((X_{t+T}, t \geq 0))|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[f((Y_t + X_T, t \geq 0))|\mathcal{F}_T]$. Usando el Lema 9, Y_t tiene la misma distribución que X_t y es independiente de $\mathcal{F}_T$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f((X_{t+T}, t \geq 0))|\mathcal{F}_T] &= \mathbb{E}[f((Y_t + X_T, t \geq 0))|\mathcal{F}_T] \\
&= \mathbb{E}[f((Y_t + X_T, t \geq 0))|X_T] \\
&= \mathbb{E}[f((X_t + X_T, t \geq 0))|X_T],
\end{aligned}$$

Pero, dado X_T, la variable aleatoria $X_t + X_T$ tiene la misma distribución que X_{t+T}. Con esto queda probado el resultado. $\square$

2.4. Subordinadores y procesos espectralmente positivos

Retomando la descomposición de Lévy-Itô, se puede ver que la presencia del movimiento Browniano $X^{(1)}$ implica que el proceso de Lévy tiene trayectorias de variación no acotada. Sin embargo, si consideramos el caso de $\sigma = 0$, las trayectorias podrían ser de variación acotada. Dado que el proceso $X^{(2)}$ es de variación acotada puesto que es un proceso de Poisson compuesto, entonces solamente el proceso límite $X^{(3)}$ determina si el proceso de Lévy es de variación acotado o no. Esto nos conduce a plantear el siguiente lema.

Lema 10. *Un proceso de Lévy con exponente de Lévy-Khintchine correspondiente a la terna (a, σ, Π) tiene trayectorias de variación acotada si y solo si*

$$\sigma = 0 \qquad y \qquad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{2.8}$$

Demostración: Retomando la definición de $X^{(3)}$, particularmente en la expresión (2.6) del proceso de Poisson compuesto con deriva, es natural preguntarse bajo qué condiciones existe el límite

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{[0,t]} \int_{\{\epsilon \leq |x| < 1\}} x N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x).$$

Para responder esta interrogante, nos remontamos al Teorema 2 (i), donde obtenemos que

$$\int_{[0,t]} \int_{\{|x|<1\}} |x| N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) < \infty,$$

si y solo si $\int_{\{|x|<1\}} |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Con esta información, podemos identificar entonces el proceso $X^{(3)}$ como

$$X_t^{(3)} = \int_{[0,t]} \int_{\{|x|<1\}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) - t\int_{\{|x|<1\}} x\Pi(\mathrm{d}x), \qquad t \geq 0,$$

de donde obtenemos que el proceso $X^{(3)}$ es de variación acotada si y solo si

$$\int_{\{|x|<1\}} |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty,$$

lo que implica el resultado. □

Usando el Lema 10, en particular que la integral (2.8) sea finita, nos permite reescribir el exponente de Lévy-Khintchine de estos proceso de variación acotada como

$$\Psi(\theta) = -i\delta\theta + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})\Pi(\mathrm{d}x) \tag{2.9}$$

donde la constante $\delta \in \mathbb{R}$ es igual a $-\left(a + \int_{\{|x|<1\}} x\Pi(\mathrm{d}x)\right)$. Para este caso, el proceso de Lévy toma la forma

$$X_t = \delta t + \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0. \tag{2.10}$$

En (2.10) el término δ se conoce como deriva.

Queremos estudiar ahora una clase particular de procesos de Lévy, los cuales tienen trayectorias no decrecientes y que son llamados subordinadores, que es un caso particular del Lema 10.

Definición 6 (Subordinadores)**.** *Un subordinador es un proceso de Lévy que tiene trayectorias no decrecientes.*

Observación 3. *Equivalente a la definición anterior, un subordinador es un proceso de Lévy de variación acotada, deriva positiva $\delta \geq 0$ y medida de saltos concentrada en $(0, \infty)$.*

Veamos algunos resultados relacionados a los subordinadores.

Teorema 7. *Un proceso de Lévy es un subordinador si y solo si $\Pi(-\infty, 0) = 0$, $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\sigma = 0$ y $\delta = -\left(a + \int_{(0,1)} x\Pi(\mathrm{d}x)\right) \geq 0$.*

Demostración: Supongamos que $\Pi(-\infty, 0) = 0$. De la prueba del Teorema 5, obtenemos que el proceso de Lévy correspondiente tiene saltos no negativos. Si además, tenemos que $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\sigma = 0$ y, en la representación (2.9) del exponente característico, $\delta \geq 0$, entonces de (2.10) se puede ver que el proceso de Lévy tiene trayectorias no decrecientes.

Por otro lado, si un proceso de Lévy tiene trayectorias no decrecientes, entonces necesariamente tiene variación acotada. Por tanto, $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\sigma = 0$ y entonces en la representación (2.9) del exponente característico, necesariamente se tiene $\delta \geq 0$. □

Notemos que, para el caso particular de los subordinadores, la fórmula de Lévy-Khintchine en (2.9) se puede escribir como

$$\Psi(\theta) = -i\delta\theta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\theta x})\Pi(dx). \tag{2.11}$$

Lema 11. *Sea S un subordinador, entonces su exponente de Laplace tiene la forma*

$$-\log \mathbb{E}[e^{-\theta S_1}] = \delta\theta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x})\Pi(dx),$$

para todo $\theta \geq 0$.

Demostración: Un subordinador toma valores no negativos, por tanto su exponente de Laplace existe para todo $\theta \geq 0$. Poniendo $\theta = iq$, con $q \geq 0$ en la fórmula de Lévy-Khintchine dada por (2.11), obtenemos

$$-\log \mathbb{E}[e^{-\theta S_1}] = \delta\theta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x})\Pi(dx).$$

□

Por otra parte, si $\Pi(-\infty, 0) = 0$ y X no tiene trayectorias monótonas, es decir, que no es un subordinador ni una deriva lineal de saltos negativos, nos referimos a este tipo de procesos como procesos de Lévy espectralmente positivos. Un proceso de Lévy X es espectralmente negativo si $-X$ es espectralmente positivo. Este tipo de proceso puede tener variación acotada o no acotada. En el caso de tener variación no acotada, puede o no tener una componente Gaussiana. En particular, veamos que cuando $\sigma = 0$, es posible que aún tengamos variación no acotada para este tipo de procesos. Además, un proceso de Lévy espectralmente positivo con variación acotada X debe tomar la forma

$$X_t = -\delta t + S_t, \qquad t \geq 0,$$

donde $(S_t : t \geq 0)$ es un subordinador de saltos puros y, necesariamente, $\delta > 0$, pues, si $\delta \leq 0$, X sería un subordinador.

Ahora, queremos definir una clase un poco más general que subordinadores, los subordinadores matados. éstos son subordinadores que son enviados a un estado cementerio, i.e un punto adicional que no está en $[0, \infty)$, en un tiempo independiente que sigue una distribución exponencial.

Definición 7. *Sea S un subordinador y e_η una variable aleatoria exponencial e independiente para alguna $\eta > 0$. Entonces un subordinador matado se define como el proceso*

$$S_t^* = \begin{cases} S_t & si \quad t < e_\eta, \\ \partial & si \quad t \geq e_\eta. \end{cases}$$

donde ∂ es un estado cementerio.

También nos podemos referir a S^* como S matado con intensidad η. Como caso particular, si hacemos $e_\eta = \infty$ para $\eta = 0$, entonces la Definición 7 incluye la de subordinador.

El exponente de Laplace de un subordinador matado S^* se define para todo $\theta \geq 0$ por

$$\Phi(\theta) = -\log \mathbb{E}[e^{-\theta S_1^*}] = -\log \mathbb{E}[e^{-\theta S_1}\mathbf{1}_{\{1<e_\eta\}}] = \eta - \log \mathbb{E}[e^{-\theta S_1}] = \eta + \Psi(\theta),$$

donde Ψ es el exponente de Laplace de S. Podemos deducir la forma de Φ usando el Lema 11, con lo que obtenemos

$$\Phi(\theta) = \eta + \delta\theta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x})\Pi(\mathrm{d}x),$$

donde $\delta \geq 0$ y $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$.

Por otra parte, usando el teorema de convergencia dominada, es fácil ver que Φ es infinitamente diferenciable y estrictamente cóncava. Además, $\Phi'(0^+) = \mathbb{E}[S_1] \in (0,\infty]$, $\Phi(0) = \eta$ y $\Phi(\infty) = -\log \mathbb{P}(S_1 = 0)$, que es finito solo en el caso en que S sea un subordinador de Poisson compuesto. Esto será de utilidad en el próximo capítulo.

2.5. Integración estocástica con saltos

En esta sección vamos a introducir la fórmula de cambio de variable para procesos de Lévy de variación acotada, una herramienta del cálculo estocástico que será de utilidad en lo adelante.

Supongamos que $X = (X_t, t \geq 0)$ es un proceso de Lévy de variación acotada. De la sección anterior, sabemos que su exponente de Lévy-Khintchine se puede escribir como

$$\Psi(\theta) = -i\delta\theta + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})\Pi(\mathrm{d}x),$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge |x|)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. En consecuencia, las trayectorias de X podemos identificarlas de la forma

$$X_t = \delta t + \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0,$$

donde N es una medida aleatoria de Poisson asociada a los saltos de X.

Teorema 8. *Sea $C^{1,1}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ el espacio de funciones $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son continuamente diferenciables sobre cada variable (en el caso de la derivada de la primera variable en el origen, se entiende como derivada por la derecha). Si $f \in C^{1,1}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ entonces, para $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\mathrm{d}s + \delta \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} (f(s, X_{s^-} + x) - f(s, X_{s^-}))N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Demostración: Vamos a definir, para todo $\epsilon > 0$,

$$X_t^\epsilon = \delta t + \int_{[0,t]} \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0.$$

Como $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-\epsilon,\epsilon)) < \infty$, tenemos que $N(\cdot)$ cuenta un número finito casi seguramente de saltos sobre $[0,t] \times \{\mathbb{R}\backslash(-\epsilon,\epsilon)\}$. Además, $X^\epsilon = (X_t^\epsilon : t \geq 0)$ es un proceso de Poisson compuesto con deriva. Supongamos que la colección de saltos de X^ϵ hasta el tiempo $t \geq 0$ es descrita por $\{(T_i, \xi_i)\}_{1\leq i\leq \mathrm{M}}$, donde $M = N([0,t] \times \{\mathbb{R}\backslash(-\epsilon,\epsilon)\})$. Sea $T_0 = 0$. Entonces una suma telescópica sencilla nos da que

$$\begin{aligned} f(t, X_t^\epsilon) = f(0, X_0^\epsilon) + \sum_{i=1}^{\mathrm{M}} (f(T_i, X_{T_i}^\epsilon) - f(T_{i-1}, X_{T_{i-1}}^\epsilon)) \\ + (f(t, X_t^\epsilon) - f(T_\mathrm{M}, X_{T_\mathrm{M}}^\epsilon)). \end{aligned}$$

Ahora, notando que X^ϵ es lineal y que f es una función suave, tenemos

$$\begin{aligned} f(t, X_t^\epsilon) &= f(0, X_0^\epsilon) \\ &+ \sum_{i=1}^{\mathrm{M}} \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s^\epsilon) + \delta \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^\epsilon) \right) \mathrm{d}s + (f(T_i, X_{T_i^-}^\epsilon + \xi_i) - f(T_i, X_{T_i^-}^\epsilon)) \right) \\ &+ \int_{T_\mathrm{M}}^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s^\epsilon) + \delta \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^\epsilon) \right) \mathrm{d}s \\ &= f(0, X_0^\epsilon) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s^\epsilon) + \delta \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^\epsilon) \right) \mathrm{d}s \\ &+ \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} (f(s, X_{s^-}^\epsilon + x) - f(s, X_{s^-}^\epsilon)) \mathbf{1}_{\{|x|\geq\epsilon\}} N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por otra parte, notemos que X se puede escribir como la diferencia de dos subordinadores independientes, $X_t = X_t^+ - X_t^-$, donde

$$X_t^+ = (\delta \vee 0)t + \int_{[0,t]} \int_{(0,\infty)} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0,$$

y

$$X_t^- = |\delta \wedge 0|t - \int_{[0,t]} \int_{(-\infty,0)} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0.$$

Ahora, denotemos por

$$X_t^{(+,\epsilon)} = (\delta \vee 0)t + \int_{[0,t]} \int_{(\epsilon,\infty)} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0,$$

y

$$X_t^{(-,\epsilon)} = |\delta \wedge 0|t - \int_{[0,t]} \int_{(-\infty,\epsilon)} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0.$$

y observemos que por teorema de convergencia dominada casi segura, cuando ϵ decrece a 0, para cada $t \geq 0$ fijo, $X_t^{\pm,\epsilon} \uparrow X_t^\pm$. Dado que $X_t^\epsilon = X_t^{(+,\epsilon)} - X_t^{(-,\epsilon)}$, podemos ver que, para cada $t > 0$ fijo, tenemos $\lim_{\epsilon\downarrow 0} X_t^\epsilon = X_t$ casi seguramente. Además, reemplazando $[0,t]$ por $[0,t)$ en los límites de integración de las definiciones arriba dadas, es también claro que, para cada $t > 0$ fijo, $\lim_{\epsilon\downarrow 0} X_{t^-}^\epsilon = X_{t^-}$ casi seguramente.

Ahora, definiendo la región $B = \{0 \leq x \leq |X_s^\epsilon| : s \leq t \text{ y } \epsilon > 0\}$. Veamos que B es acotado casi seguramente en $\mathbb{R}$ pues está contenido en el conjunto

$$\{0 \leq x \leq X_s^{(+)} : s \leq t\} \cup \{0 \geq x \geq -X_s^{(-)} : s \leq t\},$$

el cual es la unión de dos conjuntos acotados casi seguramente, gracias a la continuidad por la derecha de las trayectorias de X. Además, debido a la suposición de que f es suave, ambas derivadas de f son uniformemente acotadas (por un valor aleatorio) sobre $[0,t] \times \overline{B}$, donde $\overline{B}$ es la cerradura de B. Usando el comportamiento límite de X^ϵ en ϵ y que las derivadas de f están acotadas en $[0,t] \times \overline{B}$ junto con teorema de convergencia dominada casi segura, vemos que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_0^t\left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s^\epsilon)+\delta\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s^\epsilon)\right)\mathrm{d}s=\int_0^t\left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)+\delta\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\right)\mathrm{d}s.$$

Nuevamente, usando que $\partial f/\partial x$ es uniformemente acotada, pero esta vez sobre $[0,t]\times\{x+\overline{B}:|x|\le 1\}$, notamos que, gracias al teorema del valor medio, para todo $\epsilon>0$ y $s\in[0,t]$,

$$\left|(f(s,X_{s^-}^\epsilon+x)-f(s,X_{s^-}^\epsilon))\mathbf{1}_{\{\epsilon\le|x|<1\}}\right|\le C|x|\mathbf{1}_{\{|x|<1\}},$$

donde $C>0$ es una variable aleatoria, independiente de s, ϵ y x. La función $|x|$ es integrable con respecto a $N(\cdot)$ sobre $[0,t]\times(-1,1)$, gracias a la suposición de que X tiene variación acotada. Luego, usando nuevamente el teorema de convergencia dominada casi segura, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{[0,t]}\int_{(-1,1)}&(f(s,X_{s^-}^\epsilon+x)-f(s,X_{s^-}^\epsilon))\mathbf{1}_{\{|x|\ge\epsilon\}}N(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x)\\ =\int_{[0,t]}\int_{(-1,1)}&(f(s,X_{s^-}+x)-f(s,X_{s^-}))N(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Si en la integral la integral doble anterior, los límites de integración son reemplazados por $[0,t]\times\{\mathbb{R}\backslash(-1,1)\}$, obtenemos un límite similar al de la ecuación anterior dado que a lo más, hay un número finito de átomos en el soporte de $N(\cdot)$ en este dominio. Entonces, tomando límites en ambos lados de (2.12), tenemos lo que se quería probar. □

Para finalizar esta sección vamos a enunciar sin demostración la fórmula de Itô para un proceso de Lévy en general, que abarca los casos que no se contemplan en el Teorema 8.

Teorema 9. *Sea $C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R})$ el espacio de funciones $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que son continuamente diferenciables en la primera variable (en el caso de la derivada de la primera variable en el origen, se entiende como derivada por la derecha) y dos veces continuamente diferenciables en la segunda variable. Entonces para un proceso de Lévy X con coeficiente Gaussiano $\sigma\ge 0$ y $f\in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R})$ tenemos*

$$\begin{aligned}f(t,X_t)=f(0,X_0)&+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_{s^-})\mathrm{d}X_s\\&+\int_0^t\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\mathrm{d}s\\&+\int_{[0,t]}\int_{\mathbb{R}}\left(f(s,X_{s^-}+x)-f(s,X_{s^-})-x\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_{s^-})\right)N(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Capítulo 3

Procesos de Ramificación Continua

En este capítulo vamos a estudiar a los procesos de ramificación continua, que denotaremos por CSBP por sus siglas en inglés. Vamos a mostrar que están estrechamente relacionados con los procesos de Lévy espectralmente positivos, a través de un cambio de tiempo aleatorio. Para ello es fundamental el estudio de la transformación de Lamperti. Además, vamos a estudiar el comportamiento a largo plazo de los CSBP, en particular, los eventos de absorción y extinción. Finalmente, vamos a introducir a los CSBP con inmigración y veremos algunas de sus propiedades.

3.1. Definición

El conocido proceso de Bienaymé-Galton-Watson (BGW) es una cadena de Markov discreta con espacio de estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$, que es descrita por la sucesión $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, la cual satisface

$$Z_0 > 0 \qquad \text{y} \qquad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^{(n)},$$

para $n \geq 1$, donde $\{\xi_i^{(n)}\}_{i\geq 1}$ son variables aleatorias sobre $\mathbb{N} \cup \{0\}$ independientes e idénticamente distribuidas. En este modelo Z_n se interpreta como el tamaño de la n-ésima generación de una población inicial Z_0 de individuos que se reproducen independientemente, con la misma distribución que su descendencia. Esta propiedad reproductiva se conoce como propiedad de ramificación. Notemos que si $Z_n = 0$, entonces para todo $k \geq 1$, $Z_{n+k} = 0$. Además, una consecuencia de la propiedad de ramificación es que, si $Z_0 = a + b$, entonces Z_n es igual en distribución a $Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)}$, donde $Z_n^{(1)}$ y $Z_n^{(2)}$ son copias independientes de Z_n que inician con una población de a y b individuos respectivamente.

Una interesante modificación que podemos hacerle al proceso de BGW es considerarlo a tiempo continuo, asignando a cada individuo un tiempo de vida que se distribuye exponencial con cierto parámetro $\lambda > 0$, los cuales serán independientes. Los individuos se reproducen en el momento de su muerte de la misma forma en que se describió en el caso discreto. Si $(Y_t : t \geq 0)$ es un proceso con valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ que describe el tamaño de la población, entonces por la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial tenemos que, para todo $0 \leq s \leq t$,

$$Y_t = \sum_{i=1}^{Y_s} Y_{t-s}^{(i)},$$

donde, dado $\sigma\{Y_u : u \leq s\}$, las variables aleatorias $\{Y_{t-s}^{(i)}\}_{1\leq i\leq Y_s}$ son independientes, con la misma distribución que Y_{t-s} condicionado a $Y_0 = 1$. En este caso, podemos ver a Y como una cadena de Markov a tiempo continuo sobre $\mathbb{N} \cup \{0\}$, con probabilidades $(\mathbf{P}_y : y \geq 0)$, donde $\mathbf{P}_y$ es la ley de Y dado $Y_0 = y$. Evidentemente, el estado 0 es absorbente, i.e si $Y_t = 0$ entonces $Y_{t+u} = 0$ para toda $u > 0$. Además, la propiedad de ramificación para Y puede entonces formularse como sigue.

Definición 8 (Propiedad de ramificación). *Para cualquier $t > 0$ y y_1, y_2 en el espacio de estados de $Y = (Y_t : t \geq 0)$, la variable aleatoria Y_t bajo $\mathbf{P}_{y_1+y_2}$ es igual en distribución a la suma independiente $Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$, donde la distribución de $Y_t^{(i)}$ es igual a la de Y_t bajo $\mathbf{P}_{y_i}$, para $i = 1, 2$.*

Luego, estamos en condiciones de definir formalmente a los procesos de ramificación continua.

Definición 9 (CSBP). *Un proceso de Markov fuerte $Y = (Y_t : t \geq 0)$ con valores en $[0, \infty]$ y con probabilidades $(\mathbf{P}_x : x \geq 0)$ es un proceso de ramificación continuo si sus trayectorias son continuas por la derecha con límites por la izquierda y su ley cumple la propiedad de ramificación dada en la Definición 8.*

Una forma muy útil de escribir la propiedad de ramificación es, para todo $\theta \geq 0$ y $x, y \geq 0$,

$$\mathbf{E}_{x+y}[e^{-\theta Y_t}] = \mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}]\mathbf{E}_y[e^{-\theta Y_t}]. \tag{3.1}$$

Ahora, usando la igualdad anterior reiteradamente, obtenemos que, para cada $x > 0$,

$$\mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}] = \mathbf{E}_{x/n}[e^{-\theta Y_t}]^n, \tag{3.2}$$

lo que muestra que Y_t es infinitamente divisible para $t > 0$ fija.

Además de la divisibilidad infinita, los CSBP tienen propiedades interesantes, como vemos en el siguiente lema.

Lema 12. *Sea u_t el exponente de Laplace de un proceso CSBP $Y = (Y_t : t \geq 0)$, i.e $u_t(\theta) = -\log \mathbf{E}_1[e^{-\theta Y_t}]$. Entonces u_t satisface la propiedad de semigrupo, i.e*

$$u_{t+s}(\theta) = u_t(u_s(\theta)). \tag{3.3}$$

Demostración: Sea $f(t, \theta, x) = -\log \mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}]$, definido para $\theta, t \geq 0$. Entonces, (3.2) implica que, para $m \in \mathbb{N}$,

$$f(t, \theta, m) = nf(t, \theta, m/n) \qquad \text{y} \qquad f(t, \theta, m) = mf(t, \theta, 1),$$

lo que muestra que para $x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$,

$$f(t, \theta, x) = xu_t(\theta), \tag{3.4}$$

donde $u_t(\theta) = f(t, \theta, 1) \geq 0$. Por otra parte, de (3.1) vemos que, para $0 \leq z < y$, $f(t, \theta, z) \leq f(t, \theta, y)$, que implica que $f(t, \theta, x^-)$ existe, donde $x^- = \lim_{y \downarrow x} y$, y es menor o igual a $f(t, \theta, x^+)$, donde $x^+ = \lim_{y \uparrow x} y$, el cuál existe. Luego, gracias a (3.4), éstos límites son iguales, por tanto, para $x > 0$

$$\mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}] = e^{-xu_t(\theta)}. \tag{3.5}$$

Finalmente, la propiedad de Markov fuerte junto con (3.5) implican que, para todo $x > 0$ y $t, s, \theta \geq 0$,

$$e^{-xu_{t+s}(\theta)} = \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_{t+s}}|Y_t]] = \mathbf{E}_x[e^{-Y_t u_s(\theta)}] = e^{-xu_t(u_s(\theta))},$$

que implica la propiedad de semigrupo. □

A continuación enunciamos el primer resultado que relaciona a los procesos de Lévy con los CSBP. La prueba que aquí presentamos se basa en las proposiciones 2 y 3 de Caballero, Lambert y Bravo [9].

Teorema 10. *Para $t,\theta \geq 0$, suponga que $u_t(\theta)$ es el exponente de Laplace de un CSBP. Entonces es diferenciable con respecto a t y satisface*

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\theta) + \psi(u_t(\theta)) = 0, \tag{3.6}$$

con la condición inicial $u_0(\theta) = \theta$, donde para $\lambda \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = -q - a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbb{I}_{\{x<1\}}\right) \Pi(dx), \tag{3.7}$$

con $q \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π una medida con soporte en $(0,\infty)$ que satisface

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

Demostración: Vamos a excluir el caso en que el CSBP es una constante c.s., de esta forma $u_t(\theta) \neq \theta$ excepto cuando $t = 0$. Primero vamos a diferenciar en ambos lados de (3.5) para obtener

$$\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial \theta} = x\mathbf{E}_x[Y_t e^{-\theta Y_t}]e^{-x u_t(\theta)},$$

donde podemos diferenciar bajo el sigo de la integral porque $Y_t e^{-\theta Y_t}$ es integrable. Esto último gracias a que la función $h(s) = se^{-\theta s}$ alcanza su máximo global en $s = \frac{1}{\theta}$ y $h(\frac{1}{\theta})$ es integrable. De esta forma, encontramos que la función $\theta \to u_t(\theta)$ es continuamente diferenciable sobre $(0,\infty)$ y estrictamente creciente pues $\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial \theta}$ es positiva. Además $t \mapsto u_t(\theta)$ es continua, debido a que $-\log \mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}]$ es continua en t.

Usando (3.3) podemos escribir

$$u_{t+h}(\theta) - u_t(\theta) = u_t(u_h(\theta)) = \frac{\partial u_t(\theta)}{\partial \theta}(\theta')(u_h(\theta) - \theta), \tag{3.8}$$

para alguna $\theta' \in [\theta, u_h(\theta)]$. Por tanto el incremento $u_{t+h}(\theta) - u_t(\theta)$ tiene el mismo signo que $u_h(\theta) - \theta$. Luego, para una partición uniforme $\{t_i\}_i$ de $[0,t]$ con distancia h entre los t_i, tenemos

$$\sum_i |u_{t_{i+1}}(\theta) - u_{t_i}(\theta)| = sign(u_h(\theta) - \theta)\sum_i (u_{t_{i+1}}(\theta) - u_{t_i}(\theta)) = |u_t(\theta) - \theta|.$$

De aquí deducimos que $t \mapsto u_t(\theta)$ tiene variación finita y por tanto, es diferenciable casi dondequiera. Gracias a (3.8), tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_{t+h}(\theta) - u_t(\theta)}{u_h(\theta) - \theta} = \frac{\partial u_t(\theta)}{\partial \theta},$$

donde el lado derecho de la expresión anterior es diferente de cero. Así, tomando t donde $t \mapsto u_t(\theta)$ es diferenciable, su derivada por la derecha existe en 0. Esto, junto a la última ecuación garantiza diferenciabilidad en todas partes y se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial t} = \frac{\partial u_t(\theta)}{\partial \theta} \cdot F(\theta),$$

donde $F(\theta) = \frac{\partial u_t(\theta)}{\partial t}\Big|_{t=0}$. Haciendo h decrecer a 0 en $(u_t(u_h(\theta)) - u_t(\theta))/h$, encontramos que

$$\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial t} = F(u_t(\theta)).$$

Ahora probemos que $\psi \equiv (-F)$ es el exponente de Laplace de una distribución infinitamente divisible con soporte en $[0, \infty)$, la cual puede corresponder a un proceso de Lévy espectralmente positivo o un subordinador. Debido a que para toda $x \geq 0$, $\theta \mapsto e^{-xu_t(\theta)}$ es la trasformada de Laplace de una medida de probabilidad sobre $[0, \infty]$, entonces $\theta \mapsto u_t(\theta)$ debe ser el exponente de Laplace de un subordinador. Por tanto, para toda $\epsilon > 0$, la función

$$\theta \mapsto (\theta - u_\epsilon(\theta))/\epsilon \tag{3.9}$$

es el exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente positivo de variación finita. Ahora, notemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\theta - u_\epsilon(\theta)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{u_\epsilon(\theta) - u_0(\theta)}{\epsilon} = -\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -F(\theta) = \psi(\theta).$$

Sea G_ϵ la ley de la distribución infinitamente divisible sobre $(-\infty, \infty]$ cuyo exponente de Laplace está dado por (3.9) y sea $\{\epsilon_k\}_{k\geq 1}$ una subsucesión positiva que converge a 0^+. Debido a que $(\theta - u_\epsilon(\theta))/\epsilon$ converge a $\psi(\theta)$ cuando ϵ tiende a 0^+, obtenemos que G_{ϵ_k} converge débilmente a la ley de una distribución infinitamente divisible cuyo exponente de Laplace está dado por $\psi(\theta)$ y cuya medida de Lévy está concentrada en $[0, \infty)$. Esto se tiene gracias al Teorema 26 del Apéndice A, el cual muestra que la convergencia débil de distribuciones infinitamente divisibles es cerrada. Por tanto, ψ es el exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente positivo o de un subordinador, y por consiguiente tiene la forma (3.7). □

Observación 4. *Notemos que, a partir de la teoría desarrollada en el Capítulo 2, sabemos que para $\lambda \geq 0$, $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}]$, donde X es un proceso de Lévy espectralmente positivo o un subordinador, ambos posiblemente matados en un tiempo exponencial de intensidad $q \geq 0$. Además, usando los resultados de la última sección del Capítulo 2, sabemos que ψ es convexa, infinitamente diferenciable sobre $(0, \infty)$, $\psi(0) = q$ y $\psi'(0^+) \in [-\infty, \infty)$. Más aún, si X es un subordinador matado, entonces $\psi(\infty) < 0$; en otro caso tenemos $\psi(\infty) = \infty$.*

Ahora, para cada $\theta > 0$, la solución de (3.6) se expresa de forma única por la relación

$$-\int_\theta^{u_t(\theta)} \frac{1}{\psi(\xi)} d\xi = t. \tag{3.10}$$

Esto se ve diferenciando la expresión anterior con respecto a t en ambos lados:

$$-\frac{1}{\psi(u_t(\theta))} \frac{\partial u_t}{\partial t}(\theta) = 1.$$

Además, notemos que haciendo t tender a 0, tenemos $u_0(\theta) = \theta$.

Luego, de lo explicado anteriormente, vemos que si un CSBP existe, entonces está asociado con una función particular $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por (3.7). Formalmente, se conocen a todas las funciones ψ con respecto a la definición (3.7) como "mecanismos de ramificación". A partir del Teorema 10, encontramos que el mecanismo de ramificación de un CSBP es el exponente de Laplace de un proceso espectralmente positivo o de un subordinador, ambos posiblemente matados. Esta relación se hace mucho más fuerte con la transformación de Lamperti, que enunciamos a continuación. Entre otras cosas, muestra que cada mecanismo de ramificación ψ puede ser asociado a un CSBP y que este último puede ser identificado como como un cambio de tiempo de un proceso de Lévy espectralmente positivo o de un subordinador a través de una trasformación aleatoria. Para una prueba detallada ver Caballero, Lambert y Bravo [9].

Teorema 11 (La transformación de Lamperti). *Sea ψ un mecanismo de ramificación dado.*

(i) Suponga que $X = (X_t : t \geq 0)$ es un proceso de Lévy espectralmente positivo o un subordinador, matado, con estado cementerio $+\infty$, en un tiempo exponencial con parámetro $q \geq 0$. Además, $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}]$. Definamos, para cada $t \geq 0$,

$$Y_t = X_{\theta_t \wedge \tau_0^-},$$

donde $\tau_0^- = \text{ínf}\{t > 0 : X_t < 0\}$ y $\theta_t = \text{ínf}\left\{s > 0 : \int_0^s \frac{\mathrm{d}u}{X_u} > t\right\}$. Entonces bajo $\mathbb{P}_x$, para $x \geq 0$, el proceso $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ es un CSBP con mecanismo de ramificación ψ y valor inicial $Y_0 = x$.

(ii) Inversamente, supongamos que $Y = (Y_t : t \geq 0)$ es un CSBP con mecanismo de ramificación ψ, tal que $Y_0 = x \geq 0$. Definamos para $t \geq 0$,

$$X_t = Y_{\phi_t},$$

donde

$$\phi_t = \text{ínf}\left\{s > 0 : \int_0^s Y_u \mathrm{d}u > t\right\}.$$

Entonces $X = (X_t : t \geq 0)$ es un proceso de Lévy espectralmente positivo o un subordinador, con valor inicial $X_0 = x$ y matado, con estado cementerio $+\infty$, en un tiempo independiente y exponencial con parámetro $q \geq 0$. Si $\mathbb{P}$ es la ley de X condicionada a $X_0 = 0$, entonces $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}]$, $\lambda \geq 0$.

3.2. Comportamiento a largo plazo

Para el análisis del comportamiento a largo plazo, será útil la definición de proceso de Bienaymé-Galton-Watson dada al inicio de este capítulo. Sin especificar nada acerca de la distribución común de la descendencia, hay dos eventos importantes relacionados a esta cadena de Markov: explosión y absorción. Para el caso de explosión, no es claro si el evento $\{Z_n = \infty\}$ tiene probabilidad positiva para algún $n \geq 1$ o no, pues esto último podría pasar si, por ejemplo, la distribución de la descendencia no tiene momentos. Ahora, cuando $\mathbf{P}_x[Z_n < \infty] = 1$, para toda $n \geq 1$, se dice que el proceso es "conservativo", i.e el proceso no explota. Por otra parte, para el caso de la absorción, notemos de la definición de Z que si $Z_n = 0$ para algún $n \geq 1$, entonces $Z_{n+m} = 0$ para toda $m \geq 0$, lo que significa que 0 es un estado absorbente. Dado que Z_n se interpreta como el tamaño de la n-ésima generación de una población que se reproduce de forma asexual, el evento $\{Z_n = 0, \text{ para algún } n > 0\}$ se conoce como "extinción".

Es natural considerar el análogo del comportamiento conservativo y de la extinción para el caso de un CSBP.

3.2.1. Procesos conservativos

Definición 10. *Un CSBP $Y = (Y_t : t \geq 0)$ es conservativo si, para toda $t > 0$, $Y_t < \infty$ con probabilidad 1.*

A continuación, damos una caracterización de los procesos conservativos.

Teorema 12. *Un CSBP con mecanismo de ramificación ψ es conservativo si y solo si*

$$\int_{0+} \frac{1}{|\psi(\xi)|} \mathrm{d}\xi = \infty.$$

Por lo tanto, una condición necesaria es que $\psi(0) = 0$ y una condición suficiente es que $\psi(0) = 0$ y $|\psi'(0+)| < \infty$ (equivalentemente $q = 0$ y $\int_{[1,\infty)} x\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$).

Demostración: Por la forma de $u_t(\theta)$, un CSBP es conservativo si y solo si $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$, pues, para cada $x > 0$,

$$\mathbf{P}_x(Y_t < \infty) = \lim_{\theta \downarrow 0} \mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}] = \exp\left\{-x \lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta)\right\},$$

donde el límite se obtiene del teorema de convergencia monótona. Sin embargo, veamos de (3.10) que cuando θ decrece a 0, como t es independiente de θ,

$$t = -\int_{\lim_{\theta \downarrow 0} \theta}^{\delta} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi + \int_{\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta)}^{\delta} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi,$$

donde tomamos δ suficientemente pequeño y positivo. Esto se traduce en

$$t = -\int_{0^+}^{\delta} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi + \int_{\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta)}^{\delta} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

Del hecho de que el segundo sumando de la parte izquierda de la ecuación anterior se convierte en $-\int_{0^+} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi$ para $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$, concluimos que $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$ si y solo si

$$\int_{0+} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi = \infty.$$

Notemos que se toma el valor absoluto en la integral porque $\psi(\theta)$ puede ser negativa en una vecindad del cero.

Por otra parte, si ψ está acotada en una vecindad del origen pero alejada del cero, entonces $1/|\psi|$ es localmente integrable. Por tanto, una condición necesaria para ser conservativo es que $\psi(0) = 0$. Además, si $\psi(0) = 0$ y ψ es localmente lineal en una vecindad del origen, entonces $1/|\psi|$ no es localmente integrable. Luego, recordando que ψ es una función suave sobre $[0, \infty)$, una condición suficiente para ser conservativo es que $\psi(0) = 0$ y $|\psi'(0+)| < \infty$. $\square$

De ahora en adelante, asumiremos que el proceso no explota (y en particular que $q = 0$).

3.2.2. Probabilidad de extinción

Si consideramos la representación de CSBP dada en el Teorema 11 (i), se observa que cumplen la propiedad de que si $Y_t = 0$ para algún $t > 0$, entonces $Y_{t+s} = 0$ para $s \geq 0$. Otra forma de ver esta propiedad es de la expresión (3.1), tomando $x = y = 0$, vemos que $\mathbf{P}_0$ es la medida que asigna probabilidad 1 al proceso que es idénticamente cero. Luego, por la propiedad de Markov, una vez que el proceso llega al estado cero, nunca sale. Si definimos $\zeta = \inf\{t > 0 : Y_t = 0\}$, entonces el evento $\{\zeta < \infty\} = \{Y_t = 0, \text{ para algún } t > 0\}$ es conocido como extinción.

Usando el teorema de convergencia dominada, en ambos lados de (3.5), tenemos que $u_t(\theta)$ es continuamente diferenciable en θ sobre $(0, \infty)$. Entonces, aplicando nuevamente el teorema de convergencia dominada, diferenciando en ambos lados de (3.5) con respecto a θ, encontramos que para cada $\theta, x, t > 0$,

$$\mathbf{E}_x[Y_t e^{-\theta Y_t}] = x \frac{\partial u_t}{\partial \theta} e^{-x u_t(\theta)}. \tag{3.11}$$

Notemos que podemos diferenciar bajo la integral pues la expresión $Y_t e^{-\theta Y_t}$ es integrable. Esto se sigue del hecho de que la función $h(s) = s e^{-\theta s}$ alcanza su máximo global en $s = \frac{1}{\theta}$, y $h(\frac{1}{\theta})$ es integrable. Luego, tomando límite en ambos lados cuando θ decrece a 0, obtenemos

$$\mathbf{E}_x[Y_t] = x \frac{\partial u_t}{\partial \theta}(0^+). \tag{3.12}$$

Además, derivando en ambos lados de (3.6) con respecto a θ, encontramos que para $\theta > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) + \psi'(u_t(\theta))\frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) = 0,$$

donde aquí usamos que $\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial u_t}{\partial t}(\theta) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta)$, pues ambas derivadas mixtas son en sí mismas diferenciables, lo que asegura la igualdad. Luego, resolviendo esta ecuación diferencial de primer orden, obtenemos que

$$\frac{\partial u_t}{\partial \theta}(\theta) = c \exp\left\{-\int_0^t \psi'(u_s(\theta))\mathrm{d}s\right\}, \tag{3.13}$$

para cierta $c > 0$. Pero, si analizamos (3.11) cuando t decrece a 0, podemos ver que necesariamente $c = 1$.

Por otra parte recordemos que, por definición, ψ es convexa y $\psi'(0^+) \in [-\infty, \infty)$. Luego, tomando límites en (3.13) cuando θ decrece a 0, y usando el teorema de convergencia dominada en la integral cuando $\psi'(0^+) < \infty$ y el teorema de convergencia monótona cuando $\psi'(0^+) = -\infty$ se puede deducir de (3.12) y de (3.13) que

$$\mathbf{E}_x[Y_t] = x e^{-\psi'(0^+)t}, \tag{3.14}$$

donde se observa que la esperanza es infinita siempre que $\psi'(0^+) = -\infty$. Aquí tomemos en cuenta que para $s > 0$, $u_s(\theta)$ decrece a 0 (pues excluimos la posibilidad de que explote).

Los resultados anteriores nos conducen a la siguiente clasificación de un CSBP.

Definición 11. *Un CSBP con mecanismo de ramificación ψ es:*

(i) subcrítico, si $\psi'(0^+) > 0$,

(ii) crítico, si $\psi'(0^+) = 0$ y

(iii) supercrítico, si $\psi'(0^+) < 0$.

En la definición anterior, subcrítico, crítico y supercrítico significa que el proceso, en promedio, va a decrecer, mantenerse constante y crecer respectivamente conforme al tiempo. Para el caso discreto, el resultado análogo a la Definición 11 corresponde a que la media de la distribución de la descendencia sea estrictamente menor a 1, igual a 1 o estrictamente mayor a 1, respectivamente. Entonces, haciendo una analogía, podríamos pensar que en el caso continuo hay extinción con probabilidad 1 si y solo si $\psi'(0^+) \geq 0$. Sin embargo, no es así. Por ejemplo, vamos a tomar en la representación del Teorema 11 de la transformación de Lamperti al proceso de Lévy $X_t = 1 - t$, $t \geq 0$. Entonces

$$\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X_t < 0\} = \inf\{t > 0 : 1 - t < 0\} = 1, \qquad \text{y}$$

$$\theta_t = \inf\left\{s > 0 : \int_0^s \frac{\mathrm{d}u}{X_u} > t\right\} = \inf\left\{s > 0 : -\log(1-s) > t\right\} = 1 - e^{-t}.$$

Esto corresponde a $Y_t = X_{\theta_t \wedge \tau_0^-} = e^{-t}$. Como $X = (X_t : t \geq 0)$ es proceso de Lévy y $X_t = 1 - t$, entonces $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}] = \lambda$. Así, $\psi'(0^+) = 1 > 0$, pero $Y_t > 0$ para todo $t > 0$.

A continuación presentamos un resultado que caracteriza completamente a la extinción de un CSBP.

Teorema 13. *Supongamos que* Y *es un CSBP con mecanismo de ramificación* ψ. *Para toda* $x \geq 0$, *sea* $p(x) = \mathbf{P}_x(\zeta < \infty)$.

(i) Si $\psi(\infty) < 0$, *entonces para toda* $x > 0$, $p(x) = 0$.

(ii) Cuando $\psi(\infty) = \infty$, $p(x) > 0$ *para algún (y por tanto, para toda)* $x > 0$ *si y solo si*

$$\int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi < \infty, \tag{3.15}$$

en cuyo caso, $p(x) = e^{-\Phi(0)x}$, *donde* $\Phi(0) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = 0\}$. *En otro caso* $p(x) = 0$ *para toda* $x > 0$.

Demostración: (i) Si para $\lambda \geq 0$, $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}]$, donde X es un subordinador; entonces de la representación dada en el Teorema 11 (i), el proceso se extingue con probabilidad 0. De la Observación 4, el caso en que X es un subordinador es equivalente a $\psi(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$.

(ii) Dado que $\{Y_t = 0\} \subseteq \{Y_{t+s} = 0\}$, para $s, t > 0$, tenemos por monotonía de la medida $\mathbf{P}_x$ que, para cada $x > 0$,

$$\mathbf{P}_x(Y_t = 0) \uparrow p(x) \tag{3.16}$$

cuando t tiende a ∞. Luego, $p(x) > 0$ si y solo si $\mathbf{P}_x(Y_t = 0) > 0$ para alguna $t > 0$. Dado que $\mathbf{P}_x(Y_t = 0) = e^{-xu_t(\infty)}$, tenemos que $p(x) > 0$ para algún, y entonces para toda, $x > 0$ si y solo si $u_t(\infty) < \infty$ para alguna $t > 0$.

Ahora, fijemos un $t > 0$. Tomando el límite cuando θ se va a ∞, en ambos lados de (3.10), vemos que si $u_t(\infty) < \infty$, entonces

$$\int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi < \infty. \tag{3.17}$$

Por otra parte, si se cumple (3.17), entonces, nuevamente tomando el límite en ambos lados de (3.10) cuando θ tiende a ∞, necesariamente se tiene que $u_t(\infty) < \infty$.

Finalmente, vamos a asumir que se cumple (3.17). Sabemos que

$$\int_{u_t(\infty)}^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi = t. \tag{3.18}$$

Tomando límites cuando t tiende a ∞ en ambos lados de la identidad anterior, obtenemos

$$\int_{\lim_{t\to\infty} u_t(\infty)}^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi = \infty. \tag{3.19}$$

En (3.16) vimos que $t \mapsto \mathbf{P}_x(Y_t = 0)$ es una función creciente, y por tanto $t \mapsto u_t(\infty) = -x^{-1} \log \mathbf{P}_x(Y_t = 0)$ es decreciente. Entonces, gracias a (3.19) vemos que a medida que t tiende a ∞, necesariamente $u_t(\infty)$ decrece a una constante C, tal que

$$C = \max_{c\geq 0} \left\{ c : \int_c^{\infty} 1/\psi(\xi) \mathrm{d}\xi = \infty \right\}.$$

Luego, usando (3.17) y que ψ es convexa y suave, la constante C tiene que corresponder necesariamente a una raíz de ψ en $[0, \infty)$, pues de otra forma $\int_c^{\infty} 1/\psi(\xi)\mathrm{d}\xi < \infty$. Dado que ψ es convexa y continua (pues es diferenciable), y que $\psi(0) = 0$, hay a lo más dos raíces de ψ, puntos donde $\int_c^{\infty} 1/\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ va a explotar. La mayor de ellas es precisamente $C = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = 0\} = \Phi(0) \in [0, \infty)$. De esta forma,

$$p(x) = \lim_{t\uparrow\infty} e^{-xu_t(\infty)} = e^{-\Phi(0)x},$$

como se quería. $\square$

Teniendo en cuenta que ψ es una función convexa y usando el Teorema 13 (ii) probado anteriormente, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. *Para un CSBP con mecanismo de ramificación ψ que cumple $\psi(\infty) = \infty$ y*

$$\int^{\infty} \frac{1}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi < \infty,$$

tenemos que $p(x) < 1$ para algún (y por tanto para toda) $x > 0$ si y solo si $\psi'(0^+) < 0$.

Podemos entonces resumir los resultados que tenemos sobre la probabilidad de extinción $p(x)$.

Condición	$p(x)$
$\psi(\infty) < 0$	0
$\psi(\infty) = \infty$, $\int^{\infty} \psi(\xi)^{-1}\mathrm{d}\xi = \infty$	0
$\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(0) < 0$, $\int^{\infty} \psi(\xi)^{-1}\mathrm{d}\xi < \infty$	$e^{-\Phi(0)x} \in (0, 1)$
$\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(0) \geq 0$, $\int^{\infty} \psi(\xi)^{-1}\mathrm{d}\xi < \infty$	1

CUADRO 3.1: Resultados sobre probabilidad de extinción

3.3. Inmigración

Para entender mejor la inmigración, vamos a comenzar estudiando este fenómeno para procesos de Bienaymé-Galton-Watson.

Consideremos un proceso de BGW estándar $Z = \{Z_n : n \geq 0\}$. De forma intuitiva, podemos ver a un proceso de BGW con inmigración como una variante de Z, en el cual hay un flujo de inmigrantes en cada generación; y donde cada inmigrante comienza una copia independiente del proceso Z iniciando en 1. Formalmente, se define a un proceso de BGW con inmigración como una cadena de Markov $Z^* = \{Z_n^* : n \geq 0\}$ donde $Z_0^* = z \in \{0, 1, \ldots\}$ y

$$Z_n^* = Z_n + \sum_{k=1}^{n} Z_{n-k}^{(k)}, \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

donde para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, la variable aleatoria $Z_{n-k}^{(k)}$ es independiente e igual en distribución al número de individuos de la $(n-k)$-ésima generación del proceso Z que inicia en η_k; y donde $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de v.a.i.i.d con distribución común $\{p_k^* : k \geq 0\}$ y representan el flujo generacional de inmigrantes. Cada uno de estos inmigrantes comienza una copia independiente de Z que inicia en 1.

Podemos generalizar esta idea para el caso continuo. Supongamos que $S = (S_t : t \geq 0)$ bajo $\mathbb{P}$ es un subordinador de saltos puros con exponente de Laplace $\phi(\theta)$ y medida de Lévy Λ concentrada en $(0, \infty)$ y que satisface

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Lambda(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Vamos a definir al proceso

$$Y_t^* = Y_t + \int_{[0,t]} \int_{(0,\infty)} Y_{t-s}^{(x)} N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \qquad t \geq 0, \tag{3.21}$$

donde N es la medida aleatoria de Poisson asociada con los saltos de S, $Y = (Y_t : t \geq 0)$ es un CSBP con ley $\mathbf{P}_x$ cuando $Y_0 = x$ y para cada (s, x) en el soporte de N, $Y_{t-s}^{(x)}$ es una copia independiente del proceso Y al tiempo $t - s$. Debido a que S tiene una cantidad numerable de saltos, la integral (3.21) está bien definida.

Para las ideas que vamos a desarrollar en lo adelante es conveniente reescribir la expresión de Y_t^* de la forma siguiente

$$Y_t^* = Y_t + \sum_{u \leq t} Y_{t-u}^{(\Delta S_u)}, \tag{3.22}$$

donde $\Delta S_u = S_u - S_{u^-}$. De esta forma, $\Delta S_u = 0$ excepto un una cantidad numerable de $u \in [0, t]$. Claramente, se puede ver a partir de (3.22) que $Y^* = (Y_t^* : t \geq 0)$ es un análogo continuo natural de (3.20), donde ahora el subordinador S cumple el papel de $\sum_{i=1}^{n} \eta_i$, que representa la cantidad total de inmigrantes en Z^* hasta la n-ésima generación. Además, es importante notar que de la definición de las trayectorias en (3.22), obtenemos que Y^* es un proceso de Markov. De hecho,

$$Y_{t+s}^* = \tilde{Y}_s^{(Y_t^*)} + \sum_{t<u\leq t+s} Y_{t+s-u}^{(\Delta S_u)},$$

donde $\tilde{Y}_s^{(y)}$ es una copia independiente de $Y_s^{(y)}$, lo que muestra que la única dependencia sobre $(Y_u^* : u \leq t)$ viene a través de Y_t^*, en el primer término del lado derecho de (3.22).

Calculemos el exponente de Laplace de Y_t^*. Si $\mathbf{P}_x^*$ es la ley de Y^* cuando $Y_0^* = Y_0 = x$ entonces, asumiendo que $\mathbf{E}_x^*$ es la esperanza asociada a $\mathbf{P}_x^*$ y que $\mathbf{E}_x$ es la esperanza asociada a $\mathbf{P}_x$, para toda $\theta \geq 0$ tenemos

$$\mathbf{E}_x^*[e^{-\theta Y_t^*}] = \mathbf{E}_x^* \left[e^{-\theta Y_t} \prod_{v \leq t} \mathbf{E}_{\Delta S_v} \left[e^{-\theta Y_{t-v}^{(\Delta S_v)}} \Big| S \right] \right], \tag{3.23}$$

donde podemos cambiar el producto y la esperanza condicional gracias al teorema de convergencia monótona. Para ver esto, notemos que para $\epsilon > 0$, de la descomposición de Lévy-Itô se tiene que

$$\mathbf{E}_{\Delta S_v}^* \left[1 - \prod_{v \leq t} \mathbf{1}_{\{\Delta S_v > \epsilon\}} e^{-\theta Y_{t-v}^{(\Delta S_v)}} \Big| S \right] = 1 - \prod_{v \leq t} \mathbf{1}_{\{\Delta S_v > \epsilon\}} \mathbf{E}_{\Delta S_v}^* \left[e^{-\theta Y_{t-v}^{(\Delta S_v)}} \Big| S \right]$$

debido a que hay un número finito de saltos independientes más grandes que ϵ. Si tomamos límite cuando ϵ decrece a 0 en la expresión anterior y aplicamos el teorema de convergencia monótona, obtenemos (3.23).

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x^*[e^{-\theta Y_t^*}] &= \mathbf{E}_x[e^{-\theta Y_t}] \mathbb{E} \left[\prod_{v \leq t} \mathbf{E}_{\Delta S_v} \left[e^{-\theta Y_{t-v}} \right] \right] \\
&= e^{-x u_t(\theta)} \mathbb{E} \left[\prod_{v \leq t} e^{-\Delta S_v u_{t-v}(\theta)} \right] \\
&= e^{-x u_t(\theta)} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \sum_{v \leq t} \Delta S_v u_{t-v}(\theta) \right\} \right] \\
&= e^{-x u_t(\theta)} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_{[0,t]} \int_{(0,\infty)} x u_{t-s}(\theta) N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) \right\} \right] \\
&= \exp \left\{ -x u_t(\theta) - \int_{[0,t]} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-x u_{t-s}(\theta)}) \mathrm{d}s \Lambda(\mathrm{d}x) \right\} \\
&= \exp \left\{ -x u_t(\theta) - \int_0^t \phi(u_{t-s}(\theta)) \mathrm{d}s \right\},
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se obtiene del Teorema 2 (ii) del Capítulo 1. De esta forma hemos construido el CSBP con inmigración, y a su vez, probamos su existencia.

A continuación definimos formalmente a los procesos de ramificación continua con inmigración, a partir de los desarrollos previos de esta sección.

Definición 12 (CSBP con inmigración). *Un proceso de Markov $Y^* = (Y_t^* : t \geq 0)$ con probabilidades $(\mathbf{P}_x^* : x \geq 0)$ es un CSBP con mecanismo de ramificación ψ y mecanismo de inmigración ϕ si toma valores en $[0, \infty]$ y tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda y para todo $x, t > 0$ y $\theta \geq 0$*

$$\mathbf{E}_x^*[e^{-\theta Y_t^*}] = \exp \left\{ -x u_t(\theta) - \int_0^t \phi(u_{t-s}(\theta)) \mathrm{d}s \right\}, \tag{3.24}$$

donde $u_t(\theta)$ es la única solución a (3.6) y ϕ es el exponente de Laplace de un subordinador.

Observemos que, para $\theta \geq 0$,

$$\phi(\theta) = \delta\theta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x}) \Lambda(\mathrm{d}x),$$

donde Λ es una medida concentrada en $(0, \infty)$ que satisface

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Lambda(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Capítulo 4

Estabilidad de procesos de Markov

En este capítulo vamos a estudiar la noción de estabilidad de procesos de Markov continuos a través de desigualdades de Foster-Lyapunov. Los resultados estudiados se basan fundamentalmente en la teoría desarrollada por Meyn y Tweedie [34]-[36], la cual fue adaptada a nuestros propósitos.

4.1. Preliminares

A lo largo de este capítulo vamos a suponer que $X = (X_t : t \geq 0)$ es un proceso de Markov fuerte continuo por la derecha con límites por la izquierda (càdlàg), homogéneo en el tiempo con espacio de estados $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Vamos a denotar por $\mathbb{P}_x$ a la ley del proceso X que inicia en x y por $(P_t : t \geq 0)$ a la función o kernel de transición de X. El operador P_t actúa sobre funciones f, medibles y acotadas, y sobre medidas σ-finitas μ sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$P_t f(x) = \int P_t(x, \mathrm{d}y) f(y), \qquad \mu P_t(A) = \int \mu(\mathrm{d}x) P_t(x, A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

De esta manera, la propiedad de Markov se puede escribir como

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = P_t f(X_s), \qquad s < t < \infty, \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{F}_s = \sigma\{(X_u : 0 \leq u \leq s)\}$. Vamos a suponer además que X es un proceso de Feller, en otras palabras, que su semigrupo es un operador que envía elementos del espacio de funciones continuas que se anulan en infinito a sí mismo, que cumple la propiedad de contracción y que es continuo sobre un espacio de Banach, ver la Definición 33 del Apéndice B para más detalle.

Además, definimos al primer tiempo de entrada al conjunto A y al tiempo de ocupación del proceso en A por

$$\tau_A = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t \in A\}, \qquad \eta_A = \int_0^\infty \mathbb{I}_{\{X_t \in A\}} \mathrm{d}t,$$

que serán de suma importancia en este capítulo.

4.1.1. Recurrencia e irreducibilidad

A continuación vamos a definir algunas propiedades trayectoriales de los procesos de Markov las cuales están estrechamente relacionadas con el concepto de estabilidad.

Definición 13 (Irreducibilidad). *Sea φ una medida σ-finita. Diremos que el proceso de Markov X es φ-irreducible si*

$$\varphi\{A\} > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x[\eta_A] > 0, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La medida φ es llamada medida irreducible para el proceso X.

Veamos un ejemplo de una cadena de Markov irreducible. Consideremos el modelo de la caminata aleatoria en $[0, \infty)$, la cual se construye a partir de la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) $\xi_1, \xi_2, \ldots$, de la siguiente forma

$$X_t = \sum_{j=1}^{t} \xi_j, \qquad X_0 = 0, t = 1, 2, \ldots.$$

Sea $P = \{P(x, A), x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ la función de transición de X y sea P_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ definida por $P_0 = I = \mathbb{I}_A(x)$ y $P_k = PP_{k-1}$. Consideremos una medida φ sobre $[0, \infty)$ tal que $\varphi((0, \infty)) = 0$ y $\varphi(\{0\}) = 1$ y supongamos que $\mathbb{P}(\xi_1 < 0) > 0$. Esto significa que existen constantes $\delta, \epsilon > 0$ tales que $\mathbb{P}(\xi_1 < -\epsilon) > \delta$. Por tanto, para toda $n \geq 1$, si $\frac{x}{\epsilon} < n$, se tiene

$$P_n(x, \{0\}) \geq \delta^n > 0. \tag{4.2}$$

Luego notemos que el único conjunto con A tal que $\varphi(A) > 0$ es $\{0\}$. Entonces, gracias a (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\eta_{\{0\}}] &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t \in \{0\}\}} \mathrm{d}t\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{X_t \in \{0\}\}}\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{P}_x(X_t \in \{0\}) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n \in \{0\}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, \{0\}) > 0, \end{aligned}$$

lo que implica que X es φ-irreducible.

Definición 14 (Harris recurrente). *Diremos que el proceso de Markov X es Harris recurrente si para alguna medida σ-finita φ,*

$$\varphi\{A\} > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x[\eta_A = \infty] = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Observación 5. *Equivalentemente, el proceso es Harris recurrente si para alguna medida σ-finita φ,*

$$\varphi\{A\} > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x[\tau_A < \infty] = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Este criterio suele ser más útil que la definición 14, una prueba del mismo la podemos encontrar en el Teorema 2.4 de Tweedie [45].

Es claro que un proceso Harris recurrente es φ-irreducible, pues $\mathbb{P}_x[\eta_A = \infty] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_x[\eta_A] > 0$.

Definición 15 (Medida invariante). *Decimos que una medida σ-finita π sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es invariante si tiene la siguiente propiedad*

$$\pi(A) = \pi P_t(A) = \int \pi(\mathrm{d}x) P_t(x, A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \geq 0.$$

El Teorema 29 delApéndice B muestra que si el proceso X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π. Si además π es finita, puede ser normalizada para convertirla en una medida de probabilidad; lo cual nos conduce a definir a los procesos *Harris recurrentes positivos*.

Definición 16. *Diremos que el proceso de Markov X es Harris recurrente positivo si es Harris recurrente y su única medida invariante π es finita.*

Los conceptos presentados en esta sección son indispensables en el estudio de la ergodicidad de los procesos de Markov, como veremos más adelante.

4.1.2. Explosividad

Vamos a denotar $O = \{O_n\}_{n\geq 0}$ una familia fija de conjuntos abiertos precompactos tales que $O_n \uparrow \mathbb{R}$ cuando n tiende a ∞. Vamos a entender por *precompacto* a que la cerradura de O_n es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$ para cada n. Denotemos $T^m = \tau_{O_m^C}$ el tiempo de llegada a O_m^C y sea ζ el *tiempo de vida* del proceso, i.e

$$\zeta = \lim_{m\to\infty} T^m.$$

Entonces podemos definir la propiedad de no explosividad.

Definición 17. *Decimos que el proceso X no explota si $\mathbb{P}_x(\zeta = \infty) = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Llamaremos a ζ el tiempo de explosión.*

Con el objetivo de desarrollar criterios para la no explosividad y recurrencia, necesitamos considerar las truncaciones del proceso X. En otras palabras, para $m \geq 0$, sea Δ_m un estado fijo en O_m^C y definamos a X^m por

$$X_t^m = \begin{cases} X_t & t < T^m \\ \\ \Delta_m & t \geq T^m \end{cases}$$

Es claro que este proceso es càdlàg y no explosivo. Entonces, podemos considerar al proceso X^m como un proceso que no explota con la propiedad de que $X_t^m = X_t$, para $t < T^m$.

4.1.3. Cadena esqueleto y conjuntos petite

En nuestro análisis del proceso X, es útil considerar una muestra del mismo, la cual será una cadena de Markov a tiempo discreto. Vamos a considerar el proceso de Markov X en los tiempos $\{t_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$, formándose así una cadena de Markov a tiempo discreto $\{X_{t_k}\}_{k\geq 0}$, cuyas propiedades de recurrencia están íntimamente relacionadas al proceso original.

El ejemplo más simple es el Δ-*esqueleto*, que corresponde a considerar el proceso en los tiempos $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$. El kernel de transición de esta cadena es $P_\Delta(x, A)$.

Supongamos ahora que ρ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}_+$, y definamos la siguiente función de transición más general K_ρ como

$$K_\rho = \int_{\mathbb{R}_+} P_t \rho(\mathrm{d}t). \tag{4.3}$$

Entonces, si ρ es la distribución de los tiempos $\{t_k\}_{k\geq 0}$, tenemos que K_ρ es la función de transición para la cadena $\{X_{t_k}\}_{k\geq 0}$. Para una función de transición arbitraria K, llamaremos a la cadena de Markov asociada K-cadena.

Queremos definir ahora la noción de conjuntos petite, que también será fundamental en lo adelante.

Definición 18. *Un conjunto no vacío $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es petite si existe una medida de probabilidad ρ sobre $(0, \infty)$ y una medida no trivial ν_ρ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que para toda $x \in C$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se cumple*

$$K_\rho(x, B) \geq \nu_\rho(B). \tag{4.4}$$

Cuando se cumple (4.4) decimos que C es ν_ρ-petite.

La definición anterior establece que los conjuntos petite son aquellos conjunto C para los cuales la función de transición más general K_ρ de la cadena está acotada por debajo por una medida no trivial, siempre que partimos del conjunto C. En general esto nos dice que las transiciones de elementos del conjunto petite a otros conjuntos son positivas. En este capítulo vamos a establecer una caracterización de Harris recurrencia en función de la noción de conjuntos petite. Además, vamos a mostrar que cuando se cumple la propiedad de que los conjuntos compactos sean petite para alguna cadena esqueleto, podemos probar la ergodicidad del proceso de Markov X.

4.2. Generador extendido

El objetivo fundamental de este capítulo es dar condiciones sobre la estabilidad del proceso X en función del generador extendido del proceso, que definimos a continuación.

Definición 19 (Generador extendido)**.** *Sea $D(\mathcal{A})$ el conjunto de las funciones $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ para las cuales existe una función medible $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto U(X_t)$ es $\mathbb{P}_x$ integrable para toda $x \in \mathbb{R}$ y el proceso $M^V = (M_t^V : t \geq 0)$, donde*

$$M_t^V = V(X_t, t) - V(X_0, 0) - \int_0^t U(X_s, s)\mathrm{d}s, \tag{4.5}$$

es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Escribimos $\mathcal{A}V = U$ y llamamos a $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ el generador extendido del proceso X.

De la definición anterior tenemos que $\mathbb{E}[M_t^V] = \mathbb{E}[M_0^V] = 0$ por la propiedad de martingala, lo cual implica que

$$\mathbb{E}_x[V(X_t, t)] = V(x, 0) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^t U(X_s, s)\mathrm{d}s\right]. \tag{4.6}$$

Además, el hecho de que M^V sea martingala también garantiza que

$$\int_0^t \mathbb{E}_x[|U(X_s, s)|]\mathrm{d}s < \infty. \tag{4.7}$$

Vamos a denotar por $\mathcal{A}_m$ al generador extendido de X^m. En general, para una función arbitraria f, no es fácil mostrar que f está en el dominio de $\mathcal{A}$.

Definición 20 (Norm-like)**.** *Una función $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es norm-like si $V(x) \to \infty$ cuando x tiende a ∞.*

La definición anterior significa que si V es norm-like, entonces los conjuntos $\{x : V(x) \leq b\}$ son precompactos para cada $b > 0$. Vamos a denotar por $|\cdot|$ a la norma euclideana en $\mathbb{R}$, entonces $x \mapsto |x|$ y las funciones monótonas y acotadas de $|\cdot|$ son ejemplos de funciones norm-like.

A continuación enunciamos la fórmula de Dynkin, la cual es una consecuencia del conocido teorema de paro opcional.

Teorema 14 (Fórmula de Dynkin). *Sea τ un tiempo de paro acotado para el proceso X càdlàg, y supongamos que $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ está en el dominio del generador extendido $\mathcal{A}_m$. Sea $\tau^m = \min\{\tau, T^m\} = \tau \wedge T^m$. Entonces*

$$\mathbb{E}_x[V(X^m_{\tau^m}, \tau^m)] = V(x, 0) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m} \mathcal{A}_m V(X_t, t)\mathrm{d}t\right], \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Demostración: Por hipótesis, dado que V está en el dominio del generador extendido $\mathcal{A}_m$, se tiene que $M^V(m) = (M^V_t(m) : t \geq 0)$ es una martingala, donde $M^V_t(m)$ está dado por

$$M^V_t(m) = V(X_t, t) - V(X_0, 0) - \int_0^t \mathcal{A}_m V(X_s, s)\mathrm{d}s.$$

Además $\tau^m \geq 0$ es tiempo de paro acotado debido a que τ también es tiempo de paro acotado por hipótesis. Por tanto, aplicando el teorema de paro opcional, tenemos que $\mathbb{E}_x[M^V_{\tau^m}(m)] = \mathbb{E}_x[M^V_0(m)] = 0$. Con lo que queda probado (4.8). □

Una consecuencia de la fórmula de Dynkin es el siguiente teorema.

Teorema 15 (Teorema de comparación). *Supongamos que X es no explosivo y que V, g_+ y g_- son funciones medibles y positivas. Si para cada $m \geq 0$, $\mathcal{A}_m V \leq g_+ - g_-$ sobre O_m entonces para cada $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}_+$,*

$$P_t V(x) + \int_0^t P_s g_-(x)\mathrm{d}s \leq V(x) + \int_0^t P_s g_+(x)\mathrm{d}s. \tag{4.9}$$

Demostración: Sean $t \in \mathbb{R}_+$ fijo y $\tau^m = t \wedge T^m$. Aplicando la fórmula de Dynkin tenemos que para $x \in O_m$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[V(X^m_{\tau^m})] &= V(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m} \mathcal{A}_m V(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leq V(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m} (g_+(X_s) - (g_- \wedge m)(X_s))\mathrm{d}s\right], \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $(g_- \wedge m)(x)$ es el mínimo entre $g_-(x)$ y la constante m. Tomamos el mínimo con el objetivo de no tener elementos negativos infinitos en la desigualdad. Usando (4.10) y que $\tau^m \leq t$, obtenemos que para $x \in O_m$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[V(X^m_{\tau^m})] + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m} (g_- \wedge m)(X_s)\mathrm{d}s\right] &\leq V(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m} g_+(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leq V(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^t g_+(X_s)\mathrm{d}s\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora, gracias a la no explosividad, $\tau^m \uparrow t$ cuando m tiende a ∞. Luego, podemos usar el lema de Fatou para obtener

$$P_t V(x) = \mathbb{E}_x\left[\liminf_{m\to\infty} V(X^m_{\tau^m})\right] \leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}_x[V(X^m_{\tau^m})].$$

La desigualdad anterior, la desigualdad (4.11) y el teorema de convergencia monótona junto con el hecho de que g_+ y g_- son positivas, implican que

$$\begin{aligned} P_tV(x) + \int_0^t P_s g_-(x)\mathrm{d}s &= P_tV(x) + \int_0^t \mathbb{E}_x[\lim_{m\to\infty}(g_- \wedge m)(X_s)]\mathrm{d}s \\ &= P_tV(x) + \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m}(g_- \wedge m)(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &= P_tV(x) + \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m}(g_- \wedge m)(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[V(X^m_{\tau^m})\right] + \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^m}(g_- \wedge m)(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leq V(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^t g_+(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &= V(x) + \int_0^t \mathbb{E}_x[g_+(X_s)]\mathrm{d}s \\ &= V(x) + \int_0^t P_s g_+(x)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

con lo que queda probado el resultado. □

Vamos a enunciar a continuación una condición que llamaremos condición de Foster-Lyapunov con deriva (FLD), la cual usaremos para mostrar un criterio para que la cadena sea Harris recurrente positiva, independientemente de la estructura de V.

(FLD) Existen constantes $c, d > 0$, una función $f \geq 1$, un conjunto medible C y una función $V \geq 0$, tales que

$$\mathcal{A}_m V(x) \leq -cf(x) + d\mathbb{I}_C(x), \qquad \text{para toda } x \in O_m, m \geq 0.$$

El siguiente lema muestra que las cotas sobre los tiempos de entrada de conjuntos petite será fundamental en la caracterización de Harris recurrencia positiva. Este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 30 y Teorema 31 del Apéndice B, por lo que podemos verlo como corolario de los mismos. A partir de este lema, vamos a encontrar una forma de desarrollar estas cotas a través del criterio **FLD** de Foster-Lyapunov.

Lema 13. *Sea $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un conjunto petite y cerrado, supongamos que $\mathbb{P}_x(\tau_C < \infty) = 1$ y que para alguna $\delta > 0$*

$$\sup_{x\in C} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X_t)\mathrm{d}t\right] < \infty, \tag{4.12}$$

donde $\tau_C(\delta) = \delta + \theta_\delta \tau_C$ y $f \geq 1$. Entonces X es Harris recurrente positiva y $\pi(f) < \infty$.

Observación 6. *Aquí θ_δ es un operador de desplazamiento, i.e para $s, t \geq 0$ cumple $\theta_t\theta_s = \theta_{t+s}$ y $X_t\theta_s = X_{t+s}$, ver página 8 de Sharpe [43] para más detalle. Además, podemos interpretar a $\tau_C(\delta)$ como el primer tiempo de llegada a C después de δ.*

Probemos ahora un último lema, que nos permitirá encontrar un criterio sobre Harris recurrencia basado en la condición **FLD**.

Lema 14. *Supongamos que X es no explosivo y que se cumple la condición* **FLD**. *Entonces para toda $x \in \mathbb{R}$ y $\delta \geq 0$,*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X_t) \mathrm{d}t \right] \leq c^{-1}(V(x) + d\delta), \tag{4.13}$$

donde V, f, c y d son elementos de la condición **FLD**.

Demostración: Probemos primero para el caso $\delta = 0$. Usando la fórmula de Dynkin y la condición **FLD** tenemos

$$0 \leq \mathbb{E}_x[V(X^m_{\tau_C^m})] \leq V(x) - \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^m} cf(X_t) \mathrm{d}t \right], \qquad \text{para } x \in O_m \cap C^c,$$

lo que implica que

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^m} cf(X_t) \mathrm{d}t \right] \leq V(x), \qquad \text{para } x \in O_m \cap C^c.$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada, la propiedad de no explosividad y que $\mathbb{P}_x(\tau_C = 0) = 1$ para $x \in C$, tenemos

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C} cf(X_t) \mathrm{d}t \right] = \lim_{m \to \infty} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^m} cf(X_t) \mathrm{d}t \right] \leq V(x), \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

De esta forma, se cumple (4.13) para $\delta = 0$.

Supongamos ahora que $\delta > 0$. Teniendo en cuenta la propiedad de Markov y (4.14), obtenemos

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} cf(X_t) \mathrm{d}t \right] = \int P_\delta(x, \mathrm{d}y) \mathbb{E}_y \left[\int_0^{\tau_C} cf(X_t) \mathrm{d}t \right] \leq P_\delta V(x).$$

Ahora, si tomamos $g_- = cf$ y $g_+ = d\mathbf{1}_C$, usando el teorema de comparación nos queda

$$P_\delta V(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\delta cf(X_t) \mathrm{d}t \right] \leq V(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\delta d\mathbf{1}_{\{X_t \in C\}} \mathrm{d}t \right].$$

Si combinamos las dos desigualdades anteriores concluimos que

$$\begin{aligned}
c\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X_t) \mathrm{d}t \right] &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} cf(X_t) \mathrm{d}t \right] \\
&\leq P_\delta V(x) \\
&\leq P_\delta V(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\delta cf(X_t) \mathrm{d}t \right] \\
&\leq V(x) + d\mathbb{E}_x \left[\int_0^\delta \mathbf{1}_{\{X_t \in C\}} \mathrm{d}t \right] \\
&\leq V(x) + d\mathbb{E}_x \left[\int_0^\delta \mathrm{d}t \right] \\
&\leq V(x) + d\delta,
\end{aligned}$$

con lo que se completa la prueba para $\delta > 0$. $\square$

Estamos en condiciones de probar una caracterización de Harris recurrente positiva en función de la propiedades de no explosividad, el concepto de conjunto petite y la condición **FLD**.

Teorema 16. *Supongamos que el proceso de Markov X no explota y que se cumple la condición FLD para X, tomando a C como un conjunto cerrado petite, y a $V(x)$ acotada sobre C. Entonces el proceso es Harris recurrente positivo y la medida invariante $\pi(f)$ es finita.*

Demostración: Gracias a la no explosividad y al Lema 14 vemos que $\tau_C < \infty$ y que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X_t) \mathrm{d}t \right] \leq \sup_{x \in C} c^{-1}(V(x) + d\delta) < \infty,$$

pues V está acotada sobre C por hipótesis. Luego se cumplen las hipótesis del Lema 4.12 y por tanto, el proceso X es Harris recurrente positivo y $\pi(f) < \infty$. □

4.3. Criterios de ergodicidad

En esta sección vamos a estudiar criterios para la ergodicidad del proceso de Markov X. Estamos interesados en la ergodicidad bajo la norma de la variación total, que vamos a denotar por $\|\cdot\|_{TV}$, definida de la siguiente manera

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \{|\mu(A)|\}.$$

Ahora, vamos a definir formalmente el concepto de ergodicidad.

Definición 21. *El proceso de Markov X es ergódico si existe una medida invariante π tal que*

$$\lim_{t \to \infty} \|P_t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Teorema 17. *Supongamos que el proceso X es Harris recurrente positivo con medida de probabilidad invariante π. Entonces X es ergódico si y solo si alguna cadena esqueleto es irreducible.*

Demostración: Probemos primero la necesidad. Por hipótesis X es Harris recurrente positivo y por consecuencia irreducible. Por lo tanto, alguna cadena esqueleto $X^{\Delta} = \{X_{n\Delta}\}_{n \geq 1}$ es irreducible.

Probemos ahora la suficiencia. Supongamos que la cadena esqueleto dada por $X^{\Delta} = \{X_{n\Delta}\}_{n \geq 1}$ con kernel P_{Δ} es irreducible. Esto significa que π es invariante para X^{Δ}, y por tanto la cadena esqueleto es positiva recurrente. Debido a que la cadena esqueleto es irreducible y recurrente podemos usar el Teorema 32 del Apéndice B y encontramos que existe un conjunto H absorbente, i.e iniciando en x

$$P_{\Delta}(X_{n\Delta} \in H, \text{ para toda } n \geq 1) = 1, \quad \text{para toda } x \in H;$$

tal que X^{Δ} restringida a H es Harris recurrente.
Por otra parte, si π es una medida invariante, entonces el Teorema 33 del Apéndice B dice que la función $n_x(t) = \|P_t(x, \cdot) - \pi\|_{TV}$ es decreciente sobre $t \geq 0$. Gracias a esto, para probar el resultado basta mostrar que alguna subsucesión de $n_x(t)$ converge a cero. Esta convergencia se tiene para $x \in H$ para la cadena esqueleto X^{Δ} Harris recurrente sobre H, siempre que dicha cadena sea aperiódica. Esto lo muestra el Lema 34 del Apéndice B, con lo que se concluye la prueba. □

El Teorema 17 asegura que si el proceso X es Harris recurrente positivo, entonces la ergodicidad y la propiedad de alguna cadena esqueleto de X sea irreducible son equivalentes.

Lema 15. *Supongamos que existe una función norm-like V que cumple FLD y que los conjuntos compactos son petite para alguna cadena esqueleto, entonces esta cadena esqueleto es Harris recurrente.*

Una prueba detallada de este lema los encontramos en el teorema 5.1 de la página 559 de Meyn y Tweedie [34]. Con los resultados anteriores, estamos en condiciones de probar el teorema fundamental de este capítulo.

Teorema 18. *Sea X un proceso de Markov càdlàg y no explosivo. Supongamos que todos los conjuntos compactos son petite para alguna cadena esqueleto y que se cumple la condición FLD para algún conjunto compacto C con V acotada sobre C, entonces X es ergódico.*

Demostración: Del Teorema 16 vemos que X es Harris recurrente positivo, y del Lema 15 sabemos que alguna cadena esqueleto es Harris recurrente, pues por hipótesis todos los conjuntos compactos son petite para alguna cadena esqueleto. Entonces la cadena esqueleto es irreducible, pues la propiedad de Harris recurrencia implica irreducibilidad. Luego, usando el Teorema 17, como el proceso es Harris recurrente positivo y alguna cadena esqueleto es irreducible, se obtiene que X es ergódico. □

4.3.1. Velocidad de convergencia

Queremos ahora realizar un análisis para la ergodicidad exponencial. Para ello, necesitamos definir el concepto de *f-norma* $\|\mu\|_f$. Para cualquier función $f \geq 1$ medible positiva y cualquier medida con signo μ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se define

$$\|\mu\|_f = \sup_{|g| \leq f} \left| \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu \right|. \tag{4.16}$$

Supongamos ahora que el proceso de Markov X es Harris recurrente positivo con medida invariante π y vamos a definir la ergodicidad exponencial.

Definición 22. *Para una función $f \geq 1$, decimos que X es f-exponencialmente ergódica si existe una constante $\beta < 1$ y una función finita $B(x)$ tal que*

$$\|P_t(x,\cdot) - \pi\|_f \leq B(x)\beta^t, \qquad \textit{para } t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, recordemos que $\|\cdot\|_{TV}$ denota la norma de la variación total para medidas sobre $\mathbb{R}_+$, definida por

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \{|\mu(A)|\}.$$

Notemos que la norma de la variación total es un caso particular de la norma $\|\cdot\|_f$ para funciones $f \geq 1$ sobre $\mathbb{R}$. Además, es claro que $\|\mu\|_{TV} \leq \|\mu\|_f$ para $f \geq 1$. Esto significa que si probamos la ergodicidad o ergodicidad exponencial para la norma $\|\mu\|_f$ también se va a cumplir para la norma $\|\mu\|_{TV}$.

Enunciemos la segunda condición de Foster-Lyapunov que denotaremos por FLD′, sobre la cual trabajaremos para estudiar la velocidad de convergencia.

(**FLD′**) Existe una función V norm-like, tal que para constantes $c > 0$, $d < \infty$, se cumple

$$\mathcal{A}_m V(x) \leq -cV(x) + d, \qquad \text{para toda } x \in O_m, m \geq 0.$$

Antes de pasar a los resultados de esta sección, necesitamos introducir el concepto de aperiodicidad fuerte para una cadena de Markov, el cual fue adaptado de la definición 2.2 de Athreya y Ney [2].

Definición 23 (Aperiodicidad Fuerte). *Una cadena de Markov* $Y = \{Y_n\}_{n\geq 1}$ *es fuertemente aperíodica si existe un conjunto* $C \subset \mathbb{R}$*, una medida de probabilidad* ν *que cumple* $\nu\{C\} = 1$*, y una constante* $\delta > 0$ *tal que*

(i) $\mathbb{P}_x(Y_n \in C$ *para alguna* $n \geq 1) > 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$ *y*

(ii) $\mathbb{P}_x(Y_1 \in A) \geq \delta\nu\{A\}, \qquad$ *para* $x \in C, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

A continuación enunciamos un lema que usaremos para probar la ergodicidad exponencial, la prueba del mismo se pueden encontrar en el teorema 6.3, página 564 de Meyn y Tweedie [34].

Lema 16. *Sea* Y *una cadena de Markov discreta fuertemente aperíodica, donde todos los conjuntos compactos son petite. Sea* $P = \{P(x, A), x \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ *la función de transición de* Y *y sea* P_k*,* $k \in \mathbb{Z}_+$ *definida por* $P_0 = I = \mathbb{I}_A(x)$ *y* $P_k = PP_{k-1}$*. Supongamos que* $\{\mathcal{F}_k\}_{k\geq 1}$ *es la filtración canónica de* Y *y que existe una función* $V \geq 0$ *norm-like tal que*

$$\mathbb{E}_x[V(Y_{k+1})|\mathcal{F}_k] \leq \lambda V(Y_k) + L, \qquad \mathbb{P}_{X_0} - c.s.$$

para constantes $\lambda < 1$ *y* $L < \infty$*. Entonces, existen constantes* $B < \infty$ *y* $\beta < 1$ *tales que*

$$\|P_n(x, \cdot) - \pi\|_f \leq Bf(x)\beta^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

donde $f(x) = V(x) + 1$.

Estamos en condiciones de probar el siguiente resultado relacionado con la ergodicidad exponencial del proceso X.

Teorema 19. *Supongamos que* X *es un proceso de Markov Harris recurrente positivo càdlàg que no explota, y que todos los conjuntos compactos son petite para alguna cadena esqueleto. Supongamos además que FLD' se cumple, entonces existen* $\beta < 1$ *y* $B < \infty$ *tal que*

$$\|P_t(x, \cdot) - \pi\|_f \leq Bf(x)\beta^t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R},$$

con $f = V + 1$.

Demostración: Comencemos aplicando el generador extendido $\mathcal{A}_m$ a la función $g(x,t) = V(x)\exp(ct)$. Teniendo en cuenta la condición de integrabilidad (4.7) y que el generador extendido es un generalización del generador infinitesimal , podemos usar la regla del producto para derivar; y usando la condición FLD', obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m g(x,t) &= \exp(ct)\mathcal{A}_m V(x) + c\exp(ct)V(x) \\ &= \exp(ct)[\mathcal{A}_m V(x) + cV(x)] \\ &\leq d\exp(ct). \end{aligned}$$

Tomemos ahora $t^m = t \wedge T^m$. Debido a que el proceso no explota, $t^m \to t$ cuando m tiende a ∞, por tanto, usando el lema de Fatou, tenemos

$$\exp(ct)P_tV(x) = \mathbb{E}_x[g(X_t, t)] \leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}_x[g(X^m_{t^m}, t^m)].$$

Por otra parte, usando la fórmula de Dynkin para el tiempo de paro t^m, obtenemos

$$\mathbb{E}_x[g(X^m_{t^m}, t^m)] = V(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t^m} \mathcal{A}_m g(X_t, t)\mathrm{d}t\right].$$

Teniendo en cuenta que $t^m \leq t$, podemos escribir para todo $t \in \mathbb{R}_+$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\exp(ct)P_t V(x) = \mathbb{E}_x[g(X_t, t)] &\leq V(x) + \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t^m} \mathcal{A}_m g(X_s, s)\mathrm{d}s\right] \\
&\leq V(x) + d\int_0^t \exp(cs)\mathrm{d}s \\
&\leq V(x) + \frac{d}{c}\exp(ct).
\end{aligned}$$

Esto que implica que

$$P_t V(x) \leq \exp(-ct)V(x) + \frac{d}{c}. \tag{4.17}$$

Recordando que para una medida de probabilidad ρ sobre $\mathbb{R}_+$, con $\rho(\{0\}) < 1$, definimos a $K_\rho = \int P_t \rho(\mathrm{d}t)$, e integrando sobre la medida ρ en la expresión (4.17) encontramos que

$$\begin{aligned}
K_\rho V(x) = \int P_t V(x)\rho(\mathrm{d}t) &\leq \int \exp(-ct)V(x)\rho(\mathrm{d}t) + \int \frac{d}{c}\rho(\mathrm{d}t) \\
&= \left(\int_0^\infty \exp(-ct)\rho(\mathrm{d}t)\right) V(x) + \frac{d}{c}.
\end{aligned}$$

Más específicamente, tenemos que

$$K_\rho V \leq \lambda V + \frac{d}{c}, \tag{4.18}$$

donde $\lambda = \int_0^\infty \exp(-ct)\rho(\mathrm{d}t) < 1$.

Por otro lado, bajo las hipótesis enunciadas, tenemos que para para algún Δ, la cadena Δ-esqueleto con ley de transición P_Δ es Harris recurrente positiva e irreducible y todos los conjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ son P_Δ-petite y es fuertemente aperíodica. Haciendo $K_\rho = P_\Delta$ en (4.18) obtenemos que $P_\Delta V \leq \lambda V + \frac{d}{c}$. Entonces, usando la propiedad de Markov reescrita en (4.1), obtenemos que

$$\mathbb{E}_x[V(X_{\Delta k+1})|\mathcal{F}_{\Delta k}] = PV(X_{\Delta k}) \leq \lambda V(X_{\Delta k}) + \frac{d}{c}.$$

Por lo tanto, podemos aplicar directamente el Lema 16, y obtenemos que existen constantes $\beta < 1$ y $B < \infty$ tales que

$$\|P_{\Delta n}(x, \cdot) - \pi\|_f \leq Bf(x)\beta^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

donde $f(x) = V(x) + 1$.

Para un $t \in \mathbb{R}_+$ arbitrario, podemos escribir $t = n\Delta + s$, con $s \in [0, \Delta)$, para estimar

$$\begin{aligned}
\|P_t(x,\cdot) - \pi\|_f &= \sup_{|g|\le f} \left| P_{\Delta n+s} g - \int g \mathrm{d}\pi \right| \\
&\le \int P_s(x, \mathrm{d}y) \|P_{n\Delta}(y,\cdot) - \pi\|_f \\
&\le B\beta^n P_s f(x) \\
&\le B\beta^n (V(x) + \frac{d}{c} + 1).
\end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de (4.18). Para ver esto, tomemos $\rho = \delta_s$, la medida delta de Dirac de s. Entonces $K_{\delta_s} V = \int P_t V \delta_s(\mathrm{d}t) = P_s V$, que implica que

$$P_s f(x) = P_s(V(x) + 1) = P_s V(x) + 1 \le \lambda V(x) + \frac{d}{c} + 1 \le V(x) + \frac{d}{c} + 1,$$

dado que $\lambda < 1$. Por tanto, queda probado el resultado. $\square$

Capítulo 5

Momentos y ergodicidad del proceso JCIR

5.1. Preámbulo

En esta sección vamos a estudiar el proceso de difusión CIR con saltos (JCIR), el cuál es una extensión del proceso de Cox-Ingersoll-Ross estudiado en Cox, Ingersoll Jr y Ross [10]. Vamos a denotar por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad canónico, sobre el cual se trabajará en todo este capítulo, y denotaremos por $\mathbb{E}$ la esperanza asociada a $\mathbb{P}$. Se define la difusión JCIR como sigue:

Definición 24 (Proceso JCIR). *El proceso JCIR $X = (X_t : t \geq 0)$ se define como la única solución fuerte a la ecuación diferencial estocástica (SDE)*

$$\mathrm{d}X_t = (a - bX_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}S_t, \qquad t \geq 0, \qquad X_0 \geq 0 \qquad c.s, \tag{5.1}$$

donde $a \geq 0$, $b > 0$, $\sigma > 0$ son constantes, $(B_t : t \geq 0)$ es un movimiento Browniano estándar unidimensional y $(S_t : t \geq 0)$ es un proceso de Lévy no decreciente de saltos puros con medida de Lévy Π concentrada en $(0, \infty)$ que cumple

$$\int_0^\infty (1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty, \tag{5.2}$$

donde vamos a asumir que X_0, $(B_t : t \geq 0)$ y $(S_t : t \geq 0)$ son independientes. Vamos a denotar al JCIR con estos parámetro de la forma (X, a, b, σ, B, S).

Observación 7. *Una solución fuerte X de la SDE (5.1) es un proceso estocástico $(X_t : t \geq 0)$ continuo por la derecha con límites por la izquierda, que satisface (5.1) y que es adaptado a la filtración generada por B y S con las hipótesis usuales, i.e completa (contiene a todos los conjuntos de medida cero) y continua por la derecha.*

En el Capítulo 2 estudiamos a los subordinadores, que son procesos de Lévy no decrecientes. Dado que Π está concentrada en $(0, \infty)$, no tiene deriva ni parte Browniana, entonces el proceso $S = (S_t : t \geq 0)$ es un subordinador. Ya estudiamos la forma de la transformada de Laplace de un subordinador, que está dada por

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda S_t}] = \exp\left\{t\int_0^\infty (e^{-\lambda z} - 1)\Pi(\mathrm{d}z)\right\}, \qquad t, \lambda \geq 0,$$

donde Π satisface (5.2). Además, sabemos que el subordinador S siempre se puede escribir como

$$S_t = \int_0^t \int_0^\infty zN(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \qquad t \geq 0, \tag{5.3}$$

donde $N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $\mathbb{R}_+$, donde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Esto significa que (5.1) se puede reescribir en su forma integral como

$$X_t = X_0 + \int_0^t (a - bX_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\sqrt{X_s}\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_0^\infty zN(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \quad \text{para } t \geq 0. \quad (5.4)$$

Ahora veamos que la difusión JCIR satisface la propiedad de ramificación. Sean (X, a, b, σ, B, S) y $(\tilde{X}, a, b, \sigma, \tilde{B}, \tilde{S})$ procesos JCIR y definamos al proceso $W = (W_t : t \geq 0)$ de la forma siguiente $W_t = X_t + \tilde{X}_t$. Entonces, usando la forma integral (5.4) tenemos que

$$\begin{aligned} W_t = X_t + \tilde{X}_t &= (X_0 + \tilde{X}_0) + \int_0^t (2a - b(X_s + \tilde{X}_s))\mathrm{d}s \\ &+ \sigma \int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}B_s + \sqrt{\tilde{X}_s}\mathrm{d}\tilde{B}_s + (S_t + \tilde{S}_t) \\ &= (X_0 + \tilde{X}_0) + \int_0^t (2a - b(X_s + \tilde{X}_s))\mathrm{d}s \\ &+ \sigma \int_0^t \left(\frac{\sqrt{X_s}}{\sqrt{W_s}}\mathrm{d}B_s + \frac{\sqrt{\tilde{X}_s}}{\sqrt{W_s}}\mathrm{d}\tilde{B}_s \right) \left(\sqrt{W_s}\right) \mathbf{1}_{\{W_t \neq 0\}} + (S_t + \tilde{S}_t). \end{aligned}$$

Notemos que el proceso

$$\beta_t = \int_0^t \left(\frac{\sqrt{X_s}}{\sqrt{W_s}}\mathrm{d}B_s + \frac{\sqrt{\tilde{X}_s}}{\sqrt{W_s}}\mathrm{d}\tilde{B}_s \right)$$

es progresivo, y por tanto es una martingala local. Además cumple $\langle \beta \rangle_t = t$, para toda $t \geq 0$. Del teorema de caracterización de Lévy tenemos que β_t es un movimiento Browniano. Luego se obtiene que:

$$W_t = W_0 + \int_0^t (a^* - bW_s)\mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \mathrm{d}\beta_s \sqrt{W_s} + S_t^* \qquad t \geq 0,$$

donde $a* = 2a$ y $(S_t^* : t \geq 0)$ es un proceso de Lévy no decreciente de saltos puros, con lo que queda probada la propiedad de ramificación. Es importante resaltar que la prueba que acabamos de dar muestra además que el proceso tiene inmigración, puesto que la parte de inmigración en el proceso W_t corresponde a la suma de las partes con saltos de los procesos X_t y $\hat{X}_t$.

Gracias a esto, el proceso JCIR se pude interpretar como un proceso de Markov fuerte y podemos encontrar explícitamente su generador infinitesimal. De la Definición 24 es evidente que el proceso depende de su valor inicial que vamos a asumir constante de la forma $X_0 = x \geq 0$. Por tanto, vamos a denotar por $\mathbb{P}_x$ la ley del proceso JCIR X que inicia en un punto $x \geq 0$, y vamos a denotar por $\mathbb{E}_x$ la esperanza asociada a esta ley. Sea la función f dos veces continuamente diferenciable y con soporte compacto. Usando la fórmula de Itô dada en el Teorema 9 para la función f

encontramos que

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(x) &= \int_0^t (a - bX_s) f'(X_s) \mathrm{d}s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t X_s f''(X_s) \mathrm{d}s \\ &+ \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} f'(X_s) \mathrm{d}B_s \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty (f(X_{s^-} + z) - f(X_{s^-})) N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ahora reorganizando los términos y denotando $\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) = N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) - \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$, se tiene para $t \geq 0$ que:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(x) &= \int_0^t (a - bX_s) f'(X_s) \mathrm{d}s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t X_s f''(X_s) \mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty (f(X_{s^-} + z) - f(X_{s^-})) \Pi(\mathrm{d}z) \mathrm{d}s + M_t(f), \end{aligned}$$

donde hicimos

$$M_t(f) = \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} f'(X_s) \mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_0^\infty (f(X_{s^-} + z) - f(X_{s^-})) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Notemos que la expresión anterior es martingala local por definición de integral de Itô. Sea $\tau_m = \inf\{t \geq 0 : X_t > m\}$, para cierta constante $m > 0$. Luego $M_{t\wedge\tau_m}(f)$ es martingala gracias a que es acotada, y por tanto $\mathbb{E}_x[M_{t\wedge\tau_m}(f)] = 0$. Aplicando el lema de Fatou y notando que τ_m se va a infinito cuando m tiende a infinito obtenemos que

$$0 \leq \mathbb{E}_x[M_t(f)] = \mathbb{E}_x[\lim_{m\to\infty} M_{t\wedge\tau_m}(f)] \leq \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_x[M_{t\wedge\tau_m}(f)] = 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}_x[M_t(f)] = 0$ y obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x) &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \left((a - bX_s) f'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t X_s f''(X_s) \right.\right. \\ &\left.\left. + \int_0^\infty (f(X_{s^-} + z) - f(X_{s^-})) \Pi(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}s \right]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Si en la expresión (5.6) dividimos entre t y hacemos el límite cuando t tiende a infinito encontramos que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}f) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t} \\ &= \mathbb{E}_x \left[\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \left((a - bX_s) f'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t X_s f''(X_s) \right.\right. \\ &\left.\left. + \int_0^\infty (f(X_{s^-} + z) - f(X_{s^-})) \Pi(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}s \right], \end{aligned}$$

donde usando el lema fundamental de cálculo se obtiene que el generador infinitesimal (ver Definición 29 del Apéndice B) está caracterizado por

$$(\mathcal{A}f)(x) = (a-bx)\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \int_0^\infty (f(x+z)-f(x))\Pi(\mathrm{d}z), \tag{5.7}$$

donde $x \in \mathbb{R}_+$ y f es dos veces continuamente diferenciable y con soporte compacto. Luego, si hacemos

$$(\mathcal{D}f)(x) = (a-bx)\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2},$$

$$(\mathcal{J}f)(x) = \int_0^\infty (f(x+z)-f(x))\Pi(\mathrm{d}z),$$

podemos escribir

$$\mathcal{A}f = \mathcal{D}f + \mathcal{J}f. \tag{5.8}$$

5.2. Transformada de Laplace

Vamos a encontrar explícitamente la transformada de Laplace del proceso JCIR. En la sección anterior encontramos que el JCIR es un CSBP con inmigración y tiene generador infinitesimal dado por (5.7). Por tanto, usando la Definición (3.24) del Capítulo 3 sobre CSBP con inmigración, sabemos que la transformada de Laplace del JCIR debe ser de la forma

$$\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = \exp\left\{-xu_t(\lambda) - \int_0^t \phi(u_s(\lambda))\mathrm{d}s\right\}, \tag{5.9}$$

donde $u_t(\theta)$ es la única solución a la ecuación diferencial (3.6) del Capítulo 3 dada por

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\lambda) + \psi(u_t(\lambda)) = 0, \qquad u_0(\lambda) = \lambda. \tag{5.10}$$

y ϕ es el exponente de Laplace de un subordinador, véase Definición 3.24 para más detalle.
Derivando en la expresión anterior obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] \quad = \quad \exp\left\{-xu_t(\lambda) - \int_0^t \phi(u_s(\lambda))\mathrm{d}s\right\}\left(-x\psi(u_t(\lambda)) - \phi(u_t(\lambda))\right),$$

y evaluando la derivada en $t=0$ y teniendo en cuenta que $u_0(\lambda) = \lambda$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}]\Big|_{t=0} = \exp\{-x\lambda\}(-x\psi(\lambda) - \phi(\lambda)). \tag{5.11}$$

Por otra parte, usando la expresión (5.7), para la función $f(x) = e^{-\lambda x}$ encontramos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}e^{-\lambda x} &= (a-bx)(-\lambda)e^{-\lambda x} + \frac{\sigma^2\lambda^2 x}{2}e^{-\lambda x} + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(x+z)} - e^{-\lambda x}\right)\Pi(\mathrm{d}z) \\
&= xe^{-\lambda x}\left(\lambda b + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right) + e^{-\lambda x}\left(-\lambda a + \int_0^\infty (e^{-\lambda z}-1)\Pi(\mathrm{d}z)\right).
\end{aligned}$$

Además, por definición, sabemos que

$$\mathcal{A}e^{-\lambda x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] - e^{-\lambda x}}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}]\Big|_{t=0}$$

Uniendo la expresión anterior con (5.11) se puede observar que

$$e^{-x\lambda}(-x\psi(\lambda) - \phi(\lambda)) = -xe^{-\lambda x}\left(-\lambda b - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right) - e^{-\lambda x}\left(\lambda a + \int_0^\infty (1-e^{-\lambda z})\Pi(\mathrm{d}z)\right).$$

Gracias a esto, podemos identificar al mecanismo de ramificación y de inmigración del JCIR de la siguiente forma:

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + b\lambda, \qquad \phi(\lambda) = a\lambda + \int_0^\infty \left(1-e^{-\lambda z}\right)\Pi(\mathrm{d}z).$$

Ahora podemos resolver la ecuación diferencial (5.10). Notemos que para cada $\lambda \geq 0$, la solución de esta ecuación se expresa de forma única por la relación

$$-\int_\lambda^{u_t(\lambda)} \frac{1}{\psi(s)}\mathrm{d}s = t. \tag{5.12}$$

Por tanto, basta resolver (5.12). Dado que $\psi(s) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + bs$, tenemos que (5.12) se reescribe como

$$\begin{aligned} -t &= \int_\lambda^{u_t(\lambda)} \frac{\mathrm{d}s}{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + bs} = \int_\lambda^{u_t(\lambda)} \left(-\frac{\sigma^2}{2b}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\frac{\sigma^2}{2}s + b} + \int_\lambda^{u_t(\lambda)}\left(\frac{1}{b}\right)\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &= -\left(\frac{1}{b}\right)\int_\lambda^{u_t(\lambda)} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sigma^2}{2}s + b\right)}{\frac{\sigma^2}{2}s+b} + \left(\frac{1}{b}\right)\int_\lambda^{u_t(\lambda)}\frac{\mathrm{d}s}{s}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hicimos la descomposición en fracciones simples. De lo anterior se deduce que la solución está dada por

$$-bt = -\int_\lambda^{u_t(\lambda)} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sigma^2}{2}s + b\right)}{\frac{\sigma^2}{2}s+b} + \int_\lambda^{u_t(\lambda)}\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

donde integrando obtenemos que

$$\log\left(\frac{\frac{\sigma^2}{2}\lambda + b}{\frac{\sigma^2}{2}u_t(\lambda) + b}\frac{u_t(\lambda)}{\lambda}\right) = -bt.$$

En la igualdad anterior, despejando $u_t(\lambda)$ mediante manipulaciones algebraicas, se obtiene que

$$u_t(\lambda) = \frac{\lambda e^{-bt}}{1 + \frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bt})}. \tag{5.13}$$

Por otra parte, usando la solución (5.13), podemos encontrar fácilmente la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\int_0^t \phi(u_s(\lambda))\mathrm{d}s &= \int_0^t \left[a u_s(\lambda) + \int_0^\infty (1 - e^{-z u_s(\lambda)})\Pi(\mathrm{d}z) \right] \mathrm{d}s \\ &= a\frac{2}{\sigma}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sigma^2\lambda}{2b}e^{-bs}\right)}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}-\frac{\sigma^2\lambda}{2b}e^{-bs}} + \int_0^t\int_0^\infty (1 - e^{-z u_s(\lambda)})\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\ &= \frac{2a}{\sigma}\log\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bt})\right) + \int_0^t\int_0^\infty (1 - e^{-z u_s(\lambda)})\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ya encontramos la forma de $u_t(\lambda)$ y de $\phi(\lambda)$, por lo que podemos encontrar la transformada de Laplace del proceso JCIR, la cual está dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = &\left(1+\frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1-e^{-bt})\right)^{-\frac{2a}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x\lambda e^{-bt}}{1+\frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1-e^{-bt})}\right) \\ &\times \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)}-1\right)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right),\end{aligned} \tag{5.14}$$

para $\lambda \geq 0$.

A partir de la expresión (5.14) vamos a mostrar que la ley de X_t iniciando en x se puede representar como la convolución de dos medidas de probabilidad. Una de ellas es la distribución del conocido proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), introducido en Cox, Ingersoll Jr y Ross [10]. Veamos esto en detalle.

Consideremos la única solución fuerte $Y = (Y_t : t \geq 0)$ de la siguiente ecuación diferencial

$$\mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\mathrm{d}B_t, \qquad t \geq 0, \qquad Y_0 = x \geq 0 \qquad c.s, \tag{5.15}$$

donde $a \in \mathbb{R}_+$, y $b, \sigma > 0$. Es conocido que Y es el proceso CIR. Evidentemente este proceso dado por (5.15) es el caso particular cuando $S_t \equiv 0$ en (5.1), que corresponde a $\Pi = 0$ en (5.14). Vamos a denotar por $\mathbf{P}_x$ la ley del proceso Y que inicia en x sobre $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ y $\mathbf{E}_x$ su esperanza asociada. Luego tenemos que

$$\mathbf{E}_x[e^{-\lambda Y_t}] = \left(1+\frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1-e^{-bt})\right)^{-\frac{2a}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x\lambda e^{-bt}}{1+\frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1-e^{-bt})}\right), \tag{5.16}$$

para todo $t \geq 0$ y $\lambda \geq 0$.

Por otra lado, sea $Z = (Z_t : t \geq 0)$ la única solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}Z_t = -bZ_t\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Z_t}\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}S_t, \qquad t \geq 0, \quad Z_0 = 0 \qquad c.s., \tag{5.17}$$

donde $\sigma > 0$. Claramente (5.17) es un caso particular de (5.1) cuando $a = x = 0$. Vamos a denotar por P la ley del proceso Z sobre $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ y E su esperanza asociada. Luego, usando la expresión de la trasformada de Laplace del JCIR (5.14), obtenemos

$$E[e^{-\lambda Z_t}] = \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)}-1\right)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right), \qquad t, \lambda \geq 0. \tag{5.18}$$

Entonces, de (5.14), (5.16) y (5.18) se tiene que

$$\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = \mathbf{E}_x[e^{-\lambda Y_t}]E[e^{-\lambda Z_t}], \qquad \forall t \geq 0,\ \lambda \geq 0.$$

Lo que significa que

$$\mathbb{P}_x = \mathbf{P}_x * P, \tag{5.19}$$

donde el símbolo $*$ denota la convolución de medidas.

5.3. Momentos

5.3.1. La distribución de Bessel

Para analizar el comportamiento de los momentos del proceso JCIR necesitamos estudiar la distribución de Bessel, ver Jin, Rüdiger y Trabelsi [23] y Grigelionis [17]. Comencemos definiendo la función de Bessel modificada de primer tipo.

Definición 25. *Llamamos a la función $I_b(y)$, para $y \in \mathbb{R}$ y $b \geq 0$, función de Bessel modificada de primer tipo si tiene la forma*

$$I_b(y) = \left(\frac{1}{2}y\right)^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}y^2\right)^k}{k!\Gamma(b+k+1)},$$

donde Γ denota la función gamma dada por $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ para $z \geq 0$. En particular $\Gamma(n) = (n-1)!$ para n entero positivo.

Ahora podemos definir a la distribución de Bessel.

Definición 26. *Sea α y β constantes positivas. Llamamos a una medida de probabilidad $m_{\alpha,\beta}$ sobre $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ una distribución de Bessel con parámetros α y β si*

$$m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) = e^{-\alpha}\delta_0(\mathrm{d}x) + \beta e^{-\alpha-\beta x}\sqrt{\alpha(\beta x)^{-1}}I_1(2\sqrt{\alpha\beta x})\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{5.20}$$

donde δ_0 es la medida de Dirac en el origen e I_1 es la función de Bessel modificada de primer tipo tomando $b = 1$ en la Definición 25, i.e

$$I_1(y) = \frac{y}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}y^2\right)^k}{k!(k+1)!}, \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Denotemos por $\hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x)$, para $\lambda \geq 0$, a la transformada de Laplace de $m_{\alpha,\beta}$.

Lema 17. *Para $\lambda \geq 0$, tenemos*

$$\hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda) = \exp\left\{\frac{-\alpha\lambda}{\beta+\lambda}\right\}.$$

Demostración: Si $\lambda \geq 0$, entonces aplicando el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-\alpha} \delta_0(\mathrm{d}x) + \int_0^\infty e^{-\lambda x} \beta e^{-\alpha-\beta x} \sqrt{\alpha(\beta x)^{-1}} I_1(2\sqrt{\alpha\beta x})\mathrm{d}x \\
&= e^{-\alpha} + e^{-\alpha} \int_0^\infty \beta e^{-\beta x} \cdot e^{-\lambda x} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta x}} (\sqrt{\alpha\beta x}) \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha\beta x)^k}{k!(k+1)!} \mathrm{d}x \\
&= e^{-\alpha} + e^{-\alpha} \int_0^\infty \alpha\beta e^{(-\lambda-\beta)x} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha\beta x)^k}{k!(k+1)!} \mathrm{d}x \\
&= e^{-\alpha} + \alpha\beta e^{-\alpha} \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{(-\lambda-\beta)x} \frac{(\alpha\beta x)^k}{k!(k+1)!} \mathrm{d}x \\
&= e^{-\alpha} + e^{-\alpha} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\alpha\beta}{\beta+\lambda}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{(k+1)!} \\
&= e^{-\alpha} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\alpha\beta}{\beta+\lambda}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \exp\left\{\frac{-\alpha\lambda}{\beta+\lambda}\right\}.
\end{aligned}$$

□

Para estudiar los momentos del proceso JCIR, es fundamental estudiar el siguiente lema relacionado con los momentos de orden $\kappa > 0$ de la distribución de Bessel.

Lema 18. *Sean $\kappa > 0$ y $\delta > 0$ constantes positivas. Entonces*

(i) existe una constante positiva $C_1 = C_1(\kappa)$ tal que para toda $\alpha > 0$ y $\beta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \leq C_1 \frac{1+\alpha^\kappa}{\beta^\kappa},$$

(ii) existe una constante positiva $C_2 = C_2(\kappa, \delta)$ tal que para toda $\alpha \geq \delta$ y $\beta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \geq C_2 \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}.$$

Demostración: Probemos primero (i). Para ello vamos a separar la prueba en tres casos: cuando $0 < \kappa \leq 1$, cuando $\kappa > 1$, $\kappa \in \mathbb{N}$ y cuando $\kappa > 1$, $\kappa \notin \mathbb{N}$.

Si $0 < \kappa \leq 1$, entonces usando la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} x m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x)\right)^\kappa = \left(-\frac{\partial}{\partial u} \hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}\right)^\kappa \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa < \frac{1+\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}. \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

Además, para $\kappa = n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, de la Definición 26 y del teorema de Fubini, tenemos que para todo $\alpha, \beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) &= \int_{\mathbb{R}_+} x^n \left(e^{-\alpha}\delta_0(\mathrm{d}x) + \beta e^{-\alpha-\beta x}\sqrt{\alpha(\beta x)^{-1}} \cdot \frac{2\sqrt{\alpha\beta x}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}(2\sqrt{\alpha\beta x})^2\right)^k}{k!(k+1)!}\mathrm{d}x \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} x^n \alpha\beta e^{-\alpha} e^{-\beta x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta x)^k}{k!(k+1)!}\mathrm{d}x \\
&= e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta)^{k+1}}{k!(k+1)!} \int_{\mathbb{R}_+} x^{n+k} e^{-\beta x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{-\alpha}}{\beta^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}\Gamma(n+k+1)}{k!(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\alpha}}{\beta^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}(n+k)!}{k!(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\alpha}}{\beta^n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\alpha^{k+1}(n+k)!}{k!(k+1)!} \\
&\quad + \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{\beta^n} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1-n}(n+k)\cdots(k+1)\cdot k!}{k!(k+1-n)!(k+2-n)\cdots(k+1)} \\
&= \frac{e^{-\alpha}}{\beta^n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\alpha^{k+1}(n+k)!}{k!(k+1)!} \\
&\quad + \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{\beta^n} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1-n}}{(k+1-n)!} \cdot \frac{(n+k)\cdots(k+1)}{(k+2-n)\cdots(k+1)},
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ es la función gamma. Pero, observemos que

$$
\sup_{0\leq k\leq n-2} \frac{(n+k)!}{k!(k+1)!} < \infty \qquad \text{y} \qquad \sup_{k\geq n-1} \frac{(n+k)\cdots(k+1)}{(k+2-n)\cdots(k+1)} < \infty,
$$

debido a que

$$
\lim_{k\to\infty} \frac{(n+k)\cdots(k+1)}{(k+2-n)\cdots(k+1)} = 1, \qquad \text{para } n \text{ fija.}
$$

Entonces existe una constante positiva $c_1 = c_1(n)$ tal que

$$
\sup_{0\leq k\leq n-2} \frac{(n+k)!}{k!(k+1)!} \leq c_1 \qquad \text{y} \qquad \sup_{k\geq n-1} \frac{(n+k)\cdots(k+1)}{(k+2-n)\cdots(k+1)} \leq c_1.
$$

Luego, usando (5.23) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) &\leq c_1 \frac{e^{-\alpha}}{\beta^n} \left(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} + \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \right) \\
&= c_1 e^{-\alpha} \left(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} \right) \frac{1}{\beta^n} + c_1 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \\
&\leq c_2 \left(\frac{1}{\beta^n} + \frac{\alpha^n}{\beta^n} \right), \qquad \text{para } \alpha, \beta > 0,
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

donde la última desigualdad se obtiene del hecho de que existe una constante positiva $c_2 = c_2(n)$ tal que

$$c_1 e^{-\alpha}\left(\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}\right) \le c_2 \qquad \text{y} \qquad c_1 \le c_2.$$

Falta probar (i) para $\kappa \in \{x \in \mathbb{R}_+ : x > 1, x \notin \mathbb{N}\}$. Para este caso, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in (0,1]$ tal que $2\kappa = n+\epsilon$. Luego, aplicando la desigualdad de Hölder y usando (5.22) y (5.24) obtenemos, para $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{\frac{n}{2}+\frac{\epsilon}{2}} m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) &\le \left(\int_{\mathbb{R}_+} x^n m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x)\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}_+} x^\epsilon m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x)\right)^{\frac12}\\ &\le c_3\left(\frac{1+\alpha^n}{\beta^n}\right)^{\frac12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}},\end{aligned}$$

donde c_3 es una constante positiva que depende de κ y que se obtiene de (5.24). Pero como $\alpha > 0$, se cumple que $(1+\alpha^n)^{\frac12} < 1+\alpha^{\frac{n}{2}}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \le c_3\left(\frac{1+\alpha^n}{\beta^n}\right)^{\frac12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} < c_3\frac{\alpha^{\frac{\epsilon}{2}}+\alpha^{\frac{n+\epsilon}{2}}}{\beta^{\frac{n+\epsilon}{2}}}.$$

Por último notemos que existe $c_4 = c_4(\kappa)$ constante positiva tal que $2c_3 \le c_4$, y usando que $\alpha^{\frac{\epsilon}{2}} \le 1+\alpha^\kappa$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \le c_3\frac{\alpha^{\frac{\epsilon}{2}}+\alpha^{\frac{n+\epsilon}{2}}}{\beta^{\frac{n+\epsilon}{2}}} \le c_3\frac{1+2\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} \le 2c_3\frac{1+\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} \le c_4\frac{1+\alpha^\kappa}{\beta^\kappa},$$

con lo que queda probado (i).

Vamos a probar (ii). Separemos la prueba en dos casos: cuando $\kappa \ge 1$ y cuando $0 < \kappa < 1$.

Si $\kappa \ge 1$, usando nuevamente la desigualdad de Jensen, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \ge \left(\int_{\mathbb{R}_+} x m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x)\right)^\kappa = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa.$$

Solo basta probar el caso de $0 < \kappa < 1$. Vamos a introducir ahora una variable aleatoria η y vamos a calcular sus momentos. A partir de estos últimos vamos a acotar los momentos de $m_{\alpha,\beta}$. Sea $\theta = 1-\kappa \in (0,1)$ y sea η la variable aleatoria positiva cuya función de densidad está dada por

$$(1-e^{-\alpha})^{-1}(m_{\alpha,\beta} - e^{-\alpha}\delta_0), \tag{5.25}$$

donde notemos que la función dada en (5.25) es densidad porque

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1-e^{-\alpha})^{-1}(m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) - e^{-\alpha}\delta_0(\mathrm{d}x)) &= (1-e^{-\alpha})^{-1}\left(\int_0^\infty m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) - e^{-\alpha}\int_0^\infty \delta_0(\mathrm{d}x)\right)\\ &= (1-e^{-\alpha})^{-1}(1-e^{-\alpha}) = 1.\end{aligned}$$

Luego, para $\lambda \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\lambda\eta}] &= (1-e^{-\alpha})^{-1}(\hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda)-e^{-\alpha})\\ &= (1-e^{-\alpha})^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\lambda\alpha}{\beta+\lambda}\right\}-e^{-\alpha}\right).\end{aligned}$$

Por otra parte, notemos que podemos diferenciar bajo la integral la expresión $\mathbb{E}[e^{-\lambda\eta}]$, pues $\eta e^{-\lambda\eta}$ es integrable. Esto se sigue del hecho de que la función $h(s) = se^{-\lambda s}$ alcanza su máximo global en $s = \frac{1}{\lambda}$, y $h(\frac{1}{\lambda})$ es integrable. Luego, tenemos que $\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}[e^{-\lambda\eta}] = \mathbb{E}[-\eta e^{-\lambda\eta}]$. Luego, aplicando el teorema de Fubini y haciendo oportunamente el cambio de variable $v = \lambda\eta$ en la integral que va de 0 a ∞, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}[e^{-\lambda\eta}]\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda &= \int_0^\infty \mathbb{E}[-\eta e^{-\lambda\eta}]\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda\\ &= -\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \eta e^{-\lambda\eta}\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda\right]\\ &= -\mathbb{E}\left[\eta^{1-\theta}\int_0^\infty e^{-v}v^{\theta-1}\mathrm{d}v\right]\\ &= -\mathbb{E}[\Gamma(\theta)\eta^{1-\theta}],\end{aligned}$$

donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty t^{\theta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ es la función gamma; lo cual implica que

$$\mathbb{E}[\eta^{1-\theta}] = -\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}[e^{-\lambda\eta}]\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda.$$

Dado que $\kappa = 1-\theta$, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\eta^\kappa] &= -\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}[e^{-\lambda\eta}]\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda\\ &= -\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1-e^{-\alpha})^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\lambda\alpha}{\beta+\lambda}\right\}-e^{-\alpha}\right)\right]\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda\\ &= -\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty (1-e^{-\alpha})^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\lambda\alpha}{\beta+\lambda}\right\}\frac{-\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\right)\lambda^{\theta-1}\mathrm{d}\lambda\\ &= \frac{\alpha\beta}{\Gamma(\theta)(1-e^{-\alpha})}\int_0^\infty \exp\left\{\frac{-\lambda\alpha}{\beta+\lambda}\right\}\frac{\lambda^{\theta-1}}{(\alpha+\beta)^2}\mathrm{d}\lambda. \qquad (5.26)\end{aligned}$$

Ahora, usando la función de densidad de η dada en (5.25), encontramos que

$$\mathbb{E}[\eta^\kappa] = \int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa(1-e^{-\alpha})^{-1}(m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x)-e^{-\alpha}\delta_0(\mathrm{d}x)) = (1-e^{-\alpha})^{-1}\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x),$$

que implica para $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) = (1-e^{-\alpha})\mathbb{E}[\eta^\kappa] = \frac{\alpha\beta}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty \exp\left\{\frac{-\lambda\alpha}{\beta+\lambda}\right\}\frac{\lambda^{\theta-1}}{(\alpha+\beta)^2}\mathrm{d}\lambda. \qquad (5.27)$$

Vamos a hacer el cambio de variable $w = \alpha\lambda/\beta$ en (5.27), para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) &= \frac{\alpha\beta}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty \exp\left\{-\alpha + \frac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\beta w}{\alpha}}\right\} \frac{(\frac{\beta w}{\alpha})^{-\kappa}}{(\beta + \frac{\beta w}{\alpha})^2} \frac{\beta}{\alpha} \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa \int_0^\infty \exp\left\{\frac{-\alpha w}{\alpha + w}\right\} \frac{w^{-\kappa}}{(1 + w/\alpha)^2} \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa I(\alpha). \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

donde denotamos $I(\alpha) = \int_0^\infty \exp\left\{\frac{-\alpha w}{\alpha+w}\right\} \frac{w^{-\kappa}}{(1+w/\alpha)^2} \mathrm{d}w$ pues la expresión solo depende de α. Entonces, usando el lema de Fatou, obtenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{\alpha\to\infty} I(\alpha) &\geq \int_0^\infty \liminf_{\alpha\to\infty} \exp\left\{\frac{-\alpha w}{\alpha + w}\right\} \frac{w^{-\kappa}}{(1 + w/\alpha)^2} \mathrm{d}w \\
&= \int_0^\infty \exp\{-w\} w^{-\kappa} \mathrm{d}w \\
&= \Gamma(1-\kappa) > 0,
\end{aligned}$$

lo que implica que existe un $M > 0$ grande, tal que para toda $\alpha \geq M$ se tiene $I(\alpha) \geq \frac{\Gamma(1-\kappa)}{2} > 0$. Por otro lado, la función $\alpha \mapsto I(\alpha)$, con $\alpha \in (0, \infty)$, es positiva y continua en α pues es una integral continua de funciones continuas en $\alpha \in (0, \infty)$. Por tanto, usando los argumentos anteriores, obtenemos que para $\delta > 0$, $\exists\, c_6(\delta, \kappa) > 0$ tal que $I(\alpha) \geq c_6 > 0$, para todo $\alpha \geq \delta$. Finalmente, tomando $c_7 = c_6 \frac{1}{\Gamma(\theta)}$ y usando (5.28) concluimos que para $\delta > 0$, existe una constante positiva c_7 que depende de κ y de δ, tal que para todo $\alpha \geq \delta$ y $\beta > 0$,

$$\int_{R_+} x^\kappa m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \geq c_7 \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa},$$

con lo que queda probado el lema. □

5.3.2. Existencia de los momentos

Queremos probar un teorema de caracterización de la existencia de los momentos del JCIR a través de la medida de Lévy. Antes de hacer esto, necesitamos estudiar algunas definiciones y resultados que serán de utilidad para la prueba.

Definición 27. *Una función $f(x)$ sobre $\mathbb{R}$ es submultiplicativa si es no negativa y existe una constante $c > 0$ tal que*

$$f(x+y) \leq c f(x) f(y), \qquad \text{para } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (5.29)$$

Además, llamaremos a una función acotada sobre todo conjunto compacto *localmente acotada*. Para más detalle ver Sato [42].

Lema 19. *La función $f(x) = (|x| \vee 1)^\kappa$, para $x \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$, es submultiplicativa y localmente acotada. Además, para toda $c > 0$, existe $c' > 0$ al que $f(x) \leq c' \exp(c|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Es claro que la función f es acotada sobre todo compacto pues $|x|$ y 1 lo son. Por tanto f es localmente acotada.

Probemos ahora que f es submultiplicativa. Sea $h(x) = x \vee 1$ y notemos que h es creciente para $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ y vamos a diferenciar tres casos. El primer caso es cuando $x, y \geq 1$. Esto implica que $x, y \leq xy$. Luego

$$h(x+y) = x + y \leq 2xy = 2h(x)h(y).$$

El segundo caso es cuando $x, y < 1$. Por ser h creciente, tenemos que

$$h(x+y) \leq h(1+1) = 2 = 2h(x)h(y).$$

El tercer y último caso es cuando uno de los números es menor que 1 y el otro no. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \geq 1$ y $y < 1$. Por la monotonía de h y usando el primer caso, tenemos que

$$h(x+y) \leq h(x+1) \leq 2h(x) \cdot 1 = 2h(x)h(y).$$

Por tanto, para $x, y \in \mathbb{R}$, existe una constante $c = 2 > 0$ tal que $h(x+y) \leq ch(x)h(y)$. Finalmente, usando de nuevo que h es creciente, obtenemos

$$f(x+y) = h(|x+y|)^\kappa \leq h(|x| + |y|)^\kappa \leq c^\kappa h(|x|)^\kappa h(|y|)^\kappa = c^\kappa f(x) f(y),$$

con lo que queda probado que $f(x) = (|x| \vee 1)^\kappa$ es submultiplicativa.

Finalmente, veamos que si $|x| \leq 1$, entonces $f(x) = 1 \leq e^{c|x|}$, pues $c|x| \geq 0$. Por otro lado, si $|x| > 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq n$, que implica que $|x/n| \leq 1 \leq e^{c|x|}$. Luego

$$f(x) = |x|^\kappa = n^\kappa |x/n|^\kappa \leq n^\kappa e^{c|x|}.$$

Esto significa que para todo $c > 0$, existe $c' > 0$ al que $f(x) \leq c' \exp(c|x|)$, $x \in \mathbb{R}$; con lo que queda probado el lema. $\square$

Los siguientes lemas son fundamentales en la caracterización de la existencia de momentos. Para una prueba del primero ver Proposición 3 de Ben Alaya y Kebaier [7].

Lema 20. *Sea $\kappa \in (0, \infty)$, tenemos*

(i) para $b = 0$,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathbf{E}_x[(Y_t)^\kappa] < \infty \qquad \sup_{t \geq 1} \frac{\mathbf{E}_x[(Y_t)^\kappa]}{t^\kappa} < \infty$$

(ii) para $b > 0$,

$$\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}_x[(Y_t)^\kappa] < \infty.$$

El siguiente resultado se prueba en el Teorema 25.3 de Sato [42].

Lema 21. *Sea f una función sobre $\mathbb{R}$ submultiplicativa, localmente acotada y medible. Sea $L = (L_t : t \geq 0)$ un proceso de Lévy sobre $\mathbb{R}$ con medida de Lévy Λ. Entonces*

$$\mathbb{E}[f(L_t)] < \infty \ \text{ para cada } t > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f(z)[\Lambda]_{\{|z|>1\}}(\mathrm{d}z) < \infty,$$

donde $[\Lambda]_{\{|z|>1\}}$ es la medida Λ restringida al conjunto $\{|x| > 1\}$.

Antes de probar el resultado principal de esta sección, es necesario probar un último lema .

Lema 22. *Sea Π es la medida de Lévy asociada al subordinador S dado en (24) de la definición del proceso JCIR. Sea*

$$\Delta = \int_0^t \int_{\{z>1\}} \left(e^{-zu_s(\lambda)} - 1\right) \Pi(dz)ds, \qquad \lambda \geq 0,$$

donde $u_s(\lambda)$ está dada en (5.13) por

$$u_s(\lambda) = \frac{\lambda e^{-bs}}{1 + \frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1 - e^{-bs})}.$$

Entonces e^{Δ} es la trasformada de Laplace de una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda_t = \int_0^t \Pi(\{z > 1\})ds$.

Demostración: Vamos a reescribir

$$\exp\left(\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1 + \frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1 - e^{-bs})}\right) = \exp\left(\frac{-\alpha\lambda}{\beta + \lambda}\right), \tag{5.30}$$

donde

$$\alpha = \frac{2bz}{\sigma^2(e^{bs} - 1)} > 0, \qquad \beta = \frac{2be^{bs}}{\sigma^2(e^{bs} - 1)}.$$

Podemos ver, del Lema 17, que la parte derecha de (5.30) es la trasformada de Laplace de la distribución de Bessel $m_{\alpha,\beta}$ con parámetros α y β. Vamos a denotar a dicha transformada de Laplace como $\hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda) = \exp\left(\frac{-\alpha\lambda}{\beta+\lambda}\right)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_0^t \int_{\{z>1\}} (\hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda) - 1)\Pi(dz)ds \\
&= \int_0^t \int_{\{z>1\}} \hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda)\Pi(dz)ds - \int_0^t \int_{\{z>1\}} \Pi(dz)ds \\
&= \int_0^t \int_{\{z>1\}} \hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda)\Pi(dz)ds - \lambda_t \\
&= \lambda_t \left(\lambda_t^{-1} \int_0^t \int_{\{z>1\}} \hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda)\Pi(dz)ds - 1\right),
\end{aligned}$$

donde denotamos

$$\lambda_t = \int_0^t \int_{\{z>1\}} \Pi(dz)ds = \int_0^t \Pi(\{z > 1\})ds < \infty.$$

Ahora, dado que α y β son funciones de z y s, podemos definir una medida ρ_t sobre $\mathbb{R}_+$ como sigue

$$\rho_t(\cdot) = \lambda_t^{-1} \int_0^t \int_{\{z>1\}} m_{\alpha,\beta}(\cdot)\Pi(dz)ds.$$

Veamos que ρ_t es de probabilidad pues

$$\rho_t(\mathbb{R}_+) = \lambda_t^{-1} \int_0^t \int_{\{z>1\}} m_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)\Pi(dz)ds = \lambda_t^{-1} \int_0^t \int_{\{z>1\}} \Pi(dz)ds = \lambda_t^{-1}\lambda_t = 1.$$

Además, la transformada de Laplace de ρ_t, para $\lambda \geq 0$, tiene la forma

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_t(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x}\rho_t(\mathrm{d}x) &= \lambda_t^{-1}\int_0^t \int_{\{z>1\}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} m_{\alpha,\beta}(\mathrm{d}x) \right) \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\
&= \lambda_t^{-1}\int_0^t \int_{\{z>1\}} \hat{m}_{\alpha,\beta}(\lambda)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\Delta = \lambda_t(\hat{\rho}_t(\lambda) - 1)$, que significa que e^{Δ} es la transformada de Laplace de una distribución Poisson compuesta. □

Estamos en condiciones de probar el teorema de caracterización de los momentos del JCIR, el cual es el resultado principal de esta sección.

Teorema 20. *Sea $(X_t, t \geq 0)$ el proceso JCIR definido en (5.1) y sea $\kappa > 0$. Entonces la siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbb{E}_x[X_t^\kappa] < \infty$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+$ *y* $t > 0$,

(ii) $\mathbb{E}_x[X_t^\kappa] < \infty$ *para alguna* $x \in \mathbb{R}_+$ *y* $t > 0$,

(iii) $\int_{\{z>1\}} z^\kappa \Pi(\mathrm{d}z) < \infty$.

Demostración: (iii) $\Rightarrow$ (i). Sea $\kappa > 0$. Sean $x \in \mathbb{R}_+$ y $t > 0$ arbitrarios y supongamos que se cumple $\int_{\{z>1\}} z^\kappa \Pi(\mathrm{d}z) < \infty$. Vamos a descomponer la medida Π de la forma $\Pi(\mathrm{d}z) = \mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\Pi(\mathrm{d}z) + \mathbf{1}_{\{z>1\}}\Pi(\mathrm{d}z)$.

Entonces, a partir de (5.18) tenemos que para todo $t, \lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}
E[e^{-\lambda Z_t}] &= \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)} - 1 \right) \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \right) \\
&= \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{z>1\}}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \right). \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Sean ahora $S^{(1)} = (S_t^{(1)} : t \geq 0)$ y $S^{(2)} = (S_t^{(2)} : t \geq 0)$ subordinadores de saltos puros con medida de Lévy $\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\Pi(\mathrm{d}z)$ y $\mathbf{1}_{\{z>1\}}\Pi(\mathrm{d}z)$, respectivamente. De forma análoga a como se hizo en (5.17), para $i = 1, 2$ vamos a definir a $Z^{(i)} = (Z_t^{(i)} : t \geq 0)$ como la única solución fuerte de

$$\mathrm{d}Z_t^{(i)} = -bZ_t^{(i)}\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Z_t^{(i)}}\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}S_t^{(i)}, \qquad t \geq 0,\ Z_0^{(i)} = 0 \quad c.s..$$

Vamos a denotar por $P^{(i)}$ a la ley del proceso $Z^{(i)}$ sobre $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ y $E^{(i)}$ la esperanza asociada a $P^{(i)}$, para $i = 1, 2$. Utilizando (5.18), encontramos para $t, \lambda \geq 0$ que

$$\begin{aligned}
E^{(1)}[e^{-\lambda Z_t^{(1)}}] &= \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \right), \qquad \text{y} \\
E^{(2)}[e^{-\lambda Z_t^{(2)}}] &= \exp\left(\int_0^t \int_{(0,\infty)} \left(e^{-z u_s(\lambda)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{z>1\}}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \right). \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

Luego, de (5.31) y (5.32) se tiene que

$$P = P^{(1)} * P^{(2)}. \qquad (5.33)$$

Consideremos la función $f(y) = (|y| \vee 1)^\kappa$, $y \in \mathbb{R}$. Por el Lema 19 f es submultiplicativa y localmente acotada, por tanto existe $c_1 > 0$ tal que $f(y_1 + y_2) \leq c_1 f(y_1) f(y_2)$, para $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Además, para $c > 0$ existe $c_2 > 0$ tal que $f(y) \leq c_2 e^{c|x|}$, para $y \in \mathbb{R}$. Entonces, a partir de (5.19) y (5.33) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[f(X_t)] &= \mathbb{E}[f(Y_t + Z_t^{(1)} + Z_t^{(2)})|Y_0 = x] \leq c_1^2 \mathbf{E}_x[f(Y_t)] E^{(1)}[f(Z_t^{(1)})] E^{(2)}[f(Z_t^{(2)})] \\ &\leq c_1^2 c_2 \mathbf{E}_x[f(Y_t)] E^{(1)}[e^{cZ_t^{(1)}}] E^{(2)}[f(Z_t^{(2)})]. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Vamos a mostrar que $\mathbb{E}_x[f(X_t)] < \infty$, para ello probemos que las esperanzas del lado derecho de (5.34) son finitas. Gracias al Lema 20, $\mathbf{E}_x[f(Y_t)] = \mathbf{E}_x[|Y_t|^\kappa \mathbf{1}_{\{|Y_t|>1\}}] + \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{|Y_t|\leq 1\}}] < \infty$. Además, dado que $S^{(1)}$ tiene solamente saltos "pequeños", se sigue $E^{(1)}[e^{cZ_t^{(1)}}] < \infty$ del teorema 2.14 (b) de Keller-Ressel y Mayerhofer [26], el cual podemos encontrar en el Apéndice D como Teorema 37. Basta probar que $E^{(2)}[f(Z_t^{(2)})] < \infty$.

Veamos que del Lema 22, $Z_t^{(2)}$ tiene una distribución Poisson compuesta, por tanto, existe una medida de probabilidad ρ_t sobre $\mathbb{R}_+$ tal que

$$E^{(2)}[e^{-\lambda Z_t^{(2)}}] = e^{\lambda_t(\hat{\rho}_t(\lambda)-1)}, \qquad t > 0, \quad \lambda \geq 0,$$

donde $\hat{\rho}_t$ denota la transformada de Laplace de ρ_t y $0 < \lambda_t < \infty$. Usando también el Lema 22, tenemos que

$$\rho_t(\cdot) = (\lambda_t)^{-1} \int_0^t \int_0^\infty m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\cdot) \mathbf{1}_{\{z>1\}} \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s,$$

donde $m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}$ es la distribución de Bessel dada en la Definición 26, con parámetros

$$\alpha(z,s) = \frac{2bz}{\sigma^2(e^{bs}-1)} \qquad \text{y} \qquad \beta(z,s) = \frac{2be^{bs}}{\sigma^2(e^{bs}-1)}.$$

Como $Z_t^{(2)}$ sigue una distribución Poisson compuesta, es infinitamente divisible y su medida de Lévy está dada por $\lambda_t \rho_t$ (ver Capítulo 1). Aplicando el Lema 21, podemos ver que $\int_{\{y>1\}} f(y)\lambda_t\rho_t(dy) < \infty$ implica que $E[f(Z_t)] < \infty$; pues f es submultiplicativa, localmente acotada y medible no negativa.

Aplicando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\{y>1\}} f(y)\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) &= \int_0^t \int_0^\infty \left(\int_{\{y>1\}} f(y) m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y) \right) \mathbf{1}_{\{z>1\}} \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_{\{z>1\}} \left(\int_{\{y>1\}} f(y) m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y) \right) \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Pero, debido al Lema 17, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\{y>1\}} f(y) m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y) &\leq \int_{\mathbb{R}_+} f(y) m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y) \\ &\leq (1+y^\kappa) m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y) \\ &\leq 1 + C_1 \frac{1+\alpha(z,s)^\kappa}{\beta(z,s)^\kappa} \\ &= 1 + C_1 \sigma^{2\kappa}(2b)^{-\kappa}(1-e^{-bs})^\kappa + C_1 e^{-\kappa bs} z^\kappa. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Entonces, por hipótesis, podemos obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\{y>1\}} f(y)\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) &= \int_0^t \int_{\{z>1\}} \left(\int_{\{y>1\}} f(y) m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y)\right) \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \int_{\{z>1\}} \left(1 + C_1\sigma^{2\kappa}(2b)^{-\kappa}(1-e^{-bs})^{\kappa} + C_1 e^{-\kappa bs} z^{\kappa}\right) \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\
&= \Pi(\{z>1\}) \int_0^t \left(1 + C_1\sigma^{2\kappa}(2b)^{-\kappa}(1-e^{-bs})^{\kappa}\right) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t C_1 e^{-\kappa bs}\mathrm{d}s \int_{\{z>1\}} z^{\kappa}\Pi(\mathrm{d}z) < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{E}_x[f(X_t)] < \infty$, por tanto

$$\mathbb{E}_x[(X_t)^{\kappa}] \leq \mathbb{E}_x[f(X_t)] < \infty.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Es inmediato.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos ahora que $\mathbb{E}_x[(X_t)^{\kappa}] < \infty$ para alguna $x \in \mathbb{R}_+$ y $t > 0$. Por (5.19) tenemos

$$\mathbb{E}_x[(X_t)^{\kappa}] = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} (y+z)^{\kappa} \mathbf{P}_x(Y_t \in \mathrm{d}y)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z) < \infty.$$

Por tanto $\int_{\mathbb{R}_+} (y+z)^{\kappa}\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z) < \infty$ para alguna $y \in \mathbb{R}_+$, que implica que

$$E[(Z_t)^{\kappa}] = \int_{\mathbb{R}_+} z^{\kappa}\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z) \leq \int_{\mathbb{R}_+} (y+z)^{\kappa}\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z) < \infty.$$

Dado que $P = P^{(1)} * P^{(2)}$ y que $E[(Z_t)^{\kappa}]$, razonando de forma análoga a lo anterior, podemos obtener que $E^{(2)}[(Z_t^{(2)})^{\kappa}] < \infty$. Luego, $E^{(2)}[f(Z_t^{(2)})] \leq 1 + E^{(2)}[(Z_t^{(2)})^{\kappa}] < \infty$. Nuevamente, del Lema 22, tenemos que $Z_t^{(2)}$ tiene una distribución de Poisson compuesta, por tanto, existe una medida de probabilidad ρ_t sobre $\mathbb{R}_+$ tal que

$$E^{(2)}[e^{-\lambda Z_t^{(2)}}] = e^{\lambda_t(\hat{\rho}_t(\lambda)-1)}, \qquad t > 0, \quad \lambda \geq 0,$$

con $0 < \lambda_t < \infty$. Además,

$$\rho_t(\cdot) = \lambda_t^{-1} \int_0^t \int_{\{z>1\}} m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\cdot)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s.$$

Aplicando el Lema 21, obtenemos que $E^{(2)}[f(Z_t^{(2)})] < \infty$ implica

$$\int_{\{y>1\}} f(y)\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) < \infty.$$

Por tanto, usando teorema de Fubini, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}_+} y^{\kappa} m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(\mathrm{d}y)\right) \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s &= \int_{\mathbb{R}_+} y^{\kappa}\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\{y\leq 1\}} y^{\kappa}\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) + \int_{\{y>1\}} y^{\kappa}\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} \lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) + \int_{\{y>1\}} f(y)\lambda_t\rho_t(\mathrm{d}y) < \infty,
\end{aligned}$$

que implica que

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}_+} y^\kappa m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(dy) \right) \Pi(dz) < \infty.$$

Además, notemos que para $s \in [0,t]$ y $z > 1$, se cumple

$$\alpha(z,s) = \frac{2b}{\sigma^2(e^{bs}-1)} \geq \frac{2b}{\sigma^2(e^{bs}-1)} = \delta(t).$$

Luego, por el Lema 18, podemos encontrar $\delta = \delta(t) > 0$ y $c_3 = c_3(\delta) > 0$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}_+} y^\kappa m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(dy) \geq c_3 \left(\frac{\alpha(z,s)}{\beta(z,s)} \right)^\kappa = c_3 z^\kappa e^{-\kappa bs}, \qquad s \in [0,t], \quad z > 1.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} c_3 e^{-\kappa bs} \int_{\{z>1\}} z^\kappa \Pi(dz) &\leq \int_{\{z>1\}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} y^\kappa m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(dy) \right) \Pi(dz) \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}_+} y^\kappa m_{\alpha(z,s),\beta(z,s)}(dy) \right) \Pi(dz) < \infty, \end{aligned}$$

con lo que queda probado el teorema. □

5.4. Densidades de transición del JCIR

En esta sección vamos a probar que las densidades de transición del proceso JCIR son positivas. Para ello nos vamos a apoyar en la representación de este proceso como la convolución de dos medidas de probabilidad, como vimos en (5.19). Este resultado es imprescindible para probar la ergodicidad del proceso JCIR.

Teorema 21. *Supongamos que $a > 0$. La variable aleatoria X_t^x tiene función de densidad $p_t(x,y)$ para $x, y \in \mathbb{R}_+$ y $t > 0$, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Además, la función de densidad $p_t(x,y)$ es estrictamente positiva para todo $y > 0$.*

Demostración: De (5.19) tenemos que la ley de X_t iniciando en x es la convolución de Y_t iniciando en x y de Z_t. Es conocido (ver Cox, Ingersoll Jr y Ross [10]) que el proceso CIR $(Y_t : t \geq 0)$ tiene función de densidad absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dada por

$$q_t(x,y) = \kappa e^{-u-v} \left(\frac{v}{u} \right)^{\frac{q}{2}} I_q(2(uv)^{\frac{1}{2}}) \tag{5.36}$$

para $t, x > 0$ y $y \geq 0$, donde

$$\kappa := \frac{2b}{\sigma^2(1-e^{-bt})}, \qquad u := \kappa x e^{-bt},$$

$$v := \kappa y, \qquad q := \frac{2a}{\sigma^2} - 1.$$

Aquí I_q es la función de Bessel modificada de primer tipo de orden q, i.e

$$I_q(r) = \left(\frac{r}{2} \right)^q \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\frac{1}{4}r^2\right)^k}{k!\Gamma(q+k+1)}.$$

Luego, dado que una de las dos medidas de la convolución es absolutamente continua, entonces $\mathbb{P}_x$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y tiene densidad dada por

$$p_t(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} q_t(x,y-z)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z).$$

La función de densidad $q_t(x,y) > 0$ para $y > 0$ y $q_t(x,y) = 0$ para $y < 0$ (ver Fórmula 18 de Cox, Ingersoll Jr y Ross [10], Proposición 6.3.2.1 de Jeanblanc, Yor y Chesney [19] y página 222 de Ikeda y Watanabe [18]).

Sean $t > 0$ y $y > 0$. Para $0 < \delta < y$ suficientemente pequeña, tenemos que

$$p_t(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} q_t(x,y-z)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z) \geq \int_{[0,\delta]} q_t(x,y-z)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z).$$

Probemos que $\int_{[0,\delta]} q_t(x,y-z)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}z) > 0$. Notemos que $q_t(x,y-z) > 0$ para todo $z \in [0,\delta]$, con lo que basta probar que $\mathbb{P}(Z_t \in [0,\delta]) > 0$. Veamos que

$$\mathbb{P}(Z_t \in [0,\delta]) = \mathbb{P}(Z_t = 0) + \mathbb{P}(Z_t \in (0,\delta]).$$

Hay que probar que $\mathbb{P}(Z_t = 0) + \mathbb{P}(Z_t \in (0,\delta]) > 0$.

Si $\mathbb{P}(Z_t = 0) > 0$, ya queda probado el resultado. Vamos a suponer entonces que

$$\mathbb{P}(Z_t = 0) = 0, \tag{5.37}$$

y probemos que necesariamente se tiene que $\mathbb{P}(Z_t \in (0,\delta]) > 0$.

Vamos a denotar

$$\Delta_t(\lambda) = \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{-zu_s(\lambda)} - 1\right)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s, \qquad \lambda \geq 0, \tag{5.38}$$

donde $u_s(\lambda)$ está dada por (5.13). Entonces, usando (5.37), obtenemos

$$\begin{aligned} E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}] - E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}}] &= e^{\lambda\delta}\left(E[e^{-\lambda Z_t}] - E[e^{-\lambda Z_t}\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}}]\right) \\ &= e^{\lambda\delta}\left(e^{\Delta_t(\lambda)} - \mathbb{P}(Z_t=0)\right) \\ &= e^{\lambda\delta}e^{\Delta_t(\lambda)} = e^{\lambda\delta/2}e^{\Delta_t(\lambda)+\lambda\delta/2}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Por otra parte, veamos que para todo $\lambda \in [1,\infty)$ y $s \in [0,t]$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)} - 1\right) &= z\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}(-u_s(\lambda))\right)e^{-zu_s(\lambda)} \\ &= \frac{ze^{-bs}}{\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})\right)^2}\exp\left\{\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})}\right\}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Notemos que como $\lambda \in [1,\infty)$, tenemos que $-\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs}) < 0$ y por tanto

$$1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs}) > 1 \qquad \text{y} \qquad \exp\left\{\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})}\right\} \leq 1.$$

Luego,

$$\frac{ze^{-bs}}{\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})\right)^2}\exp\left\{\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})}\right\}\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\leq ze^{-bs}\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}$$

y

$$\frac{ze^{-bs}}{\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})\right)^2}\exp\left\{\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})}\right\}\mathbf{1}_{\{z>1\}}\leq ze^{-bs}e^{-c_1 z}\mathbf{1}_{\{z>1\}},$$

para alguna constante $c_1>0$ tal que $\frac{-\lambda e^{-bs}}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})}<-c_1$. Además veamos que

$$ze^{-bs}\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\leq (z\wedge 1)e^{-bs}\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}\leq (z\wedge 1)e^{-bs}, \qquad \text{y}$$

$$ze^{-bs}e^{-c_1 z}\mathbf{1}_{\{z>1\}}\leq \frac{e^{-1}}{c_1}e^{-bs}=\frac{e^{-1}}{c_1}e^{-bs}(z\wedge 1),$$

pues la función $g(z)=ze^{-c_1 z}$ está acotada por $\frac{e^{-1}}{c_1}$ dado que alcanza su máximo global en $z=1/c_1$. Usando esto y (5.40), obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)}-1\right) &= \frac{ze^{-bs}}{\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})\right)^2}\exp\left\{\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1+\frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1-e^{-bs})}\right\}\\ &\leq ze^{-bs}\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}}+ze^{-bs}e^{-c_1 z}\mathbf{1}_{\{z>1\}}\\ &\leq (z\wedge 1)e^{-bs}+\frac{e^{-1}}{c_1}e^{-bs}(z\wedge 1)\\ &\leq c_2 e^{-bs}(z\wedge 1), \end{aligned} \tag{5.41}$$

para alguna constante $c_2>0$.

Entonces, tenemos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)}-1\right)\right|\leq c_2 e^{-bs}(z\wedge 1)$$

y

$$\int_0^t\int_0^\infty\left(c_2 e^{-bs}(z\wedge 1)\right)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s=c_2\int_0^t e^{-bs}\mathrm{d}s\int_0^\infty(z\wedge 1)<\infty.$$

Usando el lema de diferenciación (ver Apéndice A o el Lema 16.2 de Bauer [6]), podemos ver que $\Delta_t(\lambda)$ es diferenciable en $\lambda\in[1,\infty)$ y que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\Delta_t(\lambda))=\int_0^t\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)}-1\right)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s, \qquad \lambda\in[1,\infty). \tag{5.42}$$

También notemos a partir de (5.40) que $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\exp\{-zu_s(\lambda)\}-1)>0$ para $z>0$, $\lambda\in[1,\infty)$ y $s\in[0,t]$. Esto implica que la función $\Delta_t(\lambda)$ es estrictamente creciente para $\lambda\in[1,\infty)$. Más aún, tenemos

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)}-1\right)=0.$$

Entonces, haciendo uso de (5.41), (5.42) y del teorema de convergencia dominada, encontramos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta_t(\lambda) = \int_0^t \int_0^\infty \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)} - 1\right) = 0.$$

Por tanto, $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\Delta_t(\lambda) + \frac{\lambda\delta}{2}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\Delta_t(\lambda)) + \frac{\delta}{2} \to \frac{\delta}{2}$, cuando λ tiende a ∞. Esto implica que para λ suficientemente grande la función $\Delta_t(\lambda) + \frac{\lambda\delta}{2}$ es monótona creciente y por tanto

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{\lambda\delta/2}e^{\Delta_t(\lambda)+\lambda\delta/2} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{\lambda\delta/2} \lim_{\lambda\to\infty} e^{\Delta_t(\lambda)+\lambda\delta/2} = \infty, \tag{5.43}$$

pues $\lim_{\lambda\to\infty} e^{\lambda\delta/2} = \infty$ y $e^{\Delta_t(\lambda)+\lambda\delta/2}$ es creciente para λ suficientemente grande.

Luego, de (5.39) y (5.43) se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}] - E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}}]\right) = \infty.$$

Ahora, como supusimos que $\mathbb{P}(Z_t = 0) = 0$, debemos tener que $\mathbb{P}(Z_t \in (0,\delta]) > 0$, pues en otro caso

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\left(E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}] - E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}}]\right)\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\Big(E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}}] + E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{0<Z_t\le\delta\}}] + E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t>\delta\}}] - E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}}]\Big)\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\left(E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{0<Z_t\le\delta\}}] + E[e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t>\delta\}}]\right)\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}(0) + E\left[\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda(Z_t-\delta)}\mathbf{1}_{\{Z_t>\delta\}}\right] = 0,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto, si $\mathbb{P}(Z_t = 0) = 0$, entonces debemos tener $\mathbb{P}(Z_t \in (0,\delta]) > 0$. Con esto queda probado el teorema. □

5.5. Ergodicidad

En esta sección vamos a probar que la condición

$$\int_{\{z>1\}} \log z\Pi(dz) < \infty, \tag{5.44}$$

sobre la medida de Lévy, implica la ergodicidad del proceso JCIR. Nos basamos en la teoría desarrollada en el Capítulo 4 sobre estabilidad de procesos de Markov y en las ideas de Jin, Kremer y Rüdiger [21]. El método que utilizaremos es encontrar una función de Foster-Lyapunov en el sentido de la condición **FLD** dada en la sección 4.2 del Capítulo 4, luego usaremos el Teorema 18 del mismo capítulo para el proceso JCIR, que en particular es un proceso de Markov.

Al igual que en Jin, Kremer y Rüdiger [21] proponemos como función de Foster-Lyapunov a $V(x) = \log(1 + x)$ para $x \in \mathbb{R}_+$, por su estrecha relación con la condición (5.44). Primeramente, vamos a probar un lema que muestra que la función V está en el dominio del generador extendido de el proceso JCIR X. Denotemos por $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ la filtración canónica generada por el proceso X.

Lema 23. *Supongamos que se cumple*

$$\int_{\{z>1\}} \log z \Pi(dz) < \infty.$$

Sea $V(x) = \log(1+x)$, para $x \in \mathbb{R}_+$. Entonces para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}_+$, V está en el dominio del generador extendido de X.

Demostración: Siguiendo la Definición 19 del Capítulo 4, debemos probar que el proceso

$$V(X_t) - V(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}V(X_s)\mathrm{d}s,$$

es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ y que la función $t \mapsto \mathcal{A}V(X_t)$ es $\mathbb{P}_x$-integrable.

Vamos a primero que $V(X_t) - V(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}V(X_s)\mathrm{d}s$ es martingala. Tenemos que

$$V'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{y} \qquad V''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

que implica que la función V es dos veces continuamente diferenciable, para $x \in \mathbb{R}_+$.

Sea $x \in \mathbb{R}_+$ fijo y supongamos que $X_0 = x$ c.s. La versión integrar de (5.1) está dada por

$$X_t = x + \int_0^t (a - bX_s)\mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}B_s + S_t,$$

de donde usando la descomposición de Lévy-Itô dada en (5.3), obtenemos que

$$X_t = x + \int_0^t (a - bX_s)\mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_0^\infty zN(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \qquad t \geq 0.$$

Ahora, usando la fórmula de Itô dada en el Teorema 9 para la función V, la expresión (5.7) y denotando $\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) = N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) - \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$, encontramos que

$$\begin{aligned}
V(X_t) - V(X_0) &= \int_0^t (a - bX_s)V'(X_s)\mathrm{d}s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t X_s V''(X_s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s}V'(X_s)\mathrm{d}B_s \\
&\quad + \int_0^t \int_0^\infty (V(X_{s^-} + z) - V(X_{s^-}))N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \\
&= \int_0^t (a - bX_s)V'(X_s)\mathrm{d}s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t X_s V''(X_s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \int_0^\infty (V(X_{s^-} + z) - V(X_{s^-}))\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\
&\quad + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s}V'(X_s)\mathrm{d}B_s \\
&\quad + \int_0^t \int_0^\infty (V(X_{s^-} + z) - V(X_{s^-}))\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \\
&= \int_0^t (\mathcal{A}V)(X_s)\mathrm{d}s + M_t(V), \qquad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.45}$$

donde hicimos

$$M_t(V) = \sigma \int_0^t \sqrt{X_s}V'(X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_0^\infty (V(X_{s^-} + z) - V(X_{s^-}))\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Si denotamos por

$$M_t^1 = \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} V'(X_s) \mathrm{d}B_s, \qquad M_t^2 = \int_0^t \int_{\{z\leq 1\}} (V(X_{s^-} + z) - V(X_{s^-}))\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$$

y

$$M_t^3 = \int_0^t \int_{\{z>1\}} (V(X_{s^-} + z) - V(X_{s^-}))\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z),$$

entonces podemos escribir $M_t(V) = M_t^1 + M_t^2 + M_t^3$. Hasta ahora hemos probado que

$$V(X_t) - V(X_0) = \int_0^t (\mathcal{A}V)(X_s)\mathrm{d}s + M_t(V).$$

Entonces, para probar que $V(X_t) - V(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}V(X_s)\mathrm{d}s$ es martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ hay que probar $(M_t(V) : t \geq 0)$ es también martingala y que $\int_0^t (\mathcal{A}V)(X_s)\mathrm{d}s$ es finita para toda $t \geq 0$.

Vamos a proceder a probar que $(M_t(V) : t \geq 0)$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Primeramente mostremos que $(M_t^1 : t \geq 0)$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[(M_t^1)^2] &= \mathbb{E}_x\left[\left(\sigma \int_0^t \sqrt{X_s} V'(X_s)\mathrm{d}B_s\right)^2\right] = \sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}_x\left[\frac{X_s}{(1+X_s)^2}\right]\mathrm{d}s \\ &\leq \sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{1+X_s}\right]\mathrm{d}s \leq \sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}s = t\sigma^2 < \infty, \end{aligned}$$

por tanto, por definición de integral de Itô con respecto al movimiento Browniano, $(M_t^1 : t \geq 0)$ es una martingala cuadrado integrable.

Ahora probemos que $(M_t^2 : t \geq 0)$ es martingala. Por el teorema del valor medio, existe un $y* < \infty$ tal que

$$|V(y+z) - V(y)| = z|V'(y*)| \leq z \sup_{y\in\mathbb{R}_+} |V'(y)| = z \sup_{y\in\mathbb{R}_+} |\frac{1}{1+y}| \leq z, \qquad y, z \in \mathbb{R}_+. \tag{5.46}$$

Esto implica que

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^t \int_{\{z\leq 1\}} (V(X_{s^-}+z) - V(X_{s^-}))^2 \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right] \leq t \int_{\{z\leq 1\}} z^2 \Pi(\mathrm{d}z < \infty),$$

lo cual, utilizando el Lema 5 y la Observación 2 del Capítulo 1 (ver también página 62 y 63 de Ikeda y Watanabe [18]), implica que $(M_t^2 : t \geq 0)$ es martingala cuadrado integrable.

Por otro lado, si $y \geq 0$ y $z > 1$, entonces

$$\begin{aligned} |V(y+z) - V(y)| &= \log\left(\frac{1+y+z}{1+y}\right) \\ &= \log\left(1 + \frac{z}{1+y}\right) \\ &\leq \log(1+z) \leq \log(2z) = \log(2) + \log(z). \end{aligned} \tag{5.47}$$

Luego para $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\int_0^t \int_{\{z>1\}} |V(X_{s^-}+z) - V(X_{s^-})|\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right] &\leq t\int_{\{z>1\}} (\log 2 + \log z)\Pi(\mathrm{d}z) \\
&= t\log(2)\Pi(\{z>1\}) \\
&\quad + t\int_{\{z>1\}} \log(z)\Pi(\mathrm{d}z) < \infty,
\end{aligned}
$$

y nuevamente, usando el Lema 5 y la Observación 2 del Capítulo 1 (ver también página 62 y Lema 3.1 de Ikeda y Watanabe [18]), tenemos que $(M_t^3 : t \geq 0)$ es martingala. Por tanto, $(M_t(V) : t \geq 0) = (M_t^1 + M_t^2 + M_t^3 : t \geq 0)$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$.

Entonces basta probar que $\int_0^t \mathcal{A}V(X_s)\mathrm{d}s < \infty$ para $t \geq 0$ para finalizar esta parte de la prueba. De (5.8) tenemos que $\mathcal{A}V = \mathcal{D}V + \mathcal{J}V$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{y\in\mathbb{R}_+} |\mathcal{D}V(y)| &= \sup_{y\in\mathbb{R}_+} \left|(a-by)(1+y)^{-1} + \frac{\sigma^2}{2}(-y)(1+y)^{-2}\right| \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}_+} \left(a\left|\frac{1}{1+y}\right| + b\left|\frac{y}{1+y}\right|\right) + \sup_{y\in\mathbb{R}_+} \frac{\sigma^2}{2}\left|\frac{y}{(1+y)^2}\right| \\
&\leq a + b + \frac{\sigma^2}{2} < \infty.
\end{aligned}
$$

Además, usando (5.46) y (5.47) obtenemos

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{J}V(y)| &\leq \left|\int_{\{z\leq 1\}} (V(y+z) - V(y))\Pi(\mathrm{d}z)\right| + \left|\int_{\{z>1\}} (V(y+z) - V(y))\Pi(\mathrm{d}z)\right| \\
&\leq \int_{\{z\leq 1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) + \log(2)\Pi(\{z>1\}) + \int_{\{z>1\}} \log(z)\Pi(\mathrm{d}z) < \infty,
\end{aligned}
$$

para $y \in \mathbb{R}_+$. Entonces, obtenemos que $|\mathcal{A}V|$ está acotada sobre $\mathbb{R}_+$, lo que implica que

$$
\int_0^t |\mathcal{A}V(X_s)|\mathrm{d}s < \infty,
$$

para toda $t \geq 0$.

Además, el hecho de que $|\mathcal{A}V|$ esté acotada sobre $\mathbb{R}_+$, implica que $\mathbb{E}_x[|\mathcal{A}V(X_t)|] < \infty$, para toda $t \geq 0$, lo que muestra que la función $t \mapsto \mathcal{A}V(X_t)$ es $\mathbb{P}_x$ integrable.

Con esto se concluye la prueba. □

Estamos en condiciones de probar la ergodicidad del proceso JCIR $(X_t : t \geq 0)$ bajo la condición 5.44. Para ello vamos a hacer uso del Teorema 18 del Capítulo 4.

Teorema 22. *Sea $(X_t : t \geq 0)$ el proceso JCIR con parámetros a, b, σ y Π, donde Π es la medida de Lévy de $(S_t : t \geq 0)$. Si*

$$
\int_{\{z>1\}} \log z\Pi(\mathrm{d}z) < \infty,
$$

entonces X es ergódico.

Demostración: Haciendo uso del Teorema 18, para probar que $(X_t : t \geq 0)$ es ergódico debemos probar tres cosas:

(a) que $(X_t : t \geq 0)$ es un proceso de Feller;

(b) que todos los conjuntos compactos del espacio de estado $\mathbb{R}_+$ son petite para alguna cadena esqueleto;

(c) y que se cumple la condición FLD, i.e, existen constantes positivas c, M tales que
$$(\mathcal{A}V)(x) \leq -c + M\mathbf{1}_K(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{5.48}$$
para algún subconjunto compacto $K \in \mathbb{R}_+$, donde $V(x) = \log(1+x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Probemos (a). Como vimos en la primera y segunda sección de este capítulo, el proceso JCIR es un proceso de ramificación continua con inmigración y por tanto, es un proceso de Feller. Véase Apéndice D para más detalle o sección 1 y sección 2 de este capítulo.

Probemos (b). Sea $\delta > 0$ y consideremos la cadena esqueleto $\eta_n = X_{n\delta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. El proceso de ramificación continua X es un proceso de Markov, por tanto $\eta = \{\eta_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ es una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Veamos que la cadena η es irreducible con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}_+$, que denotaremos por λ. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ tal que $\lambda(A) > 0$, entonces del Teorema 21 obtenemos que

$$\mathbb{P}(\eta_1 \in A | \eta_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_\delta \in A) = \int_A p_t(x,y)\mathrm{d}y > 0,$$

ya que las densidades de transición del JCIR son estrictamente positivas para todo $x \in \mathbb{R}_+$ y $y > 0$. Hemos probado que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}_+$ que denotamos por λ es irreducible para η. Probemos ahora que todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ son petite para la cadena $\eta = \{\eta_n\}_{n\geq 1}$. Debido a que el proceso JCIR tiene la propiedad de Feller, la cadena η, iniciando $x \geq 0$ también posee la propiedad de Feller. Por tanto, usando la irreducibilidad, de acuerdo al Teorema 3.4 de Meyn y Tweedie [34], todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ son petite para η.

Probemos (c). Primeramente probemos que $\lim_{x\to\infty} \mathcal{A}V(x)$ existe y es negativo, usando que $\mathcal{A}V = \mathcal{D}V + \mathcal{J}V$. Veamos que

$$\lim_{x\to\infty} (\mathcal{D}V)(x) = \lim_{x\to\infty} (a - bx)(1+x)^{-1} - \lim_{x\to\infty} \frac{\sigma^2}{2} x(1+x)^{-2} = -b$$

Además, veamos que

$$\lim_{x\to\infty} (V(x+z) - V(x)) = \lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{z}{1+x}\right) = 0,$$

y que a partir de (5.46) y (5.47) se obtiene

$$|V(x+z) - V(x)| \leq z\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}} + (\log 2 + \log z)\mathbf{1}_{\{z>1\}},$$

donde $z\mathbf{1}_{\{z\leq 1\}} + (\log 2 + \log z)\mathbf{1}_{\{z>1\}}$ es integrable. Entonces podemos aplicar el teorema de convergencia dominada a la función $V(x+y) - V(x)$ para obtener

$$\lim_{x\to\infty} (\mathcal{J}V)(x) = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} (V(x+z) - V(x))\Pi(\mathrm{d}z) = 0.$$

Esto muestra que $\lim_{x\to\infty} \mathcal{A}V(x)$ existe y es negativo. Luego, existen constantes $c, x_0 > 0$ tales que, para $x > x_0$, se tiene que $(\mathcal{A}V)(x) < -c$.

Por otra parte, de la demostración del Lema 23 vemos que $|\mathcal{A}V|$ es acotada en $\mathbb{R}_+$. Luego, existe $M_0 > 0$ tal que

$$(\mathcal{A}V)(x) \leq M_0 = M_0 + c - c = -c + M,$$

donde $M = M_0 + c$. Luego, para toda $x \in K$, donde $K = [0, x_0]$ es compacto, se cumple que

$$(\mathcal{A}V)(x) \leq -c + M\mathbf{1}_K(x), \qquad x \geq 0,$$

con lo que finalizamos la prueba. □

5.6. Ergodicidad exponencial

En esta sección vamos a estudiar la velocidad de convergencia con la que se la ergodicidad.

Lema 24. *Supongamos que para algún $\kappa > 0$ se cumple*

$$\int_{\{z>1\}} z^{\kappa}\Pi(\mathrm{d}z), \tag{5.49}$$

y sea $V \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ una función no negativa que cumple $V(x) = x^{\kappa\wedge 1}$ para $x \geq 1$. Entonces existen constantes positivas c, M tales que

$$(\mathcal{A}V)(x) \leq -cV(x) + M \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}_+. \tag{5.50}$$

Demostración: Supongamos que $\kappa \geq 1$, lo que implica que $V(x) = x$, para $x \geq 1$. De la expresión 5.8 tenemos que $\mathcal{A}V = \mathcal{D}V + \mathcal{J}V$. Probemos primeramente que $\mathcal{J}V(x)$ está acotada sobre $[1, \infty)$. Notemos que para $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}V(x) &= \int_0^{\infty} (V(x+z) - V(x))\Pi(\mathrm{d}z) = \int_0^{\infty} z\Pi(\mathrm{d}z) \\
&= \int_{\{z\leq 1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) + \int_{\{z>1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) \\
&\leq \int_{\{z\leq 1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) + \int_{\{z>1\}} z^{\kappa}\Pi(\mathrm{d}z) < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, encontremos una cota para $\mathcal{D}V(x)$. Puesto que $V'(x) = 1$ y $V''(x) = 0$, para $x \geq 1$, vemos que

$$\mathcal{D}V(x) = (a - bx)V'(x) + \frac{\sigma^2 x}{2}V''(x) = -bx + a = -bV(x) + a, \qquad x \geq 1. \tag{5.51}$$

Ahora, supongamos que $0 < \kappa < 1$, lo que implica que $V(x) = x^{\kappa}$, para $x \geq 1$. Acotemos nuevamente $\mathcal{J}V(x)$ sobre $[1, \infty)$. Veamos que para $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
(V(x+z) - V(x)) &= ((x+z)^{\kappa} - x^{\kappa}) \\
&\leq x^{\kappa}\left(\left(1 + \frac{z}{x}\right)^{\kappa} - 1\right) \\
&\leq x^{\kappa}\left(1 + \kappa\frac{z}{x} - 1\right) \\
&= x^{\kappa}(\kappa\frac{z}{y}) \\
&= \kappa y^{\kappa-1} z \leq z,
\end{aligned}$$

donde usamos que para todo $\alpha \geq -1$ y $0 \leq \kappa \leq 1$, se cumple $(1+\alpha)^{\kappa} \leq 1+\kappa\alpha$, conocida como desigualdad de Bernoulli. Luego, para $x \geq 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}V(x) &= \int_0^{\infty} (V(x+z) - V(x))\Pi(\mathrm{d}z) \leq \int_0^{\infty} z\Pi(\mathrm{d}z) \\
&= \int_{\{z\leq 1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) + \int_{\{z>1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) \\
&\leq \int_{\{z\leq 1\}} z\Pi(\mathrm{d}z) + \int_{\{z>1\}} z^{\kappa}\Pi(\mathrm{d}z) < \infty.
\end{aligned}$$

Además, para $x \geq 1$, se tiene

$$V'(x) = \kappa x^{\kappa-1}, \qquad V''(x) = \kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2}.$$

Luego, dado que $0 < \kappa < 1$, tenemos para $x \geq 1$ que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}V(x) &= (a-bx)V'(x) + \frac{\sigma^2 x}{2}V''(x) \\
&= -\kappa x^{\kappa-1} + \kappa x^{\kappa-1}\left(a + \frac{\sigma^2(\kappa-1)}{2}\right) \\
&\leq -b\kappa x^{\kappa} + d_0 \\
&= -b\kappa V(x) + d_0,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

con d_0 constante positiva.

A partir de (5.51) y (5.52) y teniendo en cuenta que $\mathcal{J}V(x)$ está acotada sobre $[1,\infty)$, i.e existe $M_0 > 0$ tal que $\mathcal{J}V(x) < M_0$ para todo $x \geq 1$, podemos concluir que

$$\mathcal{A}V(x) \leq \mathcal{D}V(x) + M_0 \leq -b(\kappa \wedge 1)V(x) + (a \vee d_0) + M_0, \qquad \text{para toda } x \geq 1.$$

Finalmente, usando que $V \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, obtenemos que

$$\sup_{x\in[0,1]} |V(x)| < \infty,$$

y por tanto, existe N_0, tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} |\mathcal{A}V(x)| \leq N_0 < \infty.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}V(x) &= \mathcal{A}V(x)\mathbf{1}_{\{x\leq 1\}} + \mathcal{A}V(x)\mathbf{1}_{\{x>1\}} \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} |\mathcal{A}V(x)| + -b(\kappa \wedge 1)V(x) + (a \vee d_0) + M_0 \\
&\leq -b(\kappa \wedge 1)V(x) + (a \vee d_0) + M_0 + N_0.
\end{aligned}$$

Luego, tomando $c = b(\kappa \wedge 1)$ y $M = (a \vee d_0) + M_0 + N_0$, se obtiene que

$$\mathcal{A}V(x) \leq -cV(x) + M, \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R}_+,$$

con lo que concluye la prueba. $\square$

Lema 25. *Supongamos que para algún* $\kappa > 0$ *se cumple* (5.49) *y sea* $V \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *una función no negativa que cumple* $V(x) = x^{\kappa \wedge 1}$ *para* $x \geq 1$. *Entonces existen constantes positivas* c, M *tales que*

$$\mathbb{E}_x[V(X_t)] \leq e^{-ct}V(x) + \frac{M}{c} \qquad \textit{para todo } (t,x) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{5.53}$$

Demostración: Supongamos que $\kappa \geq 1$. Del Teorema 20, tomando tenemos que

$$\mathbb{E}_x[X_t] = \mathbf{E}_x[Y_t] + E[Z_t] < \infty.$$

Además, usando las expresiones (5.18) y (5.38) y siguiendo las mismas ideas de la prueba del Teorema 21, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)} - 1\right) = \frac{ze^{-bs}}{\left(1 + \frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1 - e^{-bs})\right)^2} \exp\left\{\frac{-z\lambda e^{-bs}}{1 + \frac{\sigma^2\lambda}{2b}(1 - e^{-bs})}\right\},$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(\Delta_t(\lambda)) = \int_0^t \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(e^{-u_s(\lambda)} - 1\right)\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s, \qquad \lambda \geq 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_t'(0) &= \int_0^t \int_{(0,\infty)} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(e^{-zu_s(\lambda)} - 1\right)\Big|_{\lambda=0}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s = \int_0^t \int_{(0,\infty)} ze^{-bs}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1 - e^{-bt}}{b}\int_{(0,\infty)} z\Pi(\mathrm{d}z).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
E[Z_t] &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-E[e^{-\lambda Z_t}]\right)\Big|_{\lambda=0} = e^{\Delta_t(0)}\Delta_t'(0) = \int_0^t \int_{(0,\infty)} ze^{-bs}\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1 - e^{-bt}}{b}\int_{(0,\infty)} z\Pi(\mathrm{d}z),
\end{aligned}$$

donde $\int_{(0,\infty)} z\Pi(\mathrm{d}z) = \int_{(0,1)} z\Pi(\mathrm{d}z) + \int_{(1,\infty)} z\Pi(\mathrm{d}z) < \infty$, por hipótesis.

Por otro lado, de (5.16) tenemos que

$$\mathbf{E}_x[e^{-\lambda Y_t}] = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1 - e^{-bt})\right)^{-\frac{2a}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x\lambda e^{-bt}}{1 + \frac{\sigma^2}{2b}\lambda(1 - e^{-bt})}\right),$$

y razonando análogamente al caso de $E[Z_t]$, obtenemos que

$$\mathbf{E}_x[Y_t] = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\mathbf{E}_x[e^{-\lambda Y_t}]\right)\Big|_{\lambda=0} = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) + xe^{-bt}.$$

Esto implica que existe $0 < M_1 < \infty$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[X_t] &= \mathbf{E}_x[Y_t] + E[Z_t] \\
&= (1 - e^{-bt})\left(\frac{a}{b} + \frac{\int_{(0,\infty)} z\Pi(\mathrm{d}z)}{b}\right) + xe^{-bt} \\
&\leq M_1 + xe^{-bt},
\end{aligned}$$

para $t > 0$ y $x \geq 0$.

En este caso, como $V(x)$ es no negativa, se tiene

$$
\begin{aligned}
x = x\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}} + x\mathbf{1}_{\{x<1\}} &\leq (x+1)\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}} + (V(x)+1)\mathbf{1}_{\{x<1\}} \\
&= (V(x)+1)\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}} + (V(x)+1)\mathbf{1}_{\{x<1\}} \\
&= V(x)+1
\end{aligned}
$$

Luego, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[V(X_t)] &= \mathbb{E}_x[V(X_t)\mathbf{1}_{\{X_t>1\}}] + \mathbb{E}_x[V(X_t)\mathbf{1}_{\{X_t\leq 1\}}] \\
&\leq \mathbb{E}_x[X_t] + \sup_{y\in[0,1]} |V(y)| \\
&\leq xe^{-bt} + M_1 + \sup_{y\in[0,1]} |V(y)| \\
&\leq (V(x)+1)e^{-bt} + M_1 + \sup_{y\in[0,1]} |V(y)| \\
&= V(x)e^{-bt} + M_2,
\end{aligned}
$$

donde la constante $M_2 = e^{-bt} + M_1 + \sup_{y\in[0,1]} |V(y)| < \infty$. Por tanto, para $\kappa \geq 1$ se cumple (5.53).

Supongamos ahora que $0 < \kappa < 1$. Vamos a definir $g(t,x) = e^{ct}V(x)$, con $c > 0$. Notemos que

$$
g_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} g(t,x) = ce^{ct}V(x), \qquad g_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} g(t,x) = \begin{cases} \kappa e^{ct} x^{\kappa-1}, & x > 1 \\ e^{ct}V'(x), & x \in [0,1], \end{cases}
$$

Podemos aplicar la fórmula de Itô para $g(t,x)$ y se obtiene

$$
g(t,X_t) - g(0,X_0) = \int_0^t (e^{cs}(\mathcal{A}V)(X_s) + g_s(s,X_s))\,\mathrm{d}s + M_t(g), \qquad t \geq 0, \tag{5.54}
$$

donde

$$
M_t(g) = \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} g_x(s,X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_0^\infty (g(s,X_{s^-}+z) - g(s,X_{s^-}))\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),
$$

donde $\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) = N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) - \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$. Luego, con un procedimiento muy similar al realizado en la prueba del Lema 23 donde mostramos que $M_t(V)$ era martingala, encontramos que $M_t(g)$ es martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ (ver prueba de la Proposición 6.1 de Jin, Rüdiger y Trabelsi [22]).

Entonces, usando (5.54), el Lema 24 y que $(M_t(g) : t \geq 0)$ es martingala, obtenemos para toda $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$ se cumple

$$
\begin{aligned}
e^{ct}\mathbb{E}_x[V(X_t)] - V(x) &= \mathbb{E}_x[g(t,X_t) - g(0,X_0)] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\int_0^t (e^{cs}(\mathcal{A}V)(X_s) + ce^{cs}V(X_s))\mathrm{d}s\right] \\
&\leq \mathbb{E}_x\left[\int_0^t (e^{cs}(-cV(X_s)+M) + ce^{cs}V(X_s))\mathrm{d}s\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\int_0^t e^{cs}M\mathrm{d}s\right] \leq \frac{M}{c}e^{ct}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que se cumple (5.53), con lo que completamos la demostración. $\square$

Estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección, donde usaremos el Lema 16 y nos basaremos fundamentalmente en la prueba del Teorema 19 del Capítulo 4.

Teorema 23. *Sea $(X_t : t \geq 0)$ el proceso JCIR con parámetros a, b, σ y Π, donde Π es la medida de Lévy de $(S_t : t \geq 0)$. Si*

$$\int_{\{z>1\}} z^\kappa \Pi(\mathrm{d}z) < \infty \qquad \text{para algún } \kappa > 0,$$

entonces X es exponencialmente ergódico.

Demostración: Para probar este resultado vamos a utilizar la misma metodología de la demostración del Teorema 19 del Capítulo 4.

Sea $\delta > 0$ y consideremos la cadena esqueleto $\eta_n = X_{n\delta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. El proceso de ramificación continua X que inicia en x es un proceso de Markov, por tanto $\eta = \{\eta_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ que inicia en x es una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\mathbb{R}_+$ con kernel de transición $\mathbb{P}_x(X_{n\delta} \in \cdot)$.

Sea $V \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ una función no negativa que cumple $V(x) = x^{\kappa \wedge 1}$ para $x \geq 1$. Usando el Lema 25 y la propiedad de Markov obtenemos para $t, x \geq 0$ que

$$\mathbb{E}[V(\eta_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \int_{\mathbb{R}_+} V(y)\mathbb{P}_{\eta_n}(X_{n\delta} \in \mathrm{d}y) \leq e^{-ct}V(\eta_n) + \frac{M}{c} \tag{5.55}$$

donde c, M son constantes positivas.

Ahora, probemos que la cadena $\eta = \{\eta_n\}_{n\geq 1}$ iniciando en x es irreducible con respecto a la medida de Lebesgue, que es fuertemente aperíodica y que todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ son petite para la cadena η.

Para ver que la cadena η que inicia en x es irreducible con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}_+$, la cual denotaremos por λ, tomemos $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ tal que $\lambda(A) > 0$. Entonces del Teorema 21 obtenemos que

$$\mathbb{P}(\eta_1 \in A|\eta_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_\delta \in A) = \int_A p_\delta(x,y)\mathrm{d}y > 0,$$

ya que las densidades de transición del JCIR son estrictamente positivas para todo $x \in \mathbb{R}_+$ y $y > 0$. Esto muestra la irreducibilidad.

Probemos ahora que la cadena η que inicia en x es fuertemente aperiódica (ver Definición 23 del Capítulo 4). Tenemos que encontrar un conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, una medida de probabilidad μ tal que $\mu(B) = 1$, y $\epsilon > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(\eta_n \in B \text{ para alguna n} \in \mathbb{N}|\eta_0 = x) > 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{5.56}$$

y

$$\mathbb{P}(\eta_1 \in A|\eta_0 = x) \geq \epsilon \cdot \mu(A), \qquad x \in A, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+). \tag{5.57}$$

Vamos a tomar $B = [0,1]$ y sea $g(y) = \text{ínf}_{x\in[0,1]}\, q_\delta(x,y)$, para $y > 0$, donde la función $q_\delta(x,y)$ es la densidad del proceso CIR y fue dada en la expresión (5.36). Dado que $q_\delta(x,y)$ es estrictamente positiva para un $y > 0$ fijo y es continua en $x \in [0,1]$, tenemos que $g(y) > 0$ y $0 < \int_{[0,1]} g(y)\mathrm{d}y \leq 1$. Vamos a definir

$$\mu(A) = \frac{1}{\int_{[0,1]} g(y)\mathrm{d}y} \int_{A\cap(0,1]} g(y)\mathrm{d}y, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Además, de la prueba del Lema 21, vemos que $\mathbb{P}(Z_t = 0) > 0$ y que para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ se cumple

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(A) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{P}_x(A-y)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}y) \\
&\geq \int_{\{0\}} \mathbf{P}_x(A-y)\mathbb{P}(Z_t \in \mathrm{d}y) \\
&\geq \mathbf{P}_x(A-\{0\})\mathbb{P}(Z_t \in \{0\}) \\
&\geq \mathbb{P}(Z_t = 0)\mathbf{P}_x(A) \\
&\geq \mathbb{P}(Z_t = 0)\int_A q_t(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (5.58)
\end{aligned}$$

Debido a que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ es arbitrario, de (5.58) obtenemos que

$$p_t(x,y) \geq \mathbb{P}(Z_t = 0)q_t(x,y), \qquad (5.59)$$

para toda $t > 0$ y $x, y \geq 0$.

La expresión (5.59) implica que para todo $x \in [0,1]$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\eta_1 \in A|\eta_0 = x) &= \mathbb{P}_x(X_\delta \in A) \\
&\geq \mathbb{P}(Z_\delta = 0)\int_A q_\delta(x,y)\mathrm{d}y \geq \mathbb{P}(Z_\delta = 0)\int_{A\cap(0,1]} g(y)\mathrm{d}y \\
&= \mathbb{P}(Z_\delta = 0)\mu(A)\int_{(0,1]} g(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Por tanto, tomando $\epsilon = \mathbb{P}(Z_\delta = 0)\int_{(0,1]} g(y)\mathrm{d}y$, se cumple (5.57). Además, del Lema 21 tenemos

$$\mathbb{P}(\eta_n \in [0,1] \text{ para alguna n} \in \mathbb{N}|\eta_0 = x) \geq \mathbb{P}(\eta_1 \in [0,1]|\eta_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_\delta \in [0,1]) > 0,$$

para toda $x \in \mathbb{R}_+$, con lo que probamos (5.56).

Probemos ahora que todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ son petite para la cadena $\eta = \{\eta_n\}_{n\geq 1}$ que inicia en x. Hemos probado que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}_+$ que denotamos por λ es irreducible para η iniciando en x. Además, debido a que el procesos JCIR es un proceso afín y tiene la propiedad de Feller, la cadena η que inicia en x, para $x \geq 0$ también posee la propiedad de Feller. Por tanto, de acuerdo al Teorema 3.4 (ii) de la página 553 de Meyn y Tweedie [34], todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$ son petite para η iniciando en $x \geq 0$.

Entonces, se cumplen todas las hipótesis del Lema 16 del Capítulo 4. Esto significa que existen constantes $B < \infty$ y $\beta < 1$ tales que

$$\|\mathbb{P}_x(X_{n\delta} \in \cdot) - \pi\|_{V+1} \leq B(V(x)+1)\beta^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, procediendo como en la prueba del Teorema 19 del Capítulo 4, obtenemos que para un $t \in \mathbb{R}_+$ arbitrario, podemos escribir $t = n\delta + s$, con $s \in [0,\delta)$, para estimar

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{P}_x(X_t \in \cdot) - \pi\|_{V+1} &\leq \int \mathbb{P}_x(X_s \in \mathrm{d}y)\|\mathbb{P}_y(X_{n\delta} \in \cdot) - \pi\|_{V+1} \\
&\leq B\beta^n P_s(V(x)+1) \\
&\leq B\beta^n(e^{-cs}V(x) + \frac{M}{c} + 1) \\
&\leq B\beta^n(V(x) + \frac{M}{c} + 1)
\end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se sigue de (5.53) y la últimna del hecho de que $e^{-ct} < 1$. Por tanto, queda probado el resultado. $\square$

Conclusiones

El estudio de la ergodicidad y los momentos del proceso de difusión de Cox-Ingersoll-Ross con saltos se establece como un tema de importancia en la actualidad, por sus aplicaciones en finanzas y biología, y por el propio interés teórico.

En este trabajo realizamos un estudio de la ergodicidad del proceso de difusión de Cox-Ingersoll-Ross con saltos. Específicamente, estudiamos condiciones bajo las cuales el proceso JCIR es ergódico y analizamos la velocidad de convergencia de dicho proceso a la medida invariante. También estudiamos condiciones que aseguran la existencia de los momentos de la difusión JCIR. Todas las condiciones antes mencionadas fueron dadas sobre la medida de Lévy ν la cual está asociada a los saltos del proceso.

El desarrollo de esta tesis consistió en la creación de un documento autocontenido que estudia la teoría de los procesos de Lévy y su estructura de salto, los procesos de ramificación continua y la estabilidad de procesos de Markov. Como resultado fundamental, se probó que la condición $\int_{\{z>1\}} \log(z)\nu(\mathrm{d}z) < \infty$ asociada a los saltos del proceso JCIR es suficiente para que este sea ergódico, y que la condición $\int_{\{z>1\}} z^{\kappa}\nu(\mathrm{d}z) < \infty$ para algún $\kappa > 0$, asegura que el proceso es exponencialmente ergódico. Además, se demostró que esta última condición se cumple si y solo si existen todos los momentos de la difusión JCIR. Estos resultados se pueden encontrar en Jin, Kremer y Rüdiger [21], sin embargo, en este trabajo se presentan demostraciones alternativas y con un enfoque propio. A su vez, se mostró que la ergodicidad, la velocidad de convergencia y la existencia de los momentos del proceso JCIR son propiedades que están íntimamente relacionadas a los saltos de dicho proceso, pues todas las condiciones presentadas están dadas en función de la medida de Lévy ν. Por tanto, esta tesis contribuye en una mejor compresión de las propiedades trayectoriales a largo plazo del proceso JCIR.

Apéndice A

Vamos a enunciar algunos resultados que son de utilidad en los capítulos 1,2 y 3.

Teorema 24. *Sea $M = (M_t : t \geq 0)$ un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. Sean $\{T_i\}_{i\geq 1}$ los tiempos de llegada de M. Entonces, la ley de $\{T_1, \dots, T_n\}$ condicionado al evento $\{M_t = m\}$ es la misma que la de una muestra independiente y ordenada de tamaño m de la dsitribución uniforme en $[0, t]$, para $t \geq 0$.*

Teorema 25 (Teorema de Clases Monótonas)**.** *Sea S un conjunto y sea $\mathcal{S}$ una colección de funciones real valuadas y acotadas sobre S que es cerrada bajo el producto, i.e si $f, g \in \mathcal{S}$ entonces $fg \in \mathcal{S}$, y sea $\sigma(\mathcal{S})$ la sigma-álgebra generada por $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{E} \supset \mathcal{S}$ un espacio vectorial de funciones real-valuadas y acotadas sobre Ω tal que*

(i) *$\mathcal{E}$ contiene las funciones constantes, y*

(ii) *si $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ es una sucesión de funciones positivas y crecientes, tales que cumplen $\sup_n \sup_\omega |f_n(\omega)| < \infty$, entonces $f = \lim_n f_n \in \mathcal{E}$.*

Entonces, $\mathcal{E}$ contiene a todas las funciones real-valuadas y acotadas $\sigma(\mathcal{S})$-medibles sobre S.

Teorema 26. *Sean μ y $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ medidas de probabilidad infinitamente divisibles sobre $\mathbb{R}$ con tripletas dadas por (a, b, Π) y $\{(a_n, b_n, \Pi_n)\}_{n\geq 1}$ respectivamente y fijemos un $h > 0$ con $\Pi(|x| = h) = 0$. Entonces μ_n converge débilmente a μ si y solo si $a_n^h \to a^h$, $b_n^h \to b^h$ y Π_n converge débilmente a Π, cuando n tiende a ∞.*

Observación: *En muchas de las aplicaciones, encontramos el caso en que $b_n \equiv 0$ para toda n y por tanto $b_n \to 0$. Esto significa que la ley infinitamente divisible μ no tiene componente Browniana. Para solucionar esto y lograr que μ si posea componente Browniana con $b > 0$, podemos escribir las medidas de Lévy Π_n de la siguiente:*

$$\Pi_n(\mathrm{d}x) = \mathbf{1}_{\{x > \frac{1}{n}\}} \Pi(\mathrm{d}x) + bn^2 \delta_{-\frac{1}{n}}(\mathrm{d}x),$$

donde $\delta_{-1/n}$ es la medida de Dirac en $-1/n$. De esta forma, una sucesión de distribuciones infinitamente divisibles sin componente Browniana puede converger a una distribución infinitamente divisible con componente Browniana.

Teorema 27 (Lema de Diferenciación)**.** *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$, que contenga más de un punto, y sea $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función que cumple*

(a) *$\omega \mapsto f(x, \omega)$ es μ-integrable para cada $x \in I$,*

(b) *$x \mapsto f(x, \omega)$ es diferenciable sobre I para cada $\omega \in \Omega$, la derivada en x la denotamos por $f'(x, \omega)$,*

(c) existe una función $h \geq 0$ sobre Ω que es μ-integrable tal que

$$|f'(x,\omega)| \leq h(\omega), \qquad \text{para todo } (x,\omega) \in I \times \Omega.$$

Entonces la función φ definida sobre I por

$$\varphi(x) := \int f(x,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)$$

es diferenciable. Además, para cada $x \in I$ la función $\omega \mapsto f'(x,\omega)$ es μ-integrable y

$$\varphi'(x) = \int f'(x,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega), \qquad \text{para cada } x \in I.$$

Apéndice B

Procesos de Feller y generador infinitesimal

Vamos a introducir los conceptos de proceso de Feller, generador infinitesimal de un proceso de Markov y derivada fuerte, y vamos a enunciar algunos resultados relacionados con estos conceptos.

Definición 28 (Semigrupo). *Sea $(T_t : t \geq 0)$ una familia de operadores lineales acotados en un espacio de Banach L, esta familia se llama semigrupo si para toda $s \geq 0$, $t \geq 0$ se tiene*

$$T_{s+t} = T_s T_t.$$

Definición 29 (Operador Infinitesimal de Semigrupo). *El operador infinitesimal de un semigrupo T_t se define como*

$$Af = \lim_{h \to 0^+} \frac{T_t f - f}{h}$$

si dicho límite existe. Vamos a denotar por $\mathcal{D}(A)$ al conjunto de vectores $f \in L$ para los cuales este límite existe y llamaremos a este conjunto dominio del operador infinitesimal.

A continuación introducimos al semigrupo de Feller, el cual nos permite definir adecuadamente un proceso de Feller.

Definición 30 (Semigrupo de Feller). *Sea $C_0(\mathcal{E})$ el espacio de las funciones continuas sobre $\mathcal{E}$ que se anulan en infinito. Un semigrupo de Feller en $C_0(\mathcal{E})$ es una familia $(T_t : t \geq 0)$ de operadores lineales positivos en $C_0(\mathcal{E})$ tal que*

(i) $T_t f \in C_0(\mathcal{E})$,

(ii) Si $f \in C_0(\mathcal{E})$ *y* $0 \leq f \leq 1$ *entonces* $0 \leq T_t f \leq 1$,

(iii) $T_0 = I$ *y* $T_{t+s} = T_t T_s$ *para* $s, t \geq 0$,

(iv) Para toda $f \in C_0(\mathcal{E})$, $\lim_{t \to 0^+} \|T_t f - f\| = 0$.

Vamos a denotar por L_0 al conjunto de todos los vectores $f \in L$ para los cuales se cumple

$$\lim_{t \to 0^+} T_t f = f.$$

Vamos a definir la noción de derivada fuerte, seguida de un teorema que expresa la relación que tiene con semigrupos y generador infinitesimal.

Definición 31 (Definición de derivada fuerte). *Sea $f : [a, b] \to L$, donde L es un espacio de Banach. Decimos que $f(t)$ es diferenciable en $t \in (a, b)$ si el siguiente límite existe*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

o existe $g \in L$ tal que para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ entonces

$$\left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g \right\| < \epsilon.$$

Teorema 28. *Sea $f \in \mathcal{D}(A)$. Entonces $T_t f \in \mathcal{D}(A)$ para cada $t > 0$, y se tiene*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t f = A(T_t f) = T_t(Af) \qquad t > 0.$$

Demostración: Fijemos $t > 0$. Para $h > 0$ pequeña se tiene

$$\frac{T_{t+h} f - T_t f}{h} = T_t \frac{T_h f - f}{h} = \frac{T_h - I}{h} T_t f,$$

donde si aplicamos límite cuando h tiende a 0^+, gracias a la continuidad de T_t, se cumple que

$$\lim_{h \to 0^+} T_t \frac{T_h f - f}{h} = T_t(Af).$$

Este límte existe y por lo tanto tenemos que $T_t f \in \mathcal{D}(A)$ y además

$$A(T_t f) = T_t(Af) - \frac{\mathrm{d}^+ T_t f}{\mathrm{d}t}.$$

Ahora tomemos $h < 0$ de manera que $t + h > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_{t+h} f - T_t f}{h} - T_t(Af) \right\| &= \left\| T_{t+h} \left(\frac{T_{|h|} f - f}{|h|} \right) - T_{|h|}(Af) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{T_{|h|} f - f}{|h|} - T_{|h|}(Af) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{T_{|h|} f - f}{|h|} - Af \right\| + \left\| Af - T_{|h|}(Af) \right\|. \end{aligned}$$

Si hacemos tender h a cero vemos que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{T_{t+h} f - T_t f}{h} - T_t(Af) \right\| = 0,$$

con lo que queda probado el teorema. □

Ahora enunciemos una proposición que muestra que se puede asociar una única función de transición a cada semigrupo de Feller.

Proposición 1. *A cada semigrupo de Feller T_t sobre $\mathcal{E}$, podemos asociar una única función de transición homogénea $(P_t : t \geq 0)$ tal que*

$$T_t f(x) = P_t f(x)$$

para cada $f \in C_0(\mathcal{E})$, y cada $x \in \mathcal{E}$.

Observación: *Una prueba de este resultado se puede encontrar en la Proposición 2.2 de la página 88 de Revuz y Yor [41].*

Definición 32 (Función de Transición de Feller). *Una función de transcición asociada a un semigrupo de Feller es llamada una función de transición de Feller.*

El siguiente resultado es una caracterización de las funciones de transición de Feller.

Proposición 2. *Una función de transición es de Feller si y solo si*

(i) $P_t C_0(\mathcal{E}) \subset C_0(\mathcal{E})$*;*

(ii) Para toda $f \in C_0(\mathcal{E})$ *y toda* $x \in \mathcal{E}$, $\text{lím}_{t\downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$.

Observación: *Una prueba de este resultado se puede encontrar en la Proposición 2.4 de la página* 89 *de Revuz y Yor [41].*

Finalmente definimos formalmente a un proceso de Feller.

Definición 33 (Proceso de Feller). *Un proceso de Markov que tiene una función de transición de Feller es llamado un proceso de Feller.*

Harris recurrencia

Sea X un proceso de Markov a tiempo continuo y homogéneo con función de transición $(P_t : t \geq 0)$ y easpcio de estados $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y supongamos que X es Harris recurrente como en la Definicón 14 del Capítulo 4, i.e si para alguna medida σ-finita φ,

$$\varphi\{A\} > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x[\eta_A = \infty] = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Vamos a introducir el concepto de resolvente y su relación con la medida invariante. Además vamos a enunciar un resultado que asegura que la propiedad de Harris recurrencia implica la existencia de una única medida invariante.

Definición 34 (Resolvente). *Para cada* $\lambda > 0$ *el resolvente o operador resolvente* U_λ *se define como la transformada de Laplace de* P_t*. i.e para cada* $f \in C_0(\mathcal{E})$*,*

$$(U_\lambda f)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(P_t f)(x)\mathrm{d}t.$$

Proposición 3. *Una medida* π *es invariante para* X *si y solo si* π *es* $\pi U_1 = \pi$*, donde* U_λ *es el resolvente para* P_t *y donde*

$$\pi U_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\pi P_t)(A)\mathrm{d}t, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Observación: *Esta proposición muestra que una medida invariante para* P_t *es invariante para el operador resolvente con* $\lambda = 1$*, es decir para* U_1*. Una prueba de este resultado la podemos encontrar en la proposición 2.1, página 26 de Azéma, Duflo y Revuz [3].*

Teorema 29 (Existencia de una medida invariante). *Si* X *es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante para la función de transición* P_t*, la cual es equivalente a la medida* φU_1*, donde* U_λ *es el operador resolvente.*

Onservación: *Una prueba de este resultado la podemos encontrar en el teorema 2.5, página 28 de Azéma, Duflo y Revuz [3].*

Vamos a enunciar algunos resultados que relacionan directamente el concepto de Harris recurrencia con los conjuntos petite.

Teorema 30. *El proceso X con ley $\mathbb{P}_x$ cuando $X_0 = x$ es Harris recurrente si y solo si existe un conjunto petite C tal que $\mathbb{P}_x(\tau_C < \infty) = 1$, donde $\tau_C = \inf\{t \geq 0 : X_t \in C\}$.*

Observación: *Una prueba de este resultado la encontramos en el teorema 1.1 de Tweedie [45].*

Teorema 31. *Supongamos que X es Harris recurrente con medida invariante π y sea $f \geq 1$ una función medible sobre $\mathbb{R}$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) Existe un conjunto cerrado petite C tal que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X_t) \mathrm{d}t \right] < \infty$$

donde $\tau_C(\delta) = \delta + \theta_\delta \tau_C$ para algún $\delta > 0$.

(ii) X es Harris recurrente positivo y $\pi(f) < \infty$.

Observación: *Aquí θ_δ es un operador de desplazamiento, i.e para $s, t \geq 0$ cumple $\theta_t \theta_s = \theta_{t+s}$ y $X_t \theta_s = X_{t+s}$, ver página 8 de Sharpe [43] para más detalle. Además, podemos interpretar a $\tau_C(\delta)$ como el primer tiempo de llegada a C después de δ. Una prueba de este resultado la encontramos en el teorema 1.2 de Tweedie [45].*

El siguiente resultado es una caracterización de la propiedad de Harris recurrencia.

Teorema 32. *Supongamos que la cadena de Markov $X = \{X_n\}_{n \geq 1}$ es irreducible. Entonces X es recurrente si y solo si existe una conjunto H absorbente, i.e iniciando en x*

$$P_\Delta(X_{n\Delta} \in H, \text{ para toda } n \geq 1) = 1, \quad \text{para toda } x \in H;$$

tal que X^Δ restringida a H es Harris recurrente.

Observación: *Una prueba de este resultado la podemos encontrar en el Teorema 3.7 de Nummelin [38].*

Vamos a mostrar que la norma de la variación total de $P_t(x, \cdot) - \pi$ es una función decreciente de t.

Teorema 33. *Si π es invariante para P_t, entonces la función*

$$n_x(t) = \|P_t(x, \cdot) - \pi\|_{TV}$$

es decreciente en $t \geq 0$.

Demostración: Sea $0 \leq s \leq t$, entonces podemos escribir $t = s + u$, para cierta $u \geq 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
n_x(t) &= \|P_t(x,\cdot) - \pi\|_{TV} = \|P_{s+u}(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \\
&= \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big| P_{s+u}(x,A) - \pi(A) \Big| \\
&\leq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big| \int_{\mathbb{R}} P_s(x,\mathrm{d}y) P_u(y,A) - \pi(A) \Big| \\
&\leq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big| \int_{A} P_s(x,\mathrm{d}y) - \pi(A) \Big| \\
&\leq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big| P_s(x,A) - \pi(A) \Big| \\
&= \|P_s(x,\cdot) - \pi\|_{TV} = n_x(s).
\end{aligned}$$

Con esto queda probado el resultado. □

Vamos a mostrar ahora algunas condiciones suficientes para la ergodicidad de una cadena de Markov.

Teorema 34. *Sea $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ una cadena de Markov con kernel P, irreducible y Harris recurrente sobre H. Entonces para $x \in H$ la cadena es aperíodica y se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(x,\cdot) - \pi\|_{TV} = 0.$$

Observación: *Una prueba de este resultado la podemos encontrar al final de la demostración del teorema 6.1 de la página 509 de Meyn y Tweedie [35].*

Apéndice C

Ecuaciones diferenciales estocásticas de los CSBP

En este apédice vamos a establecer la forma que tiene un proceso de ramificación continua con inmigración como solución una ecuación diferencial estocástica (SDE).

Sea $W = (W_t : t \geq 0)$ un movimiento Browniano estándar y sean $N_0(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)$ y $N_1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$ dos medidas aleatorias de Poisson sobre $(0, \infty)^3$ y $(0, \infty)^2$ con intensidades $\mathrm{d}s\nu_0(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u$ y $\mathrm{d}s\nu_1(\mathrm{d}z)$, respectivamente. Sea $\tilde{N}_0(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) = N_0(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) - \mathrm{d}sm(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u$ la medida compensada de $N_0(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)$. Supongamos además que W, N_0 y N_1 son independientes. Vamos a considerar la SDE

$$\begin{aligned} X_t = X_0 \quad &+ \int_0^t \sqrt{2cX_s}\mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{X_{s-}} z\tilde{N}_0(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \int_0^t (a - bX_s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty zN_1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \end{aligned} \tag{5.60}$$

donde X_0 es independiente de B, N_0 y N_1.

Teorema 35. *Existe una única solución fuerte y no negativa a la SDE (5.60) y dicha solución es un CSBP con inmigración con generador infinitesimal dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) \quad = \quad & cx\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) + \int_0^\infty [f(x+z) - f(x) - z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)]x\nu_0(\mathrm{d}z) \\ & +(a - bx)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \int_0^\infty [f(x+z) - f(x)]\nu_1(\mathrm{d}z), \end{aligned} \tag{5.61}$$

donde $c \geq 0$, $a \geq 0$ y b son constantes, y $\nu_0(\mathrm{d}z)$ y $\nu_1(\mathrm{d}z)$ son medidas σ finitas sobre $(0, \infty)$ que satisfacen

$$\int_0^\infty (z \wedge z^2)\nu_0(\mathrm{d}z) + \int_0^\infty (1 \wedge z)\nu_1(\mathrm{d}z) < \infty.$$

Observación: *Una prueba de este resultado la podemos encontrar en el corolario 6.2 de la página 23 de Fu y Li [15]. Véase también teorema 5.1 y teorema 5.2 de Dawson y Li [11] para otra prueba.*

Apéndice D

Relación entre los CSBP y los procesos de Feller

En este apéndice vamos a mostrar la conexión entre los CSBP y los procesos de Feller. En particular vamos a mostrar que todo proceso regular y afín es un CSBP y viceversa. Además mostramos que todo proceso aín regular es un proceso de Feller.

La clase de procesos afines introducida por Duffie, Filipović y Schachermayer [12] consiste de todos los procesos de Markov a tiempo continuo que toma valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}_+$, para los cuales el logarítmo de la trasformada de Laplace es una función afín de $X_0 = x$. Definamos esta concepto formalmente.

Definición 35 (Proceso afín unidimensional en $\mathbb{R}_+$)**.** *Un proceso de Markov $(X_t : t \geq 0)$ homogéneo en el tiempo con valores en $\mathbb{R}_+$ es llamado afín si la transformada de Laplace es exponencialmente afín en $X_0 = x$. En otras palabras, existen funciones $v(t,\lambda)$ y $u(t,\lambda)$ definidas sobre $\mathbb{R}_+^2$, tales que*

$$\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = \exp\{-v(t,\lambda) - xu(t,\lambda)\}, \tag{5.62}$$

para toda $x \in \mathbb{R}_+$ y $(t,\lambda) \in \mathbb{R}_+^2$.

Vamos a introducir la noción de regularidad para un proceso afín.

Definición 36. *Un proceso afín es regular si las derivadas*

$$F(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} v(t,\lambda)\Big|_{t=0} \quad y \quad R(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,\lambda)\Big|_{t=0}$$

existen y son continuas en $\lambda = 0$.

Ahora vamos a establecer que todo proceso regular afín es un proceso de Feller y que además está completamente caracterizado por las funciones F y R bajo las anteriores condiciones de regularidad.

Teorema 36. *Supongamos que X es un proceso regular afín. Entonces X es un proceso de Feller con generador infinitesimal dado por*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(x) &= cx\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) + (a' - bx)\frac{\partial}{\partial x}f(x) - (d+qx)f(x) \\ &\quad + \int_{(0,\infty)} \left(f(x+z) - f(x) - \frac{\partial}{\partial x}f(x)(1\wedge z) \right) (x\nu_0(\mathrm{d}z) + \nu_1(\mathrm{d}z)),\end{aligned}$$

donde las medidas ν_0 y ν_1 sobre $(0,\infty)$ satisfacen

$$\int_0^\infty (1\wedge z)\nu_1(\mathrm{d}z) + \int_0^\infty (1\wedge z^2)\nu_0(\mathrm{d}z) < \infty.$$

Además, se cumple (5.62) para todo $(t,\lambda) \in \mathbb{R}^2_+$, donde $v(t,\lambda)$ y $u(t,\lambda)$ son soluciones de las ecuaciones de Ricatti generalizadas siguientes,

$$\begin{cases} v(t,\lambda) = \int_0^t F(u(s,\lambda))\mathrm{d}s, & v(0,\lambda) = 0, \\ \partial_t u(t,\lambda) = R(u(t,\lambda)), & u(0,\lambda) = \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{5.63}$$

y las funciones F y R están dadas por

$$R(\lambda) = -c\lambda^2 - b\lambda + q + \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda z} - \lambda(1 \wedge z)\right) \nu_0(\mathrm{d}z)$$

$$F(\lambda) = d + \left(a' - \int_0^\infty (1 \wedge z)\nu_1(\mathrm{d}z)\right) \lambda + \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda z}\right) \nu_1(\mathrm{d}z).$$

Observación: Una demostración de este resultado la podemos encontrar en el teorema 4.3 de la página 7 de Filipović [14]. Para una versión más general de este resultado y su prueba véase el teorema 2.7 de la página 7 de Duffie, Filipović y Schachermayer [12].

Ahora, haciendo uso del teorema anterior, mostremos la relación que tienen los procesos regulares afines con los CSBP con inmigración. Si retomamos la Definición 3.24 de CSBP con imnigración del Capítulo 3, y en el contexto de dicha definición hacemos $u_t(\lambda) = u(t,\lambda)$, $\phi(\lambda) = F(\lambda)$ y $\psi(\lambda) = -R(\lambda)$, encontramos que, gracias al teorema anterior, el proceso regular afín X es un CSBP con inmigración con mecanismo de ramificación igual $-R(\lambda)$, mecanismo de inmigración igual a $F(\lambda)$ tal que

$$\mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = \exp\left\{-xu_t(\lambda) - \int_0^t F(u_s(\lambda))\mathrm{d}s\right\}.$$

Esto se puede expresar como corolario del Teorema 36, que se puede encontrar como corolario 2.10 de la página 8 de Duffie, Filipović y Schachermayer [12].

Corolario 4. *Sea X un proceso regular afín, entonces X es un CSBP con inmigración con mecanismo de ramificación igual $-R(\lambda)$ y mecanismo de inmigración igual a $F(\lambda)$. En sentido contrario, cualquier CSBP con inmigración es un proceso de Markov regular afín.*

Teorema 37 (Momentos de un proceso afín). *Sea X un proceso afín sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \geq 0$ constante. Entonces $\mathbb{E}_x[e^{cX_T}] < \infty$ para $y > 0$.*

Observación: Una prueba de el resultado anterior se puede encontrar en el teorema 2.14 (b) de la página 8 de Keller-Ressel y Mayerhofer [26].

Bibliografía

[1] M. B. Alaya y A. Kebaier, «Parameter estimation for the square-root diffusions: Ergodic and nonergodic cases», *Stochastic Models*, vol. 28, n.º 4, págs. 609-634, 2012.

[2] K. B. Athreya y P. Ney, «A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 245, 493-501, 1978.

[3] J. Azéma, M. Duflo y D. Revuz, «Mesure invariante des processus de Markov récurrents», en *Séminaire de Probabilités III Université de Strasbourg*, Springer, 1969, págs. 24-33.

[4] M. Barczy, M. B. Alaya, A. Kebaier y G. Pap, «Asymptotic properties of maximum likelihood estimator for the growth rate for a jump-type CIR process based on continuous time observations», *Stochastic Processes and their Applications*, 2017.

[5] A. Barletta y E. Nicolato, «Orthogonal expansions for VIX options under affine jump diffusions», *Quantitative Finance*, págs. 1-17, 2017.

[6] H. Bauer, *Measure and integration theory*. Walter de Gruyter, 2001, vol. 26.

[7] M. Ben Alaya y A. Kebaier, «Asymptotic behavior of the maximum likelihood estimator for ergodic and nonergodic square-root diffusions», *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 31, n.º 4, págs. 552-573, 2013.

[8] J. Bertoin, *Lévy processes*. Cambridge university press, 1998, vol. 121.

[9] M. E. Caballero, A. Lambert, G. U. Bravo y col., «Proof (s) of the Lamperti representation of continuous-state branching processes», *Probability Surveys*, vol. 6, págs. 62-89, 2009.

[10] J. C. Cox, J. E. Ingersoll Jr y S. A. Ross, «A theory of the term structure of interest rates», en *Theory of Valuation*, World Scientific, 2005, págs. 129-164.

[11] D. A. Dawson, Z. Li y col., «Skew convolution semigroups and affine Markov processes», *The Annals of Probability*, vol. 34, n.º 3, págs. 1103-1142, 2006.

[12] D. Duffie, D. Filipović y W. Schachermayer, «Affine processes and applications in finance», *Annals of applied probability*, págs. 984-1053, 2003.

[13] D. Duffie y N. Garleanu, «Risk and valuation of collateralized debt obligations», *Financial Analysts Journal*, vol. 57, n.º 1, págs. 41-59, 2001.

[14] D. Filipović, «A general characterization of one factor affine term structure models», *Finance and Stochastics*, vol. 5, n.º 3, págs. 389-412, 2001.

[15] Z. Fu y Z. Li, «Stochastic equations of non-negative processes with jumps», *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 120, n.º 3, págs. 306-330, 2010.

[16] R. K. Getoor, «Transience and recurrence of Markov processes», en *Séminaire de Probabilités XIV 1978/79*, Springer, 1980, págs. 397-409.

[17] B Grigelionis, «Thorin classes of Lévy processes and their transforms», *Lithuanian Mathematical Journal*, vol. 48, n.º 3, pág. 294, 2008.

[18] N. Ikeda y S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Elsevier, 2014, vol. 24.

[19] M. Jeanblanc, M. Yor y M. Chesney, *Mathematical methods for financial markets*. Springer Science & Business Media, 2009.

[20] L. Ji y Z. Li, «Moments of continuous-state branching processes with or without immigration», *arXiv preprint arXiv:1702.08698*, 2017.

[21] P. Jin, J. Kremer y B. Rüdiger, «Moments and ergodicity of the jump-diffusion CIR process», *arXiv preprint arXiv:1709.00969*, 2017.

[22] P. Jin, B. Rüdiger y C. Trabelsi, «Exponential ergodicity of the jump-diffusion CIR process», en *Stochastics of Environmental and Financial Economics*, Springer, 2016, págs. 285-300.

[23] ——, «Positive Harris recurrence and exponential ergodicity of the basic affine jump-diffusion», *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 34, n.º 1, págs. 75-95, 2016.

[24] M. Jiřina, «Stochastic branching processes with continuous state space», *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 8, n.º 2, págs. 292-313, 1958.

[25] M. Keller-Ressel, «MOMENT EXPLOSIONS AND LONG-TERM BEHAVIOR OF AFFINE STOCHASTIC VOLATILITY MODELS», *Mathematical Finance*, vol. 21, n.º 1, págs. 73-98, 2011.

[26] M. Keller-Ressel, E. Mayerhofer y col., «Exponential moments of affine processes», *The Annals of Applied Probability*, vol. 25, n.º 2, págs. 714-752, 2015.

[27] M. Keller-Ressel y T. Steiner, «Yield curve shapes and the asymptotic short rate distribution in affine one-factor models», *Finance and Stochastics*, vol. 12, n.º 2, págs. 149-172, 2008.

[28] M. Kreh, «Bessel functions», *Lecture Notes, Penn State-Göttingen Summer School on Number Theory*, vol. 82, 2012.

[29] A. E. Kyprianou, «Fluctuations of Lévy processes with applications», en *Introductory Lectures*, Universitext. Springer Heidelberg, 2014.

[30] J.-F. Le Gall, *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 1999.

[31] Z. Li, «Continuous-state branching processes», *arXiv preprint arXiv:1202.3223*, 2012.

[32] Z. Li y C. Ma, «Asymptotic properties of estimators in a stable Cox–Ingersoll–Ross model», *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 125, n.º 8, 3196-3233, 2015.

[33] H. Masuda, «Ergodicity and exponential β-mixing bounds for multidimensional diffusions with jumps», *Stochastic processes and their applications*, vol. 117, n.º 1, págs. 35-56, 2007.

[34] S. P. Meyn y R. L. Tweedie, «Stability of Markovian processes I: Criteria for discrete-time chains», *Advances in Applied Probability*, vol. 24, n.º 3, págs. 542-574, 1992.

[35] ——, «Stability of Markovian processes II: Continuous-time processes and sampled chains», *Advances in Applied Probability*, vol. 25, n.º 3, págs. 487-517, 1993.

[36] ——, «Stability of Markovian processes III: Foster–Lyapunov criteria for continuous-time processes», *Advances in Applied Probability*, vol. 25, n.º 3, 518-548, 1993.

[37] ——, *Markov chains and stochastic stability*. Springer Science & Business Media, 2012.

[38] E. Nummelin, *General irreducible Markov chains and non-negative operators*. Cambridge University Press, 2004, vol. 83.

[39] L. Overbeck, «Estimation for continuous branching processes», *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 25, n.º 1, págs. 111-126, 1998.

[40] L. Overbeck y T. Rydén, «Estimation in the cox-ingersoll-ross model», *Econometric Theory*, vol. 13, n.º 3, págs. 430-461, 1997.

[41] D. Revuz y M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 293.

[42] K.-i. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge university press, 1999.

[43] M. Sharpe, *General theory of Markov processes*. Academic press, 1988, vol. 133.

[44] P. Tuominen y R. L. Tweedie, «Exponential decay and ergodicity of general Markov processes and their discrete skeletons», *Advances in Applied Probability*, vol. 11, n.º 4, págs. 784-803, 1979.

[45] S. M. R. Tweedie, «Generalized Resolvents and Harris Recurrence», *Doeblin and modern probability*, vol. 149, pág. 227, 1993.

[46] W. Xu, «Nonparametric Estimation for Jump-Diffusion CIR Model», *arXiv preprint arXiv:1310.4021*, 2013.