CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

Título:

Estudio de la AFPP en espacios de Banach, particularmente en algunos renormamientos de c_0 y ℓ_1

Presentado por:

Jeimer Alveiro Villada Bedoya

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas Básicas

Asesora de tesis:

Helga Andrea Fetter Nathansky

Guanajuato, Gto. México 2018.

A todos los amigos que me
acompañaron en este viaje.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por su acompañamiento cotidiano, por dar siempre lo mejor de sí para mi bienestar, por su fe, por todo su amor y en especial por permitirme ser.

A mi hermano, por la perspectiva serena y objetiva con la que me ayuda a tomar decisiones y resolver problemas. A todos mis amigos, por hacer de esta una experiencia tan grata, por que al compartir día a día en espacios académicos, culturales y recreativos han llenado mi vida de innumerables alegrías y me han permitido crecer con sus experiencias, reflexiones y desafíos. En especial a Yury, por ayudarme a extender las fronteras de mi mundo permitiéndome ver más allá.

Durante mi estancia en la Universidad de Sevilla entre los meses de marzo y junio del 2017 fue posible mejorar el capítulo 4 del presente trabajo en colaboración con la profesora María Japón e iniciar el desarrollo del capítulo 5 a través de diversos seminarios con ella y con el profesor Tomás Domínguez Benavides. A ambos quiero agradecerles toda su atención, amabilidad y los valiosos aportes a este trabajo.

Quiero agradecer a la Universidad de Valencia por permitirme realizar una estancia durante el mes de Julio de 2017 que me permitió ampliar mi perspectiva de los temas de investigación actuales en el área de teoría de punto fijo.

Al CIMAT por el esfuerzo de cada uno de sus miembros en el funcionamiento de esta institución, que hace posible que muchos podamos recibir una formación de tan alta calidad.

Al CONACYT por el soporte económico brindado durante el período del doctorado, que se convirtió en una oportunidad de hacer realidad muchos proyectos.

A mis sinodales por sus valiosos aportes en el proceso de revisión del presente escrito.

A la profesora Helga Fetter Nathansky por darme la oportunidad de desarrollar este proceso bajo su tutelaje, su alto nivel de compromiso con el trabajo y conmigo, por su dedicación, su paciencia, sus enseñanzas, por presentar los desafíos más apropiados para mi crecimiento y por preocuparse siempre por mi desarrollo integral.

Índice general

Introducción

Dos de los resultados más sobresalientes en la matemática del siglo XX son el teorema de punto fijo de Brouwer, que establece que cualquier función continua definida sobre la bola unitaria de un espacio euclídeo en sí misma tiene un punto fijo y el principio de contracción de Banach, que dice que cualquier contracción de un espacio métrico completo en sí mismo también lo tiene.

Ambos teoremas hacen referencia a la existencia de puntos fijos de funciones, esto es, a la solución de la ecuación $f(x) = x$ sobre un cierto subconjunto C de un espacio X, pero son de naturaleza diferente, el primero de ellos es una consecuencia de las propiedades topológicas de ciertos espacios, mientras el segundo involucra la noción de una métrica y el comportamiento de las funciones con respecto a ésta. Cada uno de estos resultados suele considerarse el punto de partida de lo que actualmente son dos ramas de investigación bien definidas en matemáticas, la teoría topológica de punto fijo, que abarca el estudio de propiedades invariantes bajo homeomorfismo que implican la existencia de puntos fijos de funciones y la teoría métrica de punto fijo, que estudia la solución a la ecuación $f(x) = x$ en espacios métricos, determinando como objeto de estudio funciones que tienen un comportamiento específico con respecto a la métrica en cuestión, por lo que la mayoría de sus resultados se verifican sólo salvo isometría entre espacios.

El principio de contracción de Banach ha tenido muchas aplicaciones no sólo dentro del análisis funcional sino también en otras áreas como las ecuaciones diferenciales y la teoría de conjuntos, por esto, desde su formulación hubieron muchos intentos por tratar de generalizar este resultado. Gran parte de los esfuerzos se dedicaron a tratar de debilitar la hipótesis de contractividad sobre las funciones, estudiando problemas para funciones de un tipo más general como las no expansivas o las Lipschitz, lo que sentaría las bases de un nuevo campo de investigación que ha florecido hasta nuestros días mediante la introducción de múltiples conceptos, algunos de los más fructíferos referentes a las propiedades geométricas de los espacios, estableciendo un fuerte vínculo entre la teoría métrica de punto fijo y la geometría de espacios de Banach.

A pesar de que la teoría métrica de punto fijo se enriquece cada día con nuevas afirmaciones, ejemplos, conjeturas y aplicaciones que surgen en la interacción con otras áreas, aún son pocos los resultados que tienen un carácter general, buena parte de la cosecha se ha basado en el estudio de problemas sobre un conjunto específico de espacios con propiedades que en general son sensibles bajo métricas equivalentes.

Dada una función $f : C \to C$ donde C es un subconjunto de un espacio métrico (X, ρ), en ocasiones es difícil encontrar soluciones al problema $f(x) = x$, sin embargo, aún puede convenir estimar alguna solución, esto es, encontrar puntos en C que verifiquen la desigualdad $\rho(f(x), x) < \epsilon$, donde ϵ es una cantidad positiva. Muchas aplicaciones se basan en la posibilidad de resolver esta desigualdad para valores arbitrariamente pequeños de ϵ, generando sucesiones de puntos *casi fijos* para f.

La pregunta por las condiciones sobre C o X que permiten garantizar la existencia de este tipo de sucesiones cuando f es no expansiva planteó un nuevo problema, en cuya base se definió una propiedad conocida como *propiedad de punto fijo aproximada* (AFPP) que, a diferencia de otros conceptos en punto fijo, pudo caracterizarse de modo muy general en el contexto de espacios métricos hiperbólicos ([1]), colección que contiene a los espacios de Banach, pero por esta misma razón en los últimos años han sido pocos los resultados nuevos referentes a esta propiedad y más bien se han aprovechado las herramientas construidas durante su proceso de caracterización en la solución de nuevos problemas.

Una de las hipótesis habituales en los teoremas de punto fijo es la acotación de los dominios de las funciones. Notable es el hecho de que en la actualidad aún no se sabe si existe algún subconjunto convexo, cerrado y no acotado C de un espacio de Banach X que tenga la *propiedad de punto fijo* (FPP) esto es, que satisfaga que para toda función no expansiva $f : C \to C$, f tenga punto fijo. Algunos resultados parciales se han obtenido tratando de esclarecer esta cuestión, entre los que cabe resaltar el trabajo de W. Ray en [2] que establece que no existe tal conjunto si X es un espacio de Hilbert y los trabajos de T. Domínguez Benavides en [3] y [4] en los que prueba que tampoco lo hay en el espacio de sucesiones convergentes a 0 (c_0) y conjetura la misma conclusión para el espacio de sucesiones de módulo sumable (ℓ_1), mostrando que ningún dominio no acotado y w^*-cerrado en este espacio tiene la FPP. Sin embargo aún se desconoce si este hecho se verifica en todos los espacios de Banach.

La propiedad de punto fijo aproximada es el tema principal del presente trabajo por lo que en el capítulo 2 hacemos un breve recorrido histórico por los resultados más importantes obtenidos en teoría de punto fijo referentes a esta propiedad.

En el análisis funcional, uno de los temas de interés son los problemas de permanencia en sumas de espacios de Banach, esto es, dados dos espacios de Banach X,Y indagar por condiciones bajo las cuales el espacio suma directa $X \oplus Y$ preserve las propiedades de X y Y. En 2003 en [5] Takahashi, Saito y Kato definieron la ψ-suma directa de n espacios de Banach $X_1, \ldots, X_n$ y estudiaron el problema de la permanencia de ciertas propiedades de convexidad en el espacio $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$. En la sección 2.2 nosotros estudiamos algunos resultados referentes a la permanencia de la AFPP en este mismo contexto. Esto se encuentra motivado por la pregunta central del capítulo 3 en el que, al enfocarnos en el espacio de sucesiones convergentes a 0, preguntamos si existe alguna relación entre el hecho de que al renormar c_0 con una norma equivalente la colección de conjuntos que satisfacen la propiedad de punto fijo se preserve y los conjuntos con la propiedad de punto fijo aproximada también se preserven, cuestión que nos conduce a analizar en la sección 3.1 una clase de espacios isomorfos a c_0 en la que algunos de los ejemplos son ψ-sumas directas entre c_0 y un espacio de dimensión finita.

En 2014 E. Castillo et al. establecieron que es posible renormar c_0 de manera que la colección de conjuntos con la AFPP en la nueva norma difiera de la respectiva clase en la norma usual de este espacio. En el capítulo 4 analizamos la cuestión de si este hecho se verifica para todos los espacios de Banach no reflexivos. Empezamos nuestro estudio en la sección 4.1 considerando el caso particular del espacio ℓ_1 y abordamos el problema en general en la sección 4.2.

Uno de los resultados más sorprendentes en la teoría de punto fijo fue presentado por P.K. Lin en 2010. En [6] este autor probó que es posible renormar ℓ_1 de modo que tenga la propiedad de punto fijo, respondiendo en forma negativa a la cuestión de si la FPP en espacios de Banach implicaba reflexividad. En la sección 5.1 nos enfocamos en construir el espacio dual del renormamiento de P.K. Lin de ℓ_1 y con este nuevo conocimiento, en las secciones 5.3 y 5.4 estudiamos el problema de si existen normas equivalentes en ℓ_1 o preduales de este espacio distintos de c_0 tales que la colección de conjuntos no acotados y w^*-cerrados en ℓ_1 con la AFPP sea no vacía. En las secciones 5.5 y 5.6 consideramos algunas consecuencias adicionales del estudio de la AFPP en dominios no acotados en ℓ_1 con algunas normas equivalentes y en espacios de Banach más generales bajo ciertas restricciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones y conceptos preliminares

A continuación introducimos la terminología, notación y conceptos básicos en el desarrollo del presente escrito.

Escribiremos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ para representar el conjunto de los números reales y el conjunto de los números naturales respectivamente.

Todos los espacios vectoriales considerados en este trabajo son reales.

En general denotaremos a un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ simplemente por X, excepto si consideramos distintas normas sobre el espacio, en cuyo caso haremos referencia explícita a las normas en cuestión para evitar confusión.

Usaremos la notación X^* para representar al dual del espacio de Banach X.

Denotaremos por B_X y S_X a la bola y esfera unitaria de X respectivamente, es decir, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Dos topologías son de especial interés en nuestro estudio. La *topología débil* (w) sobre X, es la topología generada por la familia de seminormas $\{P_{x^*}\}$, $x^* \in X^*$, donde

$$P_{x^*}(x) = |\langle x, x^* \rangle|, \qquad x \in X$$

con $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$. Cuando una sucesión $(x_n) \subset X$ converge en esta topología a un elemento $x \in X$, es usual escribir que x_n es $\sigma(X, X^*)$ convergente a x ó tambíen que $x_n \stackrel{w}{\to} x$. Análogamente, *la topología débil estrella (w^*)* en X^*, es la topología generada por la familia de seminormas $\{P_x\}, x \in X$, donde

$$P_x(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|, \qquad x^* \in X^*.$$

Cuando $(x_n) \subset X^*$ converge en esta topología a $x \in X^*$, a menudo se dice que x_n es $\sigma(X^*, X)$ convergente a x ó que $x_n \overset{w^*}{\to} x$.

Dado un espacio de Banach X que tiene una propiedad P, uno de los problemas fundamentales en la teoría métrica de punto fijo es determinar si P es *estable*, esto es, si esta propiedad es compartida por todos los espacios de Banach "suficientemente cercanos" a X. Para precisar el problema de estabilidad utilizaremos la siguiente noción de distancia:

Definición 1.1.1. *Sean X y Y espacios de Banach. La distancia de Banach-Mazur entre X y Y, denotada $d(X, Y)$, se define como*

$$d(X, Y) = \inf \left\{ \|T\| \left\|T^{-1}\right\| : T \text{ es un isomorfismo de } X \text{ a } Y \right\}.$$

Cuando X y Y no son isomorfos decimos que $d(X, Y) = \infty$.

De esta forma, en la literatura de la teoría suele considerarse que una propiedad P de un espacio X es estable, si existe $\epsilon > 0$ tal que si Y es otro espacio de Banach con $d(X, Y) < \epsilon$, entonces Y también tiene P.

En un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, la función $\|\cdot\|$ determina su bola unitaria B_X, que es un conjunto convexo y simétrico con respecto al origen. Puesto que muchas de las propiedades de X están determinadas por la geometría de su bola unitaria, resulta de interés saber qué condiciones sobre un conjunto A, convexo y simétrico con respecto al origen, permiten garantizar la existencia de una función $\rho : X \to \mathbb{R}$ con propiedades similares a las de una norma y tal que la bola unitaria de X asociada a ρ sea A. Cuando A es convexo, absorbente y balanceado, el funcional de Minkowski ρ_A del conjunto A es una función con estas características.

Definición 1.1.2. *[7] Suponga que A es un subconjunto de un espacio vectorial X.*

- *Decimos que A es balanceado si $\alpha A \subset A$ cuando $|\alpha| \leq 1$.*

- *Decimos que A es absorbente si, para cada $x \in X$, hay un número positivo s_x tal que $x \in tA$ cuando $t > s_x$.*

Definición 1.1.3. *[7] Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X. Para cada $x \in X$ sea $\rho_A(x) = \inf\{t : t > 0, x \in tA\}$. Entonces ρ_A es el funcional de Minkowski de A.*

Mediante el funcional de Minkowski podemos establecer una correspondencia biunívoca entre la colección de conjuntos convexos, absorbentes y balanceados que contienen al origen y el conjunto de seminormas en X como se deduce a partir de la siguiente proposición:

Proposición 1.1.1. *[7] Supongamos que X es un espacio vectorial.*

a) Sea ρ_A el funcional de Minkowski de un subconjunto absorbente A de X.

(1) La función ρ_A es de valor finito, no negativa y positiva homogénea y $A \subset \{x \in X : \rho_A(x) \leq 1\}$.

(2) Si A es un conjunto convexo, entonces ρ_A es un funcional sublineal de X y $\{x \in X : \rho_A(x) < 1\} \subset A$.

(3) Si A es convexo y balanceado entonces ρ_A es una seminorma en X.

b) Sea p una función de valor real en X no negativa y positiva homogénea y sea $A_p = \{x : x \in X, p(x) < 1\}$

(1) El conjunto A_p es absorbente y p es el funcional de Minkowski de A_p.

(2) Si p es un funcional sublineal, entonces A_p es un conjunto convexo.

(3) Si p es una seminorma, entonces A_p es balanceado y convexo.

Muchos de los problemas del análisis funcional están ligados a la optimización de funcionales lineales definidos sobre un subconjunto K de un espacio de Banach X. En este marco, una de las herramientas fundamentales es el siguiente teorema probado por R. James, que nos permite caracterizar la reflexividad de un espacio de Banach en términos de la solución del problema de optimización para los funcionales del espacio dual.

Teorema 1.1.1. *[8] Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si cada $f \in X^*$ alcanza su norma.*

En algunas situaciones podemos obtener una información más precisa sobre la solución a un problema de optimización en un espacio de Banach X. Recordemos en primer lugar la siguiente definición:

Definición 1.1.4. *[8] Sea C un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de un espacio vectorial topológico. Decimos que $x_0 \in C$ es un punto extremo de C si $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ con $x_1, x_2 \in C$ implica que $x_0 = x_1 = x_2$.*

Denotaremos por $\xi(X)$ al conjunto de puntos extremos de la bola unitaria de un espacio de Banach X.

Cuando consideramos un subconjunto compacto K de X, para encontrar los valores óptimos de funcionales definidos sobre K, basta estudiar el comportamiento de los funcionales en el subconjunto de puntos extremos de K.

Teorema 1.1.2. *[7][Krein-Milman] Sea C un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio vectorial topológico real de Hausdorff localmente convexo X y $f \in X^*$. Entonces hay un punto extremo x_e de C tal que $f(x_e) = \max\{f(x) : x \in C\}$. Consecuentemente $\max\{f(x) : x \in C\} = \max\{f(x) : x \text{ es extremo de } C\}$.*

En el ámbito de punto fijo se considera una amplia variedad de funciones, sin embargo, en este trabajo estaremos interesados en una clase especial, las funciones no expansivas.

Definición 1.1.5. *Sea X un espacio de Banach, $K \subset X$ un subconjunto no vacío, $T : K \to K$ una función. Diremos que T es no expansiva si*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in K.$$

En el caso en el que

$$\|Tx - Ty\| < \|x - y\|, \quad x, y \in K$$

decimos que T es contractiva. Además diremos que x es un punto fijo para T si satisface la ecuación $Tx = x$.

Al restringir nuestro estudio a esta clase de funciones, el problema fundamental en la teoría de punto fijo es determinar condiciones sobre K (o el espacio X que lo contiene) para las cuales toda función $T : K \to K$ no expansiva tiene un punto fijo.

En adelante, supondremos siempre que K es no vacío, considerando habitualmente que es convexo y cerrado. Bajo estas condiciones, si toda función no expansiva $T : K \to K$ tiene punto fijo, decimos que K tiene la *propiedad de punto fijo* (escribiremos FPP para abreviar) y que X tiene la propiedad de punto fijo, si todo $K \subset X$, convexo, cerrado y acotado tiene la FPP.

Si τ es una topología en X, cuando cada subconjunto convexo y τ-compacto K de X tiene la FPP decimos que X tiene la *τ-propiedad de punto fijo* (τ-fpp). De especial interés son los casos en que τ es la topología débil o (cuando X es un espacio dual) τ es la topología w^* del espacio.

En varias de las secciones de este trabajo estudiaremos propiedades de los espacios c_0 y ℓ_1. Recordemos que:

$$c_0 = \{x = (x(i)) : x(i) \in \mathbb{R},\ \lim_{i\to\infty} x(i) = 0\}$$

$$\ell_1 = \{x = (x(i)) : x(i) \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| < \infty\}.$$

Las funciones $\|\cdot\|_\infty : c_0 \to \mathbb{R}$ y $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ tales que para $x = (x(i)) \in c_0$, $y = (y(i)) \in \ell_1$, $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x(i)|$ y $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|$, son respectivamente las normas en estos espacios. Al escribir simplemente c_0 (ℓ_1) sobreentendemos que la norma en el espacio es $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$).

Es usual tratar de aprovechar las propiedades de c_0 y ℓ_1 al estudiar espacios de Banach que contienen una copia isomorfa de alguno de estos espacios, es decir, cuando X tiene un subespacio Y tal que existe $T : c_0 \to Y$ ($T : \ell_1 \to Y$) que es isomorfismo. Esto se justifica en el siguiente resultado:

Teorema 1.1.3. *[9][Teorema de Distorsión de James] Un espacio de Banach X contiene una copia isomorfa de ℓ_1 si y sólo si, para cada $\delta > 0$, existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que*

$$(1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

para todo $(t_n) \in \ell_1$.
Un espacio de Banach X contiene una copia isomorfa de c_0 si y sólo si, para

cada $\delta > 0$, existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que

$$(1-\delta)\sup_n |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sup_n |t_n|$$

se cumple para todo $(t_n) \in c_0$.

En ocasiones en el estudio de problemas de punto fijo, al considerar el teorema de distorsión de James resulta conveniente introducir una condición más fuerte, permitiendo que en las desigualdades izquierdas dadas en este teorema, los elementos de la suma estén multiplicados por una sucesión de escalares que converja a 1, como se propone en la siguiente definición.

Definición 1.1.6. *[10] Un espacio de Banach X contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 si existen sucesiones $(\epsilon_n) \subset (0,1)$ con $\epsilon_n \to 0$ y $(x_n) \subset X$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

para toda $(t_n) \in \ell_1$.

Capítulo 2

La propiedad de punto fijo aproximada

Iniciamos este capítulo haciendo un recuento en la sección 2.1 de algunos de los hechos más relevantes referentes a la propiedad de punto fijo aproximada y su relación con el concepto de acotación direccional. En la sección 2.2 estudiamos algunas de las propiedades de los conjuntos direccionalmente acotados en el contexto de ψ-sumas de espacios de Banach, que nos serán útiles en nuestro desarrollo posterior.

2.1. Conjuntos linealmente acotados y direccionalmente acotados

En muchas circunstancias para obtener información acerca de la propiedad de punto fijo, en lugar de trabajar directamente con resultados referentes a esta propiedad, es conveniente estudiar la siguiente condición "aproximada".

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$ cerrado y convexo. Decimos que K tiene la propiedad de punto fijo aproximada (AFPP) si para toda función no expansiva $T : K \to K$ tenemos que*

$$\inf \{\|Tx - x\| : x \in K\} = 0.$$

Observemos que si un subconjunto K no verifica la AFPP entonces de hecho K no tiene la FPP.

Recordemos que todo subconjunto convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach X tiene la AFPP. Aunque la prueba de este hecho puede encontrarse en [11] la incluimos aquí para mayor completitud de la exposición.

Proposición 2.1.1. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach X y $T : K \to K$ una función no expansiva. Entonces* $\inf \{\|Tx - x\| : x \in K\} = 0$.

Demostración. Sea $z \in K$ y $\epsilon \in (0, 1)$ y considere la función $T_\epsilon : K \to K$ definida por

$$T_\epsilon x = \epsilon z + (1 - \epsilon)Tx.$$

Observemos que T_ϵ es una contracción pues

$$\|T_\epsilon x - T_\epsilon y\| \leq (1 - \epsilon)\|Tx - Ty\| \leq (1 - \epsilon)\|x - y\|, \qquad x, y \in K.$$

Así, por el teorema de contracción de Banach existe $x_\epsilon \in K$ tal que $x_\epsilon = T_\epsilon x_\epsilon$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\|x_\epsilon - Tx_\epsilon\| &= \|\epsilon z + (1 - \epsilon)Tx_\epsilon - Tx_\epsilon\| \\ &= \epsilon\|z - Tx_\epsilon\| \leq \epsilon \operatorname{diam}(K).\end{aligned}$$

La conclusión se sigue puesto que $\epsilon > 0$ fue elegido arbitrariamente. □

La prueba de la proposición anterior depende fuertemente del hecho de que el conjunto es acotado. El problema de determinar cuáles subconjuntos convexos, cerrados y no acotados en un espacio de Banach tienen la AFPP fue mucho más complejo y tuvo sus primeros resultados en [12] en donde K. Goebel y T. Kuczumow mostraron que si $K \subset \ell_2$ es un conjunto bloque, esto es $K = \{x \in \ell_2 : |\langle x, e_i\rangle| \leq a_i, i \in \mathbb{N}\}$ donde (a_i) es una sucesión de números reales no negativos y (e_i) es un conjunto ortonormal en ℓ_2, entonces K tiene la AFPP. Posteriormente W. Ray en [2] generalizó los resultados de Goebel y Kuczumow a ℓ_p con $1 < p < \infty$. Para esto introdujo la definición dada a continuación. Recordemos que un rayo en un espacio de Banach X es un conjunto de la forma $\{a + tb : a, b \in X,\ b \neq 0,\ t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$.

Definición 2.1.2. *Un subconjunto K de un espacio de Banach X se dice linealmente acotado, si su intersección con cualquier rayo en X es acotada.*

Ray probó que todos los subconjuntos convexos, cerrados, no acotados y linealmente acotados en un espacio ℓ_p con $1 < p < \infty$ tienen la AFPP.

Observemos que si un subconjunto C convexo y cerrado en un espacio de Banach X contiene un rayo, es decir, existen $a, b \in X$, con $b \neq 0$ tales que $\{a + tb : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\} \subset C$ al definir $T : C \to C$ como una traslación en la dirección de b, esto es $Tx = x+b$, $x \in C$, T es una función bien definida ya que dado $x \in C$, para todo $t \geq 1$, $\left(1 - \frac{1}{t}\right) x + (a + tb) \frac{1}{t} \in C$ por la convexidad de C. Además, como C es cerrado, al tomar el limite cuando t tiende a infinito se sigue que $x + b \in C$. Por lo tanto $\inf\{\|Tx - x\| : x \in C\} = \|b\| > 0$. Luego, aquellos conjuntos que no son linealmente acotados no tienen la AFPP.

De este modo es natural considerar la cuestión de si la condición de acotación lineal es suficiente para que un conjunto convexo y cerrado tenga la AFPP. En [13] S. Reich demostró que tal condición es suficiente si el espacio es reflexivo.

Teorema 2.1.1. *Un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach reflexivo tiene la AFPP si y sólo si es linealmente acotado.*

I. Shafrir en [1] estudió el problema de la caracterización de la AFPP sin la hipótesis de reflexividad. Para esto propuso el concepto de acotación direccional. No damos aquí la definición original, pero damos la siguiente definición equivalente por ser más operacional.

Definición 2.1.3. *Sea X un espacio de Banach y $C \subset X$ convexo y cerrado. Entonces C es direccionalmente acotado si para cada sucesión $(x_n) \subset C$ con $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$ y para cada punto extremo $f \in S_{X^*}$ tenemos que*

$$\limsup_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) < 1.$$

Observación 2.1.1. *Cuando C no es un conjunto cerrado, para determinar si $\overline{C}$ es direccionalmente acotado mediante la definición anterior, basta considerar sucesiones en C.*

Demostración. Sean $(w_n) \subset \overline{C}$ tal que $\|w_n\| \to \infty$ y $(x_n) \subset C$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - w_n\| < \frac{1}{n}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{\|w_n\|} = 1$ y $|f(x_n) - f(w_n)| \to 0$.

En consecuencia, como $\left(\frac{f(w_n)}{\|w_n\|}\right)$ es acotada,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_n)}{\|x_n\|}-\frac{f(w_n)}{\|w_n\|}\right| &= \left|\frac{f(x_n)}{\|x_n\|}-\frac{f(w_n)}{\|x_n\|}+\frac{f(w_n)}{\|x_n\|}-\frac{f(w_n)}{\|w_n\|}\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x_n)}{\|x_n\|}-\frac{f(w_n)}{\|x_n\|}\right|+\frac{|f(w_n)|}{\|w_n\|}\left|\frac{\|w_n\|}{\|x_n\|}-\frac{\|x_n\|}{\|x_n\|}\right| \to 0.\end{aligned}$$

Como para toda $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\| \to \infty$ se verifica que para cada punto extremo $f \in S_{X^*}$, $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{\|x_n\|} < 1$, tenemos que:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(w_n)}{\|w_n\|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} < 1.$$

□

Para nuestros propósitos necesitamos el siguiente lema que nos indica que dado un subconjunto direccionalmente acotado de un espacio de Banach, la cerradura de la envolvente convexa de la unión de este conjunto y el elemento 0 también es direccionalmente acotada.

Lema 2.1.1. *Sea X un espacio de Banach y $C_1 \subset X$ convexo, cerrado y no acotado. Entonces C_1 es direccionalmente acotado si y sólo si $C = \overline{\mathrm{conv}}\{C_1 \cup \{0\}\}$ lo es.*

Demostración. Si C es direccionalmente acotado como $C_1 \subset C$, C_1 también lo es.

Recíprocamente, si C_1 es direccionalmente acotado, sea $(y_n) \subset C$ tal que $\|y_n\| \to \infty$ y f un punto extremo en S_{X^*}. Para probar que C es direccionalmente acotado por la observación 2.1.1 podemos suponer que $y_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}$ donde $x_i^{(n)} \in C_1$, $\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} \leq 1$ y $\lambda_i^{(n)} \geq 0$ $\forall i, n \in \mathbb{N}$. Sea $x_0 \in C_1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $z_n = y_n + \left(1 - \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)}\right) x_0$. Entonces $z_n \in C_1$ y $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n)}{\|y_n\|} = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{f(z_n)}{\|z_n\|} < 1$. Por lo que C es direccionalmente acotado. □

A través del concepto de acotación direccional Shafrir logró obtener una caracterización general de la AFPP.

Teorema 2.1.2. *Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$. Entonces K tiene la AFPP si y sólo si es direccionalmente acotado.*

También probó el siguiente resultado que establece que la caracterización de la AFPP a través del concepto de acotación lineal dada en el teorema 2.1.1 sólo es válida en espacios reflexivos.

Teorema 2.1.3. *En un espacio de Banach X los subconjuntos convexos y cerrados linealmente acotados siempre son direccionalmente acotados si y sólo si X es reflexivo.*

En el caso de los espacios de dimensión finita puede establecerse que cada subconjunto convexo y cerrado que es linealmente acotado es de hecho acotado y por la proposición 2.1.1 tiene la AFPP. De esta misma afirmación y del teorema 2.1.1 se sigue que si un conjunto convexo y cerrado en un espacio de dimensión finita es no acotado, entonces no tiene la AFPP. Así, en un espacio de dimensión finita siempre existen conjuntos con la AFPP y cada conjunto con esta propiedad es acotado.

Por otra parte, si X es un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, $(x_n) \subset X$ es una sucesión básica normalizada y $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ es una sucesión no acotada, entonces el conjunto $K = \{\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : |t_n| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ es convexo, cerrado, no acotado y linealmente acotado y por el teorema 2.1.1, K tiene la AFPP. Luego, en cada espacio reflexivo de dimensión infinita existen subconjuntos no acotados con la AFPP.

Una pregunta que quedaba abierta a partir del trabajo de Shafrir era si esto mismo se verificaba en espacios de Banach no reflexivos. En [14] S. Reich y E. Matoušková abordaron esta cuestión y para ello aprovecharon la noción de (P)-sucesión y el siguiente lema dados en [1].

Definición 2.1.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una sucesión (x_n) en S_X es llamada una (P)-sucesión si para cada $f \in \xi(X^*)$, hay un $g \in S_{X^*}$ tal que*

$$\limsup_n f(x_n) < \liminf_n g(x_n). \tag{2.1.1}$$

Lema 2.1.2. *Si (x_n) es una (P)-sucesión en el espacio $(X, \|\cdot\|)$, entonces $C = \overline{\mathrm{conv}}(nx_n)$ es un conjunto direccionalmente acotado y por tanto, C tiene la AFPP.*

Observación 2.1.2. *Aunque por la definición 2.1.4 una (P)-sucesión (x_n) es normalizada, si (x_n) es tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ y satisface que para cada $f \in$*

$\xi(X^*)$ existe una $g \in S_{X^*}$ tal que la desigualdad en 2.1.1 se verifica, entonces $C = \overline{\text{conv}}\{nx_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado.

Demostración. Siguiendo el razonamiento en [1, Lema 3.7], si C no es direccionalmente acotado existe $f \in \xi(X^*)$ y $(z_n) \subset C$, $\|z_n\| \to \infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(z_n)}{\|z_n\|} = 1$. Por la observación 2.1.1 podemos suponer que $z_n \subset \text{conv}\{nx_n : n \in \mathbb{N}\}$ es decir, $z_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_1^{(n)} i x_i$, donde $\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} = 1$, $\lambda_i^{(n)} \geq 0$ y $m_n \to \infty$. De las hipótesis sobre (x_n) deducimos que existen $g \in S_{X^*}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ tales que $g(x_n) > (1+\epsilon)f(x_n)$ si $n \geq n_0$. Así, para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} g(z_n) &= \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i^{(n)} i g(x_i) + \sum_{i=n_0+1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} i g(x_i) \\ &> \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i^{(n)} i \left(g(x_i) - (1+\epsilon)f(x_i)\right) + (1+\epsilon)f(z_n). \end{aligned}$$

Al dividir por $\|z_n\|$ ambos lados en la desigualdad anterior y tomar el limite superior obtenemos que

$$1 \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{g(z_n)}{\|z_n\|} \geq (1+\epsilon) \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{\|z_n\|} = (1+\epsilon)$$

lo cual es una contradicción.

□

Llamaremos también (P)-sucesiones a las sucesiones (x_n) que verifican las hipótesis de la definición 2.1.4 y en lugar de ser normalizadas satisfacen que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$.

Los autores anteriormente mencionados, probaron que un espacio de Banach es no reflexivo si y solamente si contiene una (P)-sucesión, con lo que a través del lema 2.1.2 concluyeron que:

Teorema 2.1.4. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces X contiene un subconjunto convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado.*

Dado que la condición de acotación lineal es una condición geométrica que se preserva bajo isomorfismo, en el caso de los espacios reflexivos, la colección de conjuntos con la AFPP se preserva bajo isomorfismo. Sin embargo, como establece el teorema 2.1.3, la colección de conjuntos linealmente acotados no coincide con la clase de conjuntos direccionalmente acotados cuando el espacio no es reflexivo. Quedaba entonces abierta la pregunta de si en un espacio no reflexivo la colección de conjuntos con la AFPP también se preservaba bajo isomorfismo.

En [15] E. Castillo et al abordan esta cuestión, para ello dado $\alpha > 0$ y $x = (x(n)) \in c_0$ definen la siguiente norma

$$\|x\|_{D_\alpha} = \sup\{|x(n) - \alpha x(m)| : n \neq m\}$$

y prueban el siguiente teorema:

Teorema 2.1.5. *Sea $\alpha > 0$. Existe un conjunto direccionalmente acotado $C \subset c_0$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{D_\alpha}$ que no es direccionalmente acotado con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

De esta manera responden negativamente a esta cuestión, dando el primer ejemplo de un espacio no reflexivo para el cual la clase de conjuntos direccionalmente acotados no se preserva incluso bajo renormamientos equivalentes.

2.2. Conjuntos direccionalmente acotados en ψ-sumas de espacios de Banach

En esta sección establecemos algunas propiedades de los conjuntos direccionalmente acotados en ψ-sumas de espacios de Banach. En particular nos interesa probar un resultado de permanencia en el teorema 2.2.5 que nos ayudará en el estudio de la propiedad de punto fijo en dominios no acotados en la sección 3.2. Si bien en dicha sección trabajaremos con condiciones especiales que nos permitirían verificar la conclusión del teorema 2.2.5 para el caso específico considerado, queremos dar este resultado por tener un mayor grado de generalidad.

Recordemos la siguiente definición propuesta en [16]:

Definición 2.2.1. *Una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^m$ se dice absoluta si $\|(x_1,\ldots,x_m)\| = \|(|x_1|,\ldots,|x_m|)\|$ y normalizada si $\|(0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0)\| = 1$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$.*

Denotamos por AN_m la familia de todas las normas absolutas y normalizadas sobre $\mathbb{C}^m$. Sea $m \geq 2$ y

$$\Delta_m = \{(s_1,\ldots,s_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} : s_1 + \cdots + s_{m-1} \leq 1, s_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m-1\}.$$

Saito y Kato en [16] definen Ψ_m como el conjunto de todas las funciones continuas y convexas de valor real sobre Δ_m que satisfacen las siguientes condiciones:

(A_0) $\psi(0,\ldots,0) = \psi(0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) = 1$ $\forall i \in \{1,\ldots,m-1\}$,

(A_1) $\psi(s_1,\ldots,s_{m-1}) \geq (s_1 + \cdots + s_{m-1})\psi\left(\frac{s_1}{\sum_{i=1}^{m-1} s_i},\ldots,\frac{s_{m-1}}{\sum_{i=1}^{m-1} s_i}\right)$

y para todo $i \in \{1,\ldots,m-1\}$

(B_i) $\psi(s_1,\ldots,s_{m-1}) \geq (1-s_i)\psi\left(\frac{s_1}{1-s_i},\ldots,\underset{i}{0},\ldots,\frac{s_{m-1}}{1-s_i}\right)$, $s_i < 1$

y prueban el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *i) Sea $\psi \in \Psi_m$ y $x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{C}^m$, entonces $\|\cdot\|_\psi \in AN_m$, donde*

$$\|x\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + \cdots + |x_m|)\psi\left(\frac{|x_2|}{\sum_{i=1}^m |x_i|},\ldots,\frac{|x_m|}{\sum_{i=1}^m |x_i|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

ii) Si $\|\cdot\| \in AN_m$, entonces la función $\psi : \Delta_m \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(s_1,\ldots,s_{m-1}) = \left\|\left(\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} s_i\right), s_1,\ldots,s_{m-1}\right)\right\|$$

para $(s_1,\ldots,s_{m-1}) \in \Delta_m$, pertenece a Ψ_m y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\psi$.

Dados $\psi \in \Psi_m$ y $X_1,\ldots,X_m$ espacios de Banach, en [5] Kato et al definieron la ψ-suma directa de los espacios X_i como el espacio $\prod_{i=1}^m X_i$ equipado con la norma $\|(x_1,\ldots,x_m)\| = \|(\|x_1\|_1,\ldots,\|x_m\|_m)\|_\psi$, para

$(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Este espacio lo denotamos por $Z = (\sum_{i=1}^m \bigoplus X_i)_\psi$.

En [17] Mitani et al definieron la función $\psi^* : \Delta_m \to \mathbb{R}$ como

$$\psi^*(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \sup_{(t_1,\ldots,t_{m-1})\in\Delta_m} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} s_i\right) + \sum_{i=1}^{m-1} t_i s_i}{\psi(t_1, \ldots, t_{m-1})}$$

y probaron que $\psi^* \in \Psi_m$ y además:

Teorema 2.2.2. *El espacio dual de $Z = (\sum_{i=1}^m \bigoplus X_i)_\psi$ es isométricamente isomorfo a $(\sum_{i=1}^m \bigoplus X_i^*)_{\psi^*}$.*

Con base en lo anterior establecemos que:

Teorema 2.2.3. *Sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios de Banach, $\psi \in \Psi_m$ y $Z = (\sum_{i=1}^m \bigoplus X_i)_\psi$. Si para $1 \leq i \leq m$, $C_i \subset X_i$ es no vacío, convexo y direccionalmente acotado, entonces $C = \{(a_1, \ldots, a_m) : a_i \in C_i,\ 1 \leq i \leq m\}$ es convexo y direccionalmente acotado.*

Demostración. Claramente C es convexo. Si para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que C_i es acotado, la conclusión es inmediata. Así, resta considerar el caso en que C es no acotado.

Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ que satisface la condición:

$$\sup_{(t_1,\ldots,t_{m-1})\in\Delta_m} \frac{\alpha_1\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) + \sum_{j=1}^{m-1} t_j \alpha_{j+1}}{\psi(t_1, \ldots, t_{m-1})} = 1. \tag{2.2.1}$$

Veamos que si $A = \{(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m) : (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ satisface 2.2.1, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $f_i \in S_{X_i^*}$ $1 \leq i \leq m\}$, entonces $A = S_{Z^*}$. En efecto, dado $(g_1, \ldots, g_m) \in S_{Z^*}$, $(g_1, \ldots, g_m) = (\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m)$ donde $\alpha_i = \|g_i\|$ y $f_i = \dfrac{g_i}{\|g_i\|}$ si $g_i \neq 0$ y $\alpha_i = 0$, $f_i \in S_{X_i^*}$ si $g_i = 0$.

Del lema 4.1 en [16] tenemos que $0 \leq \alpha_i = \|g_i\| \leq \|(g_1, \ldots, g_m)\| = 1$.

Además, por definición $f_i \in S_{X_i^*}$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Si $\beta = \sum_{i=1}^m \alpha_i$

$$\begin{aligned}
1 &= \|(g_1, \ldots, g_m)\| = \|(\|g_1\|, \ldots, \|g_m\|)\|_{\psi^*} = \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\|_{\psi^*} \\
&= \beta\psi^*\left(\frac{\alpha_2}{\beta}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\beta}\right) \\
&= \beta \frac{\sup\limits_{(t_1,\ldots,t_{m-1})\in\Delta_m} \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right)\left(1 - \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta}\right) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{t_j\alpha_{j+1}}{\beta}}{\psi\left(t_1, \ldots, t_{m-1}\right)} \\
&= \sup_{(t_1,\ldots,t_{m-1})\in\Delta_m} \frac{\alpha_1\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\alpha_{j+1}}{\psi(t_1, \ldots, t_{m-1})}
\end{aligned}$$

y por tanto $(g_1, \ldots, g_m) \in A$.

Recíprocamente si $(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m) \in A$, del cálculo anterior deducimos que $\|(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m)\| = \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\|_{\psi^*} = 1$ y así $(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m) \in S_{Z^*}$. Luego $S_{Z^*} = A$.

Sea $((a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}))_n$ una sucesión en C tal que $\|(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y $(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m) \in S_{Z^*}$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \frac{|(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m)((a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}))|}{\|(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})\|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m)((a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}))|}{\|(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})\|}
\end{aligned}$$

y que existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\max(\|a_1^{(n)}\|_1, \ldots, \|a_m^{(n)}\|_m) = \|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}.$$

Puesto que para toda $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \leq \dfrac{\|a_i^{(n)}\|_i}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}} \leq 1$, pasando a otra subsucesión podemos suponer también que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_i^{(n)}\|_i}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}} = w_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}\backslash\{i_0\} \quad \text{y que}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{i_0}(a_{i_0}^{(n)})|}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}} = w_{i_0}.$$

Observemos que $w_{i_0} < 1$ ya que $\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0} \to \infty$ y C_{i_0} es direccionalmente acotado. De este modo si $s_j = \dfrac{w_j}{\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m w_i + 1}$ para $j \neq i_0$, $s_{i_0} = \dfrac{1}{\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m w_i + 1}$ y $t_j = s_{j+1}$ para $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{|(\alpha_1 f_1, \ldots, \alpha_m f_m)((a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}))|}{\|(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})\|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_1 f_1(a_1^{(n)}) + \cdots + \alpha_m f_m(a_m^{(n)})|}{\|(\|a_1^{(n)}\|_1, \ldots, \|a_m^{(n)}\|_m)\|_\psi} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 \dfrac{\|a_1^{(n)}\|_1}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}} + \cdots + \alpha_{i_0} \dfrac{|f_{i_0}(a_{i_0}^{(n)})|}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}} + \cdots + \alpha_m \dfrac{\|a_m^{(n)}\|_m}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}}}{\left\| \left(\dfrac{\|a_1^{(n)}\|_1}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}}, \ldots, \dfrac{\|a_m^{(n)}\|_m}{\|a_{i_0}^{(n)}\|_{i_0}} \right) \right\|_\psi} \\
&< \frac{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{i_0} + \cdots + \alpha_m w_m}{\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m w_i + 1 \right) \psi\left(t_1, \ldots, t_{m-1}\right)} \\
&= \frac{\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_{i_0} s_{i_0} + \cdots + \alpha_m s_m}{\psi(s_2, \ldots, s_m)} \\
&= \frac{\alpha_1(1 - t_1 - \cdots - t_{m-1}) + \alpha_2 t_1 + \ldots + \alpha_m t_{m-1}}{\psi(t_1, \ldots, t_{m-1})} \leq 1.
\end{aligned}
$$

□

T. Zachariades definió en [18] la ψ-suma directa de una sucesión de espacios de Banach generalizando la definición propuesta por Kato et al. Sin embargo, al considerar la suma de una infinidad de espacios de Banach, el teorema anterior puede perder su validez. Para ver esto basta considerar la suma 1 de una sucesión de espacios de Banach como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. *Sea (X_n) una sucesión de espacios de Banach y*

$$Z = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \bigoplus X_i \right)_1 = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : (\|x_n\|_n) \in l_1 \right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $C_n = \{x \in X_n : \|x\|_n \leq n\}$ y $C = \{x = (x_n) \in Z : x_n \in C_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Si $x_n \in X_n$ es tal que $\|x_n\|_n = n$ y $(y_i) \subset C$ está dada por

$$y_i(j) = \begin{cases} x_j & si\ 1 \leq j \leq i \\ 0 & si\ j > i \end{cases}$$

observemos que $\|y_i\| \to \infty$. Por el teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in S_{X_n^*}$ tal que $f_n(x_n) = \|x_n\|_n = n$. Si $f = (f_n)$, $f \in B_{Z^*}$ y además

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{f(y_i)}{\|y_i\|} = \limsup_{i\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{i} f_j(x_j)}{\sum_{j=1}^{i} j} = 1.$$

Así, C no es direccionalmente acotado.

Nota. Puesto que el conjunto C en el ejemplo anterior es linealmente acotado, tal ejemplo permite concluir que Z no es reflexivo independientemente de la reflexividad de los espacios X_n.

Dados X y Y espacios de Banach, $\psi \in \Psi_2$ y $Z = X \bigoplus_\psi Y$, si $\pi_1 : Z \to X$ y $\pi_2 : Z \to Y$ son tales que $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$, aunque un subconjunto convexo y cerrado $C \subset Z$ sea direccionalmente acotado, puede suceder que tanto $\pi_1(C)$ como $\pi_2(C)$ no lo sean. Consideramos en primer lugar el siguiente lema cuya demostración es sencilla de establecer y posteriormente un ejemplo que ilustra esta situación.

Lema 2.2.1. *Sea $X = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $\psi \in \Psi_2$ tal que $\psi(t) = 1 \ \forall t \in [0, 1]$. Si $Z = X \bigoplus_\psi X$, el conjunto de puntos extremos de B_{Z^*} está dado por*

$$\xi(B_{Z^*}) = \{(\theta_1 e_k^*, 0) : k \in \mathbb{N},\ \theta_1 \in \{1, -1\}\} \cup \{(0, \theta_2 e_l^*) : l \in \mathbb{N},\ \theta_2 \in \{1, -1\}\}.$$

Ejemplo 2.2.2. *Existen espacios de Banach X, Y, $\psi \in \Psi_2$ y $C \subset Z = X \bigoplus_\psi Y$ convexo, no acotado y direccionalmente acotado, tal que $\pi_1(C)$ y $\pi_2(C)$ no son direccionalmente acotados.*

Demostración. Sean $X = Y = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $\psi \in \Psi_2$ tal que $\psi(t) = 1 \ \forall t \in [0, 1]$ y $Z = X \bigoplus_\psi Y$.
Sea $((x_n, y_n)) \subset Z$ tal que:

$$
\begin{aligned}
x_{2n-1} &= 2^n \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) e_{2i-1}, \text{si } n \geq 1,\\
x_2 &= e_2,\\
x_{2n} &= ne_2 + n \sum_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) e_{2i}, \text{si } n \geq 2,\\
y_1 &= e_1,\\
y_{2n-1} &= ne_1 + n \sum_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) e_{2i-1}, \text{si } n \geq 2,\\
y_{2n} &= 2^n \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) e_{2i}, \text{si } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Sea $C = \operatorname{conv}\{(x_n, y_n)\}$. Si $(z_m) \subset \pi_2(C)$ es tal que $z_m = y_{2m-1}$.

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{e_1^*(z_m)}{\|z_m\|_\infty} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{\|z_m\|_\infty} = 1,
$$

así $\pi_2(C)$ no es direccionalmente acotado. Análogamente vemos que $\pi_1(C)$ no es direccionalmente acotado.

Ahora probaremos que C es direccionalmente acotado. Sea $((u_n, v_n)) \subset C$, tal que $\|(u_n, v_n)\| \to \infty$ y $u_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} x_i$, $v_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} y_i$, con $\sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^{(n)} = 1$, $(m_n) \subset \{2k : k \in \mathbb{N}\}$, $m_n < m_{n+1}$ y $\lambda_j^{(n)} \geq 0$. Así, tenemos que

$$
\begin{aligned}
v_n(1) &= \sum_{j=1}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j,\\
v_n(2k-1) &= \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \sum_{j=k}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j, \text{ si } 1 < k,\ 2k-1 < m_n,\\
v_n(2k) &= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \sum_{j=k}^{m_n/2} 2^j \lambda_{2j}, \text{ si } 1 \leq k,\ 2k \leq m_n,
\end{aligned}
$$

$$u_n(2) = \sum_{j=1}^{m_n/2} \lambda_{2j}^{(n)} j,$$

$$u_n(2k-1) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \sum_{j=k}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} 2^j, \text{ si } 1 \leq k,\ 2k-1 < m_n,$$

$$u_n(2k) = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \sum_{j=k}^{m_n/2} j\lambda_{2j}^{(n)}, \text{ si } 1 < k,\ 2k \leq m_n.$$

Veamos que si $\|v_n\|_\infty \to \infty$ entonces para toda $l \in \mathbb{N} - \{1\}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{e_l^*(v_n)}{\|v_n\|_\infty} < 1. \tag{2.2.2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} v_n(2k+2) &= \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \sum_{j=k+1}^{m_n/2} 2^j \lambda_{2j}^{(n)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} \left[v_n(2k) - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) 2^k \lambda_{2k}^{(n)}\right] \end{aligned}$$

de donde

$$v_n(2k) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)} \left[v_n(2k+2) + \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) 2^k \lambda_{2k}^{(n)}\right].$$

Así

$$\limsup_n \frac{v_n(2k)}{\|v_n\|_\infty} = \limsup_n \frac{v_n(2k+2)}{\|v_n\|_\infty} \cdot \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} < 1.$$

Para $k > 1$

$$\frac{v_n(2k-1)}{\|v_n\|_\infty} \leq \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\left(\sum_{j=k}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j\right)}{\sum_{j=1}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j} \leq 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

y así

$$\limsup_n \frac{v_n(2k-1)}{\|v_n\|_\infty} < 1.$$

Análogamente podemos establecer que si (u_n) es tal que $\|u_n\|_\infty \to \infty$ entonces para toda $k \in \mathbb{N} - \{2\}$

$$\limsup_n \frac{u_n(k)}{\|u_n\|_\infty} < 1. \tag{2.2.3}$$

Para demostrar que C es direccionalmente acotado probaremos que para cada $f \in \xi(S_{Z^*})$

$$\limsup_n \frac{f((u_n, v_n))}{\|(u_n, v_n)\|} < 1.$$

Observemos que basta suponer que $f = (e_k^*, 0)$ o $f = (0, e_l^*)$. Así, sea $f = (0, e_l^*)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$\limsup_n \frac{(0, e_l^*)((u_n, v_n))}{\|(u_n, v_n)\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(e_k^*, 0)((u_n, v_n))}{\|(u_n, v_n)\|}$$

y que

$$w = \limsup_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|_\infty}{\|v_n\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|_\infty}{\|v_n\|_\infty}.$$

Consideramos a continuación las siguientes afirmaciones:

Afirmacion 1. Si $\|v_n\|_\infty \to \infty$ y $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{e_1^*(v_n)}{\|v_n\|_\infty} = 1$, pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|v_n\|_\infty}{\|u_n\|_\infty} = 0.$$

Afirmación 2. Si $\|u_n\|_\infty \to \infty$ y $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{e_2^*(u_n)}{\|u_n\|_\infty} = 1$, pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|_\infty}{\|v_n\|_\infty} = 0.$$

A continuación probaremos la afirmación 1. La demostración de la afirmación 2 es completamente análoga.

Pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{e_1^*(v_n)}{\|v_n\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_1^*(v_n)}{\|v_n\|_\infty} = 1.$$

Puesto que $\frac{j}{2^j} \to 0$ cuando $j \to \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 1$ tal que si $j \geq N$

$$\frac{j}{2^j} \leq \epsilon. \tag{2.2.4}$$

Ya que $v_n(1) = \sum_{j=1}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j \to \infty$, pasando a una subsucesión de ser necesario podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n/2 > N$, $\sum_{j=N}^{m_n/2} 2^{j-1}\lambda_{2j-1}^{(n)} \neq 0$. Así de 2.2.4 deducimos que

$$\frac{\sum_{j=N}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j}{\sum_{j=N}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} 2^{j-1}} \leq \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tal que } m_n/2 > N$$

y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{v_n(1)}{\|u_n\|_\infty} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{v_n(1)}{u_n(1)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j}{\sum_{j=1}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} 2^{j-1}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{\sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{2j-1}^{(n)} j}{\sum_{j=N}^{m_n/2} 2^{j-1}\lambda_{2j-1}^{(n)}} + \frac{\sum_{j=N}^{m_n/2} \lambda_{2j-1}^{(n)} j}{\sum_{j=N}^{m_n/2} 2^{j-1}\lambda_{2j-1}^{(n)}}}{\frac{\sum_{j=1}^{N-1} 2^{j-1}\lambda_{2j-1}^{(n)}}{\sum_{j=N}^{m_n/2} 2^{j-1}\lambda_{2j-1}^{(n)}} + 1} \leq \epsilon, \qquad \epsilon > 0.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{v_n(1)}{\|u_n\|_\infty} = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|v_n\|_\infty}{\|u_n\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|v_n\|_\infty}{v_n(1)} \cdot \frac{v_n(1)}{\|u_n\|_\infty} = 0.$$

Ahora, si $w < \infty$ y $\|v_n\|_\infty \to \infty$, de la afirmación 1 deducimos que $\limsup_{n\to\infty} \frac{v_n(1)}{\|v_n\|_\infty} < 1$ y por 2.2.2 tenemos que para toda $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(0, e_l^*)((u_n, v_n))}{\|(u_n, v_n)\|_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n(l)}{\|u_n\|_\infty + \|v_n\|_\infty} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{v_n(l)}{\|v_n\|_\infty} < 1.$$

Si $w = \infty$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(0, e_l^*)((u_n, v_n))}{\|(u_n, v_n)\|_1} = 0 < 1$.

Si f es de la forma $(e_k^*, 0)$ argumentamos análogamente usando la afirmación 2 y 2.2.3.

□

La situación descrita en el ejemplo anterior no puede presentarse cuando uno de los espacios es de dimensión finita. Para esto, consideramos el siguiente teorema establecido por Koliha en [19].

Teorema 2.2.4. *Sea f una función convexa sobre un intervalo I. Para cualquier subintervalo $[a, b]$ de I y cualquier $\epsilon > 0$ existe una función convexa g de clase C^∞ definida sobre $[a, b]$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon$ $\forall x \in [a, b]$.*

Con base en el resultado anterior podemos probar que:

Teorema 2.2.5. *Sea F un espacio normado de dimensión finita y X un espacio de Banach. Sean $\psi \in \Psi_2$ y $Z = F \bigoplus_\psi X$. Si $C \subset Z$ es convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado, entonces $\pi_2(C)$ es convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado.*

Demostración. Es sencillo establecer que $\pi_2(C)$ es convexo, cerrado y no acotado. Si $\pi_2(C)$ no es direccionalmente acotado existe $(x_n) \subset C$ con $\|x_n\|_X \to \infty$ y $f \in S_{X^*}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{\|x_n\|_X} = 1$.

Sean $((a_n, x_n)) \subset C$ y $w = \limsup_n \dfrac{\|a_n\|_F}{\|x_n\|_X}$. Pasando por una subsucesión podemos suponer que $w = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\|a_n\|_F}{\|x_n\|_X}$. Como $(0, f) \in S_{Z^*}$, si $w = 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(0, f)((a_n, x_n))}{\|(\|a_n\|_F, \|x_n\|_X)\|_\psi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{f(x_n)}{\|x_n\|_X}}{\left\|\left(\frac{\|a_n\|_F}{\|x_n\|_X}, 1\right)\right\|_\psi} = 1,$$

lo que contradice el hecho de que C es direccionalmente acotado.

Si $w = \infty$, por el teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in B_{F^*}$ tal que $g_n(a_n) = \|a_n\|_F$. Ya que $\dim F < \infty$ pasando por una subsucesión podemos suponer que $g_n \to g \in B_{F^*}$. Como

$$\left| \frac{g(a_n)}{\|a_n\|_F} - \frac{g_n(a_n)}{\|a_n\|_F} \right| \leq \|g - g_n\| \to 0$$

se sigue que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{g(a_n)}{\|a_n\|_F} = 1$.

Dado que $(g,0) \in B_{Z^*}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(g,0)((a_n,x_n))}{\|(\|a_n\|_F, \|x_n\|_X)\|_\psi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{g(a_n)}{\|a_n\|_F}}{\left\|\left(1, \frac{\|x_n\|_X}{\|a_n\|_F}\right)\right\|_\psi} = 1,$$

lo que contradice el hecho de que C es direccionalmente acotado. De este modo podemos suponer que $0 < w < \infty$.

Vamos a establecer a continuación que para toda $\phi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ convexa, con $\phi(t) \geq \eta > 0$, $t \in [0,1]$ y $0 < t_0 < 1$, el sistema de ecuaciones en α y β dado por

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\beta t + (1-t)\alpha}{\phi(t)} &= 1, \\ \frac{\alpha(1-t_0) + \beta t_0}{\phi(t_0)} &= 1, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

tiene solución. Supongamos que ϕ es diferenciable. Puesto que ϕ es convexa y $0 < t_0 < 1$,

$$\frac{\phi(t_0) - \phi(0)}{t_0} \leq \phi'(t_0) \leq \frac{\phi(1) - \phi(t_0)}{1 - t_0}.$$

Sea I el intervalo cerrado con extremos $x = \dfrac{\phi(t_0) - (1-t_0)\phi(0)}{t_0}$ y sean $y = \phi(1)$ y $h : I \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = \dfrac{t - \phi(t_0)}{1 - t_0}$. Observemos que h es continua y

$$\text{h(I)} = \left[\frac{\phi(t_0) - \phi(0)}{t_0}, \frac{\phi(1) - \phi(t_0)}{1 - t_0}\right].$$

Así, por el teorema del valor intermedio existe $\beta \in I$ tal que

$$h(\beta) = \frac{\beta - \phi(t_0)}{1 - t_0} = \phi'(t_0). \tag{2.2.6}$$

Si $l : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la restricción al intervalo $[0,1]$ de la recta tangente a la curva ϕ en el punto $(t_0, \phi(t_0))$, $l(t) = \phi'(t_0)t + \phi(t_0) - \phi'(t_0)t_0$ y como ϕ es convexa, $l(t) \leq \phi(t)$, $t \in [0,1]$. A partir de 2.2.6 obtenemos

$$\phi'(t_0)t + \phi(t_0) - \phi'(t_0)t_0 = \left(\frac{\beta - \phi(t_0)}{1 - t_0}\right) t + \frac{\phi(t_0) - \beta t_0}{1 - t_0} \leq \phi(t), \quad t \in [0,1]$$

y por tanto

$$\sup_{t\in[0,1]} \frac{\left(\frac{\beta-\phi(t_0)}{1-t_0}\right)t + \frac{\phi(t_0)-\beta t_0}{1-t_0}}{\phi(t)} = 1.$$

Si $\alpha = \dfrac{\phi(t_0) - \beta t_0}{1 - t_0}$, utilizando la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]} \frac{\alpha(1-t)+\beta t}{\phi(t)} &= \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left(\frac{\phi(t_0)-\beta t_0}{1-t_0}\right)(1-t)+\beta t}{\phi(t)} \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left(\frac{\beta-\phi(t_0)}{1-t_0}\right)t + \frac{\phi(t_0)-\beta t_0}{1-t_0}}{\phi(t)} = 1.\end{aligned}$$

Así (α, β) satisface las ecuaciones en (1). Si ϕ no es diferenciable, por el teorema 2.2.4 existe una sucesión (ϕ_n) de funciones convexas diferenciables tales que $\phi_n \rightrightarrows \phi$, esto es, ϕ_n converge uniformemente a ϕ. Más aún, de la demostración del teorema 2.2.4 se tiene que $\phi_n \geq \phi \geq \eta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si (α_n, β_n) es la solución del sistema en (1) para ϕ_n, como $\phi_n \rightrightarrows \phi$ se sigue que (α_n), (β_n) son acotadas, de este modo pasando por una subsucesión podemos suponer que $\alpha_n \to \alpha$ y $\beta_n \to \beta$ y como $\phi_n(t_0) \to \phi(t_0) \geq \eta > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n(1-t_0)+\beta_n t_0}{\phi_n(t_0)} = \frac{\alpha(1-t_0)+\beta t_0}{\phi(t_0)}.$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es tal que $g_n(t) = \dfrac{\beta_n t + (1-t)\alpha_n}{\phi_n(t)}$, puesto que $\phi_n \rightrightarrows \phi \geq \eta > 0$, $g_n \rightrightarrows \dfrac{\beta t + (1-t)\alpha}{\phi(t)}$ y así

$$1 = \sup_{t\in[0,1]} g_n(t) = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\beta_n t + (1-t)\alpha_n}{\phi_n(t)} \to \sup_{t\in[0,1]} \frac{\beta t + (1-t)\alpha}{\phi(t)}.$$

Luego, $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]} \frac{\beta t + (1-t)\alpha}{\phi(t)} = 1$, por lo que (α, β) satisface las ecuaciones en (1) para ϕ.

Sea $t_0 = \frac{1}{w+1}$. Como $0 < w < \infty$, $0 < t_0 < 1$. Si $\psi \in \Psi_2$, ψ es convexa y $\psi(t) \geq \max(1-t, t) \geq \frac{1}{2}$, $t \in [0,1]$ y por lo anterior, existen α_0, β_0 que satisfacen las ecuaciones

$$\|(\alpha_0, \beta_0)\|_{\psi^*} = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\beta_0 t + (1-t)\alpha_0}{\psi(t)} = 1 \tag{2.2.7a}$$

$$\frac{\alpha_0(1-t_0) + \beta_0 t_0}{\psi(t_0)} = 1. \tag{2.2.7b}$$

Procediendo como en el caso $w = \infty$, podemos encontrar $g \in S_{F^*}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{g_n(a_n)}{\|x_n\|_X} = w$.

Si consideramos el funcional $(\alpha_0 g, \beta_0 f)$, por (2a), $(\alpha_0 g, \beta_0 f) \in S_{Z^*}$ y usando (2b) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha_0 g, \beta_0 f)((a_n, x_n))}{\|(a_n, x_n)\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 g(a_n) + \beta_0 f(x_n)}{\|(\|a_n\|_F, \|x_n\|_X)\|_\psi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 \dfrac{g(a_n)}{\|x_n\|_X} + \beta_0 \dfrac{f(x_n)}{\|x_n\|_X}}{\left\| \left(\dfrac{\|a_n\|_F}{\|x_n\|_X}, 1 \right) \right\|_\psi} = \frac{\alpha_0 w + \beta_0}{(w+1)\psi\left(\dfrac{1}{1+w}\right)} \\
&= \frac{\alpha_0(1-t_0) + \beta_0 t_0}{\psi(t_0)} = 1,
\end{aligned}$$

lo que contradice el hecho de que C es direccionalmente acotado. $\square$

En el resultado anterior, la hipótesis de que uno de los espacios tenga dimensión finita resulta fundamental, como vimos en el ejemplo 2.2.2.

Capítulo 3

La FPP y la AFPP en c_0 con una norma equivalente

En 1982 Maurey [20] usando la técnica de ultrapotencias probó que cada subconjunto no vacío, convexo y $w-$compacto de c_0 tiene la propiedad de punto fijo y en 1998 Llorens Fuster y Sims [21] conjeturaron que el recíproco de esta afirmación era cierto, esto es, si $C \subset c_0$ es no vacío, convexo, cerrado, acotado y tiene la FPP, entonces C debe ser $w-$compacto. Hubieron muchos intentos por resolver esta conjetura, hasta que Dowling, Lennard y Turett en [22] y [23] mostraron que de hecho es cierta.

Entonces Gallagher, Lennard y Popescu en [24] definieron una norma $|||\cdot|||$ equivalente en c_0 y probaron que:

Teorema 3.0.1. *Existe $K \subset (c_0, |||\cdot|||)$ convexo, cerrado, acotado y no w-compacto con la FPP.*

De esta manera mostraron que existen renormamientos de c_0 en los cuales hay conjuntos convexos, cerrados, acotados y no w- compactos que tienen la propiedad de punto fijo.

Domínguez Benavides en [3] se enfocó en el estudio de la propiedad de punto fijo en conjuntos no acotados en c_0. Probó que en cada subconjunto convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado de este espacio es posible encontrar un subconjunto convexo, cerrado y acotado que no es w-compacto y a partir de esto, utilizando algunas de las ideas desarrolladas en la caracterización de la FPP en conjuntos acotados en c_0 ([23]) estableció que:

Teorema 3.0.2. *Sea C un subconjunto convexo y cerrado de c_0. Entonces C tiene la propiedad de punto fijo si y sólo si C es w-compacto.*

Como mencionamos en la sección 2.1, Castillo et al. en [15] probaron que era posible renormar c_0 de tal manera que la familia $\mathcal{D}$ de conjuntos direccionalmente acotados en la nueva norma, es diferente a la respectiva familia $\mathcal{G}$ en la norma usual de este espacio.

En este capítulo preguntamos si existe alguna conexión entre el hecho de que en $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y en c_0 con una norma equivalente, los conjuntos convexos con la AFPP sean diferentes, y el hecho de que las familias de conjuntos convexos y cerrados con la FPP sean diferentes.

Respondemos negativamente a esta pregunta a través de la sección 3.2 dando un ejemplo de una norma equivalente en c_0 que satisface que un conjunto convexo y cerrado C (acotado o no acotado) tiene la FPP si y sólo si C es $w-$compacto y sin embargo la familia de conjuntos con la AFPP en esta norma, no coincide con la respectiva familia de c_0 con su norma usual.

Para lograr nuestro objetivo principal, en la sección 3.1 damos algunos resultados acerca de la relación entre conjuntos que no son w-compactos y la FPP en una familia especial de espacios en los cuales c_0 tiene codimensión finita. Considerar tal familia resulta conveniente pues nos permite aprovechar las propiedades de los conjuntos compactos en espacios de dimensión finita para extender algunos de los resultados conocidos sobre la FPP en c_0 a un contexto más amplio.

3.1. Los espacios $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$, $dimY < \infty$

Dowling, Lennard y Turett en su estudio de la relación en c_0 entre los conjuntos w-compactos y los conjuntos convexos, cerrados, acotados que tienen la FPP en [22] obtuvieron los resultados que mencionaremos a continuación. Para ello primero dieron la siguiente definición:

Definición 3.1.1. *Sea (x_n) una sucesión en un espacio de Banach X. Decimos que (x_n) es asintóticamente isométrica a la base sumante de c_0 si existe $(\epsilon_n) \subset (0,1)$, $\epsilon_n \to 0$ tal que para toda $(t_n) \in \ell_1$*

$$\sup_{n\geq 1} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sup_{n\geq 1} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| .$$

A partir de esta definición probaron que:

Teorema 3.1.1. *Sea X un espacio de Banach y K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Sea $(\epsilon_n) \subset (0,1)$, tal que $\epsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$ $\forall n \geq 2$. Si K contiene una sucesión (x_n) asintóticamente isométrica a la base sumante de c_0 con esta (ϵ_n), entonces existe un subconjunto $C \subset K$ convexo, cerrado, acotado y una función contractiva $T : C \to C$ sin punto fijo.*

Como consecuencia del resultado anterior deducen el siguiente hecho que nos servirá de base para el trabajo en esta sección.

Corolario 3.1.1. *Sea $L > 0$ y K un subconjunto de un espacio de Banach X. Si K contiene una sucesión (x_n) tal que $\left(\frac{x_n}{L}\right)$ es asintóticamente isométrica a la base sumante de c_0 entonces existe $C \subset K$ convexo, cerrado, acotado, no w-compacto y una función no expansiva $T : C \to C$ la cual no posee un punto fijo.*

En la demostración del teorema 3.1.1 el conjunto C considerado es:

$$C = \overline{conv}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}$$

La función contractiva $T : C \to C$ se define sobre cada elemento de la sucesión (x_n) como:

$$Tx_n = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_{n+j}$$

y se extiende linealmente a C, de tal manera que para $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in C$

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_{n+j}.$$

Así, dados $x, y \in C$ con $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$, al considerar la diferencia $Tx - Ty$ se tiene que

$$Tx - Ty = \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - s_n) T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n$$

donde $\alpha_n = t_n - s_n$, $\beta_1 = 0$, $\beta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{1}{2^{n-i}}$ para todo $n \geq 2$.

Observemos que como $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 0$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{1}{2^{n-i+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 0.$$

Como (β_n) es la sucesión en ℓ_1 utilizada en la prueba del teorema 3.1.1, esto significa que en la definición 3.1.1 basta requerir que la desigualdad se cumpla para todas las sucesiones $(t_n) \in \ell_1$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$. Nosotros haremos siempre esta suposición y nos refereriremos a las sucesiones asintóticamente isométricas a la base sumante de c_0 en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ como ai-$\|\cdot\|$ sucesiones.

En esta sección queremos ver si los resultados anteriormente mencionados se verifican también en espacios "similares" a c_0. Al pensar en este tipo de espacios, quizá los más simples son aquellos isomorfos a c_0 de la forma $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$ donde $\|\cdot\|_*$ es una norma de Banach en c_0 y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio normado de dimensión finita. Por esto, este tipo de espacios son nuestro punto de partida.

Hallamos que existen resultados semejantes al teorema 3.1.1 y el corolario 3.1.1 siempre y cuando exista $r \in \mathbb{N}$ tal que $\|(I - P_r)x\|_* = \|(I - P_r)x\|_\infty$ donde $I : c_0 \to c_0$ es la función identidad y $P_r : c_0 \to c_0$ es la proyección al subespacio de c_0 generado por $\{e_1, \dots, e_r\}$, donde $(e_i)_i \subset c_0$ es la base canónica de c_0. En Z consideramos normas de la forma $\|(y, x)\| = |||(\|y\|_Y, \|x\|_*)|||$ donde $|||\cdot|||$ es cualquier norma monótona en $\mathbb{R}^2$ a menos que se especifique de otra manera.

En primer lugar verificamos que las condiciones impuestas sobre la norma $\|\cdot\|_*$ nos permiten garantizar que las topologías en $(c_0, \|\cdot\|_*)$ y c_0 son iguales, de modo que la colección de conjuntos w-compactos es la misma para ambos espacios.

Lema 3.1.1. *Sean $\|\cdot\|_*$ una norma en c_0 y $r \in \mathbb{N}$ tales que para todo $x \in c_0$, $\|(I - P_r)x\|_* = \|(I - P_r)x\|_\infty$. Entonces $\|\cdot\|_*$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Sea $I : (c_0, \|\cdot\|_*) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ la función identidad. Recordando que en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes, tendremos que existe $C > 0$ tal que:

$$\|x\|_* \leq \|(I - P_r)x\|_* + \|P_r x\|_* \leq C\|P_r x\|_\infty + \|(I - P_r)x\|_\infty \leq (C + 1)\|x\|_\infty.$$

Ya que $\{e_1, \dots, e_{r-1}\}$ es complementado en $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, usando el hecho de que P_r y $I - P_r$ son continuas y procediendo análogamente, vemos que existe $B > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq B\|x\|_*$. Luego I es un isomorfismo. $\square$

A continuación establecemos el siguiente lema el cual nos permite relacionar subconjuntos no w-compactos en Z con subconjuntos no w-compactos en c_0.

Lema 3.1.2. *Sea $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de dimensión finita (que puede ser de dimensión* 0*) y $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$. Sean $\pi_1 : Z \to Y$ y $\pi_2 : Z \to c_0$ dados por $\pi_1(y,x) = y$, $\pi_2(y,x) = x$. Si $K \subset Z$ es convexo, cerrado y acotado, entonces K es $w-$compacto en Z si y sólo si $\pi_2(K)$ es $w-$compacto en c_0.*

Demostración. Observe que π_1 y π_2 son lineales y continuas, lo que implica que son $w-w-$continuas y por lo tanto si K es $w-$compacto, $\pi_2(K)$ también lo es.

Recíprocamente, si $\pi_2(K)$ es $w-$compacto y $z_n = (y_n, x_n) \subset K$, hay una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)$ de (x_n) y $x_0 \in \pi_2(K)$ tal que para cada $g \in l_1$, $g\left(x_{n_j}\right) \to_j g(x_0)$. También hay una subsucesión de $\left(y_{n_j}\right)$, tal que $y_{n_{j_k}} \to_j y_0$ para algún $y_0 \in \pi_1(K)$ y así para cada $f \in Y^*$, $f\left(y_{n_{j_k}}\right) \to f(y_0)$. Por tanto para cada $F \in Z^*$, $F\left(z_{n_{j_k}}\right) \to F((y_0, x_0))$ y K es $w-$compacto. □

El siguiente lema es clave en el desarrollo posterior pues al estudiar conjuntos no w-compactos en los espacios Z, nos permitirá restringirnos a un subespacio de Z en el que c_0 tiene codimensión 1, lo que simplificará muchos de nuestros cálculos y podremos utilizar varios de los resultados de Dowling et al.

Lema 3.1.3. *Sea $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$ con dim $Y = k$ y sea $r \in \mathbb{N}$. Sea $K \subset Z$ un conjunto convexo, cerrado y no débilmente compacto. Entonces existe $y_0 \in Y$, $x_0 = \sum_{i=1}^{r} x_0(i) e_i$ y un conjunto $M \subset K$ convexo, cerrado y no débilmente compacto tal que para $z = (y,x) \in M$, $\pi_1(z) = y_0$, y $P_r(x) = x_0$ donde $P_r : c_0 \to c_0$ es la proyección $P_r\left(\sum_{i=1}^{\infty} x(i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} x(i) e_i$.*

Demostración. Puesto que K no es débilmente compacto, por el lema previo $\pi_2(K)$ no es débilmente compacto y por tanto existe una sucesión $(a_n) \subset \pi_2(K) \subset c_0$ tal que $a_n \to_{w^*} a \in l_\infty \backslash c_0$. Pasando por una subsucesión, encontramos una sucesión $z_n^{(1)} = \left(y_n^{(1)}, a_n\right) \subset K$ con $a_n \to_{w^*} a \in l_\infty \backslash c_0$ y $y_n^{(1)} \to y^{(1)} \in \pi_1(K)$. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_k\} \subset Y$ una base de Y y $y_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} y_n^{(1)}(i) u_i$, $n = 0, 1, ...$

Entonces hay una subsucesión de $\left(y_n^{(1)}(1)\right)_n$ tal que

1. $y^{(1)}_{m_j}(1) = y^{(1)}(1)$ para $j \in \mathbb{N}$ ó

2. $y^{(1)}_{m_j}(1) > y^{(1)}_{m_{j+1}}(1) > y^{(1)}(1)$ y $2\left(y^{(1)}_{m_1}(1) - y^{(1)}_{m_{j+1}}(1)\right) > y^{(1)}_{m_1}(1) - y^{(1)}(1)$ para $j \in \mathbb{N}$ (esto es posible puesto que $\lim_j 2\left(y^{(1)}_{m_1}(1) - y^{(1)}_{m_{j+1}}(1)\right) = 2\left(y^{(1)}_{m_1}(1) - y^{(1)}(1)\right) > 0$) ó

3. $y^{(1)}_{m_j}(1) < y^{(1)}_{m_{j+1}}(1) < y^{(1)}(1)$ y $2\left(y^{(1)}_{m_{j+1}}(1) - y^{(1)}_{m_1}(1)\right) > y^{(1)}(1) - y^{(1)}_{m_1}(1)$ para $j \in \mathbb{N}$.

En el primer caso sea $z^{(2)}_n = z^{(1)}_{m_n} = \left(y^{(1)}_{m_n}, a_{m_n}\right)$ para $n \in \mathbb{N}$. Observe que $y^{(1)}_{m_n}(1) = y^{(1)}(1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En el segundo y tercer caso sea $t_n = \frac{y^{(1)}_{m_1}(1) - y^{(1)}(1)}{2\left(y^{(1)}_{m_1}(1) - y^{(1)}_{m_{n+1}}(1)\right)}$. Entonces $0 < t_j < 1$ y $\lim_j t_j = \frac{1}{2}$. Sea $z^{(2)}_n = (1 - t_n) z_{m_1} + t_n z_{m_{n+1}} \in K$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(1 - t_n) y^{(1)}_{m_1}(1) + t_n y^{(1)}_{m_{n+1}}(1) &= t_n \left(y^{(1)}_{m_{n+1}}(1) - y^{(1)}_{m_1}(1)\right) + y^{(1)}_{m_1}(1) \\ &= \frac{1}{2}\left(y^{(1)}(1) + y^{(1)}_{m_1}(1)\right).\end{aligned}$$

En los tres casos sea $M_1 = \overline{conv\{z^{(2)}_n\}}$. Entonces M_1 no es débilmente compacto, puesto que en el primer caso $\pi_2\left(z^{(2)}_n\right) = a_{m_n} \xrightarrow{w^*} a$ y en los otros dos casos $\pi_2\left(z^{(2)}_n\right) = (1 - t_n) a_{m_1} + t_n a_{m_{n+1}} \xrightarrow{w^*} \frac{1}{2}(a_{m_1} + a) \in l_\infty \backslash c_0$. Observe que para $z = (y, x) \in M_1$, $y(1)$ es constante. Aplicando a $\left(z^{(2)}_n\right)_n$ el mismo procedimiento realizado con $\left(z^{(1)}_n\right)$ obtenemos un subconjunto convexo, cerrado y no débilmente compacto M_2 de M_1 tal que para $z = (y, x) \in M_2$, $y(1)$ y $y(2)$ son constantes. Repitiendo esto, finalmente llegamos a un conjunto convexo, cerrado y no débilmente compacto $M_k \subset K$ tal que para $z = (y, x) \in M_k$, tenemos que $y = y_0$. Ahora, si $w_n = (y_0, b_n) \in M_k$ es una sucesión en M_k tal que $b_n \to_{w^*} b \in l_\infty \backslash c_0$, pasando a una subsucesión podemos suponer que $P_r(b_n) \to x_0$. Procediendo como en la primera parte llegamos a un conjunto convexo, cerrado y no débilmente compacto $M \subset K$ tal que si $z = (y, x) \in M$, $y = y_0$ y $P_r(x) = x_0$. $\square$

A partir de lo anterior podemos establecer el siguiente resultado análogo al de Dowling et al para el caso de los espacios Z.

Teorema 3.1.2. *Sea* $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$ *donde* $\dim Y = k$ *y* $\|(I - P_r)x\|_* = \|(I - P_r)x\|_\infty$ *para algún* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Consideremos una norma* $\|\cdot\|$ *sobre* Z *tal que para* $(y, x) \in Z$, $\|(y, x)\| = |||(\|y\|_Y, \|x\|_*)|||$, *donde* $|||\cdot|||$ *es cualquier norma monótona en* $\mathbb{R}^2$ *que satisface que para* $b \in \mathbb{R}$, $|||(0, b)||| = |b|$.
Entonces, si $K \subset Z$ *es convexo, cerrado, acotado y no* $w-$*compacto,* K *contiene un múltiplo de una ai* -$\|\cdot\|$ *sucesión y así, existe* $C \subset K$ *convexo, cerrado, acotado y sin la FPP.*

Demostración. Por el lema 3.1.3 existe $M \subset K$ convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto y $y_0 \in Y$, $x_0 \in P_r(c_0)$ tal que si $(y, x) \in M$, entonces $y = y_0$ y $P_r x = x_0$. Sea $\pi_2 : Z \to c_0$ la proyección dada por $\pi_2(y, x) = x$. Entonces $\pi_2(M)$ es no $w-$compacto y en [22] se prueba que existe una sucesión $(x_n) \subset \pi_2(M)$ y $L > 0$ tal que $\left(\frac{x_n}{L}\right)$ es una *ai* - $\|\cdot\|_\infty$ sucesión. Luego $(y_0, x_n) \in M$ y si $(t_n) \subset l_1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$, tenemos que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \left(\frac{y_0}{L}, \frac{x_n}{L}\right)\right\| = \left|\left|\left|\left(\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{y_0}{L}\right\|_Y, \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{x_n}{L}\right\|_*\right)\right|\right|\right| \tag{3.1.1}$$

$$= \left|\left|\left|\left(0, \left\|(I - P_r)\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{x_n}{L}\right\|_*\right)\right|\right|\right| \tag{3.1.2}$$

$$= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (I - P_r) t_n \frac{x_n}{L}\right\|_\infty = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{x_n}{L}\right\|_\infty.$$

La última ecuación se verifica puesto que $P_r \frac{x_n}{L} = \frac{x_0}{L}$. Por tanto$\left(\left(\frac{y_0}{L}, \frac{x_n}{L}\right)\right)_n$ es una *ai* - $\|\cdot\|$ sucesión y el resultado se sigue a partir del corolario 3.1.1. □

El resultado anterior nos permite encontrar en cada subconjunto convexo, cerrado, acotado y no w-compacto K de Z un subconjunto sin la propiedad de punto fijo, aunque no afirma que K mismo tiene o no esta propiedad. Sin embargo, con una suposición adicional en la norma y basados en la demostración del teorema 1 en [23] podemos probar que:

Teorema 3.1.3. *Sea* $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$ *con* $\dim Y = k$,
$\|(I - P_r)\, x\|_* = \|(I - P_r)\, x\|_\infty$ *y* $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_*$ *para* $x \in c_0$ *y algún* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *. Definamos una norma en* Z *tal que para* $(y, x) \in Z$,
$\|(y, x)\| = |||(\|y\|_Y\,, \|x\|_*)|||$ *, donde* $|||\cdot|||$ *es cualquier norma monótona en* $\mathbb{R}^2$ *que satisface que* $|||(0, b)||| = |b|$.

Si $K \subset Z$ *es convexo, cerrado, acotado y no* $w-$*compacto, entonces* K *no tiene la FPP.*

Demostración. Como antes, sea $M \subset K$ convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto y $y_0 \in Y$, $x_0 \in P_r\,(c_0)$ tal que si $(y, x) \in M$, entonces $y = y_0$ y $P_r x = x_0$. Sea $(x_n) \subset \pi_2\,(M)$ como en el teorema previo y $L > 0$ tal que $\left(\frac{x_n}{L}\right)$ es una ai - $\|\cdot\|_\infty$ sucesión. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $L = 1$. Sea $u_n = (y_0, x_n) \in M$, $w_1 = x_1$ y $w_n = x_n - x_{n-1}$ para $n \geq 1$. Sea $z_1 = (y_0, w_1)$ y para $n > 1$, $z_n = (0, w_n) \in Z$ y $K_0 = \overline{conv\,((y_0, x_n))} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n z_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq ... \geq 0\right\}$. En [23] ellos construyen una función

$$S : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to \overline{conv\,(x_n)} \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$$

la cual es no expansiva y no tiene punto fijo. Definamos

$$R : Z \to K_0 \tag{3.1.3}$$

por $R\,(y, x) = (y_0, Sx)$.

Entonces, si $(u_1, v_1)\,, (u_2, v_2) \in Z$, $R\,(u_1, v_1) - R\,(u_2, v_2) = (0, Sv_1 - Sv_2)$. Sin embargo, puesto que $Sv_1, Sv_2 \in \pi_2\,(M)$, tenemos que
$(I - P_r)\,(Sv_1 - Sv_2) = 0$ y así

$$\begin{aligned}
\|R\,((u_1, v_1)) - R\,(u_2, v_2)\| &= |||(0, \|Sv_1 - Sv_2\|_*)||| \\
&= |||(0, \|Sv_1 - Sv_2\|_\infty)||| \\
&= \|Sv_1 - Sv_2\|_\infty \\
&\leq \|v_1 - v_2\|_\infty \leq \|v_1 - v_2\|_* \\
&\leq |||(\|u_1 - u_2\|_Y\,, \|v_1 - v_2\|_*)||| \\
&= \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|\,.
\end{aligned}$$

Así R es no expansiva. Se tiene que R no tiene punto fijo puesto que S no lo tiene. Finalmente sea $T = R|_K$. Entonces $T : K \to K_0 \subset K$ es no expansiva y sin punto fijo. □

A partir de lo anterior, el siguiente corolario se sigue inmediatamente.

Corolario 3.1.2. *Sea $Z = Y \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$ con $\dim Y = k$. Suponga que para $x \in (c_0, \|\cdot\|_*)$ y algún $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $L\|x\|_\infty \leq \|x\|_* \leq M\|x\|_\infty$ y*

$$\|(I - P_r)x\|_* = L\|(I - P_r)x\|_\infty .$$

Si adicionalmente, para $(y, x) \in Z$, $\|(y, x)\| = |\|(\|y\|_Y, \|x\|_*)\||$, donde $|\|\cdot\||$ satisface la hipótesis del teorema 3.1.3, entonces, si $K \subset Z$ es convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto, K no tiene la FPP.

Los siguientes ejemplos ilustran algunas de las situaciones típicas donde podremos aplicar el teorema 3.1.2 o el 3.1.3 para obtener información sobre la propiedad de punto fijo en subconjuntos convexos, cerrados y acotados en un espacio dado.

Ejemplo 3.1.1. *Sean $r, k \in \mathbb{N}$ con $r \geq k$. En el espacio c_0 definimos la norma*

$$\|x\|^{\tilde{}} = \sum_{n=1}^{k} |x(n)| + \text{máx}\left(\sum_{m=k+1}^{r} |x(m)|, \sup\{|x(m)| : m > r\}\right).$$

Es fácil ver que $\|x\|_\infty \leq \|x\|^{\tilde{}} \leq (r+1)\|x\|_\infty$. Observe que $\left(c_0, \|\cdot\|^{\tilde{}}\right)$ es isométrico a $Z = \mathbb{R}^k \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$ donde para $x \in c_0$,

$$\|x\|_* = \text{máx}\left(\sum_{m=1}^{r} |x(m)|, \sup\{|x(m)| : m > r\}\right)$$

y la norma en Z está dada por $\|(y, x)\| = |y|_1 + \|x\|_*$. Puesto que esta norma satisface las condiciones del teorema 3.1.3, si $C \subset Z$ es convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto, no tiene la FPP.

Ejemplo 3.1.2. *En el espacio c_0, para $x = (x(n)) \in c_0$ considere la norma*

$$\|x\|_L = \sup_{k>1} |x(1) + x(k)|.$$

En el espacio $Z = (c_0, \|\cdot\|_L)$ la norma $\|\cdot\|_L$ es tal que $\|(I - P_2)x\|_L = \|(I - P_2)x\|_\infty$. Así, esta norma satisface las condiciones del teorema 3.1.2 y por tanto si $K \subset Z$ es convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto, existe

$C \subset K$ convexo, cerrado, acotado sin la FPP. Sin embargo en [24] los autores muestran que existe un conjunto convexo, cerrado, acotado que no es $w-$compacto en Z y que tiene la FPP. En consecuencia el teorema 3.1.3 no se verifica. Observe que en este caso $\frac{1}{2}\|x\|_\infty \leq \|x\|_L \leq 2\|x\|_\infty$ y por tanto las condiciones del corolario 3.1.2 no se satisfacen.

El último ejemplo muestra que en el teorema 3.1.3 no es suficiente suponer que $Z = (c_0, \|\cdot\|)$ es isomorfo a c_0 y que para $x \in Z$ y algún $r \in \mathbb{N}$, $\|(I - P_r)\,x\| = \|(I - P_r)\,x\|_\infty$.

3.2. El espacio $(c_0, \|\cdot\|_b)$

En esta sección daremos un ejemplo de un espacio X que es un caso particular de los espacios Z considerados en la sección anterior, que satisface que un conjunto convexo y cerrado en este espacio tiene la propiedad de punto fijo si y sólo si es $w-$ compacto, exactamente como en $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y a pesar de esto, la familia de conjuntos con la AFPP en X es diferente a la familia de conjuntos con la AFPP en $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Definición 3.2.1. *En el espacio c_0, para $x = (x(n)) \in c_0$ definimos la norma*

$$\|x\|_b = |x(1)| + \sup\{|x(m)| : m \geq 2\}.$$

Es fácil ver que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_b \leq 2\|x\|_\infty$ y que el siguiente teorema se verifica:

Teorema 3.2.1. *El espacio dual de $(c_0, \|\cdot\|_b)$ es el espacio $(\ell_1, \|\cdot\|_{b^*})$, donde si (e_n^*) es la base canónica en l_1 y $f = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n^* \in l_1$*

$$\|f\|_{b^*} = \text{máx}\left\{|a_1|, \sum_{i=2}^\infty |a_i|\right\}.$$

El conjunto de puntos extremos de $S_{(\ell_1, \|\cdot\|_{b^*})}$ está dado por :

$\{\theta_1 e_1^* + \theta_2 e_k^* : k > 1 \; y \; \theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}\ \}.$

Demostración. Sea $X = (c_0, \|\cdot\|_b)$. Definamos $\varphi : X \to \mathbb{R} \oplus_1 c_0$ tal que $\varphi(x) = (x(1), y)$ donde $y(i) = x(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$, entonces $\|\varphi(x)\|_b = |x(1)| +$

$\|y\|_\infty = \|x\|_b$, por lo que $X \simeq \mathbb{R} \oplus_1 c_0$. Teniendo en cuenta que $(\mathbb{R} \oplus_1 c_0)^* = \mathbb{R} \oplus_\infty \ell_1$, la función $\varphi^* : \mathbb{R} \oplus_\infty \ell_1 \to X^*$ es un isomorfismo isométrico, de donde se deduce la conclusión sobre la norma de f. Además, claramente $\{\theta_1 e_1 + \theta_2 e_k : k > 1, \text{ y } \theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}\} \subset \xi(X^*)$. Así, sea $f = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i^* \in \xi(X^*)$. Observemos que $|a_1| = 1$ y $\sum_{i=2}^\infty |a_i| = 1$. En efecto, si por ejemplo $0 < |a_1| < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $0 < |a_1| + \epsilon < 1$. Si definimos $g, h \in X^*$ tales que $g(1) = a_1 - \epsilon$, $h(1) = a_1 + \epsilon$ y $g(i) = h(i) = a_i$, $i \geq 2$ tenemos que $h, g \in S_{X^*}$, $h \neq g$ y $f = \frac{h+g}{2}$. Lo que contradice el hecho de que $f \in \xi(X^*)$, así $a_1 = \theta_1$, con $\theta_1 \in \{1, -1\}$. Análogamente vemos que $\sum_{i=2}^\infty |a_i| = 1$. Si existen $g' = \sum_{i=2}^\infty b_i e_i^*$, $h' = \sum_{i=2}^\infty c_i e_i^* \in S_{X^*}$ tales que $g' \neq h'$ y $\sum_{i=2}^\infty a_i e_i^* = \frac{g'+h'}{2}$, al definir $g, h \in X^*$ tales que $g(1) = h(1) = a_1$ y $g(i) = g'(i)$, $h(i) = h'(i)$, $i \geq 2$ se tiene que $g \neq h$, $g, h \in S_{X^*}$ y $f = \frac{g+h}{2}$, lo que contradice nuevamente el hecho de que $f \in \xi(X^*)$. De este modo $\sum_{i=2}^\infty a_i e_i^* \in \xi(\ell_1)$ y por tanto $\sum_{i=2}^\infty a_i e_i^* = \theta_2 e_k$ donde $k > 1$ y $\theta_2 \in \{1, -1\}$. Así, $f = \theta_1 e_1^* + \theta_2 e_k^*$ con $\theta_1, \theta_2 \in \{1, -1\}$. □

En primer lugar dirigimos nuestra atención a la FPP en subconjuntos convexos, cerrados y acotados de $(c_0, \|\cdot\|_b)$. Recordemos que un espacio de Banach X tiene *la propiedad débil de Banach-Saks* ([25]), si cada sucesión débilmente nula (x_n), tiene una subsucesión (x_{n_i}) tal que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{n_i}\right\}$ es norma convergente. En este caso tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. *Si C es débilmente compacto y convexo en $(c_0, \|\cdot\|_b)$, entonces C tiene la FPP.*

Demostración. Puesto que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tiene la propiedad débil de Banach Saks, $(c_0, \|\cdot\|_b)$ tiene esta propiedad también y es claro que la base es fuertemente bimonótona, lo cual significa que si $F \subset \mathbb{N}$ es un intervalo acotado de números naturales, entonces $\|P_F\| = \|I - P_F\| = 1$, donde para $x \in (c_0, \|\cdot\|_b)$, $P_F(x) = \sum_{n\in F} x(n)$. Así por el teorema 3 en [25], este espacio tiene la FPP. □

El siguiente resultado nos dice que los únicos subconjuntos convexos, cerrados y acotados de $(c_0, \|\cdot\|_b)$ con la FPP son precisamente los conjuntos convexos débilmente compactos.

Teorema 3.2.3. *Si C es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de $(c_0, \|\cdot\|_b)$ que no es débilmente compacto, entonces C no tiene la FPP.*

Demostración. Observe que $(c_0, \|\cdot\|_b)$ es isométrico a $Z = \mathbb{R} \oplus (c_0, \|\cdot\|_*)$, donde para $x \in c_0$, $\|x\|_* = \|x\|_\infty$ y que la norma en Z está dada por $\|(y,x)\| = |\,\|(|y|, \|x\|_\infty)\|\,|$ donde para $(a,b) \in \mathbb{R}^2, |\,\|(a,b)\|\,| = |a| + \|b\|$ y esta norma satisface las condiciones del teorema 3.1.3. Por tanto, si $C \subset Z$ es convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto, C no tiene la FPP. $\square$

Como una conclusión obtenemos que la familia de subconjuntos convexos, cerrados y acotados de $(c_0, \|\cdot\|_b)$ con la FPP es la misma que en c_0.

Ahora analizamos el caso de conjuntos convexos y no acotados. Para esto estudiaremos la propiedad de punto fijo aproximada (AFPP) en tales conjuntos. Recordamos el siguiente lema probado por Domínguez en [3].

Lema 3.2.1. *Sea C un subconjunto convexo, no acotado y direccionalmente acotado en c_0. Entonces existe una sucesión en C que es $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$-convergente a un punto $u \in \ell_\infty / c_0$.*

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4. *Consideremos el espacio $Z = \mathbb{R} \oplus (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ con la norma $\|(y,x)\| = |y| + \|x\|_\infty$. Si $C \subset Z$ es convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado, entonces C no tiene la FPP.*

Demostración. Por el teorema 2.2.5, $\pi_2(C)$ es convexo, cerrado y direccionalmente acotado. Por tanto, por el lema 3.2.1, existe una sucesión $(x_n) \subset \pi_2(C)$ tal que $x_n \underset{w^*}{\to} w_0 \in l_\infty \backslash c_0$. Sea $D = \overline{conv\,\{x_n\}}$ el cual no es $w-$compacto. Entonces $K = \pi_2^{-1}(D) \cap C$ es convexo, cerrado y acotado en Z y por el lema 3.1.2 no es $w-$compacto. Puesto que la norma en Z satisface las condiciones del teorema 3.1.3, sea $K_0 \subset K \subset C$ y $R : Z \to K_0$ sea como en el teorema 3.1.3. Puesto que R es no expansiva y sin punto fijo, así lo es $R|_C$. $\square$

Finalmente, si restringimos nuestro estudio de la propiedad de punto fijo en dominios no acotados al caso de conjuntos direccionalmente acotados, tenemos que:

Teorema 3.2.5. *Si C es convexo, cerrado y no acotado en $(c_0, \|\cdot\|_b)$, entonces C no tiene la FPP.*

Demostración. Si C es no acotado y no es direccionalmente acotado, por el teorema 2.1.2 C no tiene la AFPP y por tanto, no tiene la FPP. Si C es direccionalmente acotado, puesto que $(c_0, \|\cdot\|_b)$ es isométrico a $(Z, \|\cdot\|)$, donde $Z = \mathbb{R} \oplus_1 (c_0, \|\cdot\|_\infty)$, por el teorema 3.2.4, C no tiene la FPP. $\square$

Así, hemos mostrado que la familia de conjuntos convexos y cerrados con la FPP con respecto a la norma $\|\cdot\|_b$ en c_0 es la misma que la correspondiente familia en $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. En contraste a esto, veremos que las familias de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP son diferentes.

Como en el trabajo de Castillo et al [15] tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.6. *Existe un conjunto $C \subset c_0$ direccionalmente acotado con respecto a la norma $\|\cdot\|_b$ que no es direccionalmente acotado con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Sea $x_1 = e_1$ y para $n \geq 2$ definamos

$$x_n = ne_1 + n\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)e_2 + ... + \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)e_k + ... + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)e_n\right].$$

Sea $C = conv\{x_n\}$. Claramente C no es direccionalmente acotado en $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ puesto que $\|x_n\|_\infty = n$ y

$$\lim_n e_1^*\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}\right) = 1.$$

Ahora, sea $y_n = \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^{(n)} x_j$ con $\sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^{(n)} = 1$, $m_n < m_{n+1}$ y $\lambda_j^{(n)} \geq 0$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \|y_n\|_b = \infty$. Entonces $y_n(1) = \sum_{j=1}^{m_n} j\lambda_j^{(n)}$, para $k > m_n$, $y_n(k) = 0$ y para $m_n \geq k > 1$,

$$y_n(k) = \sum_{j=k}^{m_n} j\lambda_j^{(n)}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Así, tenemos que $\|y_n\|_\infty = y_n(1)$. Desde la equivalencia de $\|\cdot\|_b$ y $\|\cdot\|_\infty$ se sigue que $\sum_{j=1}^{m_n} j\lambda_j^{(n)} \to \infty$.

Si $k \leq m_n$ entonces

$$\frac{y_n(k)}{y_n(1)} = \frac{\sum_{j=k}^{m_n} j\lambda_j^{(n)}}{\sum_{j=1}^{m_n} j\lambda_j^{(n)}} \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j^{(n)}}{\sum_{j=1}^{m_n} j\lambda_j^{(n)}}\right] \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Así, para una k fija con $1 < k$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n(k)}{y_n(1)} = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Observe que puesto que y_n tiene soporte finito, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \leq m_n$ tal que para cada $1 < k \leq m_n$, $0 \leq y_n(k) \leq y_n(k_n)$, esto es:

$$\sup_{k>1} \sum_{j=k}^{m_n} j\lambda_j^{(n)} \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \sum_{j=k_n}^{m_n} j\lambda_j^{(n)} \left(1 - \frac{1}{2^{k_n-1}}\right).$$

Por tanto, para $1 \leq k \leq m_n$,

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{2^{k_n-1}}\right) \tag{3.2.1}$$

$$\geq \frac{y_n(k_n)}{y_n(1)} \geq \frac{y_n(k)}{y_n(1)} \tag{3.2.2}$$

$$= \left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j^{(n)}}{\sum_{j=1}^{m_n} j\lambda_j^{(n)}}\right] \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, puesto que $m_n \to \infty$, obtenemos que $\lim_n \frac{y_n(k_n)}{y_n(1)} = 1$.

Recordando que los puntos extremos de la bola unitaria del espacio dual en este caso son $\pm(e_1^* \pm e_k^*)$ para $1 < k$. Entonces

$$\lim_n (e_1^*) \left(\frac{y_n}{\|y_n\|_b}\right) = \lim_n \frac{y_n(1)}{y_n(1) + y_n(k_n)} \tag{3.2.3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_n \left(e_k^*\right)\left(\frac{y_n}{\|y_n\|_b}\right) = \lim_n \frac{y_n\left(k\right)}{y_n\left(1\right)+y_n\left(k_n\right)} = \frac{1-\frac{1}{2^{k-1}}}{2}.$$

Por tanto

$$\lim_n \left(e_1^* + e_k^*\right)\left(\frac{y_n}{\|y_n\|_b}\right) = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Así obtenemos que C es direccionalmente acotado en la norma $\|\cdot\|_b$. $\square$

Capítulo 4

Reflexividad es equivalente a estabilidad de la AFPP

En este capítulo estudiamos la estabilidad bajo renormamientos de la clase de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP. Puesto que la propiedad de ser linealmente acotado depende sólo de la estructura lineal del espacio, la clase de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP es invariante para cada norma equivalente en espacios de Banach reflexivos. Sin embargo esto no sucede necesariamente en espacios de Banach no reflexivos, pues como mencionamos en la sección 2.1 en [15] los autores mostraron que c_0 puede ser renormado de tal manera que las respectivas familias de subconjuntos convexos y cerrados con la AFPP difieran. Además, la nueva norma puede construirse de modo que su distancia de Banach-Mazur a la norma estándar de c_0 sea arbitrariamente pequeña. Para este estudio proponemos la siguiente definición:

Definición 4.0.1. *Decimos que un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *tiene estabilidad de la AFPP si la familia de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP es invariante bajo renormamientos.*

A partir de los hechos descritos en el capítulo 1 sabemos que cada espacio de Banach reflexivo tiene estabilidad de la AFPP. Nos interesa saber si existe algún espacio de Banach no reflexivo con esta propiedad. Iniciamos el estudio de esta cuestión en la sección 4.1, donde analizamos el caso del espacio ℓ_1, que nos servirá de base para un trabajo más general.

En la sección 4.2 respondemos negativamente a esta pregunta, esto es, probamos que para cada espacio de Banach no reflexivo hay una norma equivalente (tan cerca a la original como queramos, en la distancia de Banach-Mazur) tal que las respectivas clases de subconjuntos con la AFPP son diferentes. Los argumentos distinguirán entre espacios de Banach conteniendo una copia isomorfa de ℓ_1 y espacios de Banach no reflexivos que no satisfacen esta condición.

Como consecuencia, deduciremos que un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si satisface la propiedad de estabilidad de la AFPP.

4.1. La no estabilidad de la AFPP en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$

En esta sección probamos que el espacio de Banach ℓ_1 puede ser renormado de tal manera que las respectivas familias de conjuntos convexos y cerrados con la propiedad de punto fijo aproximada difieran. Este particular caso resultará ser esencial en la prueba de nuestro teorema principal.

Empezamos introduciendo algunas definiciones y resultados básicos.

Denotamos por $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las normas equivalentes en un espacio de Banach X. Si $|\cdot|_1, |\cdot|_2 \in \mathcal{P}(X)$, basados en la la definición 1.1.1 definimos la distancia de Banach-Mazur entre dos normas $|\cdot|_1, |\cdot|_2 \in \mathcal{P}(X)$ como:

$$d(|\cdot|_1, |\cdot|_2) = \inf\left\{\frac{b}{a} : \; a|x|_1 \leq |x|_2 \leq b|x|_1, \; \forall x \in X\right\}.$$

En muchos de nuestros argumentos utilizaremos la noción de (P)-sucesión dada en la definición 2.1.4 y el lema 2.1.2 para construir conjuntos direccionalmente acotados.

A continuación probamos nuestro resultado principal para el caso particular de $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$:

Teorema 4.1.1. *Sea $\delta > 0$. Entonces para $0 < a < \delta < 1$ existe una norma equivalente $|\cdot|_a$ en ℓ_1 que satisface lo siguiente:*

i) $\frac{1}{1+a}\|x\|_1 \leq |x|_a \leq \|x\|_1$ *para cada $x \in \ell_1$ y así $d(\|\cdot\|_1, |\cdot|_a) \leq 1 + a < 1 + \delta$.*

ii) Existen conjuntos convexos y cerrados en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ con la AFPP que no tienen esta propiedad en $(\ell_1, |\cdot|_a)$.

iii) *Cada conjunto convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado en*
$(\ell_1, |\cdot|_a)$ *es direccionalmente acotado en* $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. *Esto implica que cada conjunto convexo y cerrado con la AFPP en* $(\ell_1, |\cdot|_a)$ *tiene la AFPP en* $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$.

Demostración. Primero construimos un conjunto convexo y direccionalmente acotado en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ por medio de una (P) -sucesión.

Tomemos $a, \lambda, \epsilon > 0$, con $a < \delta < 1$ y una sucesión $(\epsilon_n)_{n\geq 2}$ con $\epsilon_n > 0$ tal que:

$$\sum_{n\geq 2} \epsilon_n = \epsilon \qquad \text{y} \qquad \epsilon + \lambda < a^2.$$

Definamos el vector $x = ae_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n e_n$ y la sucesión

$$y_n = x - \lambda e_n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\lim_n \|y_n\|_1 = a + \epsilon + \lambda$.

Veamos que $(y_n/\|y_n\|_1)$ es una (P)-sucesión en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Tomemos $f = (f_n)_n \in \ell_\infty$ con $\|f\|_\infty = 1$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(y_n) = f(x) - \lambda f_n.$$

En caso de que $f_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f(y_n) \leq \|x\|_1 = a + \epsilon.$$

En caso de que exista algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n < 0$, tomamos $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) < 0\}$. Entonces

$$f(x) \leq \|x\|_1 - x(n_0)|f_{n_0}|$$

y

$$f(y_n) \leq a + \epsilon - x(n_0)|f_{n_0}| + \lambda.$$

Haciendo $c = \frac{1}{a+\epsilon+\lambda} \max\{a + \epsilon, a + \epsilon - x(n_0)|f_{n_0}| + \lambda\}$, esto prueba que

$$\limsup_n f\left(\frac{y_n}{\|y_n\|_1}\right) \leq c < 1.$$

Sin embargo considerando la sucesión (h_n) en ℓ_∞, donde $h_n(i) = 1$ si $i < n$ y $h_n(i) = -1$ si $i \geq n$, no es difícil verificar que para cada $k > n$,

$$h_n(y_k) \;=\; a + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n - \cdots - \epsilon_{k-1} + \lambda - \epsilon_k - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon_i$$

y por tanto

$$\sup_n \lim\sup_k h_n\left(\frac{y_k}{\|y_k\|_1}\right) = 1.$$

Lo anterior muestra que $(y_n/\|y_n\|_1)$ es una (P)-sucesión y por el lema 2.1.2, el conjunto $C = \overline{co}\,(nz_n)$ con $z_n := \frac{y_n}{\|y_n\|_1}$ es direccionalmente acotado en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$.

Considere en $\mathbb{R}^2$ la norma $\|\cdot\|_a$ dada por

$$\|(u,v)\|_a = \max\left\{|u|, |v|, \frac{|u|+|v|}{1+a}\right\}.$$

Definimos en ℓ_1 la norma equivalente

$$|x|_a = \|(|x(1)|, \|x - x(1)e_1\|_1)\|_a = \max\left\{|x(1)|, \|Q_1 x\|_1, \frac{\|x\|_1}{1+a}\right\},$$

donde $(Q_1 x)(1) = 0$ y $(Q_1 x)(j) = x(j)\ \forall j \geq 2$.

Es fácil ver que $\frac{1}{1+a}\|x\|_1 \leq |x|_a \leq \|x\|_1$ para cada $x \in \ell_1$. Esto implica que $d(\|\cdot\|_1, |\cdot|_a) \leq 1 + a < 1 + \delta$.

Mostraremos que el subconjunto $C = \overline{co}\,(nz_n)$ no es direccionalmente acotado en $(\ell_1, |\cdot|_a)$ y por lo tanto C no tiene la propiedad de punto fijo aproximada cuando consideramos la norma $|\cdot|_a$.

Denotemos por $|\cdot|_a^*$ la norma dual en ℓ_∞ y consideremos $u \in \ell_\infty$ dado por $u(x) = x(1)$. Note que $|u(x)| = |x(1)| \leq 1$ cuando $|x|_a \leq 1$. Más aún, $|e_1|_a = 1$ y $u(e_1) = 1$, lo cual implica que $|u|_a^* = 1$.

Por un lado, $\lim_n \|x - \lambda e_n - a e_1\|_1 = \epsilon + \lambda < a^2$, así tomemos algún $n_0 \in \mathbb{N}$ con $t_n := \|x - \lambda e_n - a e_1\|_1 < a^2$ para cada $n \geq n_0$. Para tal $n \geq n_0$,

$$|y_n|_a = \max\left\{a, \|Q_1(y_n)\|_1, \frac{\|y_n\|_1}{1+a}\right\} = \max\left\{a, t_n, \frac{a+t_n}{1+a}\right\} = a.$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u(y_n) = a.$$

Lo anterior prueba que

$$\limsup_n u\left(\frac{nz_n}{n|z_n|_a}\right) = \limsup_n u\left(\frac{y_n}{|y_n|_a}\right) = 1$$

y usando el teorema 2.1.3, C no es direccionalmente acotado en $(\ell_1, |\cdot|_a)$ como queríamos probar. Esto prueba i) y ii).

Ahora sea C un subconjunto no acotado y direccionalmente acotado de $(\ell_1, |\cdot|_a)$. Veremos que C es también direccionalmente acotado en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$.

Sea $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\|_1 \to \infty$ y $f \in \ell_\infty$ con $\|f\|_\infty = 1$. De acuerdo a la definición 2.1.3 es suficiente considerar puntos extremos de la bola unitaria de $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, así podemos suponer que $f = (f(n))$ con $f(n) = \pm 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si hubiera alguna subsucesión (n_j) tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, $|x_{n_j}|_a = x_{n_j}(1)$, entonces $\lim_{j\to\infty} \dfrac{u(x_{n_j})}{|x_{n_j}|_a} = 1$ lo cual contradice el hecho de que C es direccionalmente acotado. Lo mismo sucedería si hubiese alguna subsucesión (n_j) tal que $|x_{n_j}|_a = -x_{n_j}(1)$.

Así, pasando por una subsucesión y multiplicando por -1 si es necesario, podemos suponer que $f(1)x_n(1) = |x_n(1)|$, $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{\|x_n\|_1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{\|x_n\|_1}$ y $b = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{|x_n(1)|}{\|Q_1 x_n\|_1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|x_n(1)|}{\|Q_1 x_n\|_1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Si para alguna subsucesión (n_j), $|x_{n_j}|_a = \|Q_1 x_{n_j}\|_1$ entonces, si $g = f \circ Q_1$, es fácil ver que $|g|_a^* = 1$.

Puesto que $x_{n_j} = x_{n_j}(1)e_1 + Q_1 x_{n_j}$ y $f(1)x_{n_j}(1) = |x_{n_j}(1)|$,

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \frac{f(x_{n_j})}{\|x_{n_j}\|_1} &= \lim_{j\to\infty} \frac{|x_{n_j}(1)| + f(Q_1 x_{n_j})}{|x_{n_j}(1)| + \|Q_1 x_{n_j}\|_1} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{\dfrac{|x_{n_j}(1)|}{\|Q_1 x_{n_j}\|_1} + \dfrac{f(Q_1 x_{n_j})}{\|Q_1 x_{n_j}\|_1}}{1 + \dfrac{|x_{n_j}(1)|}{\|Q_1 x_{n_j}\|_1}} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{\dfrac{|x_{n_j}(1)|}{\|Q_1 x_{n_j}\|_1} + \dfrac{g(x_{n_j})}{|x_{n_j}|_a}}{1 + \dfrac{|x_{n_j}(1)|}{\|Q_1 x_{n_j}\|_1}} < \frac{b}{b+1} + \frac{1}{b+1} = 1.
\end{aligned}$$

De otra manera existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|x_n|_a = \dfrac{\|x\|_1}{1+a}$. Entonces, si $g = \frac{1}{a+1} f$ podemos verificar que $|g|_a^* = 1$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n\|_1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{f(x_n)}{1+a}}{\frac{\|x_n\|_1}{1+a}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)}{|x_n|_a} < 1.
\end{aligned}$$

En consecuencia C es direccionalmente acotado en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ y esto demuestra iii). $\square$

4.2. La no estabilidad de la AFPP en espacios de Banach no reflexivos

Empezamos probando nuestro resultado principal para espacios de Banach que contienen una copia isomorfa de ℓ_1.

Primero recordemos el siguiente lema de extensión que puede ser consultado en [26, Lemma 2.2]:

Lema 4.2.1. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $Y \subset X$ un subespacio cerrado de X y $|\cdot|$ una norma equivalente en Y tal que para algún $a \in (0,1)$*

$$a\|y\| \leq |y| \leq \|y\| \qquad \forall\ y \in Y.$$

Entonces existe $|\cdot|' \in \mathcal{P}(X)$ *que satisface lo siguiente:*

1. $|y|' = |y|$ *para cada* $y \in Y$.

2. $a\|x\| \leq |x|' \leq \|x\| \qquad \forall\, x \in X.$

Teniendo en cuenta el teorema 4.1.1 y el lema 4.2.1 podemos deducir que:

Teorema 4.2.1. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach conteniendo una copia isomorfa de* ℓ_1. *Entonces* X *no tiene estabilidad de la AFPP. Más aún, para cada* $\epsilon > 0$ *podemos elegir* $|\cdot| \in \mathcal{P}(X)$ *con* $d(\|\cdot\|, |\cdot|) < 1 + \epsilon$ *y tal que las respectivas familias de subconjuntos convexos y cerrados con la AFPP difieren.*

Demostración. Supongamos que X contiene una copia isomorfa de ℓ_1 y sea $\delta > 0$. Usando el teorema 1.1.3 sabemos que existe una sucesión (y_n) en X tal que

$$(1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty}|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n| \tag{4.2.1}$$

para cada $(t_n) \in \ell_1$. Sea Y el subespacio cerrado generado por la sucesión (y_n), que es una base de Schauder para Y. Definimos sobre Y las siguientes dos normas equivalentes:

$$|y|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|, \qquad |y|_2 = \|(|t_1|, |y - t_1 y_1|_1)\|_a$$

donde $y = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ y $\|\cdot\|_a$ es la norma en $\mathbb{R}^2$ dada en la prueba del teorema 4.1.1.

Puesto que $(Y, |\cdot|_1)$ y $(Y, |\cdot|_2)$ son respectivamente isométricos a $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ y $(\ell_1, |\cdot|_a)$, donde $|\cdot|_a$ es la norma considerada en le prueba del teorema 4.1.1, existe un conjunto convexo cerrado $C \subset Y$ con la AFPP para $|\cdot|_1$ y sin esta propiedad con respecto a la norma $|\cdot|_2$. Más aún, usando 4.2.1 y las constantes de equivalencia en el teorema 4.1.1, tenemos

$$(1-\delta)|y|_1 \leq \|y\| \leq |y|_1, \qquad (1-\delta)|y|_a \leq \|y\| \leq (1+a)|y|_a$$

para cada $y \in Y$.

Por el lema 4.2.1, sabemos que existen $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|_2 \in \mathcal{P}(X)$ las cuales son extensiones de las normas $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ en Y respectivamente y en consecuencia el conjunto C satisface la AFPP para $|||\cdot|||$ pero no satisface esta propiedad con respecto a $\|\cdot\|_2$.

En caso de que el conjunto C satisfaga la AFPP para la norma original $\|\cdot\|$ en X, deducimos que la clase de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP para $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_2$ difieren y $d(\|\cdot\|, \|\cdot\|_2) < \frac{1+a}{1-\delta}$. Si C no satisface la AFPP para $\|\cdot\|$, tenemos una conclusión similar considerando la norma $|||\cdot|||$ y en este caso $d(\|\cdot\|, |||\cdot|||) < \frac{1}{1-\delta}$. Tomando $a, \delta > 0$ tales que $\frac{1+a}{1-\delta} < 1+\epsilon$, hemos obtenido una norma equivalente en X con distancia de Banach-Mazur a la norma original menor o igual que $1+\epsilon$ y tal que la clase de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP difiere de la respectiva clase para la norma original. □

Con el objetivo de probar nuestro teorema principal, recordamos los siguientes resultados que pueden ser consultados en [28]:

Teorema 4.2.2 (Odell-Rosenthal)**.** *Si un espacio de Banach separable X no contiene una copia isomorfa de ℓ_1, entonces S_X es w^*-secuencialmente densa en $S_{X^{**}}$.*

Lema 4.2.2. *Si cada subespacio separable de un espacio de Banach X es reflexivo, entonces X mismo es reflexivo.*

Como consecuencia del trabajo desarrollado hasta este punto podemos entonces establecer la no estabilidad de la AFPP para cualquier espacio de Banach no reflexivo.

Teorema 4.2.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach no reflexivo. Entonces X no tiene estabilidad de la AFPP. Más aún, para cada $\epsilon > 0$ existe un renormamiento $(X, |\cdot|)$ con $d(\|\cdot\|, |\cdot|) < 1+\epsilon$ y tal que las respectivas familias de subconjuntos convexos y cerrados con la AFPP difieren.*

Demostración. Si X contiene una copia isomorfa de ℓ_1, por el teorema 4.2.1, X no tiene estabilidad de la AFPP y la afirmación se cumple.

En otro caso, por el lema 4.2.2 existe un subespacio no reflexivo separable Y de X. Por el teorema 1.1.1 podemos encontrar $f \in S_{Y^{**}}$ tal que f no alcanza su norma sobre S_{Y^*} y, por el teorema 4.2.2, hay una sucesión $(x_n) \subset S_Y$ tal que $x_n \overset{w^*}{\to} f$. Afirmamos que (x_n) es una (P)-sucesión. En efecto, si $g \in S_{Y^*}$, puesto que f no alcanza su norma en S_{Y^*} existe $h \in S_{Y^*}$ tal que $f(g) < f(h)$ y como $x_n \overset{w^*}{\to} f$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(g) < \lim_{n\to\infty} h(x_n) = f(h)$. De este modo $C = \overline{conv}(nx_n)$ tiene la AFPP para la norma original $\|\cdot\|$.

Sea y_0^* un elemento en Y^* tal que $f(y_0^*) = 1$. Observemos que $\|y_0^*\| > 1$ y definamos

$$W = \{y \in B_Y : |y_0^*(y)| \leq 1\}.$$

Es claro que W es un conjunto convexo, balanceado y absorbente para el subespacio cerrado Y y

$$\frac{1}{\|y_0^*\|} B_Y \subset W \subset B_Y.$$

Definiendo $|\cdot|_Y$ como el funcional de Minkowski del conjunto W, obtenemos un renormamiento de Y que verifica que

$$\|y\| \leq |y|_Y \leq \|y_0^*\| \|y\|, \qquad y \in Y.$$

A partir de las desigualdades anteriores tenemos que $|x_n|_Y \geq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, $\lim_n |x_n|_Y = 1$. En otro caso, existiría una subsucesión (x_{n_k}) y algún $\rho > 1$ con $|x_{n_k}|_Y \geq \rho$ y por tanto, por la definición del funcional de Minkowsky, $y_0^*(x_{n_k}) \geq \rho$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando limite cuando k tiende a infinito llegamos a la contradicción

$$1 = f(y_0^*) = \lim_k y_0^*(x_{n_k}) \geq \rho.$$

Además, si consideramos a y_0^* como un funcional en $(Y, |\cdot|_Y)$, es claro que para la norma dual, $|y_0^*|_Y \leq 1$. Pero

$$|y_0^*|_Y \geq \limsup_n y_0^* \left(\frac{x_n}{|x_n|_Y} \right) = \frac{\lim_n y_0^*(x_n)}{\lim_n |x_n|_Y} = 1$$

y así y_0^* es un funcional de norma uno sobre $(Y, |\cdot|_Y)$.

Ahora es sencillo verficar que el subconjunto C no tiene la AFPP para la nueva norma $|\cdot|_Y$. En efecto, considere la sucesión en C definida por $y_n = nx_n$ la cual verifica que $\lim_n |y_n|_Y = +\infty$. Si tomamos el funcional de norma uno y_0^*,

$$\lim_n y_0^* \left(\frac{y_n}{|y_n|_Y} \right) = 1.$$

así C no tiene la AFPP en $(Y, |\cdot|_Y)$.

Finalmente, usando el lema 4.2.1 podemos extender la norma $|\cdot|_Y$ a una norma equivalente $|\cdot|$ sobre X que verifica que

$$d(\|\cdot\|, |\cdot|) \leq \|y_0^*\|.$$

La prueba concluye notando que para cada $\epsilon > 0$ podemos tomar algún $y_0^* \in Y^*$ con $f(y_0^*) = 1$ y $\|y_0^*\| \leq 1 + \epsilon$. □

A partir del resultado anterior y el teorema 2.1.1 deducimos el siguiente hecho.

Corolario 4.2.1. *Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si tiene estabilidad de la propiedad de punto fijo aproximada.*

Capítulo 5

La AFPP en subconjuntos no acotados en ℓ_1 y algunos renormamientos equivalentes

En [29] Karlovitz probó que cada subconjunto convexo, acotado y w^*-cerrado en ℓ_1 tiene la FPP. Sin embargo, este hecho depende de la elección de c_0 como predual de ℓ_1 y existen muchos otros preduales para este espacio ([30] ,[31, Corolario 3],[32],[33]). En [34] se demuestra que si consideramos a ℓ_1 como el dual del espacio de sucesiones convergentes (c) entonces en este espacio existen subconjuntos convexos, acotados, $\sigma(\ell_1, c)$-cerrados y sin la propiedad de punto fijo, conclusión que cabría esperar pues al cambiar de predual cambiamos la colección de conjuntos w^*-cerrados como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.0.1. *Consideremos ℓ_1 como el dual de c y el dual de c_0 de tal manera que para cada $f = (f(i)) \in \ell_1$, $x = (x(i)) \in c$ y $y = (y(i)) \in c_0$ las dualidades están dadas respectivamente por $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i+1)x(i)$ donde $x_0 = \lim_{i\to\infty} x(i)$ y $f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)y(i)$. Sea*

$$K_1 = \left\{ f = (f(i)) \in \ell_1 : \sum_{i=1}^{\infty} f(i) = 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)| \leq 1 \right\}.$$

Se tiene que K_1 es un subconjunto convexo, acotado y $\sigma(\ell_1, c)$-cerrado, pues es la intersección del kernel del funcional $u \in c$, tal que $u(i) = 1$, $i \in \mathbb{N}$, con la bola unitaria de ℓ_1, que por el teorema de Banach-Alaoglu es $\sigma(\ell_1, c)$-cerrada. Sin embargo K_1 no es $\sigma(\ell_1, c_0)$-cerrada, pues si consideramos la *sucesión $(f_n) \subset K_1$ tal que $f_1 = e_1$ y para $n \geq 2$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$, $f_n(n) = -\frac{1}{2}$ y $f_n(i) = 0$, $i \neq n, 1$, entonces $f_n \overset{\sigma(\ell_1,c_0)}{\to} \frac{e_1}{2} \notin K_1$.*

Análogamente podemos ver que

$$K_2 = \left\{ f = (f(i)) \in \ell_1 : 0 < \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)| \leq 1,\ f(1) = \frac{1}{2} \right\}$$

es convexo, acotado y $\sigma(\ell_1, c_0)$-cerrado, pero no $\sigma(\ell_1, c)$-cerrado en ℓ_1.

Aunque $\ell_1 = c_0^*$ verifica la w^*-*fpp*, no satisface la FPP, pues si consideramos $K = \{x \in \ell_1 : \|x\|_1 = 1,\ x(i) \geq 0\ , i \in \mathbb{N}\}$, al definir $T : K \to K$ tal que $Tx = y$ donde $y(1) = 0$ y $y(i) = x(i-1)$, $i \geq 2$, la función T es afín y satisface que para cada $x \in \ell_1$, $\|Tx\|_1 = \|x\|_1$, por lo que T es una isometría. Además, no tiene punto fijo, ya que si $Tx = x$ para algún $x \in K$, entonces $x = 0 \notin K$.

En 2008 ([6]) P.K. Lin probó que es posible renormar ℓ_1 de tal manera que tenga la propiedad de punto fijo, respondiendo así en forma negativa a la pregunta de si la FPP implicaba reflexividad en espacios de Banach, cuestión de sumo interés durante años de investigación en la teoría.

Ningún resultado sobre la w^*-fpp se había obtenido en ℓ_1 sobre conjuntos no acotados hasta que T. Domínguez en [4] considerando $c_0^* = \ell_1$ estableció que la colección de conjuntos convexos, w^*-cerrados y no acotados en este espacio no tiene la propiedad de punto fijo aproximada y por tanto no tiene la propiedad de punto fijo. Para esto probó en primer lugar los siguientes hechos que incluimos aquí para facilitar la referencia al lector dado que los usaremos en diversas ocasiones.

Lema 5.0.1. *Sea C un subconjunto convexo de ℓ_1 que contiene una sucesión (x_n) tal que $\|x_n\|_1 \to \infty$ y $(x_n/\|x_n\|_1)$ converge por coordenadas a un vector $a \in c_{00}$. Entonces C no tiene la AFPP.*

Proposición 5.0.1. *Sea C un subconjunto convexo, w^*-cerrado de un espacio dual X^* que satisface la AFPP y (u_n) una sucesión en C tal que $\|u_n\| \to \infty$. Entonces $(u_n/\|u_n\|)$ converge a 0 en la topología débil estrella.*

Observación 5.0.1. *El resultado anterior también se verifica si en lugar de requerir que C tenga la AFPP suponemos sólo que C es linealmente acotado. La demostración realizada por el autor en [4] utiliza sólo el hecho de que C sea linealmente acotado.*

A partir de estos resultados en [4] se prueba que:

Teorema 5.0.1. *Sea C un subconjunto convexo w^*-cerrado del espacio ℓ_1. Entonces C satisface la FPP si y sólo si C es acotado. Más aún, si C es no acotado entonces C no tiene la AFPP.*

Cabe resaltar el notable hecho de que en ℓ_1 la colección de conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados con la AFPP es vacía.

En este capítulo indagamos sobre la validez del teorema 5.0.1 al considerar otros preduales de ℓ_1 y normas equivalentes en este espacio. En la sección 5.1 nos enfocamos en describir el dual del espacio de P.K. Lin, lo que nos permitirá posteriormente en la sección 5.3 ver que $(\ell_1, |||\cdot|||)$ es el primer ejemplo de un renormamiento de ℓ_1 en el que existen conjuntos no acotados y w^*-cerrados con la AFPP, es decir, en el que no se verifica la última afirmación del teorema 5.0.1. Más aún, probamos que en tal espacio la colección de conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados con la AFPP coincide con la clase de conjuntos linealmente acotados. Resulta interesante resaltar que la colección de conjuntos convexos y w^*-cerrados de $\ell_1, |||\cdot|||$, que es un espacio con la propiedad de punto fijo, comparte el comportamiento de la AFPP de los espacios reflexivos descrito en el teorema 2.1.1.

Basados en nuestro trabajo con el espacio de Lin, la sección 5.2 se dedica a realizar algunos comentarios y observaciones al artículo "Lindenstrauss-Phelps spaces and the optimality of a theorem of Fonf" ([35]), cuyos autores son Dowling y Turett. En la sección 5.4 estudiamos el componente topológico del teorema 5.0.1 y damos un ejemplo de una topología w^* en ℓ_1 en la que existen conjuntos convexos, no acotados y w^* cerrados con la AFPP.

Finalmente, en la sección 5.5 exploramos algunas propiedades de la AFPP en dominios no acotados en ℓ_1.

Agradecemos al profesor Fernando Núñez Medina (Universidad de Guanajuato, México) por sus útiles sugerencias sobre la norma correspondiente al dual del espacio de Lin y los puntos extremos de los subespacios de dimensión finita de $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ estudiados en la sección 5.2.

5.1. El dual de ℓ_1 con la norma de Lin

Como mencionamos en la introducción de este capítulo en 2008 P.K. Lin dió el primer ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo con la propiedad de punto fijo. Para esto consideró una norma en ℓ_1 de la forma:

$$|||x||| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \sum_{j=k}^{\infty} |x(j)|$$

donde $(\gamma_k) \subset (0,1)$ es una sucesión estrictamente creciente tal que $\gamma_n \to 1$.

Este tipo de norma fue estudiada por P. Dowling, C. Lennard y B. Turett en [23] donde probaron que el espacio $(\ell_1, |||\cdot|||)$ no contiene copias asintóticamente isométricas de ℓ_1 (Definición 1.1.6). Los mismos autores en [36] demostraron que si un espacio de Banach contiene una de estas copias, entonces no tiene la propiedad de punto fijo. Quedó entonces abierta la pregunta de si $(\ell_1, |||\cdot|||)$ podría tener la FPP.

Lin en [6] respondió afirmativamente esta cuestión, probando inicialmente que si $\gamma_k = \frac{8^k}{1+8^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $(\ell_1, |||\cdot|||)$ tiene la propiedad de punto fijo y posteriormente generalizó este resultado en [37] a otros renormamientos de ℓ_1. De este último trabajo se deduce que si en lugar de considerar $\gamma_k = \frac{8^k}{1+8^k}$ se considera cualquier sucesión (γ_i) estrictamente creciente en $(0,1)$ tal que $\lim_{i\to\infty} \gamma_i = 1$, $(\ell_1, |||\cdot|||)$ tiene la FPP. Posteriormente se han obtenido otras generalizaciones de los resultados de Lin ([38], [39]).

Actualmente se desconoce si de igual manera al caso de ℓ_1 es posible renormar c_0 para tener esta propiedad. Una posible norma en c_0 a considerar como candidato en el estudio de esta cuestión sería una con respecto a la cual c_0 sea un predual del espacio de Lin, por esta razón resulta de interés conocer tanto el predual como el dual de este espacio. En esta sección nos enfocamos en calcularlos.

Sea $X = (\ell_1, |||\cdot|||)$. A continuación procedemos a calcular los elementos de $\xi(X)$, lo que posteriormente nos ayudará a describir X^*. Si denotamos por $\xi^+(X)$ el subconjunto de $\xi(X)$ de elementos con coordenadas no negativas, puesto que la norma $|||\cdot|||$ es absoluta, para conocer $\xi(X)$ basta determinar $\xi^+(X)$.

Proposición 5.1.1. *Sean $X = (\ell_1, |||\cdot|||)$ y $x \in S_X$. Entonces $x \in \xi^+(X)$ si y sólo si $x = \dfrac{1}{\gamma_1} e_1$ ó*

$$x = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\gamma_{n_j}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}} \right) |x(n_j)| + \frac{|x(n_k)|}{\gamma_{n_k}}$$

para alguna sucesión finita $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ en los naturales.

Demostración. Sea $x = (\alpha_i)$ donde $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$.

De la definición de la norma $|||\cdot|||$ y el hecho de que $x \in S_X$ tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_k \leq \dfrac{1}{\gamma_k}$. Más aún, si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{k_0} = \dfrac{1}{\gamma_{k_0}}$ entonces $\alpha_i = 0$, $i > k_0$. De estos hechos es sencillo concluir que $x = \dfrac{1}{\gamma_1} e_1 \in \xi^+(X)$. Ahora si

$$x = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\gamma_{n_j}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}} \right) |x(n_j)| + \frac{|x(n_k)|}{\gamma_{n_k}},$$

donde $n_1 = 1$, veremos que $x \in \xi^+(X)$.

En primer lugar observemos que $|||x||| = 1$. Si existen $y, z \in S_X$ tales que $x = \dfrac{y+z}{2}$, puesto que $\dfrac{|y(n_k) + z(n_k)|}{2} = \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$, $|y(n_k)| \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$ y $|z(n_k)| \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$ tenemos que $y(n_k) = z(n_k) = \dfrac{1}{\gamma_{n_k}} = \alpha_{n_k}$ y por tanto, para toda $i > n_k$, $y(i) = z(i) = 0 = x(i)$.

Lo anterior implica que $|y(n_{k-1})| \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$ y $|z(n_{k-1})| \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$.

En efecto, si por ejemplo $|y(n_{k-1})| > \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$ entonces

$$|||y||| \geq \gamma_{n_{k-1}} \left(|y(n_{k-1})| + \cdots + |y(n_k)| \right) > 1.$$

Como $\dfrac{|y(n_{k-1}) + z(n_{k-1})|}{2} = \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_k}}$, se sigue que

$$y(n_{k-1}) = z(n_{k-1}) = x(n_{k-1}) = \frac{1}{\gamma_{n_{k-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_k}},$$

pero esto implica que para toda $n_{k-1} < i < n_k$, $y(i) = z(i) = x(i) = 0$ pues si por ejemplo $y(i_0) \neq 0$ para algún $n_{k-1} < i_0 < n_k$ entonces

$$\begin{aligned} |||y||| &\geq \gamma_{n_{k-1}} \left(|y(n_{k-1})| + \cdots + |y(i_0)| + \cdots + \frac{1}{\gamma_{n_k}} \right) \\ &= \gamma_{n_{k-1}} \left(\frac{1}{\gamma_{n_{k-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_k}} + \cdots + |y(i_0)| + \cdots \frac{1}{\gamma_{n_k}} \right) > 1. \end{aligned}$$

Así, para toda $i \geq n_{k-1}$, $y(i) = x(i) = z(i)$.

Si $n_{k-1} = 1$ hemos finalizado. En caso contrario, supongamos que para toda $i \geq n_{k-j} > n_1 = 1$ con $j \geq 1$, $x(i) = y(i) = z(i)$.

Veamos que $|y(n_{k-j-1})| \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j}}}$ y $|z(n_{k-j-1})| \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j}}}$.
Si $|y(n_{k-j-1})| > \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j}}}$ entonces

$$|||y||| \geq \gamma_{n_{k-j-1}} \left(|y(n_{k-j-1})| + \left(\frac{1}{\gamma_{n_{k-j+1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{k-j+2}}} \right) + \cdots + \frac{1}{\gamma_{n_k}} \right) > 1,$$

lo que contradice el hecho de que $y \in S_X$, análogamente procedemos para z.

Como $\dfrac{|y(n_{k-j-1}) + z(n_{k-j-1})|}{2} = \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{k-j}}}$ tenemos que

$$y(n_{k-j-1}) = z(n_{k-j-1}) = x(n_{k-j-1}) = \frac{1}{\gamma_{n_{k-j-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{k-j}}}.$$

Si $n_{k-j-1} < n_{k-j} - 1$ entonces razonando como en el caso $j = 1$ obtenemos que $x(i) = y(i) = z(i) = 0$. Así, para toda $i \geq n_{k-j-1}$, $x(i) = y(i) = z(i)$. Puesto que el conjunto de $j's$ tales que $n_{k-j} > n_1$ es finito, concluimos que para toda $i \in \mathbb{N}$, $y(i) = z(i) = x(i)$ y por tanto $x \in \xi^+(X)$.

Recíprocamente, sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in \xi^+(X)$. Puesto que $\gamma_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j \to 0$ cuando $k \to \infty$ y $\|x\|_L = 1$, existe k tal que $\gamma_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j = 1$. Sea $\{n_j\}_{j=1}^{m}$ con $n_1 < ... < n_m$ el conjunto de números naturales con $\gamma_{n_i} \sum_{j=n_i}^{\infty} \alpha_j = 1$.

Mostraremos que $n_1 = 1$, $\alpha_{n_m} = \dfrac{1}{\gamma_{n_m}}$, $\alpha_{n_j} = \dfrac{1}{\gamma_{n_j}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{j+1}}}$ para $1 < j < m$ y $\alpha_j = 0$ si $j \notin \{n_1, \ldots, n_m\}$.

Si $n_1 \neq 1$, puesto que $\gamma_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j < 1$ para $1 \leq k < n_1$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma_1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j + \epsilon \right) < 1$. Definimos $w, z \in X$ tales que

$$w(j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j > 1, \\ \alpha_1 + \epsilon, & \text{si } j = 1, \end{cases} \quad z(j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j > 1, \\ \alpha_1 - \epsilon, & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Es sencillo verificar que $w, z \in S_X$, $w \neq z$ y $x = \dfrac{w+z}{2}$, así $x \notin \xi^+(X)$. En consecuencia $n_1 = 1$.

Observe que $\alpha_1 > 0$, en otro caso, si $\alpha_1 = 0$, $\gamma_2 \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j > \gamma_1 \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j = 1$, lo que contradice el hecho de que $\|x\|_L = 1$. Análogamente tenemos que $\alpha_{n_i} \neq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Puesto que $1 = \gamma_{n_m} \sum_{j=n_m}^{\infty} \alpha_j$, obtenemos que $\alpha_{n_m} \leq \dfrac{1}{\gamma_{n_m}}$.

Si $m = 1$ y $0 < \alpha_1 < \dfrac{1}{\gamma_1}$ existe $i > 1$ con $\alpha_i > 0$.

Sea $i_0 = \min\{i > 1 : \alpha_i > 0\}$ y $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \alpha_{i_0}$, $\epsilon < \alpha_1$ y $\gamma_{i_0}\left(\epsilon + \sum_{j=i_0}^{\infty} \alpha_j\right) < 1$. Definimos $w, z \in X$ como

$$w(j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j \notin \{1, i_0\}, \\ \alpha_{i_0} - \epsilon, & \text{si } j = i_0, \\ \alpha_1 + \epsilon, & \text{si } j = 1, \end{cases} \qquad z(j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j \notin \{1, i_0\}, \\ \alpha_{i_0} + \epsilon, & \text{si } j = i_0, \\ \alpha_1 - \epsilon, & \text{si } j = 1, \end{cases}$$

entonces $w, z \in S_X$, $w \neq z$ y $x = \dfrac{w+z}{2}$, así $x \notin \xi^+(X)$. Por lo tanto $\alpha_1 = \dfrac{1}{\gamma_1}$ y $\alpha_j = 0$, $j > 1$.

Si $1 \leq i < m$, puesto que $\gamma_{n_i} \sum_{j=n_i}^{\infty} \alpha_j = \gamma_{n_{i+1}} \sum_{j=n_{i+1}}^{\infty} \alpha_j = 1$ entonces

$$\begin{aligned} 1 = \gamma_{n_i} \sum_{j=n_i}^{\infty} \alpha_j &= \gamma_{n_i} \left(\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \alpha_j + \sum_{j=n_{i+1}}^{\infty} \alpha_j \right) \\ &= \gamma_{n_i} \left(\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \alpha_j + \frac{1}{\gamma_{n_{i+1}}} \right) \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\gamma_{n_i}} - \frac{1}{\gamma_{n_{i+1}}} \geq \alpha_{n_i}.$$

Si $n_{i+1} = n_i + 1$ para algún $i = 1, \dots, m-1$, entonces

$$\gamma_{n_i} \sum_{j=n_i}^{\infty} \alpha_j = \gamma_{n_{i+1}} \sum_{j=n_{i+1}}^{\infty} \alpha_j = 1.$$

Se sigue que $\alpha_{n_i} = \dfrac{1}{\gamma_{n_i}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{i+1}}}$. Si $n_{i+1} > n_i + 1$ y $\dfrac{1}{\gamma_{n_i}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{i+1}}} = \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \alpha_j > \alpha_{n_i}$ (ver 5.1.1), entonces existe $n_i < j < n_{i+1}$ tal que $\alpha_j > 0$.

Sea $j_0 = \min\{j : n_i < j < n_{i+1}$ y $\alpha_j > 0\}$. Definimos $w, z \in X$ como

$$w(j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j \notin \{n_i, j_0\}, \\ \alpha_{j_0} - \epsilon, & \text{si } j = j_0, \\ \alpha_{n_i} + \epsilon, & \text{si } j = n_i, \end{cases} \qquad z(j) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j \notin \{n_i, j_0\}, \\ \alpha_{j_0} + \epsilon, & \text{si } j = j_0, \\ \alpha_{n_i} - \epsilon, & \text{si } j = n_i, \end{cases}$$

donde $\epsilon > 0$ satisface que $\epsilon < \text{mín}\{\alpha_{n_i}, \alpha_{j_0}\}$ y $\gamma_{j_0}\left(\epsilon + \sum_{j=j_0}^{\infty} \alpha_j\right) < 1$. Es fácil ver que $\|w\|_L = \|z\|_L = 1$, $w \neq z$ y $x = \dfrac{w+z}{2}$, luego $x \notin \xi^+(X)$. En consecuencia $\alpha_{n_i} = \dfrac{1}{\gamma_{n_i}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{i+1}}}$ y $\alpha_j = 0$ para $n_i < j < n_{i+1}$.

Análogamente vemos que $\alpha_{n_m} = \dfrac{1}{\gamma_{n_m}}$ y $\alpha_j = 0$, $j > n_m$. Esto finaliza la prueba de nuestra afirmación. $\square$

Observación 5.1.1. *Si $N \in \mathbb{N}$ y $X_N = \{x \in X = (\ell_1, |||\cdot|||) : x(i) > 0, i > N\}$ razonando como en la proposición anterior podemos ver que $\xi(X_N) = \{x \in \xi(X) : x(i) = 0,\ i > N\}$.*

Nuestro trabajo de determinar los puntos extremos de la esfera unitaria del espacio de Lin inició de forma independiente al trabajo de Dowling y Turett en [35]. En este artículo los autores afirman que el conjunto de puntos extremos de $X = (\ell_1, |||\cdot|||)$ está conformado por los puntos $x \in S_X$ de la forma

$$x(k) = \begin{cases} \pm\left(\dfrac{1}{\gamma_k} - \dfrac{1}{\gamma_{k+1}}\right), & \text{si } 1 \leq k < n_1, \\ \pm\dfrac{1}{\gamma_k}, & \text{si } k = n_1, \\ 0, & \text{si } k > n_1, \end{cases}$$

para algún $n_1 \in \mathbb{N}$.

Al contrastar esto con nuestros resultados, observamos que los puntos dados por estos autores se corresponden con los puntos calculados en la proposición 5.1.1 para sucesiones finitas $1, 2, \ldots, m$ en $\mathbb{N}$ de términos consecutivos. Sin embargo, como hemos verificado en la proposición 5.1.1, estos no son los únicos puntos extremos.

Con los resultados de esta sección podemos complementar el trabajo de los autores en [35] para tener una descripción completa de los puntos extremos de la esfera unitaria del espacio de Lin y poder determinar así un predual para este espacio.

La proposición 5.1.1 nos permite determinar la norma de los funcionales en $(\ell_1, |||\cdot|||)^*$.

Proposición 5.1.2. *Sea* $X = (\ell_1, |||\cdot|||)$ *y* $f = (c_i) \in X^*$. *Entonces*

$$\|f\| = \max\left(|c_1|\gamma_1^{-1}, \sup_{\{1=n_1<\cdots<n_k\}\subset\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left(\gamma_{n_j}^{-1} - \gamma_{n_{j+1}}^{-1}\right)|c_{n_j}| + \gamma_{n_k}^{-1}|c_{n_k}|\right\}\right).$$

Demostración. Sea $(x_n) \subset B_X$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \|f\|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para toda $i, n \in \mathbb{N}$, $c_i x_n(i) \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $m(n)$ con $m(n) < m(n+1)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_n(i) - \sum_{i=1}^{m(n)} c_i x_n(i) < \frac{1}{2^{m(n)}}.$$

Es sencillo ver que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m(n)} c_i x_n(i) = \|f\|$.

Si consideramos $f|_{\mathrm{spn}\{e_1,\ldots,e_{m(n)}\}}$ por el teorema 1.1.2 y la observación 5.1.1 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \xi(X)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m(n)} c_i x_n(i) \leq \sum_{i=1}^{m(n)} c_i y_n(i) \\
&\leq \max\left(\gamma_1^{-1}|c_1|, \sup_{\{1=n_1<\cdots<n_k\}\subset\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left(\gamma_{n_j}^{-1} - \gamma_{n_{j+1}}^{-1}\right)|c_{n_j}| + \gamma_{n_k}^{-1}|c_{n_k}|\right\}\right) \\
&\leq \|f\|
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|f\| = \max\left(\gamma_1^{-1}|c_1|, \sup_{\{1=n_1<\cdots<n_k\}\subset\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left(\gamma_{n_j}^{-1} - \gamma_{n_{j+1}}^{-1}\right)|c_{n_j}| + \gamma_{n_k}^{-1}|c_{n_k}|\right\}\right).$$

□

La manera en que se determina la norma de los funcionales en la proposición anterior en general es bastante compleja, dado que implica considerar todas las sucesiones crecientes y finitas en los números naturales, sin embargo, para calcular esta norma basta considerar sólo una sucesión como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.3. *Sea* $X = (\ell_1, ||| \cdot |||)$ *y* $x \in X^*$. *Tomemos* $n_1 = 1$ *y* $n_j = \min\{n > n_{j-1} : |x(n)| > |x(n_{j-1})|\}$. *Entonces*

$\|x\| =$

i) $\dfrac{|x(1)|}{\gamma_1}$, *si* $\|x\|_\infty = |x(1)|$.

ii) $\left(\dfrac{1}{\gamma_1} - \dfrac{1}{\gamma_{n_2}}\right)|x(1)| + \cdots + \left(\dfrac{1}{\gamma_{n_{m-1}}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_m}}\right)|x(n_{m-1})| + \dfrac{|x(n_m)|}{\gamma_{n_m}}$,

si $\|x\|_\infty = |x(n_m)|$.

iii) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_{n_i}} - \dfrac{1}{\gamma_{n_{i+1}}}\right)|x(n_i)| + \|x\|_\infty$, *si* $\|x\|_\infty = \lim_{i\to\infty}|x(n_i)|$.

Demostración. a) Si $m > l$

$$\left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_m}\right)|x(l)| + \frac{0}{\gamma_m} = \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_m}\right)|x(l)| < \frac{|x(l)|}{\gamma_l}.$$

b) Si $l < k$ y $|x(l)| > |x(k)|$ entonces

$$\left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_k}\right)|x(l)| + \frac{|x(k)|}{\gamma_k} < \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_k}\right)|x(l)| + \frac{|x(l)|}{\gamma_k} = \frac{|x(l)|}{\gamma_l}.$$

c) Si $l < k < r$ y $|x(l)| > |x(k)|$ entonces

$$\left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_k}\right)|x(l)| + \left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_r}\right)|x(k)| < \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_r}\right)|x(l)|.$$

d) Si $j < l$ y $|x(l)| = |x(l+1)|$ y $|x(j)| < |x(l)|$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{l+1}}\right)|x(j)| + \frac{|x(l+1)|}{\gamma_{l+1}} \\
&= \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_l}\right)|x(j)| + \frac{|x(l)|}{\gamma_l} - \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_{l+1}}\right)(|x(l)| - |x(j)|) \\
&< \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_l}\right)|x(j)| + \frac{|x(l)|}{\gamma_l}.
\end{aligned}$$

e) Si $j < l < l+1 < k$, $|x(l)| = |x(l+1)|$ y $|x(j)| < |x(l)|$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{l+1}}\right)|x(j)| + \left(\frac{1}{\gamma_{l+1}} - \frac{1}{\gamma_k}\right)|x(l+1)| \\
&= \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_l}\right)|x(j)| + \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_k}\right)|x(l)| - \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_{l+1}}\right)(|x(l)| - |x(j)|) \\
&< \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_l}\right)|x(j)| + \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_k}\right)|x(l)|.
\end{aligned}$$

Por la definición de $\|\cdot\|$ tenemos que

$$\|(x(1), \ldots, x(l), 0, 0, \ldots)\| \leq \|(x(1), \ldots, x(l+1), 0, 0, \ldots)\|.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sup_{l\in\mathbb{N}} \|(x(1), x(2), \ldots, x(l), 0, 0, \ldots)\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|(x(1), x(2), \ldots, x(l), 0, 0, \ldots)\|.
\end{aligned}$$

Sea $x_l = (x(1), x(2), \ldots, x(l), 0, 0, \ldots)$. A partir de a) y de la definición de $\|\cdot\|$ sabemos que existen $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_r = n$ tales que

$$\begin{aligned}
&\|x_l\| = \frac{|x(1)|}{\gamma_1} \quad \text{si } r = 1 \\
\text{ó}\quad &\|x_l\| = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{\gamma_{k_j}} - \frac{1}{\gamma_{k_{j+1}}}\right)|x(k_j)| + \frac{|x(k_r)|}{\gamma_{k_r}} \quad \text{si } r > 1.
\end{aligned}$$

Por b), c), d) y e) tenemos que $|x(k_1)| \leq |x(k_2)| \leq \cdots \leq |x(k_r)| = \|x_l\|_\infty$ y entonces $\|x_l\| = \frac{|x(1)|}{\gamma_1}$ si $|x(1)| \geq |x(j)|$, para $j \in \{1, \ldots, l\}$. Si no, tomando $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ donde $n_j = \min\{n_{j-1} < n \leq l : |x(n)| > |x(n_{j-1})|\}$ y $|x(n_m)| = \max\{|x(j)| : j \leq l\}$ resulta que

$$\|x_l\| = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\gamma_{n_j}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}}\right)|x(n_j)| + \frac{|x(n_m)|}{\gamma_{n_m}}. \tag{5.1.2}$$

De aquí observamos que $\|x_l\| = \|x_{l+1}\|$, si $|x(l+1)| \leq |x(n_m)|$ y que

$$\|x_{l+1}\| = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\gamma_{n_j}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}}\right)|x(n_j)| + \left(\frac{1}{\gamma_{n_m}} - \frac{1}{\gamma_{l+1}}\right)|x(n_m)| + \frac{|x(l+1)|}{\gamma_{l+1}}$$

si $|x(l+1)| > |x(n_m)|$, es decir, $n_{m+1} = l+1$.

De lo anterior se concluye que si $n_{j-1} < k < n_j$ entonces $|x(k)| \leq |x(n_{j-1})|$. Si existe n_m tal que $|x(n_m)| = \|x\|_\infty$, obtenemos ya sea i) o ii). En otro caso, pasando al límite en 5.1.2 cuando l tiende a infinito y observando que $|x(n_m)| \to \|x\|_\infty$ obtenemos el resultado enunciado en el inciso iii). $\square$

Es interesante notar que los puntos extremos de la esfera unitaria de $(\ell_1, |||\cdot|||)^*$ son sucesiones de módulo creciente. Esto se deduce a partir del siguiente resultado:

Lema 5.1.1. *Sean $X = (\ell_1, |||\cdot|||)$ y $x \in \xi(X^*)$. Si (n_i) está dada como en la proposición anterior, entonces para $n_j < k < n_{j+1}$, $|x(k)| = |x(n_j)|$ ó si existe $k > n_m$ con $|x(n_m)| = \|x\|_\infty$, $|x(k)| = |x(n_m)|$.*

Demostración. Si existen j y k tales que $n_j < k < n_{j+1}$ y $|x(k)| < |x(n_j)|$ ó si existe $k > n_m$ con $|x(k)| < |x(n_m)| = \|x\|_\infty$, sea $\epsilon > 0$ tal que $|x(k)| + \epsilon < |x(n_j)|$ en el primer caso y $|x(k)| + \epsilon < |x(n_m)|$ en el segundo caso. Sean $y = (y(j))$, $z = (z(j))$ tales que

$$y(l) = \begin{cases} x(l), & \text{si } l \neq k, \\ x(k) + \epsilon, & \text{si } l = k, \end{cases} \qquad z(l) = \begin{cases} x(l), & \text{si } l \neq k, \\ x(k) - \epsilon, & \text{si } l = k, \end{cases}$$

como

$$|x(k) + \epsilon| < |x(n_j)|,$$
$$|x(k) - \epsilon| < |x(n_j)|,$$

en el primer caso y

$$|x(k) + \epsilon| < |x(n_m)|,$$
$$|x(k) - \epsilon| < |x(n_m)|,$$

en el segundo caso, tenemos que $y \neq z$, $\|y\| = \|z\| = 1$ y $x = \frac{y+z}{2}$. Esto contradice el hecho de que $x \in \xi(X^*)$. $\square$

Corolario 5.1.1. *Si $X = (\ell_1, |||\cdot|||)$ y $x \in \xi^+(X^*)$ entonces $x(i) \leq x(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$.*

A partir de la proposición 5.1.2 podemos determinar un predual para el espacio de Lin.

Proposición 5.1.4. *Si $\|\cdot\|_{|c_0}$ es la restricción a c_0 de la norma en ℓ_∞ definida en la proposición 5.1.2, entonces $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})^* = (\ell_1, |\|\cdot\||)$, donde la dualidad esta dada como sigue: si $y = (c_i) \in (\ell_1, |\|\cdot\||)$ y $x = (d_i) \in (c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$, $y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i d_i$.*

Demostración. Sean $Y = (c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$, $X = (\ell_1, |\|\cdot\||)$, $X^* = (\ell_\infty, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\|_*$ la norma de Y^* y $f = (b_n) \in Y^*$. Puesto que $\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : x \in B_Y\}$, $|\|f\|| = \sup\{|F(f)| : F \in X^*, \|F\| = 1\}$ y $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0}) \subset X^*$, tenemos que $\|f\|_* \leq |\|f\||$.

Sea $F = (c_n) \in X^*$ con $\|F\| = 1$ tal que $F(f) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j c_j = |\|f\||$. Como $\|\cdot\|$ es absoluta, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para toda $j \in \mathbb{N}$, $b_j c_j \geq 0$, así dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ $0 \leq |\|f\|| - \sum_{j=1}^{n} b_n c_n < \epsilon$.

Al considerar $y = (c_1, c_2, \ldots, c_N, 0, 0 \ldots) \in Y$, $\|y\|_{|c_0} \leq \|F\| = 1$ y $0 \leq \|f\|_* - f(y) \leq |\|f\|| - f(y) < \epsilon$. De donde $0 \leq |\|f\|| - \|f\|_* < \epsilon$ y en consecuencia $\|f\|_* = \|f\|$. Luego $(Y^*, \|\cdot\|_*) = X$. □

Como $(\ell_1, |\|\cdot\||)$ tiene la propiedad de punto fijo, cabe preguntarse si se verifica la FPP en el espacio $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ dado en la proposición anterior. La respuesta en este caso es negativa, sin embargo este espacio tiene la $w-fpp$.

Proposición 5.1.5. $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ *tiene la w-fpp.*

Demostración. Como la base canónica de $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ es monótona, la demostración es análoga a la del teorema 3.2.2. □

Proposición 5.1.6. $X = (c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ *no tiene la FPP.*

Demostración. Sea $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que $n_1 = 1$ y para toda $j \in \mathbb{N}$,

$$b_j = \frac{1}{\gamma_{n_j}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}} > \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+2}}} = b_{j+1}. \tag{5.1.3}$$

Sea $K = \{x \in X : |x(i)| \leq 1 \,, i \in \mathbb{N} \text{ y } x(i) = 0 \,, i \notin (n_j)\}$. Claramente K es un conjunto convexo, cerrado y acotado. Definamos $T : K \to K$ tal que

$$(Tx)(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1, \\ x(n_{j-1}), & \text{si } i = n_j > 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dada una subsucesión (n_{j_i}) de (n_j), a partir de 5.1.3 podemos deducir que para toda $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\gamma_{n_{j_i}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}}}} < \frac{1}{\gamma_{n_{j_i-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}-1}}}. \tag{5.1.4}$$

En efecto, como (b_j) es estrictamente decreciente

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_i}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}}}}\right) &= \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_i}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_i+1}}}\right) + \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_i+1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_i+2}}}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}}}}\right) \\
&= b_{j_i} + b_{j_i+1} + \cdots + b_{j_{i+1}} < b_{j_i-1} + b_{j_i} + \cdots + b_{j_{i+1}-1} \\
&= \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_i-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_i}}}\right) + \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_i}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_i+1}}}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}-2}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}-1}}}\right) = \frac{1}{\gamma_{n_{j_i-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_{i+1}-1}}}.
\end{aligned}$$

Veamos que T es no expansiva.
Sean $x, y \in K$, $s = \{1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_m\} \subset \mathbb{N}$ y

$$a_s(x) = \sum_{j=1}^{m-1} |x(n_j)| \left(\frac{1}{\gamma_{n_j}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j+1}}}\right) + \frac{|x(n_m)|}{\gamma_{n_m}}.$$

Por la definición de K basta establecer que para toda $s \subset (n_j)$, $a_s(Tx - Ty) \leq \|x - y\|_{|c_0}$. Si $s = \{1 = n_1\}$ entonces $a_s(Tx - Ty) = 0 \leq \|x - y\|_{|c_0}$. Si $s = \{1 = n_{j_1} < \cdots < n_{j_m}\}$, $m > 1$, a partir de 5.1.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
a_s(Tx - Ty) &= \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_2}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_3}}}\right) |(x - y)(n_{j_2-1})| + \cdots + \frac{|(x - y)(n_{j_m-1})|}{\gamma_{n_{j_m}}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_{n_{j_2-1}}} - \frac{1}{\gamma_{n_{j_3-1}}}\right) |(x - y)(n_{j_2-1})| + \cdots + \frac{|(x - y)(n_{j_m-1})|}{\gamma_{n_{j_m-1}}} \\
&\leq \|x - y\|_{|c_0}.
\end{aligned}$$

Como s es arbitraria concluimos que $\|Tx-Ty\|_{|c_0} = \sup_{s\subset(n_j)} a_s(Tx-Ty) \leq \|x-y\|_{|c_0}$. Además T no tiene punto fijo, pues si existiese $x \in K$ tal que $Tx = x$, la definición de T implicaría que $x(i) = 1$, $i \in (n_j)$, es decir $x \notin K$. □

Observación 5.1.2. *Recientemente ha sido establecido en [40] que cualquier renormamiento de c_0 para el que este espacio tenga una base 1-incondicional no tiene la propiedad de punto fijo. Así, el anterior resultado puede derivarse también de este hecho.*

En [39] Berta Gamboa de Buen y Fernando Núñez Medina probaron que existe un espacio de Banach sin la propiedad de punto fijo tal que su dual tiene la FPP. A partir de la proposición anterior podemos dar otro ejemplo que ilustra esta misma situación.

Corolario 5.1.2. *Existe un espacio de Banach X sin la FPP tal que X^* tiene la FPP.*

Demostración. El espacio X de la proposición 5.1.6 no tiene la FPP, sin embargo, $X^* = (\ell_1, |\|\cdot\||)$ y como comentamos anteriormente X^* tiene la FPP. □

5.2. El dual de $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$

En [35] los autores determinaron un predual para $(\ell_1, |\|\cdot\||)$. El resultado que obtuvieron fue el siguiente:

Proposición 5.2.1. *Sea $f = (c_i) \in c_0$. Si en c_0 consideramos la norma*

$$\|f\|_{DT} = \max\left(|c_1|\gamma_1^{-1}, \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left(\gamma_j^{-1} - \gamma_{j+1}^{-1}\right)|c_j| + \gamma_k^{-1}|c_k|\right\}\right)$$

entonces $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ es un predual para $(\ell_1, |\|\cdot\||)$.

La prueba de esta proposición supone que el conjunto de puntos extremos de la bola unitaria de $(\ell_1, |\|\cdot\||)$ es el subconjunto de puntos de la proposición 5.1.1 que corresponden a las sucesiones en $\mathbb{N}$ finitas y estrictamente crecientes de la forma $1, 2, \ldots, k$. Sin embargo, dado que en realidad estos no son todos los puntos extremos, podría suceder que el espacio de la proposición 5.2.1 no se corresponda correctamente con un predual para el espacio de Lin. En efecto esto sucede. A continuación ilustramos la situación.

Ejemplo 5.2.1. *Sea $Y = (c_0, \|\cdot\|_{DT})$ y $x = (1, 0, 3, 0, 0, \ldots) \in Y$. Por la definición de $\|\cdot\|_{DT}$ tenemos que:*

$$\|x\|_{DT} = \max\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}, \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} + \frac{3}{\gamma_3}\right) = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} + \frac{3}{\gamma_3}.$$

Por la observación 5.1.1, el conjunto de puntos extremos de coordenadas no negativas en $X_3 = \{x \in (\ell_1, |\|\cdot\||) : x(i) = 0, i > 3\}$ esta dado por:

$$\left\{\frac{1}{\gamma_1}e_1, \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)e_1 + \frac{1}{\gamma_2}e_2, \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)e_1 + \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_3}\right)e_2 + \frac{1}{\gamma_3}e_3,\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_3}\right)e_1 + \frac{1}{\gamma_3}e_3\right\}.$$

Si Y satisficiese que $Y^* = (\ell_1, |\|\cdot\||)$, por el teorema de Krein-Milman deberíamos tener que:

$$\|x\|_{DT} = \|Jx\|_{DT} = \sup\{(Jx)(y) : y \in \xi((\ell_1, |\|\cdot\||))\}$$

pero

$$\begin{aligned}&\sup\{(Jx)(y) : y \in \xi((\ell_1, |\|\cdot\||))\} = \\ &\max\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}, \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} + \frac{3}{\gamma_3}, \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_3} + \frac{3}{\gamma_3}\right) = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_3} + \frac{3}{\gamma_3} \\ &> \|x\|_{DT}.\end{aligned}$$

Sin embargo, si $\|\cdot\|$ es la norma considerada en la proposición 5.1.2, es sencillo verificar que en este caso

$$\|x\|_{|c_0} = \|Jx\| = \sup\{(Jx)(y) : y \in \xi((\ell_1, |\|\cdot\||))\}.$$

El ejemplo anterior nos permite concluir que $(\ell_1, |\|\cdot\||)$ no es el dual de $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$. Dado que $\|\cdot\|_{DT}$ es equivalente a la norma usual de c_0, sabemos que $(c_0, \|\cdot\|_{DT})^*$ es isomorfo al espacio de Lin. Cabe preguntarse cuál es la norma en este espacio dual y si ℓ_1 con esta norma tiene también la propiedad de punto fijo. Trabajando en esta dirección consideramos lo siguiente:

Dado $x \in c_0$ y $r \in \mathbb{N}$, si $r = 1$, definimos $a_1(x) = \frac{|x(1)|}{\gamma_1}$ y si $r > 1$,

$$a_r(x) = \sum_{j=1}^{r-1}\left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right)|x(j)| + \frac{|x(r)|}{\gamma_r}.$$

Observemos que $\|x\|_{DT} = \sup\limits_{r\in\mathbb{N}} a_r(x)$.

Sea $Y_N = \{x \in c_0 : x(i) = 0, \, , i > N\}$ y $X_N = (Y_N, \|\cdot\|_{DT|_{Y_N}})$.

Proposición 5.2.2. *Dado* $x \in S^+_{X_N} = \{x \in S_{X_N} : x(i) \geq 0, \, i \in \mathbb{N}\}$*, si* $k = \min\{i \in \{1, \ldots, N\} : x(i) \neq 0\}$ *entonces* $x \in \xi^+(X_N)$ *si y sólo si*

$$x(i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i < k, \\ \gamma_k, & k \leq i \leq N. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

ó existen $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ *tales que* $k < j_1 < j_2 \leq N$ *y*

$$x(i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i < k, \; j_1 \leq i < j_2, \\ \gamma_k, & k \leq i < j_1, \\ \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}, & j_2 \leq i \leq N. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Demostración. Sea $x \in S^+_{X_N}$ de la forma 5.2.1. Si existen $y, z \in S_{X_N}$ tales que $x = \frac{y+z}{2}$, entonces $x(k) = \frac{y(k)+z(k)}{2}$. Como $|y(k)| \leq \gamma_k$ y $|z(k)| \leq \gamma_k$, concluimos que $x(k) = y(k) = z(k) = \gamma_k$. Supongamos que para $k \leq i \leq j-1$, $j \leq N$, $y(i) = z(i) = \gamma_k$. Como $a_j(y) \leq 1$,

$$\left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right)\gamma_k + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma_{j-1}} - \frac{1}{\gamma_j}\right)\gamma_k + \frac{|y(j)|}{\gamma_j} \leq 1,$$

de donde $-\frac{\gamma_k}{\gamma_j} + \frac{|y(j)|}{\gamma_j} \leq 0$ y así $|y(j)| \leq \gamma_k$. Análogamente $|z(j)| \leq \gamma_k$.

Argumentando como en el caso $j = k$ se sigue que $x(j) = y(j) = z(j) = \gamma_k$. Por inducción concluimos que $y(i) = z(i) = \gamma_k$, $k \leq i \leq N$. Si existiese $1 \leq i_0 < k$ tal que $y(i_0) \neq 0$, entonces

$$a_k(y) = \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)|y(1)| + \cdots \left(\frac{1}{\gamma_{i_0}} - \frac{1}{\gamma_{i_0+1}}\right)|y(i_0)| + \cdots + \frac{\gamma_k}{\gamma_k} > 1,$$

de donde $\|y\|_{DT} > 1$, lo que contradice la elección inicial de y. Así, $y(i) = 0$ si $1 \leq i < k$. Análogamente $z(i) = 0$ para $1 \leq i < k$ y por lo tanto $x = y = z$. Luego $x \in \xi^+(X_N)$.

Sea $x \in S^+_{X_N}$ de la forma 5.2.2, procediendo como en el caso anterior concluimos que para $k \leq i < j_1$, $x(i) = y(i) = z(i) = \gamma_k$ y que $x(i) = y(i) =$

$z(i) = 0$, si $1 \le i < k$. Como $a_{j_2}(y) \le 1$

$$\left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right)\gamma_k + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma_{j_1-1}} - \frac{1}{\gamma_{j_1}}\right)\gamma_k + \left(\frac{1}{\gamma_{j_1}} - \frac{1}{\gamma_{j_1+1}}\right)|y(j_1)| + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{\gamma_{j_2-1}} - \frac{1}{\gamma_{j_2}}\right)|y(j_2-1)| + \frac{|y(j_2)|}{\gamma_{j_2}} \le 1,$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned}|y(j_2)| &\le \gamma_{j_2}\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_{j_1}} - \left(\frac{1}{\gamma_{j_1}} - \frac{1}{\gamma_{j_1+1}}\right)|y(j_1)| - \cdots - \left(\frac{1}{\gamma_{j_2-1}} - \frac{1}{\gamma_{j_2}}\right)|y(j_2-1)|\right] \\ &\le \frac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}.\end{aligned}$$

Análogamente tenemos que $|z(j_2)| \le \frac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$. Como $x(j_2) = \frac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} = \frac{y(k)+z(k)}{2}$ deducimos que $y(j_2) = z(j_2) = \frac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$.

Si existiese $i_0 \in \{j_1, \ldots, j_2 - 1\}$ tal que $y(i_0) \ne 0$, entonces

$$\begin{aligned}a_{j_2}(y) = &\left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right)\gamma_k + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma_{j_1-1}} - \frac{1}{\gamma_{j_1}}\right)\gamma_k + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{\gamma_{i_0}} - \frac{1}{\gamma_{i_0+1}}\right)|y(i_0)| + \cdots + \frac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}\gamma_{j_2}} \\ &\ge 1 + |y(i_0)|\left(\frac{1}{\gamma_{i_0}} - \frac{1}{\gamma_{i_0+1}}\right) > 1,\end{aligned}$$

lo que contradice el hecho de que $\|y\|_{DT} = 1$. Así, $y(i) = 0$ para $j_1 \le i < j_2$. Análogamente $z(i) = 0$ para $j_1 \le i < j_2$.

Supongamos que para $j_2 \le i \le j-1$, con $j \le N$, $z(i) = y(i) = z(i)$. Como

$$\begin{aligned}a_j(y) = &\left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right)\gamma_k + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma_{j_1-1}} - \frac{1}{\gamma_{j_1}}\right)\gamma_k + \frac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}\left(\frac{1}{\gamma_{j_2}} - \frac{1}{\gamma_{j_2+1}}\right) \\ &+ \cdots + \frac{|y(j)|}{\gamma_j} \le 1\end{aligned}$$

se deduce que $\dfrac{-\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}\gamma_j} + \dfrac{|y(j)|}{\gamma_j} \le 0$ y por lo tanto $|y(j)| \le \dfrac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$.
Análogamente $|z(j)| \le \dfrac{\gamma_k\gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$.

Como $x(j) = \frac{y(j)+z(j)}{2} = \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$ se tiene que $x(j) = y(j) = z(j)$. Por inducción concluimos que $z(i) = x(i) = y(i)$ para $j_2 \leq i \leq N$. Por lo tanto, $x \in \xi^+(X_N)$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in \xi^+(X_N)$. Consideramos a continuación los siguientes casos:

Caso 1. $x(i) \neq 0$ para todo $k \leq i \leq N$.

Vamos a establecer en primer lugar que $x(k) = \gamma_k$. Por definición de $\|\cdot\|_{DT}$ es sencillo verificar que $0 < x(k) \leq \gamma_k$. Supongamos que $x(k) < \gamma_k$. Esto implica que $a_k(x) < 1$. Sean $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ tales que $a_k(x) + \frac{\epsilon_1}{\gamma_k} < 1$ y $\epsilon_2 = \gamma_{k+1}\left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right)\epsilon_1 < \min\{x(k+1), \ldots, x(N)\}$.

Definamos $y, z \in X_N$ tales que:

$$y(i) = \begin{cases} x(i), & 1 \leq i < k,\ i > N, \\ x(i) + \epsilon_1, & i = k, \\ x(i) - \epsilon_2, & k < i \leq N, \end{cases} \qquad z(i) = \begin{cases} x(i), & 1 \leq i < k,\ i > N, \\ x(i) - \epsilon_1, & i = k, \\ x(i) + \epsilon_2, & k < i \leq N. \end{cases}$$

Si $r < k$, entonces $a_r(y) = a_r(x) = 0$.

Si $r = k$, $a_r(y) = a_r(x) + \frac{\epsilon_1}{\gamma_k} < 1$.

Si $r > k$, $a_r(y) = a_r(x) + \epsilon_1\left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right) - \frac{\epsilon_2}{\gamma_{k+1}} = a_r(x)$. Por lo tanto $\|x\|_{DT} = \sup\limits_{r\in\mathbb{N}} a_r(x) = \sup\limits_{r\in\mathbb{N}} a_r(y) = \|y\|_{DT} = 1$. Análogamente vemos que $\|z\|_{DT} = 1$. Como $x = \frac{y+z}{2}$, $y \neq z$ y $y, z \in S_{X_N}$, esto contradice el hecho de que $x \in \xi^+(X_N)$. Luego $x(k) = \gamma_k$.

Supongamos que para todo $k \leq i \leq j-1$ con $j \leq N$, $x(i) = \gamma_k$. Entonces

$$a_j(x) = \left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right)\gamma_k + \cdots + \frac{x(j)}{\gamma_j} \leq 1,$$

de donde deducimos que

$$1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_j} + \frac{x(j)}{\gamma_j} \leq 1$$

y por lo tanto $x(j) \leq \gamma_k$. Si $0 < x(j) < \gamma_k$, entonces $a_j(x) < 1$. Sean $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ tales que $a_j(x) + \frac{\epsilon_1}{\gamma_j} < 1$ y $\epsilon_2 = \gamma_{j+1}\left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right)\epsilon_1 < \min\{x(j+1), \ldots, x(N)\}$. Definamos $y, z \in X_N$ tales que:

$$y(i) = \begin{cases} x(i), & 1 \leq i < j,\ i > N, \\ x(i) + \epsilon_1, & i = j, \\ x(i) - \epsilon_2, & j < i \leq N, \end{cases} \qquad z(i) = \begin{cases} x(i), & 1 \leq i < j,\ i > N, \\ x(i) - \epsilon_1, & i = j, \\ x(i) + \epsilon_2, & j < i \leq N. \end{cases}$$

Si $r < j$, $a_r(y) = a_r(x)$.
Si $r = j$, $a_r(y) = a_r(x) + \frac{\epsilon_1}{\gamma_j} < 1$.

Si $r > j$ entonces $a_r(y) = a_r(x) + \epsilon_1 \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right) - \frac{\epsilon_2}{\gamma_{j+1}} = a_r(x)$. Luego $\|y\|_{DT} = 1$. Análogamente vemos que $\|z\|_{DT} = 1$. Como $y \neq z$ y $x = \frac{y+z}{2}$ entonces $x \notin \xi^+(X_N)$, lo que contradice la elección inicial de x. En consecuencia, $x(i) = \gamma_k$ para $k \leq i \leq j$. Por inducción se sigue que $x(i) = \gamma_k$ para $k \leq i \leq N$.

Si existiese $1 \leq i_0 < k$ tal que $x(i_0) \neq 0$ entonces:

$$a_k(x) = \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right) x(1) + \ldots + \left(\frac{1}{\gamma_{i_0}} - \frac{1}{\gamma_{i_0+1}}\right) x(i_0) + \ldots + \frac{\gamma_k}{\gamma_k} > 1,$$

lo que contradice el hecho de que $\|x\|_{DT} = 1$. Así, $x(i) = 0$ para $1 \leq i < k$.

Caso 2. Existe $j_0 \in \{k, \ldots, N\}$ tal que $x(j_0) = 0$.

Sea $j_1 = \min\{i \in \{k, \ldots, N\} : x(i) = 0\}$.

Procediendo como en el caso 1 podemos establecer que para $k \leq i < j_1$, $x(k) = \gamma_k$ y que $x(i) = 0$ para $1 \leq i < k$.

Subcaso a) $x(j) = 0$ para toda $j_1 \leq j \leq N$.
Si $r = j_1$, $a_{j_1}(x) < 1$, sea $\epsilon_1 > 0$ tal que $a_{j_1}(x) + \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} < 1$. Definamos $y, z \in X_N$ tales que:

$$y(i) = \begin{cases} x(i), & 1 \leq i < j_1, \\ \epsilon_1, & j_1 \leq i \leq N, \end{cases} \qquad z(i) = \begin{cases} x(i), & 1 \leq i < j_1, \\ -\epsilon_1, & j_1 \leq i \leq N, \end{cases}$$

Si $r < j_1$, $a_r(y) = a_r(x)$.
Si $r \geq j_1$, $a_r(y) = a_r(x) + \frac{\epsilon_1}{\gamma_{j_1}} < 1$.

Luego, $\|y\|_{DT} = 1$. Análogamente $\|z\|_{DT} = 1$. Como $y \neq z$ y $x = \frac{y+z}{2}$ concluimos que $x \notin \xi^+(X_N)$, lo que contradice la elección de x.

Subcaso b) Existe $j \in \{j_1 + 1, \ldots, N\}$ tal que $x(j) \neq 0$.

Sea $j_2 = \min\{i \in \{j_1 + 1, \ldots, N\} : x(i) \neq 0\}$. Observemos que

$$a_{j_1}(x) = \left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_{k+1}}\right) \gamma_k + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma_{j_1-1}} - \frac{1}{\gamma_{j_1}}\right) \gamma_k + \frac{x(j_2)}{\gamma_{j_2}} \leq 1,$$

es decir

$$1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{j_1}} + \frac{x(j_2)}{\gamma_{j_2}} \leq 1$$

y por tanto $x(j_2) \leq \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$. Procediendo como en el caso $k \leq i < j_1$, vemos que $x(j) = \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}}$ para toda $j_2 \leq i \leq N$. □

La proposición anterior nos permite calcular la norma en $(c_0, \|\cdot\|_{DT})^*$.

Proposición 5.2.3. $(c_0, \|\cdot\|_{DT})^* = (\ell_1, \|\cdot\|_*)$ *donde para cada* $f = (x(i)) \in \ell_1$.

$$\|f\|_* = \sup_{\{k<j_1\leq j_2\}\subset\mathbb{N}} \gamma_k \sum_{j=k}^{j_1-1} |x(j)| + \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} \sum_{j=j_2}^{\infty} |x(j)|$$

Demostración. Como $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_{DT}$ son equivalentes $(c_0, \|\cdot\|_{DT})^* = (\ell_1, \|\cdot\|_*)$, donde $\|\cdot\|_*$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_1$. Procedemos a describir esta norma.

Sea $f = (c_i) \in \ell_1$. Utilizando la proposición anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|f\|_* &= \sup_{N\in\mathbb{N}} \|f_{|X_N}\|_* \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \max\{|f(x)| : x \in B_{X_N}\} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \max\{|f(x)| : x \in \xi(X_N)\} \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \max\left(\max_{1\leq k\leq N} \gamma_k \sum_{j=k}^{N} |x(j)|, \max_{\{k<j_1<j_2\leq N\}} \gamma_k \sum_{j=k}^{j_1-1} |x(j)| + \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} \sum_{j=j_2}^{N} |x(j)| \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \max\left(\max_{1\leq k\leq N} \gamma_k \sum_{j=k}^{N} |x(j)|, \max_{\{k<j_1<j_2\leq N\}} \gamma_k \sum_{j=k}^{j_1-1} |x(j)| + \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} \sum_{j=j_2}^{N} |x(j)| \right) \\
&= \max\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \sum_{j=k}^{\infty} |x(j)|, \sup_{\{k<j_1<j_2\}\subset\mathbb{N}} \gamma_k \sum_{j=k}^{j_1-1} |x(j)| + \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} \sum_{j=j_2}^{\infty} |x(j)| \right) \\
&= \max\left(\sup_{\{k<j_1<j_2\}\subset\mathbb{N}} \gamma_k \sum_{j=k}^{j_1-1} |x(j)| + \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} \sum_{j=j_2}^{\infty} |x(j)|, |||f||| \right) \\
&= \sup_{\{k<j_1\leq j_2\}\subset\mathbb{N}} \gamma_k \sum_{j=k}^{j_1-1} |x(j)| + \frac{\gamma_k \gamma_{j_2}}{\gamma_{j_1}} \sum_{j=j_2}^{\infty} |x(j)|.
\end{aligned}$$

□

Recientemente, en un trabajo realizado en colaboración con el profesor Fernando Núñez Medina, hemos podido establecer que $(\ell_1, \|\cdot\|_*)$ verifica las cuatro condiciones dadas por Lin en [37] para que un renormamiento de ℓ_1 tenga la propiedad de punto fijo. En consecuencia:

Teorema 5.2.1. $(\ell_1, \|\cdot\|_*)$ *tiene la propiedad de punto fijo.*

A pesar de lo anterior, procediendo de manera análoga al caso del predual del espacio de Lin calculado en la sección anterior, podemos ver que:

Corolario 5.2.1. $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ *no tiene la FPP aunque tiene la* $w-fpp$*.*

El trabajo en [35] se centra en mostrar que $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ es un espacio de Lindenstrauss-Phelps que no contiene copias asintóticamente isométricas de c_0. Recordemos que:

Definición 5.2.1. *Un espacio de Banach* X *es de Lindenstrauss-Phelps si la colección de puntos extremos de la bola unitaria cerrada de* X^* *es numerable.*

La prueba de que $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ es de Lindenstrauss-Phelps y de que no contiene copias asintóticamente isométricas de c_0 depende en ambos casos de que su dual sea el espacio de Lin, pero como hemos visto en la sección anterior esto no es correcto. Aún así, la idea de los autores es correcta en dos sentidos. En primer lugar, si consideramos el predual del espacio de Lin $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ dado en la proposición 5.1.4, gracias a la proposición 5.1.1 tenemos que este es un espacio de Lindenstrauss-Phelps y además, si contuviese una copia asintóticamente isométrica de c_0, su dual contendría una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 ([34, Teorema 2.32]) y por tanto no tendría la propiedad de punto fijo ([34, Teorema 2.3]), contradiciendo el hecho de que el espacio de Lin tiene esta propiedad. Es decir, $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ satisface las propiedades que se buscan en [35].

En segundo lugar, el dual correcto para el espacio $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ es el espacio $(\ell_1, \|\cdot\|_*)$ dado en la proposición 5.2.3. Razonando como en el caso anterior y utilizando el teorema 5.2.1, tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ no contiene copias asintóticamente isométricas de c_0 y además es un espacio de Lindenstrauss-Phelps como se deduce a partir del siguiente enunciado:

Proposición 5.2.4. *El conjunto de puntos extremos de la bola unitaria de*

$(\ell_1, \|\cdot\|_*)$ *es*

$$
\begin{aligned}
A = &\left\{x \in \ell_1 : x = \theta_1 \gamma_1^{-1} e_1 \, \theta_1 \in \{-1,1\}\right\} \cup \\
&\left\{x \in \ell_1 : x = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\gamma_j^{-1} - \gamma_{j+1}^{-1}\right) \theta_j e_j + \theta_k \gamma_k^{-1} e_k, \ \theta_i \in \{-1,1\}, k > 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Sea $B = \overline{\operatorname{conv}}\,\{A\}$. Observemos que $B = \overline{\operatorname{conv}}\,\{A \cup \{0\}\}$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| \leq 1$, $x \in B$ y $(x_n) \subset \operatorname{conv}\{A \cup \{0\}\}$ tal que $x_n \to x$. Como $x_n \in \operatorname{conv}\{A \cup \{0\}\}$, $x_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i x_i, x_i \in A, \lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \leq 1$. Luego $\alpha x_n = \sum_{i=1}^{m_n} |\alpha| \lambda_i \, (\operatorname{sgn} \alpha) \, x_i \in A$, $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $\alpha x \in B$, por lo que B es un conjunto balanceado.

Si $\theta \in \{1, -1\}$ e $i > 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_j^{-1} - \gamma_{j+1}^{-1}) e_j + \gamma_i^{-1} \theta e_i\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_j^{-1} - \gamma_{j+1}^{-1}) e_j + \gamma_i^{-1} \theta e_i\right) \\
&= \theta \gamma_i^{-1} e_i \in B
\end{aligned}
$$

y por tanto $\theta e_i \in B$ para $i > 1$. Análogamente vemos que $\theta e_1 \in B$. Si B_1 denota la bola unitaria de $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, como $\{\theta e_i : i \in \mathbb{N}, \theta \in \{-1,1\}\} \subset B$, $B_1 \subset B$, lo que implica que B es absorbente.

Sea $k > 1$ y

$$
x = \sum_{j=1}^{k-1} (\gamma_j^{-1} - \gamma_{j+1}^{-1}) \theta_j e_j + \gamma_k^{-1} \theta_k e_k \in A.
$$

Como $\sum_{j=1}^{k-1} (\gamma_j^{-1} - \gamma_{j+1}^{-1}) + \gamma_k^{-1} = \gamma_1^{-1}$, se tiene que $x \in \gamma_1^{-1} B_1$. Claramente $\gamma_1^{-1} e_1 \in \gamma_1^{-1} B_1$ y por lo tanto $B_1 \subset B \subset \gamma_1^{-1} B_1$. Si $\|\cdot\|_B$ es el funcional de Minkowski para B, se tiene que $\|\cdot\|_B$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_1$ en ℓ_1. Denotemos por $(\ell_\infty, \|\cdot\|_{B^*})$ el dual de $(\ell_1, \|\cdot\|_B)$ y veamos que $(c_0, \|\cdot\|_{B^*})^* = (\ell_1, \|\cdot\|_B)$. Sea $X = (c_0, \|\cdot\|_{B^*})$. Puesto que $\|\cdot\|_B$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$ en ℓ_1, $\|\cdot\|_{B^*}$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ en ℓ_∞ y en particular lo son sus restricciones a c_0, por lo que $X^* = (\ell_1, \|\cdot\|_Y)$. Si $f = (c_n) \in X^*$, $\|f\|_Y = \sup\{f(x) : x \in B_X\}$, pero por otra parte, $\|f\|_B = \sup\{F(f) : F \in S_{(\ell_\infty, \|\cdot\|_{B^*})}\}$, lo que implica que $\|f\|_Y \leq \|f\|_B$. Dado $F \in S_{(\ell_\infty, \|\cdot\|_{B^*})}$, teniendo en cuenta la definición de B

podemos ver que

$$\begin{aligned}
\|F\|_{B^*} &= \sup\{F(x) : x \in B\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} c_i x(i) : x = (x(i)) \in B\right\} \\
&\geq \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i x(i)| : x = (x(i)) \in B\right\},
\end{aligned}$$

por lo que $\|F\|_{B^*} = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i x(i)| : x = (x(i)) \in B\}$. Así, si $F = (d_i) \in S_{(\ell_\infty, \|\cdot\|_{B^*})}$ es tal que $F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i d_i = \|f\|_B$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para toda $i \in \mathbb{N}$, $c_i d_i \geq 0$. Luego, si $F_n = (d_1, \ldots, d_n, 0, 0, \ldots)$, $(F_n) \subset B_X$ y $F_n(f) \leq \|f\|_Y \leq \|f\|_B$. De donde se deduce que $\|f\|_B = \|f\|_Y$ y por lo tanto $(c_0, \|\cdot\|_{B^*})^* = (\ell_1, \|\cdot\|_B)$. Ya que $\xi(B) \subset A$, si $x \in X$, por el teorema de Krein-Milman

$$\begin{aligned}
\|x\|_{B^*} = \|Jx\|_{B^*} &= \sup\{x(e) : e \in \xi(B)\} = \sup\{x(y) : y \in A\} \\
&= \max\left(\frac{|x(1)|}{\gamma_1}, \sup_{k>1} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right)|x(j)| + \frac{|x(k)|}{\gamma_k}\right) \\
&= \|x\|_{DT}.
\end{aligned}$$

En consecuencia la función identidad $I : (c_0, \|\cdot\|_{DT}) \to (c_0, \|\cdot\|_{B^*})$ es una isometría y por lo tanto $(\ell_1, \|\cdot\|_B) = (\ell_1, \|\cdot\|_*)$. Se sigue entonces que $\xi((\ell_1, \|\cdot\|_*)) \subset A$. Veamos que $A \subset \xi((\ell_1, \|\cdot\|_*))$, para ello, observemos en primer lugar que si $x \in A$, entonces $\|x\|_B = \|x\|_* = 1$.

De la definición de $\|\cdot\|_*$, se tiene que si $x \in S_{(\ell_1, \|\cdot\|_*)}$, entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, $|x(i)| \leq \frac{1}{\gamma_i}$, mas aún, se cumple lo siguiente:

Afirmación

1) Si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x(i_0)| = \frac{1}{\gamma_{i_0}}$ entonces $x(i) = 0$, $i > i_0$.

2) Si $i_0 > 1$ y $|x(i_0)| = \frac{1}{\gamma_{i_0}}$, entonces $|x(i_0 - 1)| \leq \left(\frac{1}{\gamma_{i_0-1}} - \frac{1}{\gamma_{i_0}}\right)$

3) Si $i_0 > 1$, $|x(i_0)| = \frac{1}{\gamma_{i_0}}$ y para $1 < l \leq j < i_0$, $|x(j)| = \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right)$ entonces $|x(l-1)| \leq \left(\frac{1}{\gamma_{l-1}} - \frac{1}{\gamma_l}\right)$.

En efecto, veamos 3), la prueba de los demás incisos es análoga.

Si $|x(l-1)| > \left(\frac{1}{\gamma_{l-1}} - \frac{1}{\gamma_l}\right)$, tomando $k = l-1$, $j_1 = i_0 + 1$ y $j_2 = i_0 + 2$, $S(x, k, j_1, j_2) > \gamma_k \sum_{j=k}^{i_0-1} \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right) + \frac{\gamma_k}{\gamma_{i_0}} = 1$, lo que contradice el hecho de que $\|x\|_* = 1$.

Si $x = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_{j+1}}\right) \theta_j e_j + \frac{\theta_m e_m}{\gamma_m} \in A$ y $x = \frac{y+z}{2}$ con $\|y\|_* = \|z\|_* = 1$, entonces $|x(m)| = \frac{1}{\gamma_m} = \frac{|y(m)+z(m)|}{2}$, de donde $z(m) = y(m) = \frac{\operatorname{sgn} x(m)}{\gamma_m}$. Usando la afirmación anterior, concluimos que $x = y = z$ y por lo tanto $x \in \xi((\ell_1, \|\cdot\|_*))$. Claramente $\frac{\theta e_1}{\gamma_1} \in \xi((\ell_1, \|\cdot\|_*))$. Luego $A = \xi((\ell_1, \|\cdot\|_*))$. $\square$

Corolario 5.2.2. *$(c_0, \|\cdot\|_{DT})$ es un espacio de Lindenstrauss-Phelps.*

5.3. La AFPP en $(\ell_1, |||\cdot|||)$

En esta sección al hacer referencia a $(\ell_1, |||\cdot|||)$ suponemos siempre que es el dual del espacio $(c_0, \|\cdot\|_{|c_0})$ dado en la proposición 5.1.4.

Es sencillo establecer que para todo $x \in \ell_1$, $\gamma_1\|x\|_1 \leq |||x||| \leq \|x\|_1$ por lo que ℓ_1 y $(\ell_1, |||\cdot|||)$ son espacios isomorfos, sin embargo son muy diferentes con respecto a la propiedad de punto fijo. Cabe preguntarse si lo son también con respecto a la propiedad de punto fijo aproximada. Aprovechando la descripción del dual del espacio de Lin realizada en la sección anterior, en esta sección estableceremos algunas diferencias significativas entre la AFPP en ℓ_1 y en $(\ell_1, |||\cdot|||)$. Dado que en espacios duales reflexivos cada conjunto convexo es w-cerrado si y sólo si es w^*-cerrado y la colección de conjuntos con la AFPP coincide con la clase de conjuntos linealmente acotados, en el caso de un espacio no reflexivo como ℓ_1 es natural el estudio de la AFPP en conjuntos convexos y w^*-cerrados. Centramos nuestra atención en esta colección motivados también por algunos de los recientes avances ([4]) que han sido obtenidos sobre la propiedad de punto fijo en esta clase de conjuntos en ℓ_1.

Por el teorema 2.1.2, al estudiar la AFPP en un subconjunto C convexo, cerrado y no acotado de un espacio de Banach X analizando el comportamiento de los funcionales en X^* a través de la normalización de sucesiones no acotadas en C, basta restringirnos al conjunto de puntos extremos de la esfera unitaria de X^*. Por este motivo, poder describir tal conjunto en general resulta de gran utilidad, pues permite en muchos casos la simplificación de los cálculos. Sin embargo, al considerar el espacio $X = (\ell_1, |\|\cdot\||)$ la complejidad de la norma de X^* hace difícil calcular con precisión este conjunto. La siguiente observación nos ayudará a trabajar con un elemento arbitrario de B_{X^*}.

Proposición 5.3.1. *Sea $X = (\ell_1, |\|\cdot\||)$ y $f = (c_i) \in B_{X^*}$. Entonces $\|f\|_\infty < 1$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición 5.1.3. □

Consideramos a continuación el siguiente ejemplo que nos indica que en ℓ_1 con la norma de Lin la familia de conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados con la AFPP es no vacía, hecho que difiere de la conclusión en ℓ_1 con su norma usual (veáse el teorema 5.0.1).

Ejemplo 5.3.1. *En $X = (\ell_1, |\|\cdot\||)$ existen conjuntos convexos w^*-cerrados no acotados y con la AFPP.*

Sean $\left(\frac{e_i}{\gamma_i}\right) \subset S_X$, $f = (c_i) \in S_{X^*}$ y $k = \min\{j \in \mathbb{N} : \|f\|_\infty < \gamma_j\}$. Sea $g = (\beta_j) \in S_{X^*}$ tal que

$$\beta_j = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \le j \le k\ , \\ \gamma_{k+1}, & \text{si } j \ge k+1. \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{lím\,sup}_n f\left(\frac{e_n}{\gamma_n}\right) \le \|f\|_\infty < \gamma_{k+1} = \operatorname{lím\,inf}_n g\left(\frac{e_n}{\gamma_n}\right)$. De este modo $\left(\frac{e_n}{\gamma_n}\right)$ es una P-sucesión y por tanto $C = \overline{\operatorname{conv}}\left\{\frac{ne_n}{\gamma_n}\right\}$ es direccionalmente acotado.

Sea

$$K = \operatorname{conv}\left(\left\{\frac{ne_n}{\gamma_n}\right\} \cup \{0\}\right) = \operatorname{conv}\left(\operatorname{conv}\left(\frac{ne_n}{\gamma_n}\right) \cup \{0\}\right)$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{ie_i}{\gamma_i} : m \in \mathbb{N},\, 0 \le \lambda_i,\, \sum_{i=1}^m \lambda_i \le 1\right\}$$

Por el lema 2.1.1, $\overline{K}$ es direccionalmente acotado. Observemos que

$$\overline{K} = \left\{\sum_{i=1}^\infty \lambda_i i\frac{e_i}{\gamma_i} : \sum_{i=1}^\infty \lambda_i i\frac{e_i}{\gamma_i} \text{ converge, } 0 \le \lambda_i \text{ y } \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \le 1\right\}.$$

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{K}^{w^*}$. Como $(\ell_1, |||\cdot|||)$ es separable, por el corolario 2.7.13 en [7] existe $(x_n) \subset K$ tal que $x_n \xrightarrow{w^*} x$. Si $x_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{(n)} i \dfrac{e_i}{\gamma_i}$, entonces $\text{lím}_n\, x_n(j) = \text{lím}_n\, \lambda_j^{(n)} \dfrac{j}{\gamma_j} = a_j$. Sea $\lambda_j = \text{lím}_n\, \lambda_j^{(n)}$. Dado $\{1, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$ y $e = \sum_{j=1}^{k} \dfrac{\gamma_j}{j} e_j$ se tiene que $\text{lím}_n\, e(x_n) = \text{lím}_n \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \leq 1$. Puesto que esto es cierto para toda $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \leq 1$. Luego $x \in \overline{K}$ y así $\overline{K}^{w^*} = \overline{K}$.

El ejemplo anterior nos permite concluir también que existen espacios arbitrariamente cercanos a ℓ_1 en el sentido de Banach-Mazur para los que no se preserva el hecho de que la familia de conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados con la AFPP sea vacía.

Corolario 5.3.1. *Dado $\delta > 0$ existe una norma $|||\cdot|||_{\gamma_1}$ equivalente con la de ℓ_1, tal que $d(\|\cdot\|_1, |||\cdot|||_{\gamma_1}) < 1 + \delta$ y en $(\ell_1, |||\cdot|||_{\gamma_1})$ existen conjuntos convexos, w^*-cerrados, no acotados con la AFPP.*

Demostración. Sea $|||\cdot|||$ la norma del espacio de Lin. Como en ℓ_1 se cumple que $\gamma_1\|\cdot\|_1 \leq |||\cdot||| \leq \|\cdot\|_1$, $d(\|\cdot\|_1, |||\cdot|||) \leq \dfrac{1}{\gamma_1}$. Si elegimos γ_1 tal que $\frac{1}{\gamma_1} < 1+\delta$ y $|||\cdot|||_{\gamma_1}$ es la norma de Lin para esta elección de γ_1, entonces $d(\|\cdot\|_1, |||\cdot|||_{\gamma_1}) < 1 + \delta$ y la conclusión se sigue a partir del ejemplo anterior. $\square$

Aunque por el teorema 2.1.3 sabemos que en espacios no reflexivos la familia de conjuntos convexos, no acotados, cerrados y linealmente acotados difiere de la familia de conjuntos con la AFPP, el siguiente teorema ilustra el hecho de que al restringirnos a la subcolección de conjuntos convexos y w^*-cerrados en un espacio dual X^*, puede suceder que estas familias coincidan. Esto es un hecho interesante dado que asemeja el comportamiento de la AFPP en espacios reflexivos.

Teorema 5.3.1. *Sea $C \subset X = (\ell_1, |||\cdot|||)$ convexo, no acotado y w^*-cerrado. Entonces C es linealmente acotado si y sólo si C tiene la AFPP.*

Demostración. Si C no es linealmente acotado, C contiene un rayo y como explicamos en los comentarios posteriores a la definición 2.1.2 esto implica que C no tiene la AFPP.

Si C es linealmente acotado, sea $(x_n) \subset C$ tal que $|||x_n||| \to \infty$ y $y_n = \dfrac{x_n}{|||x_n|||}$. Consideramos a continuación los siguientes casos:

Caso 1. Existe una subsucesión $(n_s) \subset \mathbb{N}$ tal que $y_{n_s} \xrightarrow{w^*} a \neq 0$. Procediendo como en la demostración de la proposición 5.0.1 (proposición 3.6 en [4]) vemos que C no es linealmente acotado, por lo que este caso no puede darse.

Caso 2. $y_n \xrightarrow{w^*} 0$. Sea $f = (c_i) \in S_{X^*}$. Pasando por una subsucesión podemos suponer que $\limsup_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

Dado $x \in \ell_1$, definimos el soporte de x como el conjunto $\operatorname{sop} x = \{i \in \mathbb{N} : x(i) \neq 0\}$. Utilizamos la notación $\operatorname{sop} x < \operatorname{sop} y$ cuando $\max\{i : i \in \operatorname{sop} x\} < \min\{j : j \in \operatorname{sop} y\}$.

Mediante el método ilustrado en la prueba del corolario 1.9 en [41] podemos construir una sucesión (z_n) de elementos de soporte finito tales que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{sop} z_n < \operatorname{sop} z_{n+1} \quad \text{y} \quad |||y_{m_n} - z_n||| < \frac{1}{n}, \tag{5.3.1}$$

para alguna subsucesión de (y_n). A partir de 5.3.1 deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} f(y_{m_n}) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{z_n}{|||z_n|||}\right).$$

Si $z_n = \sum_{i=r_n}^{s_n} z_n(i)e_i$ y $k < \operatorname{sop} z_n$

$$\frac{f(z_n)}{|||z_n|||} \leq \frac{\|f\|_\infty \sum_{i=r_n}^{s_n}|z_n(i)|}{\max\limits_{1\leq i\leq s_n} \gamma_i \sum_{j=i}^{s_n}|z_n(i)|} \leq \frac{\|f\|_\infty \sum_{i=r_n}^{s_n}|z_n(i)|}{\gamma_{r_n} \sum_{j=r_n}^{s_n}|z_n(i)|} = \frac{\|f\|_\infty}{\gamma_{r_n}}$$

y por tanto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(z_n)}{|||z_n|||} \leq \|f\|_\infty < 1$.

Por la definición 2.1.3 y el teorema 2.1.2 se sigue que C tiene la AFPP. □

Ya que en un espacio de Banach X la colección de conjuntos convexos y cerrados con la AFPP es subconjunto de la colección de conjuntos linealmente acotados, en el teorema anterior cabe destacar el hecho de que al renormar ℓ_1 con la norma de Lin, la familia de conjuntos no acotados y w^*-cerrados lejos de ser vacía coincide con la clase de conjuntos linealmente acotados. Esta es otra característica que distingue a estos espacios en términos de la AFPP.

5.4. La AFPP en $\ell_1 = Y_\alpha^*$

La colección de conjuntos en un espacio dual X^* con la FPP depende del predual elegido para X^*. El espacio ℓ_1 tiene una infinidad de preduales y usualmente algunos de los resultados sobre este espacio se basan en suponer que $\ell_1 = c_0^*$. En particular, la colección de conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados de ℓ_1 con la AFPP es vacía cuando es considerado como el dual de c_0, hecho que puede dejar de verificarse al considerar una norma equivalente en ℓ_1 como probamos en la sección anterior. Al elegir diferentes preduales en ℓ_1 podemos cambiar la colección de conjuntos convexos y w^*-cerrados, por lo que cabe preguntar sobre la validez de este enunciado cuando ℓ_1 es el dual de espacios distintos de c_0.

Para estudiar esta cuestión, en los siguientes resultados consideraremos espacios de la forma $Y_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \bigoplus c_i\right)_\infty$ donde $c_i = (c, \|\cdot\|_\infty)$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $\alpha < \infty$, al escribir $(x_1, x_2, \ldots,) \in Y_\alpha$ sobreentendemos que $(x_1, x_2, \ldots,) = (x_1, x_2, \ldots, x_\alpha)$ y si $\alpha = \infty$, $\text{lím}_i \|x_i\|_\infty = 0$.

Sea $\alpha \in \mathbb{N}$. Para cada $k \leq \alpha$, definimos $L_k : Y_\alpha \to \mathbb{R}$ de tal forma que si $x = (x_1, x_2, \ldots,) \in Y_\alpha$, $L_k x = \text{lím}_{j\to\infty} x_k(j)$. Análogamente definimos L_k si $\alpha = \infty$. Para $j, l \in \mathbb{N}$, definimos $e_{jl} \in c_l$ tal que

$$e_{jl}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n, \\ 1 & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Para $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sea I_α tal que:

$$I_\alpha = \begin{cases} \{1, \ldots, \alpha\}, & \text{si } \alpha < \infty, \\ \mathbb{N}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \times I_\alpha$ una biyección. Es sencillo verificar que la función $\Phi : \ell_1 \to \ell_1(\mathbb{N}^* \times I_\alpha)$ dada por $\Phi f = (h_{ij}) = h$, donde $h_{ij} = f(\phi^{-1}(i, j))$, es un isomorfismo isométrico. Teniendo en cuenta esto, probamos en primer lugar que para los espacios Y_α se cumple que $Y_\alpha^* = \ell_1$.

Lema 5.4.1. *Sea $Y_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \bigoplus c_i\right)_\infty$ donde $c_i = (c, \|\cdot\|_\infty)$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Entonces, Y_α^* se identifica isométricamente con ℓ_1. La función de dualidad está definida por*

$$f((x_1, x_2, \ldots,)) = \sum_{l=1}^{\alpha} \left(f_{0l} L_l x + \sum_{j=1}^{\infty} f_{jl} x_l(j) \right)$$

con $f = (f_{ij}) \in \ell_1(\mathbb{N}^* \times I_\alpha)$, $x = (x_1, x_2, \ldots,) \in Y_\alpha$.

Observación 5.4.1. *Cabe resaltar que la dualidad definida en el lema anterior depende de ϕ, es decir de la biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^* \times I_\alpha$.*

Demostración. Sea $R : \ell_1(\mathbb{N}^* \times I_\alpha) \to Y_\alpha^*$ tal que

$$Rf((x_1, x_2, \ldots,)) = f((x_1, x_2, \ldots,)).$$

Claramente Rf es lineal y además

$$\|Rf((x_1, x_2, \cdots,))\| \leq \|f\|_1 \|x\|_Y \tag{5.4.1}$$

por lo que $Rf \in Y_\alpha^*$. Es sencillo ver que R es lineal y además de 5.4.1, $\|Rf\| \leq \|f\|_1$.

Para cada $l \in \mathbb{N}$ definimos $u_l \in c_l$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$, $u_l(i) = 1$. Sea $\varphi \in Y_\alpha^*$ y consideremos $f = (f_{ij})$ donde

$$f_{ij} = \begin{cases} \varphi(u_j), & \text{si } i = 0, \\ \varphi(e_{ij}), & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Veamos que $f \in \ell_1(\mathbb{N}^* \times I_\alpha)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{M} |f_{ij}| &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \varphi\left(\operatorname{sgn} \varphi(e_{ij}) e_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{M} \varphi\left(\operatorname{sgn} \varphi(u_j) u_j\right) \\ &\leq 2\|\varphi\| \end{aligned}$$

independientemente de M y N. Luego $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\alpha} |f_{ij}| < \infty$. Teniendo en cuenta que $\{\{u_l\}_{l \in \mathbb{N}}\} \cup \left\{\{e_{ij}\}_{(i,j) \in \mathbb{N} \times I_\alpha}\right\}$ es una base para Y_α, dado $x \in Y_\alpha$, $x = \sum_{l=1}^{\alpha} \left((L_l x) u_l + \sum_{j=1}^{\infty} x_l(j) e_{jl}\right)$. Si $\alpha < \infty$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{l=1}^{\alpha} \left((L_l x) \varphi(u_l) + \sum_{j=1}^{\infty} x_l(j) \varphi(e_{jl}) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{\alpha} \left((L_l x) f_{0l} + \sum_{j=1}^{\infty} f_{jl} x_l(j) \right) \\ &= Rf(x). \end{aligned}$$

Si $\alpha = \infty$, como $\|x_l\|_\infty \to 0$ cuando $l \to \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $l > N$ entonces $\|x_l\|_\infty < \epsilon$.

Sea $y = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots) \in Y_\alpha$. Observemos que

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| < \epsilon \|\varphi\|. \tag{5.4.2}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(y) - Rf(x)\| \\
&= \left|\sum_{l=1}^{N}\left((L_l x)\varphi(u_l) + \sum_{j=1}^{\infty} x_l(j)\varphi(e_{jl})\right) - \sum_{l=1}^{\infty}\left((L_l x) f_{0l} + \sum_{j=1}^{\infty} f_{jl} x_l(j)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{l=1}^{N}\left((L_l x)\varphi(u_l) + \sum_{j=1}^{\infty} x_l(j)\varphi(e_{jl})\right) - \sum_{l=1}^{\infty}\left((L_l x)\varphi(u_l) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(e_{jl}) x_l(j)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{l=N+1}^{\infty}(L_l x)\varphi(u_l) - \sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(e_{jl})x_l(j)\right| \leq 2\|\varphi\|\epsilon. \qquad (5.4.3)
\end{aligned}$$

A partir de 5.4.2 y 5.4.3 concluimos que $Rf(x) = \varphi(x)$ y por lo tanto $\|Rf\| = \|\varphi\| \geq \|f\|_1$. Se sigue que R es un isomorfismo isométrico. □

Para construir un conjunto convexo, no acotado y direccionalmente acotado en $\ell_1 = Y_\infty^*$ a partir del cual podamos determinar un posible conjunto con estas mismas características pero que además sea w^*-cerrado, estudiamos un tipo especial de (P)-sucesión en este espacio. El método que seguimos para definir tal sucesión es similar al que se ilustra en [42].

Lema 5.4.2. *Sea $Y_\infty = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \bigoplus c_i\right)_\infty$ donde $c_i = (c, \|\cdot\|_\infty)$. Si definimos $(y_n) \subset \ell_1(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}) = Y_\infty^*$ tal que para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in Y_\infty$*

$$y_n((x_1, x_2, \ldots,)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k x}{2^{k+1}} - L_n x_n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(n)}{2^{k+1}},$$

entonces (y_n) es una P-sucesión.

Demostración. Puesto que $\ell_1(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})^* = \ell_\infty(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$, dados $f = (f_{ij}) \in \ell_1(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$ y $h = (h_{ij}) \in \ell_\infty(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$, consideramos $h(f) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} f_{ij}$.

Dado $u = (u_{ij}) \in \xi(S_{\ell_\infty(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})}))$ tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $u_{0j} = 1$, $j \in \mathbb{N}$.

Así, $u(y_n) \leq \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$.

Caso 2. Existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{0j_0} = -1$.

En este caso $u(y_n) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{j_0+1}} + 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^{j_0+1}}$.

En cualquier caso existe $c > 0$ tal que $u(y_n) \leq 2 - \dfrac{1}{2^{j_0+1}} < c < 2$. Sean $\epsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que $2 - \epsilon > c$ y $\sum_{k=M+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} < \epsilon$ y $v = (v_{ij}) \in \ell_\infty(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$, $\|v\|_\infty = 1$, tal que $v_{0j} = 1$, $j \leq M$, $v_{0j} = -1$ si $j > M$ y $v_{ij} = -1$ para toda $i > 0$.

Si $n > M$

$$\begin{aligned} v(y_n) &= \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2^{k+1}} - \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} + 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \epsilon + 1 + \frac{1}{2} \\ &= 2 - \epsilon > c. \end{aligned}$$

Luego $\liminf_n v(y_n) \geq c > \limsup_n u(y_n)$ y por tanto (y_n) es una P-sucesión.

□

Mediante el lema anterior y el lema 2.1.2 se sigue que el conjunto $C_0 = \overline{\text{conv}}\,\{ny_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convexo, cerrado, no acotado y con la AFPP. Además, por el lema 2.1.1, $C = \overline{\text{conv}}\,\{\{ny_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\}$ también tiene la AFPP. Más aún:

Proposición 5.4.1. *Si Y_∞ y $(y_n) \subset \ell_1(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}) = Y_\infty^*$ están dados como en el lema 5.4.2, entonces el conjunto*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i i y_i : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i i y_i \text{ converge, } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \leq 1 \right\}$$

tiene la AFPP y es w^*-cerrado.

Demostración. Las observaciones precedentes a la proposición indican que C tiene la AFPP.

Sea $F = (f_{ij}) \in C$. Si $(x_1, x_2, \ldots,) \in Y_\infty$ tenemos que

$$F((x_1, x_2, \ldots,)) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i i \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k x_k}{2^{k+1}} \right) - L_i x_i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(i)}{2^{k+1}} \right].$$

Para $j \geq 1$, sea $x_j^{(l)} = (x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots, e_{jl}, 0, 0, \ldots) \in Y_\infty$.

Observemos que $f_{jl} = F(x_j^{(l)})$ y que $f_{0l} = \lim_{j\to\infty} F(z_j^{(l)})$ donde $z_j^{(l)} = (z_1, z_2, \ldots,) = (0, 0, \ldots, u_{jl}, 0, 0, \ldots,)$ con $u_{jl} \in c_l$ dado por

$$u_{jl}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < j, \\ 1, & \text{si } n \geq j. \end{cases}$$

Como $L_k x_j^{(l)} = 0$ para todo k y

$$x_k(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq l, \\ 0, & \text{si } k = l \text{ y } i \neq j, \\ 1, & \text{si } k = l,\ i = j, \end{cases}$$

tenemos que

$$f_{jl} = F(x_j^{(l)}) = -\frac{\lambda_j j}{2^{l+1}} \quad \text{para } j \geq 1. \tag{5.4.4}$$

Además, como $F \in \ell_1$ se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j j}{2^{l+1}} < \infty$, es decir $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j j < \infty$. Por otro lado, como $L_k z_l = 0$ si $k \neq l$, $L_l z_l = 1$ y

$$z_k(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq l, \\ 0, & \text{si } k = l,\ i < j, \\ 1, & \text{si } k = l,\ i \geq j. \end{cases}$$

Para $j \geq 1$ se sigue que

$$\begin{aligned} F(z_j^{(l)}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i i \frac{1}{2^{l+1}} - \lambda_l l - \sum_{i=j}^{\infty} \lambda_i i \frac{1}{2^{l+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i i \frac{1}{2^{l+1}} - \lambda_l l \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

y $f_{0l} = \lim_{j\to\infty} F(z_j^{(l)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i i \frac{1}{2^{l+1}} - \lambda_l l$.

Sea $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en C tal que $v_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{(\alpha)} i y_i \xrightarrow{w^*} G = (g_{ij})$.

A partir de 5.4.4 sabemos que $v_\alpha(x_j^{(l)}) = -\frac{\lambda_j^{(\alpha)} j}{2^{l+1}}$ para $j \geq 1$, $l \geq 1$.

Como $v_\alpha(x_j^{(l)}) \to G(x_j^{(l)})$ resulta que $g_{jl} = \lim_\alpha \frac{-\lambda_j^{(\alpha)} j}{2^{l+1}} = -\frac{\lambda_j j}{2^{l+1}}$, donde $\lambda_j = \lim_\alpha \lambda_j^{(\alpha)}$. De 5.4.5 tenemos

$$v_\alpha(z_j^{(l)}) = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i^{(\alpha)} i \frac{1}{2^{l+1}} - \lambda_l^{(\alpha)} l$$

y por tanto

$$G(z_j^{(l)}) = \lim_{\alpha} v_\alpha(z_j^{(l)}) = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i i - \lambda_l l$$

y $g_{0l} = \text{lím}_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i i - \lambda_l l = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i i - \lambda_l l$.

Para cualquier $r \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in A$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(\alpha)} \le 1$ y por tanto $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \le 1$, luego $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \le 1$ y así $G \in C$, por lo que C es w^*- cerrado. □

A partir de la proposición 5.4.1 concluimos que existen preduales de ℓ_1 que inducen topologías w^* en este espacio en las que existen conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados con la AFPP, lo que no sucede en la topología w^* dada por c_0. Sin embargo, observamos que en el predual Y_α definido en el lema 5.4.1 es importante que $\alpha = \infty$ ya que para $\alpha = k \in \mathbb{N}$, al igual que en [4] podemos probar que:

Teorema 5.4.1. *Si consideramos ℓ_1 como el dual de Y_k, entonces la colección de conjuntos convexos, no acotados y w^*-cerrados con la AFPP en este espacio, es vacía.*

Demostración. Sea $C \subset \ell_1(\mathbb{N}^* \times I_k) = Y_k^*$ convexo, no acotado y w^*-cerrado y supongamos que C verifica la AFPP. Si $(f_n) = \left((f_{ij}^{(n)})\right) \in \ell_1(\mathbb{N}^* \times I_k)$ es tal que $\|f_n\|_1 \to \infty$, por la proposición 5.0.1 tenemos que $\dfrac{f_n}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{w^*} 0$. Si para $j > 1$ definimos $x_j^{(l)} = (0, \ldots, e_{jl}, \ldots, 0) \in Y_k$, con $e_{jl} \in c_l$ dado por

$$e_{jl}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq j, \\ 1, & \text{si } n = j, \end{cases}$$

a partir del lema 5.4.1 y el hecho de que $\dfrac{f_n}{\|f_n\|} \xrightarrow{w^*} 0$ concluimos que $f_{jl}^{(n)} \to 0$, $j > 1$ y $1 \le l \le k$. De este modo $\dfrac{f_n}{\|f_n\|_1}$ converge por coordenadas a un elemento $a \in c_{00}$ y por el lema 5.0.1 se sigue que C no tiene la AFPP, lo cual es una contradicción. □

5.5. La FPP y la AFPP en dominios no acotados en ℓ_1

A diferencia del espacio c_0 donde los únicos conjuntos convexos y cerrados con la FPP son los conjuntos w-compactos ([3, Teorema 3.3]), en $\ell_1 = c_0^*$ la FPP tiene un comportamiento mucho más irregular. Cada subconjunto convexo y w-compacto en este espacio, es de hecho compacto y por tanto tiene la FPP para funciones no expansivas, por lo que es natural preguntar si la colección de conjuntos convexos y w^*-compactos también verifica la FPP. Resulta que $\ell_1 = c_0^*$ satisface la w^*-fpp, pero también contiene subconjuntos no w^*-compactos con la FPP ([43]). Más aún, en [43] los autores dan un ejemplo de una sucesión de conjuntos $(C_n) \subset \ell_1$ convexos, cerrados y no w^*-compactos tal que $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ y C_n tiene la propiedad de punto fijo para $n = 1, 3, 5, \ldots$ y no la tiene para $n = 2, 4, \ldots$

Sin embargo, además de lo anterior, pocos resultados se han obtenido sobre la propiedad de punto fijo en subconjuntos no w^*-compactos de ℓ_1. Con el objetivo de extender algunos de los teoremas sobre la FPP referentes a conjuntos w^*-compactos de ℓ_1 a dominios que no verifiquen esta condición, en [4] T. Domínguez definió un módulo que nos permite clasificar a los conjuntos w^*-compactos de este espacio. Para esto, si $C \subset \ell_1 = c_0^*$ es convexo, cerrado y acotado, consideró

$$b(C) = \sup \left\{ b \in [1, 2] : d(z, C) \leq \left(\frac{2}{b} - 1 \right) \limsup_{n \to \infty} \|x_n - z\|_1 \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas la sucesiones $(x_n) \subset C$ tales que $x_n \xrightarrow{w^*} z$ para alguna $z \in \ell_1$. Domínguez probó que $b(C) = 2$ si y sólo si C es w^*-compacto. Haremos referencia a este módulo simplemente como módulo b.

Es posible extender la definición de este módulo para considerar también conjuntos no acotados y una amplia familia de normas equivalentes en ℓ_1, de tal manera que podamos clasificar a los conjuntos w^*-cerrados de forma similar al caso de los conjuntos w^*-compactos en ℓ_1 con su norma usual. Para esto proponemos las siguientes definiciones:

Definición 5.5.1. *Sea* $\mathfrak{F} = \{ |\cdot| : |\cdot|$ *es una norma en* ℓ_1 *equivalente a* $\|\cdot\|_1$ *y existe* $\|\cdot\|$ *en* c_0 *tal que* $(c_0, \|\cdot\|)^* = (\ell_1, |\cdot|) \}$.

Observemos que si $|\cdot|, |\cdot|_1 \in \mathfrak{F}$ entonces la colección de conjuntos w^*-cerrados en $(\ell_1, |\cdot|)$ es la misma que en $(\ell_1, |\cdot|_1)$.

Definición 5.5.2. *Sea $C \subset \ell_1$ convexo y cerrado (no necesariamente acotado) y $|\cdot| \in \mathfrak{F}$. Si*

$$b_{|\cdot|}(C) = \sup\left\{ b \in [1,2] : d(z,C) \leq \left(\frac{2}{b} - 1\right) \limsup_{n\to\infty} |x_n - z| \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones $(x_n) \subset C$ tales que $x_n \overset{w^*}{\to} z$, para algún $z \in \ell_1$.

Proposición 5.5.1. *Sea $C \subset (\ell_1, |\cdot|)$ donde $|\cdot| \in \mathfrak{F}$. Entonces $b_{|\cdot|}(C) = 2$ si y sólo si C es w^*-cerrado.*

Demostración. Como C es convexo y c_0 es separable, C es w^*-cerrado si y sólo si C es secuencialmente w^*-cerrado (ver corolario 2.7.13 en [7]). Es claro que si C es w^*-cerrado entonces $b_{|\cdot|}(C) = 2$. Por otra parte, si C no es w^*-cerrado existe $(x_n) \subset C$ tal que $x_n \overset{w^*}{\to} z \notin C$. Sea $\delta = d(z,C) > 0$ y $r = \limsup_n |x_n - z| > 0$. Entonces $d(z,C) = \frac{\delta}{r} \limsup_n |x_n - z| > \frac{\delta}{2r} \limsup_n |x_n - z| = \left(\frac{2}{b} - 1\right) \limsup_n |x_n - z|$ donde $b = \frac{4r}{2r+\delta}$. La definición de $b_{|\cdot|}(C)$ implica entonces que $b_{|\cdot|}(C) \leq \frac{4r}{2r+\delta} < 2$.

$\square$

Aunque en la definición de $b_{|\cdot|}$ hay un componente métrico, a partir del resultado anterior, cabe destacar el carácter topológico del módulo b pues distingue a los conjuntos w^*-cerrados independientemente de la métrica que consideremos en $\mathfrak{F}$ para ℓ_1.

Mostraremos una relación entre los valores del módulo b para un subconjunto convexo y cerrado en ℓ_1, con respecto a dos normas diferentes en $\mathfrak{F}$.

Lema 5.5.1. *Dadas dos normas $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ en $\mathfrak{F}$ tales que*

$$\alpha|\cdot|_1 \leq |\cdot|_2 \leq \beta|\cdot|_1$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Si $b_i(C) = b_{|\cdot|_i}$, $i = 1, 2$, entonces

$$b_1(C) \geq \frac{2\alpha b_2(C)}{b_2(C)(\alpha - \beta) + 2\beta}.$$

De aqui se deduce además que

$$b_1(C) \geq \frac{2b_2(C)}{b_2(C) + D(2 - b_2(C))},$$

donde $D = d(|\cdot|_1, |\cdot|_2)$ es la distancia de Banach-Mazur entre $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ definida en la sección 4.1.

Demostración. Para $i = 1, 2$, si d_i denota la métrica inducida por la norma $|\cdot|_i$ en X, sea

$$A_i = \left\{ b \in [1,2] : d_i(z, C) \leq \left(\frac{2}{b} - 1\right) \limsup_{n\to\infty} |x_n - z|_i \right\},$$

donde (x_n) es cualquier sucesión en C tal que $x_n \xrightarrow{w^*} z$. Observemos que A_i es no vacío y que $x_n \xrightarrow{w^*} z$ en $(\ell_1, |\cdot|_1)$ si y sólo si $x_n \xrightarrow{w^*} z$ en $(\ell_1, |\cdot|_2)$ pues $|\cdot|_1, |\cdot|_2 \in \mathfrak{F}$.

Sea $(x_n) \subset C$ tal que $x_n \xrightarrow{w^*} z$. Si $b \in A_2$ entonces

$$\begin{aligned}\alpha d_1(z, C) \leq d_2(z, C) &\leq \left(\frac{2}{b} - 1\right) \limsup_{n\to\infty} |x_n - z|_2 \\ &\leq \left(\frac{2}{b} - 1\right) \beta \limsup_{n\to\infty} |x_n - z|_1.\end{aligned}$$

Haciendo $\left(\frac{2}{b} - 1\right)\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{2}{e} - 1\right)$ vemos que $e = \dfrac{2\alpha b}{\beta(2-b) + \alpha b}$, de donde $e \leq 2$. Si $e \leq 1$, por definición $b_1(C) \geq e$. Si $e \geq 1$, entonces $e \in A_1$ y por tanto $b_1(C) \geq e$. Como $b \in A_2$ fue elegido arbitrariamente, tomando $(b_n) \subset A_2$ tal que $b_n \to b_2(C)$ deducimos que $b_1(C) \geq \dfrac{2\alpha b_2(C)}{b_2(C)(\alpha - \beta) + 2\beta}$.

Expresando esta última desigualdad en la forma

$$b_1(C) \geq \frac{2b_2(C)}{b_2(C)(1 - \frac{\beta}{\alpha}) + 2\frac{\beta}{\alpha}}$$

como α y β son constantes de equivalencia arbitrarias, si elegimos (α_n) y (β_n) tales que $\alpha_n|\cdot|_1 \leq |\cdot|_2 \leq \beta_n|\cdot|_1$ y $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to D$, obtenemos que

$$2 \geq b_1(C) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2b_2(C)}{b_2(C)(1 - \frac{\beta_n}{\alpha_n}) + 2\frac{\beta_n}{\alpha_n}} = \frac{2b_2(C)}{b_2(C) + D(2 - b_2(C))}.$$

□

Observación 5.5.1. *Si $b_2(C) = 2$ en el lema anterior entonces $b_1(C) = 2$. Luego $b_1(C) = 2$ si y sólo si $b_2(C) = 2$ y por tanto se sigue que $b_{|\cdot|}(C) = 2$, $|\cdot| \in \mathfrak{F}$.*

Centremos nuestra atención en la última afirmación del teorema 5.0.1 que nos dice que ningún subconjunto convexo, no acotado y w^*-cerrado en ℓ_1 tiene la AFPP. Teniendo en cuenta la definición 5.5.2 y la proposición 5.5.1, tenemos que si $C \subset \ell_1$ es convexo, no acotado y $b_{\|\cdot\|_1}(C) = 2$, entonces C no tiene la AFPP. No sabemos si es posible mejorar este resultado para incluir conjuntos no w^*-cerrados tales que su módulo b esté proximo a 2, es decir, si existe una cota uniforme $1 < \eta < 2$ tal que si $C \subset \ell_1$ es un conjunto convexo y cerrado tal que $\eta \leq b_{\|\cdot\|_1}(C) \leq 2$ entonces C no tiene la AFPP. Sin embargo, veremos que dado cualquier valor $1 < c < 2$ existe un conjunto $C \subset \ell_1$ convexo, cerrado, no acotado tal que $c \leq b_{\|\cdot\|_1}(C) < 2$ y que no tiene la AFPP, mas sí la tiene en una norma equivalente arbitrariamente cercana a $\|\cdot\|_1$, comportamiento parecido al de los conjuntos convexos, no acotados, linealmente acotados y w^*-cerrados de acuerdo al teorema 5.3.1. Para esto consideraremos algunos resultados previos.

Los hechos descritos en la siguiente proposición son enunciados en [43] suponiendo que la sucesión (a_n) es acotada. Queremos observar que bajo las condiciones dadas, estas afirmaciones continúan siendo válidas independientemente de si (a_n) es acotada o no.

Proposición 5.5.2. *Sea $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\inf a_n = a > 0$ y (e_i) la base canónica de ℓ_1. Entonces*

$$C := \overline{\text{conv}}\{a_i e_i : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i : \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in \ell_1,\ t_i \geq 0 \ y \ \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1 \right\}$$

y

$$\overline{C}^{w^*} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i : \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in \ell_1,\ t_i \geq 0 \ y \ \sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq 1 \right\}.$$

Además si $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i \in \overline{C}^{w^*}$, $d(x, C) = \delta_x a$, donde $\delta_x = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} t_i$.

Demostración. Sea $A = \{\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i : \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in \ell_1,\ t_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1\}$. Como A es un conjunto convexo y $a_i e_i \in A$, entonces $\text{conv}\{a_i e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset A$. Por otra parte, si $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in A$ la sucesión (x_n) dada por

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i e_i + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} t_i \right) a_{n+1} e_{n+1}$$

es tal que $(x_n) \subset \text{conv}\{a_i e_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $x_n \to x$. Luego $A \subset C \subset \overline{A}$. Resta verificar que A es cerrado.

Sea $(x_n) \subset A$ tal que $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(n)} a_i e_i \to x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$. La convergencia por coordenadas de x_n a x implica que $b_i = t_i a_i$, con $t_i = \lim_{n\to\infty} t_i^{(n)} \geq 0$, además, si $f \in \ell_\infty$ es tal que $f = \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}, \ldots\right)$, como $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$. Luego $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(n)} \to \sum_{i=1}^{\infty} t_i$ cuando $n \to \infty$ y como para toda $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(n)} = 1$, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$. Luego A es cerrado.

Sea $B = \{\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i : \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in \ell_1,\ t_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq 1\}$.

Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in B$ y la sucesión (x_n) está dada por

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_n\right) a_n e_n,$$

(x_n) es una sucesión en C y $x_n \overset{w^*}{\to} x$. Luego $B \subset \overline{C}^{w^*}$. Para ver la otra contención procedemos como en la primera parte.

Observemos que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i e_i \in \overline{C}^{w^*}$ entonces $x + \delta_x e_i a_i \in C$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(x, C) &\leq \inf \{\|x - (x + \delta_x e_i a_i)\|_1 : i = 1, 2, \ldots\} \\ &= \inf \{\delta_x a_i : i = 1, 2, \ldots\} = \delta_x a. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $y = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i \in C$ entonces

$$\|x - y\|_1 = \sum^{\infty} |\lambda_i - t_i| a_i \geq \left|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i - \sum_{i=1}^{\infty} t_i\right| a = \delta_x a$$

y $d(x, C) \geq \delta_x a$. $\square$

La siguiente proposición se encuentra en [44] suponiendo que la sucesión (a_n) es acotada, sin embargo, su validez depende únicamente de que se verifiquen los hechos descritos en la proposición anterior, por lo que este resultado es válido para sucesiones (a_n) que no sean acotadas, siempre que su límite inferior sea finito. Incluimos la demostración para corroborar este hecho y por completitud de la exposición.

Proposición 5.5.3. *Sea $(a_i) \subset [1, \infty)$ una sucesión tal que*

$$1 \leq a := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf_{n\to\infty} a_n := d < \infty$$

y $C = \overline{\text{conv}}\{a_i e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \ell_1$. Si $b_1 = b_{\|\cdot\|_1}$, entonces $b_1(C) \geq \dfrac{2d}{a + d} > 1$.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en C w^*-convergente a $z \in \ell_1$. Puesto que $z \in \overline{C}^{w^*}$, por la proposición 5.5.2, $z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k e_k$, $\lambda_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leq 1$ y $d(z, C) = (1 - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k)\, a$.

Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\|(I - P_N)(z)\|_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k a_k < \epsilon$ y $a_k > d - \epsilon$ para cada $k \geq N$. Como (x_n) converge por coordenadas a z, existe n_0 tal que $\|P_N(x_n) - P_N(z)\|_1 < \epsilon$ para cada $n \geq n_0$. Así, para $n \geq n_0$, tenemos

$$\begin{aligned}\|x_n - z\|_1 &\geq \|(I - P_N)(x_n) - (I - P_N)(z)\|_1 - \|P_N(x_n) - P_N(z)\|_1 \\ &\geq \|(I - P_N)(x_n)\|_1 - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Como $(x_n) \subset C$, podemos escribir $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^{(n)} a_k e_k$ donde $t_k^{(n)} \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^{(n)} = 1$. Para $n \geq n_0$ tenemos

$$\begin{aligned}\epsilon > \|P_N(x_n) - P_N(z)\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |t_k^{(n)} - \lambda_k| a_k \geq \sum_{k=1}^{N} |t_k^{(n)} - \lambda_k| \\ \geq \sum_{k=1}^{N} t_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} t_k^{(n)} = 1 - \sum_{k=1}^{N} t_k^{(n)} \geq 1 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k - \epsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|x_n - z\|_1 \geq \|(I - P_N)(x_n)\|_1 - 2\epsilon &\geq \sum_{k=N+1}^{\infty} t_k^{(n)} (d - \epsilon) - 2\epsilon \\ &\geq (d - \epsilon)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k - \epsilon\right) - 2\epsilon \\ &= (d - \epsilon)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\right) - 2\epsilon - \epsilon d + \epsilon^2 \\ &\geq (d - \epsilon)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\right) - (2 + d)\epsilon \geq d\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right) - (3 + d)\epsilon.\end{aligned}$$

Tomando el límite superior cuando $n \to \infty$ obtenemos que

$$\limsup_n \|x_n - z\|_1 \geq d\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right) = \frac{d}{a} d(z, C).$$

Luego, $d(z, C) \leq \dfrac{a}{d} \limsup_n \|x_n - z\|_1 = \left(\dfrac{2}{b} - 1\right) \limsup_n \|x_n - z\|_1$, donde $b = \dfrac{2d}{a+d}$. □

Al estudiar la prueba del teorema 5.0.1 observamos que para que un conjunto convexo, cerrado y no acotado $C \subset \ell_1 = c_0^*$ no verifique la AFPP, basta requerir que su cerradura en la topología w^* sea linealmente acotada.

Lema 5.5.2. *Sea $C \subset \ell_1$ convexo, cerrado y no acotado. Si $\overline{C}^{w^*}$ es linealmente acotado entonces C no tiene la AFPP.*

Demostración. Sea $(u_n) \subset C$ tal que $\|u_n\|_1 \to \infty$. Puesto que $\overline{C}^{w^*}$ es linealmente acotado, por el teorema 5.3.1, $\overline{C}^{w^*}$ tiene la AFPP en $(\ell_1, |||\cdot|||)$. Por la proposición 3.6 en [4] se sigue que $\dfrac{u_n(j)}{|||u_n|||} \to 0$, $j \in \mathbb{N}$ y como $\dfrac{|u_n(j)|}{\|u_n\|_1} \leq \dfrac{|u_n(j)|}{|||u_n|||}$ tenemos que $\dfrac{u_n(j)}{\|u_n\|_1} \to 0$, $j \in \mathbb{N}$. Por el lema 3.1 en [4] C no tiene la AFPP. □

Como mencionamos anteriormente, teniendo en cuenta la definición de $b_{\|\cdot\|_1}$, una forma equivalente de enunciar el teorema 5.0.1 es decir que cada subconjunto $C \subset \ell_1 = c_0^*$ convexo y no acotado tal que $b_{\|\cdot\|_1}(C) = 2$, no tiene la AFPP. El siguiente resultado nos permite ver que existen subconjuntos convexos, cerrados y no acotados en ℓ_1, tales que $b_{\|\cdot\|_1}$ es arbitrariamente cercano a 2 (no son w^*-cerrados) y que tampoco tienen la AFPP, mas sí la tienen en una norma equivalente en ℓ_1.

Proposición 5.5.4. *Sea $b = b_{\|\cdot\|_1}$. Para cada $0 \leq \delta < 1$ existe $C \subset \ell_1$ convexo, cerrado, no acotado tal que:*

a) $b(C) \geq 2 - \delta$.

b) Si $\delta > 0$, $2 - \delta < b(C) < 2$.

c) C no tiene la AFPP con respecto a $\|\cdot\|_1$, pero existe una norma equivalente $|||\cdot|||$ en la que sí tiene esta propiedad.

Demostración. Si $\delta = 0$ la conclusión se obtiene a partir del ejemplo 5.3.1. Así, supongamos que $0 < \delta < 1$. Sea $d > 4$ tal que $\frac{2d}{4+d} > 2 - \delta$ y $|||\cdot|||$ la norma de Lin. Definamos $(z_n) \subset (\ell_1, |||\cdot|||)$ tal que

$$z_n(i) = \begin{cases} \frac{d}{2n}, & \text{si } i = 2n-1, \\ 1, & \text{si } i = 2n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que $\gamma_{2n} \leq |||z_n||| = \max\left\{\gamma_{2n-1}\frac{d}{2n} + \gamma_{2n-1}, \gamma_{2n}\right\}$, $\text{lím}_{n\to\infty} |||z_n||| = 1$.

Sea $f = (c_i) \in S_{X^*}$ y $k = \min\{j \in \mathbb{N} : \|f\|_\infty < \gamma_j\}$ (observemos que este conjunto es no vacío por la proposición 5.3.1). Sea $g = (\beta_j) \in A$ tal que

$$\beta_j = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ \gamma_{k+1}, & \text{si } j \geq k+1. \end{cases}$$

Tenemos que:

$$\limsup_{n\to\infty} f(z_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \|f\|_\infty \left(\frac{d}{2n} + 1\right) < \gamma_{k+1}\left(\frac{d}{2n} + 1\right) = \liminf_{n\to\infty} g(z_n).$$

Por el lema 2.1.2 se sigue que si $v_n = nz_n$, $C = \overline{\text{conv}}\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la AFPP en $(\ell_1, |||\cdot|||)$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n v_i$ entonces $(w_n) \subset C$ y además $w_n \overset{w^*}{\to} 0 \notin C$. Luego C no es w^*-cerrado y por tanto $b_1(C) < 2$.

Sea $D = \overline{\text{conv}}\{a_i e_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde $a_{2n-1} = d$ y $a_{2n} = 2n$. Como

$$v_n(i) = \begin{cases} \frac{d}{2}, & \text{si } i = 2n-1, \\ n, & \text{si } i = 2n, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$C \subset D$ y por tanto $b_1(C) \geq b_1(D)$. Ademas, $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 4 < d = \text{lím inf}_{n\to\infty} a_n$.

A partir de la proposición 5.5.3 podemos concluir que:

$$2 > b_1(C) \geq b_1(D) \geq \frac{2d}{4+d} > 2 - \delta.$$

Procediendo como en el ejemplo 5.3.1 podemos ver que $\overline{C}^{w^*} = \overline{\text{conv}}\{\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\}$ por lo que $\overline{C}^{w^*}$ es linealmente acotado y por el lema 5.5.2, C no tiene la AFPP en $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. $\square$

5.6. Relación entre acotación lineal y w-compacidad en algunos espacios de Banach

En [3] el autor probó el siguiente resultado, a partir del cual se observa que en conjuntos convexos, cerrados, no acotados y direccionalmente acotados en c_0, es posible encontrar subconjuntos acotados que no son $w-$compactos.

Lema 5.6.1. *Sea C un subconjunto convexo, no acotado y direccionalmente acotado en c_0. Entonces, existe una sucesión en C que es $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)-$ convergente a un punto $u \in \ell_\infty \setminus c_0$.*

De lo anterior se deduce que:

Corolario 5.6.1. *Sea C un subconjunto convexo, no acotado y direccionalmente acotado en c_0. Entonces, existe $K \subset C$ convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto.*

Demostración. Por el lema anterior existe $(x_n) \subset C$ tal que (x_n) es $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$-convergente a un punto $u \in \ell_\infty \setminus c_0$, en consecuencia, si $K = \overline{\text{conv}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, K es el conjunto con las propiedades requeridas. $\square$

Un hecho similar al corolario 5.6.1 se verifica también para el caso de conjuntos no acotados con la AFPP en ℓ_1.

Proposición 5.6.1. *Sea $C \subset \ell_1$ convexo, cerrado, no acotado y con la AFPP. Entonces C contiene un subconjunto convexo, cerrado, acotado y no $\sigma(\ell_1, c_0)-$compacto.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in C$. Sea $(u_n) \subset C$ tal que $\|u_n\|_1 \to \infty$. Pasando por una subsucesión podemos suponer que $\left(v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_1}\right) \subset C$ y $v_n \xrightarrow{w^*} b$. Si alguna subsucesión (v_{n_j}) fuese $w-$Cauchy, como ℓ_1 es débilmente secuencialmente completo y de Schur, entonces $\|v_{n_j} - b\|_1 \to 0$ cuando $j \to \infty$ y por lo tanto $\|b\|_1 = 1$. La proposición 2.6 en [4] implicaría en este caso que C no tiene la AFPP contradiciendo la hipótesis inicial. Luego, (v_n) no tiene subsucesiones $w-$Cauchy y por el teorema de Rosenthal se sigue que existe una subsucesión (v_{n_j}) tal que $[v_{n_j}]$ es isomorfo a ℓ_1. Por lo tanto $K = \overline{\text{conv}}\{v_{n_j}\} \subset C$ es un conjunto convexo, cerrado, acotado que no es $\sigma(\ell_1, c_0)$-compacto. $\square$

Dado que tanto en c_0 como en ℓ_1 cada conjunto convexo, cerrado, no acotado y direccionalmente acotado contiene un subconjunto convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto, esto conduce a preguntar si un hecho semejante se verifica en espacios de Banach no reflexivos con base de Schauder incondicional y si en lugar de requerir que los conjuntos sean direccionalmente acotados, basta que sean linealmente acotados. La respuesta a ambas cuestiones es afirmativa en el caso de espacios no reflexivos con base incondicional reductora o acotadamente completa, que no contienen subespacios reflexivos de dimensión infinita como se muestra a continuación:

Teorema 5.6.1. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder incondicional (x_n) que es acotadamente completa o reductora. Si X no contiene subespacios reflexivos de dimensión infinita, entonces cada subconjunto C convexo, cerrado, no acotado y linealmente acotado contiene un subconjunto K convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto.*

Demostración. Caso 1. Supongamos que (x_n) es acotadamente completa. Por el teorema 4.4.13 en [7] existen un espacio dual Y y un isomorfismo $T : X \to Y$.

Si $C_1 = T(C) \subset Y$ no es w^*-cerrado, entonces existe $t_0 > 0$ tal que $K_1 = t_0 B_X \cap T(C)$ no es w^*-cerrado ([7, Teorema 2.7.11]) y por tanto no es w^*-compacto. En particular no es $w-$compacto y como T es un homeoformismo entre X y Y considerados con sus topologías débiles ([7, Corolario 2.5.12]) se sigue que $K = T^{-1}(K_1) \subset C$ es convexo, cerrado, acotado y no $w-$compacto.

Si C_1 es w^*-cerrado, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in C_1$. Sea $(y_n) \subset C_1$ tal que $\|y_n\| \geq 2^n$ y $v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in C_1$. Por la observación 5.0.1, se sigue que $v_n \overset{w^*}{\to} 0$. Es un hecho conocido que bajo estas condiciones (ver por ejemplo [41, Corolario 1.9]) pasando por una subsucesión, podemos encontrar una base bloque normalizada (z_n) de (x_n) tal que $\|v_n - z_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Definamos $Z = [z_n]$. Puesto que (z_n) es una sucesión bloque de la base (x_n), (z_n) es también una sucesión básica incondicional, acotadamente completa, que no es reductora ya que Y no contiene subespacios reflexivos ([7, Teorema 4.4.15]). Como un espacio no reflexivo con una base de Schauder incondicional contiene ya sea una copia isomorfa de c_0 o de ℓ_1 ([7, Corolario 4.4.24]) y si la base es completamente acotada entonces contiene una copia isomorfa de ℓ_1 ([7, Corolario 4.4.24]), tenemos que Z contiene un subespacio Z_1 isomorfo a ℓ_1. Sea (z_n^1) una base de Schauder de Z_1 equivalente a la base canónica de ℓ_1. A partir de un resultado de M. Japón ([45, Lema 2.4]) existe una base bloque $(\widehat{z_n}^1)$ de (z_n^1) equivalente a una base bloque $(\widehat{z_n})$ de (z_n). Debido a que (z_n^1) es equivalente a la base de ℓ_1, la sucesión $(\widehat{z_n}^1)$ de nuevo genera una copia isomorfa de ℓ_1 y así lo hace también $(\widehat{z_n})$.

Hemos deducido que existen sucesiones de enteros positivos (p_n), (q_n) con $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_n < \cdots$, $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ y una sucesión de números reales (a_i) tales que

$$\widehat{z_n} = \sum_{i=p_n}^{q_n} a_i z_i$$

es equivalente a la base canónica de ℓ_1.

Debido a la incondicionalidad de la sucesión básica (z_i) podemos reemplazar a_i por $|a_i|$ y la nueva sucesión es todavía equivalente a la base de ℓ_1. Por tanto, podemos suponer que $a_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$. Además, si B es la constante de incondicionalidad de (z_n), $|a_i| = |a_i|\|z_i\| \leq B\|\widehat{z_n}\|$ para cada $i \in \{p_n, \ldots, q_n\}$, lo que implica que hay algún $L > 0$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i \leq L$.

Sea M la constante de base de $(\widehat{z_n})$. Definamos

$$\widehat{v_n} = \sum_{i=p_n}^{q_n} a_i v_i = \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{a_i x_i}{\|x_i\|}.$$

Por una parte

$$\|\widehat{z_n} - \widehat{v_n}\| \leq \sum_{i=p_n}^{q_n} a_i \|z_i - v_i\| \leq L \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{1}{2^{i+1}} \leq \frac{L}{2^{p_n}}.$$

Pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\widehat{z_n} - \widehat{v_n}\|}{\|\widehat{z_n}\|} < 1.$$

Aplicando el principio de pequeñas perturbaciones [46, Proposición 1.a.9], $(\widehat{v_n})$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1. Esto en particular implica que $(\widehat{v_n})$ no contiene subsucesiones $w-$convergentes.

Fijemos $k_0 \in \mathbb{N}$ con $\frac{L}{2^{p_{k_0}}} < 1$ y para cada $n > k_0$ sea

$$t_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{a_i}{\|x_i\|} \leq L \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{1}{2^{i+1}} \leq \frac{L}{2^{p_n}} < 1.$$

Fijemos algún $u_0 \in C_1$. Observese que la sucesión $V_n = (1-t_n)u_0 + \widehat{v_n} = (1-t_n)u_0 + \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{a_i x_i}{\|x_i\|}$ es una combinación convexa de elementos en C_1 y por tanto se encuentra en C_1. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Como $(\widehat{v_n})$ no tiene subsucesiones débilmente convergentes, tampoco las tiene (V_n). Luego $K_1 = \overline{\text{conv}}\,(V_n)$ es convexo, cerrado, acotado, no débilmente compacto y $K = T^{-1}(K_1) \subset C$ es el conjunto con las propiedades requeridas.

Caso 2. (x_n) es reductora.

Sin pérdida de generalidad suponemos que $0 \in C$, y definimos (v_n) como en el caso anterior. Puesto que X^* es separable, la sucesión (v_n) contiene una subsucesión, denotada de nuevo (v_n), la cual es $\sigma(X^{**}, X^*)$-convergente ([7, Corolario 2.7.13]). Sea $v_0 = \sigma(X^{**}, X^*) - \text{lím}_n\, v_n$. Distinguimos los siguientes subcasos:

Subcaso a) $v_0 \in X^{**} \setminus X$. Tomemos $u_0 \in C$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $u_n = \left(1 - \frac{1}{\|y_n\|}\right) u_0 + \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Observemos que $(u_n) \subset C$ por convexidad. Más aún, (u_n) es $\sigma(X^{**}, X^*)$-convergente al vector $u_0 + v_0$ que también pertenece a X^{**}/X. Si $K = \overline{\text{conv}}\,(u_n)$, K es el conjunto con las propiedades requeridas.

Subaso b) $v_0 \in X \setminus \{0\}$. Sea $t > 0$, pasando por una subsucesión podemos suponer que $\|y_n\| \geq t$. Si $u_0 \in C$, la sucesión $u_n = \left(1 - \frac{1}{\|y_n\|}\right) u_0 + \frac{y_n}{\|y_n\|}$ se encuentra contenida en C y converge débilmente a $u_0 + tv_0 \in C$. Esto contradice el hecho de que C es linealmente acotado y por tanto, este caso no puede darse.

Subcaso 3. $v_0 = 0$. Procediendo análogamente al caso 1 probamos que existen dos sucesiones de enteros positivos (p_n), (q_n) con $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < \cdots$, $\text{lím}_n\, p_n = \infty$, una sucesión de números reales (a_i) tales que para toda $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i \leq L$ para algún $L > 0$ y una sucesión

$$\widehat{v_n} = \sum_{i=p_n}^{q_n} a_i v_i = \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{a_i y_i}{\|y_i\|}$$

equivalente a la base canónica de c_0.

Fijemos $k_0 \in \mathbb{N}$ con $\frac{L}{2^{p_{k_0}-1}} < 1$. Note que la sucesión $V_m = \sum_{n=k_0}^{m} \widehat{v_n}$ es equivalente a la base sumante de c_0 y en particular, es acotada. Más aún, si para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$t_m = \sum_{n=k_0}^{m} \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{a_i}{\|y_i\|} \leq L \sum_{n=k_0}^{m} \sum_{i=p_n}^{q_n} \frac{1}{2^{i+1}} \leq L \sum_{n=k_0}^{m} \frac{1}{2^{p_n}} \leq \frac{L}{2^{p_{k_0}-1}} < 1$$

pasando a una subsucesión podemos suponer que $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Si $u_0 \in C$, por convexidad $u_m = (1 - t_m)u_0 + V_m \in C$ y $u_m \overset{w^*}{\to} X^{**}/X$. Luego $K = \overline{\text{conv}}\,\{u_m\}$ es convexo, cerrado, acotado y no es w^*-cerrado. Luego K no es w-compacto. $\square$

Conclusiones

Cualquier subconjunto de un espacio de Banach que no verifica la AFPP tampoco verifica la FPP, por lo que estas propiedades se encuentran estrechamente relacionadas y las técnicas y herramientas desarrolladas sobre la propiedad de punto fijo aproximada en muchas circunstancias nos permiten obtener información en el estudio de problemas de punto fijo. Tanto la FPP como la AFPP son de naturaleza métrica, por lo que el hecho de que un subconjunto de un espacio normado verifique alguna de ellas puede verse alterado cuando cambiamos la norma del espacio. Debido a que estas propiedades se encuentran relacionadas se podría pensar que existe un vínculo en la manera en que cambian las respectivas colecciones de conjuntos que satisfacen una u otra propiedad bajo métricas equivalentes, sin embargo, al centrar nuestra atención en esta cuestión podemos encontrar una distinción entre ambas, pues como probamos en el capítulo 2 es posible renormar un espacio de Banach fijando la clase de conjuntos con la FPP mientras cambiamos la colección de conjuntos que satisfacen la AFPP.

La AFPP se encuentra caracterizada a través del concepto de acotación direccional, y además como vimos en el capítulo 4, nos brinda una nueva manera de entender el concepto de reflexividad. En esta nueva perspectiva la reflexividad es equivalente a la invarianza bajo normas equivalentes de la colección de conjuntos direccionalmente acotados en un espacio de Banach. En el caso en que el espacio es reflexivo, las clases de conjuntos linealmente acotados y con la AFPP coinciden, por lo que la colección de conjuntos con la AFPP no cambia bajo renormamientos equivalentes. En el caso no reflexivo, siempre es posible modificar esta colección renormando el espacio y más aún, esto puedo hacerse eligiendo una norma tan cerca como se quiera a la norma original como probamos en el capítulo 4.

Una de las hipótesis habituales en los teoremas de punto fijo es la acotación de los dominios considerados, sin embargo, pocos resultados se conocen sobre la propiedad de punto fijo para dominios no acotados. En la actualidad se sabe que en los espacios de Hilbert o en c_0 los subconjuntos convexos, cerrados y no acotados no tienen la FPP. Parcialmente se han obtenido algunos avances sobre este problema en el espacio ℓ_1, en el que se ha demostrado que ningún subconjunto convexo, w^*-cerrado y no acotado tiene la propiedad de punto fijo, estableciendo que ninguno de estos conjuntos verifica la AFPP, pero como hemos podido probar en el capítulo 5 este hecho depende de considerar c_0 como predual para ℓ_1, pues hay otros preduales con respecto a los cuales existen subconjuntos convexos, w^*-cerrados y no acotados en ℓ_1 que sí tienen la AFPP, por lo que en general no es posible extender este resultado a otras topologías w^* para este espacio. Esto hace razonable esperar que un argumento a través del cual se pretenda establecer el probable resultado de que los subconjuntos convexos, cerrados y no acotados de ℓ_1 no tienen la FPP implique la construcción explícita de una función no expansiva y sin punto fijo como en el caso de c_0, pero este problema aún es tema de investigación.

Algunas cuestiones para pensar

1. El teorema (5.3.1) establece que en $(\ell_1, ||| \cdot |||)$ la colección de conjuntos convexos, w^*-cerrados, no acotados y con la AFPP coincide con la clase de conjuntos linealmente acotados. Procediendo de forma análoga, puede establecerse que si $\| \cdot \|_*$ es la norma estudiada en la sección 5.2 , entonces en $(\ell_1, \| \cdot \|_*)$ sucede lo mismo. Resulta interesante notar que tanto $(\ell_1, ||| \cdot |||)$ como $(\ell_1, \| \cdot \|_*)$ son espacios con la FPP. Por esta razón cabe preguntarse si existe una conexión entre el hecho de que un espacio dual tenga la propiedad de punto fijo y su colección de conjuntos convexos, no acotados, w^*-cerrados con la AFPP coincida con la clase de conjuntos convexos, no acotados, w^*-cerrados y linealmente acotados.

2. ¿Puede mejorarse el teorema 5.0.1 estableciendo que existe $\delta > 0$ tal que si $C \subset \ell_1$ es convexo, cerrado, no acotado y $1 \leq 2 - \delta \leq b(C) \leq 2$ entonces C no tiene la FPP (la AFPP)?

3. En [33] los autores establecen que para cada predual X de ℓ_1 isomorfo a c_0 cuya distancia de Banach-Mazur a c_0 es estrictamente menor que 3, ℓ_1 tiene la $\sigma(\ell_1, X)$-fpp para funciones no expansivas.
¿ Se cumplirá que si X es un predual de ℓ_1 tal que $d(X, c_0) < 3$ entonces la colección de conjuntos convexos, no acotados y $\sigma(\ell_1, X)-$cerrados no tiene la AFPP (la fpp)?

4. De acuerdo al teorema 5.3.1, en ℓ_1 con la norma de Lin, cada conjunto convexo, no acotado y w^*-cerrado tiene la AFPP si y sólo si es linealmente acotado
a) ¿Tiene alguno de estos conjuntos la FPP?
b) ¿Existe algún conjunto no acotado en este espacio con la FPP? ✓

Bibliografía

[1] Shafrir, I. *The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces.* Israel. J. Math. 71 (1990), 211-223.

[2] Ray, W. *Nonexpansive mappings on unbounded convex domains.* Bulletin De L Academie Polonaise Des Sciences-Serie Des Sciences Mathematiques Astronomiques Et Physiques. 26 (1978), no 3, 241-245.

[3] Domínguez, T. *The failure of the fixed point property for unbounded sets in* c_0, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 645-650.

[4] Domínguez, T. *On the failure of the fixed point property for some unbounded subsets of* ℓ_1. J. Nonlin. Conv. Anal. 17 (2016), 1249-1257.

[5] Saito, K.; Kato, M.; Tamura, T. *On* ψ*-direct sums of Banach spaces and convexity.* J. Aust. Math. Soc. 75 (2003), 413-422.

[6] Lin, P.K. *There is an equivalent norm on* ℓ_1 *that has the fixed point property.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 68 (2008), no 8, 2303-2308.

[7] Megginson, R. *An introduction to Banach space theory.* Springer Science & Business Media. 183 2012.

[8] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Santalucia, V.; Zizler, V. *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis.* Springer Science & Business Media, (2011).

[9] James, R. *Uniformly non-square Banach spaces.* Annals of Mathematics. (1964), 542-550.

[10] Dowling, P.; Lennard, C.; Turett, B. *Renormings of* c_0 *and* ℓ_1 *and fixed point properties.* Handbook of Metric Fixed point theory. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 269-297.

[11] Goebel, K.; Kirk, W. *Topics in metric fixed point theory.* 28. Cambridge University Press, 1990.

[12] Goebel, K.; Kuczumow, T. *A contribution to the theory of nonexpansive mappings.* Bull. Calcutta Math. Soc. 70, (1978), no 1, 978.

[13] Reich, S., *The almost fixed point property for nonexpansive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no 1, 44-46.

[14] Matoušková, E.; Reich, S. *Reflexivity and approximate fixed points.* Stud. Math. 159 (2003), 403-415.

[15] Castillo, E.; Fetter, H.; Gamboa De Buen, B.; Núñez, F. *Directionally bounded sets in c_0 with equivalent norms.* J. Math. Anal. Appl. 419 (2014), 727-737.

[16] Saito, K.; Kato, M. *Absolute norms on $\mathbb{C}^n$*, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 879-905.

[17] Mitani, K.; Oshiro, O.; Saito, K. *Smoothness of the ψ-direct sums of Banach spaces.* Math. Inequal. Appl. 1 (2005), 147-157.

[18] Zachariades, T. *On l_ψ spaces and ψ-direct sums of Banach spaces.* R. Mount. J. Math. 41 (2011), 971-997.

[19] Koliha, J. *Aproximation of convex functions.* R. Anal. Exchange 29 (2004), 465-471.

[20] Maurey, B. *Points fixes de contractions sur un convex fermé de L^1.* Séminaire d´Analyse Fonctionnelle (1980-1981).

[21] Llorens-Fuster, E.; Sims, B. *The fixed point property in c_0.* Canad. Math. Bull. 41 (1998), 413-422.

[22] Dowling, P.; Lennard, C.; Turett, B. *Characterizations of weakly compact sets and new fixed point free maps in c_0.* Studia Math. 154 (2003), 277-293.

[23] Dowling, P.; Lennard, C.; Turett, B. *Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0.* Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 1659-1666.

[24] Gallagher, T.; Lennard, C.; Popescu, P. *Weak Compactness is not equivalent to the FPP in c.* J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), 471-481.

[25] Garcia, J. *Basis and fixed points for nonexpansive mappings.* Radovi Matematički. 8 (1992), 67-75.

[26] Domínguez, T. *Distortion and stability of the fixed point property for non-expansive mappings.* Nonlinear Anal. 75 (2012), 3229-3234.

[27] James, R. *Weakly compact sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), no 1 , 129-140.

[28] Diestel, J. Sequences and Series in Banach Spaces. Springer New York , 1984. ISBN 0-387-90859-5.

[29] Karlovitz, L. *On nonexpansive mappings.* Proc. Amer. Math. 55 (1976), no 2, 321-325.

[30] Benyamini, Y.; Lindenstrauss, J. *A predual of ℓ_1 which is not isomorphic to a $C(K)$ space.* Proc. Inter. Symp. P. Diff. Equa. Geom. Norm. lin. Spac. (Jerusalem, 1972). Israel J. Math. 13 (1972), 246-254.

[31] Bessaga, C.; Pelczyński, A. *Spaces of continuous functions. IV. On isomorphical classification of spaces of continuous functions.* Studia Math. 19 (1960), 53-62.

[32] Casini, E.; Miglierina, E.; Piasecki, Ł. *Hyperplanes in the space of convergent sequences and preduals of ℓ_1.* Online first on Canad. Math. Bull., http://dx. doi. org/10.4153/CMB-2015-024-9 4 (2015).

[33] Casini, E.; Miglierina, E.; Piasecki, Ł.; Popescu, R. *Stability constants of the w^*-fixed point property for the spaces ℓ_1.* J. Math. Anal. App. 452 (2017), 673-684.

[34] Kirk, W.; Sims, B. *Handbook of metric fixed point theory*, Springer Science & Business Media, 2013.

[35] Dowling, P.; Turett, B. *Lindenstrauss-Phelps spaces and the optimality of a theorem of Fonf.* J. Nonlinear and Convex Analysis. 17 (2016), no 11, 2339-2342.

[36] Dowling, P.; Lennard, C. *Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no 2, 443-446.

[37] Lin, P.K. *Renorming of ℓ_1 and the fixed point property.* J. Math. Anal. Appl. 362 (2010), no 2, 534-541.

[38] Hernandez, C.; Japón, M. *A renorming in some Banach spaces with applications to the fixed point theory.* J. Functional Analysis. 258 (2010), no 10, 3452-3468.

[39] Gamboa de Buen, B.; Núñez, F. *A generalization of a renorming theorem by Lin and a new nonreflexive space with the fixed point property which is nonisomorphic to l1.* J. of Math. Anal. Appl. 405 (2013), no 1, 57-70.

[40] Álvaro, J.; , Cembranos, P.; Mendoza, J. *Renormings of* c_0 *and the Fixed Point Property.* J. of Mathematical Analysis and Applications, (2017).

[41] Fetter, H.; Gamboa de Buen, B. *The James Forest.* Cambridge University Press 236, 1997.

[42] Domínguez, T.; Japón, M.; Villada Bedoya, J. *Linear and directionally bounded weak star closed sets and the AFPP.* Israel Journal of Mathematics (Aceptado).

[43] K. Goebel, T. Kuczumow, *Irregular convex sets with fixed point property for nonexpansive mappings*, Col. Math. 2 (1979), no 40, 259-264.

[44] Domínguez, T. *Irregular convex sets with fixed point property for asymptotically regular mappings in* ℓ_1*.* J. Nonlinear and Convex Analysis. 18 (2017), no 2, 173-184.

[45] Japón, M. *The failure of the fixed point property for cascading nonexpansive mappings on unbounded sets.* J. Nonlinear and Convex Analysis. 17 (2016), 11, 2293-2303.

[46] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I.* Springer-Verlag, 1979.