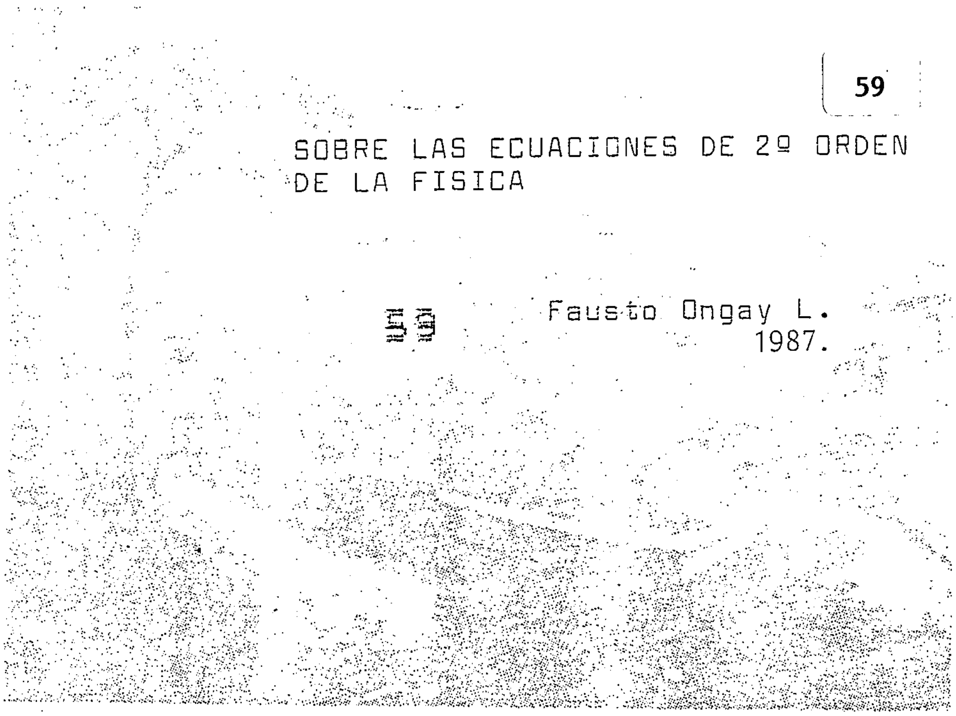
COMUNICACIONES DEL CIMAT



59

SOBRE LAS ECUACIONES DE 2º ORDEN DE LA FISICA

59 Fausto Ongay L.

1987.

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402

Guanajuato, Gto.

México

Tels. (473) 2-25-50

2-02-58

SOBRE LAS ECUACIONES DE 2° ORDEN DE LA FISICA.

1. Introducción. El propósito de estas notas es dar una versión simplificada de un trabajo conjunto realizado con E. Lacomba sobre una teoría desarrollada por E. Tonti. Como el título lo indica, se efectuará un estudio, un tanto *sui generis*, de las ecuaciones de 2^{o} grado que aparecen en la física. La idea tras este análisis es que muchas de las ecuaciones que se encuentran en física están determinadas por el tipo de modelo matemático que se ha escogido para la teoría, más que por "necesidades físicas". En la primera parte de estas notas (secciones 2 a 5) daré una descripción más o menos precisa, pero *ad hoc* de la herramienta matemática necesaria y en las restantes secciones aplicaremos estas construcciones a algunas ecuaciones de la física.

1. Motivación. A manera de motivación, enumeremos algunas de las ecuaciones de 2^{o} orden que aparecen en la física: la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, la ecuación del calor, la ecuación de Einstein, las ecuaciones de Euler-Lagrange , la 2^{a} ley de Newton, etc. . La existencia (y necesidad) de tantas ecuaciones de 2^{o} orden podría ser coincidencia, pero lo más probable es que no lo sea.

Para tener una idea del análisis que se quiere presentar, consideremos la 2^{a} ley de Newton, $f = ma$, que podemos escribir de manera más precisa como sigue:

$$f = \frac{dp}{dt} \quad ; \quad p = m\,\frac{dx}{dt} = m\,v \quad ,$$

donde x es la posición, v la velocidad, m la masa, p el momento lineal, y f la ley de fuerzas del problema. Si sustituimos la expresión explícita para p podemos reescribir la ley de Newton mediante el siguiente "diagrama conmutativo":

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & f \\ {\scriptstyle \frac{d}{dt}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \frac{d}{dt}} \\ v & \xrightarrow[p=mv]{} & p \end{array}$$

A un diagrama de este tipo le llamaremos diagrama de Tonti, y más adelante daré una descripción más precisa de éstos.

2. Formas diferenciales. La herramienta indispensable para el análisis que nos proponemos son las formas diferenciales. Para simplificar la presentación daremos una construcción formal (en el espíritu del libro de Flanders) y restringida a los casos y propiedades que necesitaremos.

2.1. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$. Una p-forma diferencial en $\mathbb{R}^n$ es una combinación lineal formal de objetos del tipo

$$(*) \qquad f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_{i_1}\wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \quad , \quad 1\leq i_1,\ldots,i_p$$

donde f es una función diferenciable, y sujetas a las restricciones

$$dx_{i_1}\wedge\ldots dx_{i_j}\wedge\ldots dx_{i_k}\wedge\ldots dx_{i_p} = -\, dx_{i_1}\wedge\ldots dx_{i_k}\wedge\ldots dx_{i_j}\wedge\ldots dx_{i_p}$$

La fórmula anterior muestra que siempre podemos escoger los índices en orden estrictamente creciente (esto produce simplemente un cambio de signo en la p-forma). Por consiguiente, los elementos de la forma

$$dx_{i_1}\wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \quad ; \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$$

forman una "base" del espacio de p-formas, la cual consta de exactamente $\binom{n}{p}$ elementos. Las 0-formas se identifican con las funciones diferenciables y es claro que no puede haber p-formas con $p > n$ o $p < 0$, a menos que las definamos, (y así lo haremos) como idénticamente cero. Al conjunto de las p-formas en $\mathbb{R}^n$ lo denotaremos por $A^p(\mathbb{R}^n)$.

Por ejemplo, la siguiente representa una 2-forma arbitraria en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = f(x,y,z)\; dx \wedge g(x,y,z)\; dy \wedge h(x,y,z)\; dz \quad .$$

Si ω y η son p- y q- formas, respectivamente, su producto exterior $\omega\wedge\eta$, es una $(p+q)$-forma. En el caso en que ω y η son del tipo $(*)$, es decir, si

$$\omega = f\; dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p} \quad , \quad \eta = g\; dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}$$

su producto exterior se escribe simplemente

$$\omega\wedge\eta = fg\; dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}$$

y extendemos esta definición por linealidad.

2.2. Las formas diferenciales tienen un operador casi mágico, que extiende a la derivada de funciones en un sentido muy preciso, llamado diferencial exterior. Este es un operador que envía p-formas en (p+1)-formas y que se define como sigue: si f es una 0-forma (i. e. una función), definimos df por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

(es decir df es simplemente la diferencial usual, y en particular esto muestra que no hay problemas con la terminología). Si ω es una p-forma del tipo (3), definimos $d\omega$ por

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

y de nuevo, extendemos esta definición por linealidad a todas las p-formas.

La diferencial exterior posee muchas propiedades; para nuestros fines las dos más importantes son el llamado lema de Poincaré, que en nuetro caso podemos escribir como sigue

Proposición. Si ω es una p-forma entonces $d(d\omega) = d^2\omega = 0$; esto es, $d^2\omega$ es la (p+2)-forma 0 . Recíprocamente, si ω es una p-forma tal que $d\omega = 0$, entonces existe una (p-1)-forma η tal que $\omega = d\eta$.

NOTA: En general la propiedad $d^2\omega = 0$ siempre es cierta, es simplemente la expresión de la independencia del orden de derivación en las segundas derivadas parciales mixtas. La afirmación recíproca, que es sensiblemente más difícil, no es válida si el dominio de f no es simplemente conexo.

La otra propiedad fundamental de la diferencial exterior es su relación con el producto exterior; ésta se precisa en la siguiente proposición (que es la versión para formas de la regla de Leibnitz):

Proposición. Si ω es una p-forma y η es una q-forma entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

2.3. La belleza y fuerza de este formalismo se perciben rápidamente si analizamos el caso de las p-formas en $\mathbb{R}^3$. En efecto, si $p = 0$, podemos escribir simbólicamente

$$df = \nabla f \cdot (dx, dy, dz)$$

de modo que df y ∇f se determinan mutuamente; en este sentido decimos que son equivalentes. Si $p = 1$, y $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ entonces

$$d\omega = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

de modo que $d\omega$ equivale al rotacional del campo vectorial $(f,-g,h)$. Finalmente, si $p = 2$, $\eta = f\ dx\wedge dy + g\ dx\wedge dz + h\ dy\wedge dz$ entonces

$$d\eta = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

de modo que $d\eta$ equivale a la divergencia del campo vectorial $(h,-g,f)$.

De esta forma, vemos que el operador d generaliza a los tres operadores clásicos del análisis vectorial (obviamente, para $p = 3$, $d\omega = 0$). Asimismo varias identidades del análisis vectorial son consecuencia inmediata del lema de Poincaré; por ejemplo, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ f) = 0$ y $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f) = 0$.

3. El operador $*$. Vamos a introducir ahora un importante operador llamado operador $*$ de Hodge.

3.1. Una de las más importantes propiedades de las formas diferenciales es que sirven para hacer teoría de integración; en efecto, las p-formas pueden integrarse sobre regiones p-dimensionales orientadas. No necesitaremos aquí la teoría general, y nos limitaremos a considerar la siguiente construcción: Fijemos un orden en las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_n)$ (*a priori* cualquier orden es igualmente válido), con lo que se determina una orientación de $\mathbb{R}^n$. Si f es una función que nunca se anula, decimos que la p-forma

$$\omega = f\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

determina una forma de volumen en $\mathbb{R}^n$ (es claro que este tipo de formas pueden ser formalmente identificadas con medidas en $\mathbb{R}^n$). Decimos que ω tiene orientación positiva si $f > 0$ y negativa en caso contrario. Así pues, podemos decir que la forma

$$\omega_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

determina la orientación de $\mathbb{R}^n$.

3.2. Definimos ahora el operador $*$ de Hodge en $\mathbb{R}^n$ asociado a la métrica euclidiana y a la orientación dada por ω_0 por medio de las siguientes reglas:

$$*(1) = \omega_0 \quad ; \quad **(\omega) = (-1)^{p(n-p)}\omega \quad \omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$$

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}) = (-1)^{\sigma} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}$$

donde los índices están ordenados en forma creciente, $j_1, \ldots, j_{n-p}$ son los índices complementarios de $i_1, \ldots, i_p$ y σ es el signo de la permutación que lleva $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p}$ en $1, \ldots, n$.

Por construcción es claro que $*$ es un operador que manda p-formas en (n-p)-formas y que de hecho es un isomorfismo de Λ^p en Λ^{n-p}. El papel que desempeña la métrica en la construcción de $*$ no es tan claro, pero es crucial; de hecho, se puede demostrar que $*$ determina completamente a la métrica y a la orientación. Más aún, dada cualquier forma bilineal simétrica y no degenerada en $\mathbb{R}^n$ (y una orientación) se tiene definido un operador $*$. Particularmente importante es el caso en que la forma tiene la representación matricial diagonalizada

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

que son las llamadas seudométricas de Lorentz. Por ejemplo $\mathbb{R}^4$ dotado de una seudométrica de Lorentz es el espacio-tiempo de la relatividad especial. No daremos aquí la descripción completa de la $*$ asociada a estas seudométricas, en vez de ello compararemos las $*$ asociadas a la métrica euclidiana y a la seudométrica de Lorentz en $\mathbb{R}^2$:

Euclides	Lorentz
$*^2 = (-1)^{p(n-p)}$	$*^2 = (-1)^{p(n-p)+1}$
$*(1) = dx \wedge dy$	$*(1) = dx \wedge dy$
$*(dx \wedge dy) = 1$	$*(dx \wedge dy) = -1$
$*(dx) = dy$	$*(dx) = dy$
$*(dy) = -dx$	$*(dy) = dx$

4. El operador de Laplace-Beltrami. Hay muchas razones para introducir el operador de Hodge; desde nuestro punto de vista la más importante es que éste nos permitirá definir el operador de Laplace-Beltrami, que es la extensión del laplaciano a las formas diferenciales.

4.1. Denotemos por δ al operador definido por la composición siguiente: $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$, al que llamaremos codiferencial. Por construcción δ envía p-formas en (p-1)-formas, de modo que las composiciones δd y $d\delta$ envían p-formas en p-formas al igual que su suma $\Delta = d\delta + \delta d$; éste es el operador de Laplace-Beltrami asociado a la $*$ en cuestión. Para ver el porqué de esta terminología, consideramos el efecto del operador de Laplace-Beltrami, asociado a la $*$ euclidiana, en una 0-forma f en $\mathbb{R}^2$:

En primer lugar, es claro que $\delta f = 0$, por lo que Δ se reduce a δd. De este modo tenemos las siguientes igualdades:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \quad \Rightarrow \quad *df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dy - \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

$$d*df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx \wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dx \wedge dy \quad \Rightarrow \quad \delta df = -*d*df = -\nabla^2 f\,.$$

Es decir, $\Delta f = -\nabla^2 f$, en donde ∇^2 denota al laplaciano usual de $\mathbb{R}^3$. Si en vez de considerar el operador $*$ asociado a la métrica euclidiana consideramos el operador $*$ asociado a la seudométrica de Lorentz, es un ejercicio fácil verificar que, en 2 dimensiones, el operador de Laplace-Beltrami aplicado a 0-formas da

$$\Delta f = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

en otras palabras, en este caso, el operador de Laplace-Beltrami aplicado a funciones equivale al operador de la ecuación de onda.

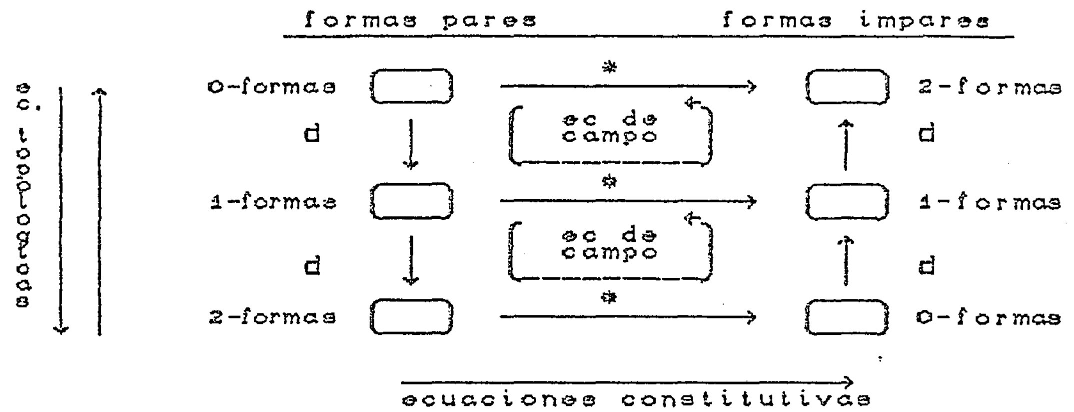
4.2. El operador de Laplace-Beltrami determina la ecuación de Laplace $\Delta\,\omega = 0$ o, más generalmente, la ecuación de Poisson $\Delta\,\omega = \eta$. Estas ecuaciones son el prototipo de lo que en física se conoce como ecuaciones de campo. La idea de introducir campos para describir las interacciones en la física intervino hacia la mitad del siglo pasado y modificó completamente nuestra concepción del universo físico. En efecto, mediante la introducción de campos podemos visualizar las interacciones como respuestas de los "sujetos de prueba" a propiedades intrínsecas de los objetos físicos: de este modo asociado a la masa se tiene el campo gravitacional, asociado a la carga eléctrica el campo eléctrico, etc.. Como veremos más adelante, la diferencia de comportamiento de las ecuaciones de campo naturales en el espacio euclidiano y el espacio de Minkowski es quizá el elemento clave de la relatividad, desde un punto de vista físico.

5. Diagramas de Tonti. Vamos a introducir de una manera más precisa el molde donde acomodaremos las construcciones que hemos descrito; a saber, los diagramas de Tonti. En realidad, éstos son objetos clásicos en topología algebraica, por ejemplo, y el mérito de Tonti reside sobre todo en la aplicación que hace de ellos al

estudio de las ecuaciones de la física.

5.1. Para simplificar la presentación, en vez de dar la definición general en n dimensiones de lo que entendemos por un diagrama de Tonti, daremos la escritura explícita de éstos para el caso de 2 dimensiones.

Supongamos entonces que hemos fijado en $\mathbb{R}^2$ una orientación y una métrica (o seudométrica), de modo que tenemos un operador $*$ de Hodge asociado. El diagrama de Tonti correspondiente es entonces:



Los diagramas de Tonti para otras dimensiones son análogos, simplemente varía el número de renglones.

En la siguiente sección explicaremos que significan los dos tipos de ecuaciones que aparecen en el diagrama; pero antes es conveniente aclarar que significa la "conmutatividad" de los diagramas. En general ésta debe interpretarse como sigue: supongamos que tenemos una ecuación constitutiva que relaciona una p-forma ω con una (n-p)-forma ξ, digamos $\xi = f(\omega)$, y se sabe que $\omega = d\eta$; entonces se tiene una relación constituiva entre η y $d\xi$, que es simplemente $d\xi = df(d\eta)$, relación a la que llamamos con el nombre genérico de ecuación de campo. Así por ejemplo, la ecuación de campo relacionada con la 2ª ley de Newton es simplemente $f = ma$. En ocasiones, sin embargo, se tienen ecuaciones constitutivas en dos niveles consecutivos; en tal caso, la conmutatividad del diagrama se entiende en el sentido usual.

6. Las ecuaciones de la física. Es necesario hacer una breve discusión sobre la naturaleza de las ecuaciones de la física, debido a que éstas son de varios tipos muy distintos entre sí. En este punto aparecerá también la importancia "genérica" de las ecuaciones de 2º orden.

6.1. A la simple vista del diagrama es claro que existen al menos dos tipos de ecuaciones "elementales" a considerar: las ecuaciones topológicas, representadas por las flechas verticales, y las ecuaciones constitutivas, representadas por las flechas horizontales. Las ecuaciones topológicas son en realidad simplemente el resultado de aplicar el operador diferencial a las formas que representan a las magnitudes físicas; las ecuaciones constitutivas, en cambio, son ecuaciones que dependen de los medios físicos, que en general deben determinarse empíricamente, que involucran a la métrica (en general a través del operador $*$) y que pueden ser no lineales. Como ejemplo de este tipo de ecuaciones está la ya mencionada relación entre la velocidad y el momento lineal, así como las leyes de fuerzas de fenómenos específicos (como las leyes de Hooke, de Coulomb,de la gravitación newtoniana etc.) o, las llamadas ecuaciones constitutivas del electromagnetismo, que relacionan a los campos eléctricos y magnéticos.

6.2. La estructura de los diagramas muestra también como se constituyen en general las ecuaciones de campo, mediante un proceso semejante a la construcción del operador de Laplace-Beltrami (de hecho, excepto por un signo, éste corresponde a considerar como ecuciones constitutivas a la aplicación de $*$). Más generalmente, si consideramos ecuaciones constitutivas lineales (o si efectuamos una aproximación lineal a una ecuación constitutiva dada) las ecuaciones de campo que se obtienen son siempre ecuaciones de Poisson. Por otra parte, el lema de Poincaré provee una clase de ecuaciones de segundo orden que también son de gran importancia en la práctica, que podemos llamar con el nombre genérico de ecuaciones de continuidad o de conservación; en efecto, si una cantidad ω satisface la relación $d\omega = 0$ ó , "recíprocamente", si satisface $\omega = d\eta$, entonces la cantidad se "conserva". Más adelante daremos algunos ejemplos de este principio.

7. Ejemplos. En los siguientes figuras mostramos algunas ecuaciones fundamentales de la física analizadas según el método de Tonti. Es conveniente hacer notar que no todas las cantidades que aparecen en los diagramas de Tonti tienen interpretación física (debido a la condición $d^2 = 0$).

ANALISIS DE LA LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON

La ley de gravitación universal de Newton expresa la interacción gravitacional entre dos objetos puntuales de masas M y m respectivamente según la ley de fuerzas

$$F = -\frac{G\,M\,m}{r^3}\,\vec{r}$$

donde $\vec{r}$ es el vector que une los cuerpos y r la norma de éste y G es una constante universal. Si observamos que la fuerza se puede escribir como

$$F = A\,m$$

donde el campo vectorial A es el campo gravitacional debido a M (que en este caso coincide con la aceleración), y que además

$$A = -\nabla\,\phi = -\nabla\,\frac{G\,M}{r}$$

vemos que la ley de gravitación puede estudiarse como una teoría de campo en el sentido que hemos descrito arriba. Como la ley de Newton sólo describe la interacción de objetos puntuales es conveniente introducir la densidad de masa ρ , definida por la ecuación

$$M = 4\pi \int_V \rho\ dV$$

donde V es el volumen que ocupa M . Podemos entonces reescribir en términos de ρ la ecuación de la gravitación universal como sigue

$$\nabla^2\,\phi = -4\pi\,\rho$$

que es la ecuación de Poisson en su contexto original. Regresando ahora al lenguaje de formas diferenciales, observamos que ϕ corresponde a una 0-forma, A a una 1-forma, y ρ a una 3-forma en $\mathbb{R}^3$. La métrica es la métrica euclidiana usual y la orientación está dada por la forma de volumen $dx\wedge dy\wedge dz$.

Con estas consideraciones, el diagrama de Tonti para la ecuación de gravitación newtoniana queda:

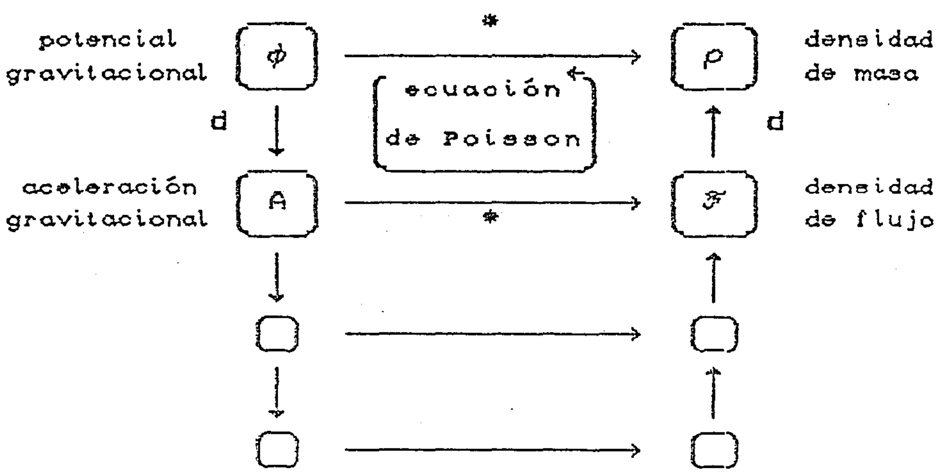


DIAGRAMA DE TONTI PARA LA GRAVITACION NEWTONIANA

ANALISIS DE LAS ECUACIONES DEL ELECTROMAGNETISMO

El electromagnetismo clásico se resume en las ecuaciones de Maxwell. En notación vectorial estas ecuaciones son

LAS ECUACIONES DE MAXWELL

$$\nabla \cdot D = 4\pi \rho \text{ (ley de Gauss)} \quad ; \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ (ley de Faraday)}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad ; \quad \nabla \times H = 4\pi\, j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{(ley de Ampère-Maxwell)}$$

Los campos eléctricos E y D se relacionan entre sí por la ecuación constitutiva $D = \epsilon E$. Los campos magnéticos se relacionan por la ecuación constitutiva $B = \mu H$.

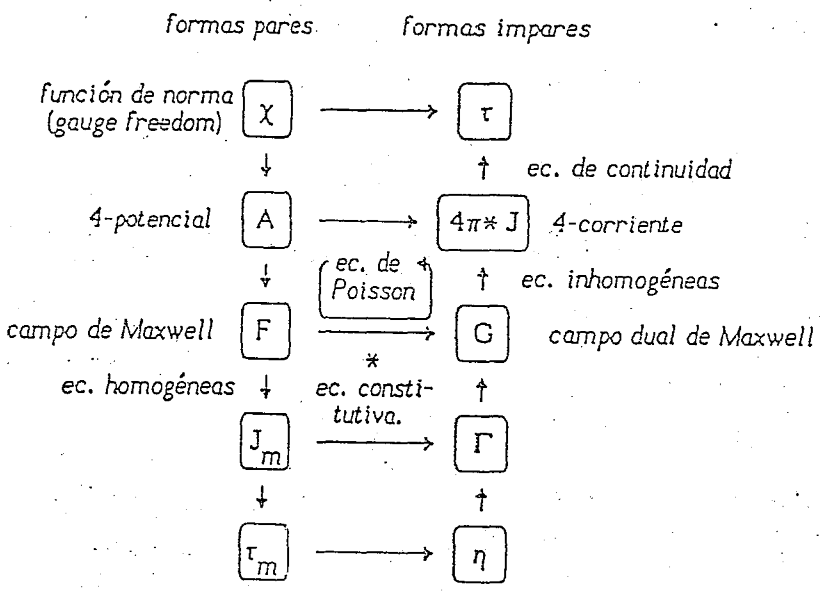


Diagrama de Tonti para el elctromagnetismo

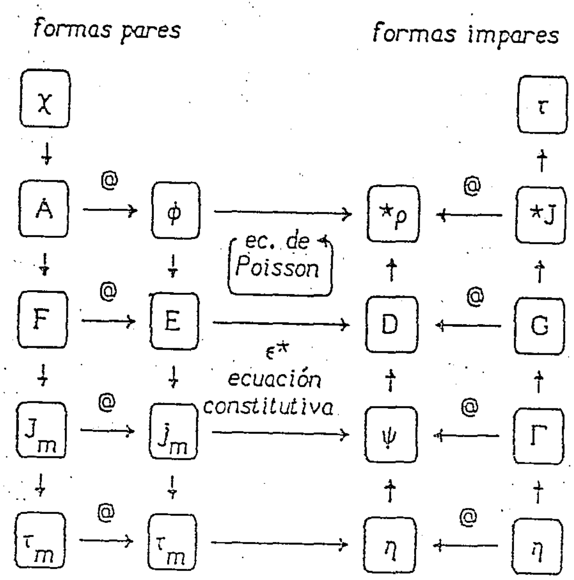


Diagrama de Tonti para la electrostática
y su relación con el electromagnetismo

8. Para concluir quisiera plantear la pregunta que de hecho es la que motiva este estudio, a saber qué tan general es el método de Tonti? Evidentemente la respuesta a esta pregunta no es nada trivial, pero investigar la cuestión pueda ser fructífero. Como ejemplo de los beneficios que pueden obtenerse consideremos el siguiente problema didáctico: supongamos que deseamos estudiaruna disciplina física con la cual estamos poco familiarizados,digamos la teoría de la relatividad, y supongamos también que tenemos un buen conocimiento digamos del electromagnetismo. Podemos entonces tratar de construir los diagramas de Tonti asociados a estas dos teorías y tratar de entender los fenómenos que ocurren en gravitación comparándolos con los ya conocidos del electromagnetismo. Aunque hacer explícito este procedimiento sería muy complicado, sí vale la pena mencionar que se puede establecer un paralelo más o menos natural entre las ecuaciones de Maxwell y la aproximación lineal a la ecuación de Einstein (la ecuación de Einstein es la ecuación básica de la gravitación), y mediante esta analogía resulta patente que la gravitación newtoniana es a la ecuación linealizada de Einstein lo que la electrostática es a las ecuaciones de Maxwell.

BIBLIOGRAFIA.

1. Flanders, H. *Differential forms with applications to the physical sciences* Academic Press , 1963.

2. Tonti, E. *On the formal structure of Physical Theories* Quaderno dei gruppi de ricerca matematica. CNR Italia , 1975.

3 Lacomba, E. A. y F. Ongay. *Sobre el esquema de estructura de las teorias fisicas de E Tonti* Preprint CIMAT.

APENDICE: FORMAS DIFERENCIALES EN ELECTROMAGNETISMO.

Como hemos indicado, las formas diferenciales son la herramienta natural para la teoría de integración. Usando este hecho mostraremos como (y por qué) las formas diferenciales aparecen en el elctromagnetismo.

Recordemos primeramente las magnitudes y relaciones fundamentales que aparecen en electromagnetismo:

En primer lugar tenemos las cargas eléctricas. La noción de carga eléctrica es tan básica como la de masa y, de hecho, existen muchas semejanzas entre ambas, aunque también se presentan diferencias fundamentales: por ejemplo, las cargas puntuales se atraen entre sí de acuerdo a la ley de Coulomb, que es completamente análoga a la ley de gravitación universal de Newton. De acuerdo a la notación usual, denotamos por q la carga total contenida en un volumen V pero, dado que deseamos incluir fenómenos macroscópicos, introducimos la densidad de carga ρ, definida por:

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_V \rho \, dV \quad .$$

En completa analogía con el caso de las masas, se tienen las definiciones de campo y potencial eléctrico, denotados E y ϕ respectivamente, y relacionados entre sí por la ecuación

$$E = \nabla \phi$$

Las cargas en movimiento producen corrientes eléctricas; la relación precisa entre las dos magnitudes se expresa, en el caso macroscópico, por la llamada ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot j = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde j denota la densidad de corriente.

Las corrientes eléctricas, y ésta es la diferencia fundamental con el caso gravitacional, generan campos de inducción magnética, denotados por B. Usualmente se considera que E y B son las campos fundamentales del electromagnetismo, pues desde el punto de vista de la mecánica newtoniana, el movimiento de las partículas cargadas se determina a través de la ley de fuerzas de Lorentz:

$$F = q \, (E + v \times B) \, ,$$

donde v denota la velocidad de la partícula de carga q y F

denota la fuerza que se ejerce sobre ésta debida a los campos E y B.

Finalmente, los efectos macroscópicos (originados en la práctica por la concentración de grandes cantidades de partículas puntuales, como electrones o protones) se describen por la acción de dos campos adicionales, el desplazamiento eléctrico D y la intensidad de campo magnético H. En general los campos D y H se relacionan con los campos E y B, mediante ecuaciones constitutivas lineales del tipo

$$D = \varepsilon E \quad ; \quad B = \mu H \quad ,$$

donde los escalares ε y μ, llamados permitividad eléctrica y permeabilidad magnética respectivamente, son funciones del medio y, basados en el enfoque de la mecánica newtoniana, D y H son considerados objetos derivados. Sin embargo, desde el punto de vista de la teoría de campo este enfoque no es el más natural; es preferible considerar los 4 campos como cantidades igualmente fundamentales: D y H miden entonces la respuesta potencial de un medio dado a la presencia de los campos E y B respectivamente. La dinámica de estos campos se rige entonces por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot D = 4\pi \rho \qquad \text{(ley de Gauss)}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{(ley de Faraday)}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \text{(ausencia de monopolos magnéticos)}$$

$$\nabla \times H = 4\pi j + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \text{(ley de Ampère-Maxwell)}$$

y esta teoría es tal vez el modelo matemático que mayor confirmación experimental ha recibido.

En vez de dar aquí una descripción exhaustiva de estas magnitudes o de las técnicas experimentales que se usan para su medición, citaremos las definiciones de los campos electromagnéticos, tal como se encuentran en un tratado clásico sobre el tema (en la ocurrencia "Electricity and Magnetism", de F. W. Sears , Addison-Wesley, 1946):

"La diferencia de potencial entre los puntos A y B es igual a menos la integral de línea de la intensidad eléctrica E del punto A al punto B (es decir, es menos el trabajo por unidad de carga efectuado por la fuerza electrostática)." (Sears pag. 55.) En símbolos, llamando γ a la trayectoria que une los puntos

A y B :

$$\phi(A) - \phi(B) = - \int_{\gamma} E \cdot dr \quad .$$

"La integral de superficie de la componente normal de D sobre una superficie cerrada S es igual a la carga libre encerrada en S ." (p. 183) Esta es la ley de Gauss en forma integral y la fórmula es entonces:

$$\oint_{S} D \cdot n \, dS = q \quad .$$

"La derivada con respecto al tiempo del flujo magnético a través de una superficie (es decir la integral de superficie de la componente normal del vector de campo magnético) es igual a menos la fuerza electromotriz efectuada en la frontera de la superficie (que es el trabajo por unidad de carga efectuado por el campo eléctrico a lo largo de la frontera de la superficie). (pag. 183) Esta es la ley de Faraday.

$$- \frac{d}{dt} \int_{S} B \cdot n \, dS = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma} E \cdot dr \quad .$$

"La integral de línea de H sobre un circuito cerrado γ es igual a la corriente neta de magnetización en la superficie encerrada por γ (la que se puede definir en términos de la densidad de corriente j)." (p. 357.)

Esta es la ley de Ampère (en forma integral), en la forma en que Ampère la enunció originalmente; notemos que la ecuación de Maxwell correspondiente incluye un término extra, la llamada corriente de desplazamiento; esta corrección se debe a Maxwell.

El punto fundamental en estas definiciones es que las magnitudes básicas del electromagnetismo son objetos que se integran a lo alrgo de trayectorias, superficies, etc., es decir, matemáticamente hablando deben interpretarse como formas diferenciales y no como campos vectoriales. De hecho, si siempre es posible identificar campos vectoriales con 1-formas diferenciales (aunque la identificación no es natural, ya que se requiere de la introducción de una métrica riemanniana), la identificación de campos vectoriales con 2-formas sólo es posible en dimensión 3 , de modo que en particular esta identificación es imposible si queremos trabajar dentro del marco de la relatividad, donde la variedad de base es de dimensión 4 . Más aún, es necesario insistir en que estas definiciones no son simples "equivalencias matemáticas" con las definiciones usuales de los campos electromagnéticos; son, de hecho, la expresión matemática de las técnicas experimentales usadas para la medición de estas magnitudes. El problema es que los campos vectoriales son más fáciles de visualizar intuitivamente que las formas diferenciales.

Así, un primer análisis de estas magnitudes muestra que:

a) ρ es una 3-forma y no un campo escalar (es decir una 0-forma).

b) E es un a 1-forma y, siempre que el campo sea conservativo, ϕ es una 0-forma cuya diferencial es E . La afirmación que E es conservativo significa que E es una forma exacta, pero como muestra la ley de Faraday, en general no es siquiera cerrada.

c) D es una 2-forma y, gracias al teorema de Stokes, vemos que su diferencial es la 3-forma ρ , ésta es la ley de Gauss.

d) B es una 2-forma y la ley de Maxwell que postula la no existencia de monopolos magnéticos dice que B es cerrada.

e) H es una 1-forma y j una 2-forma, relacionadas entre sí por la ley de Ampère.

La otra conclusión fundamental que resulta de este análisis es que las leyes de Maxwell imponen relaciones entre p-formas y (3-p)-formas. Esto muestra que el operador $*$ desempeña un papel clave en el electromagnetismo. De hecho, las mediciones de los campos eléctricos o magnéticos proveen una manera de determinar la geometría local del espacio tridimensional y, experimentalmente, se verifica que ésta es euclidiana.

Por supuesto, todo este análisis debe modificarse si desarrollamos una teoría para el espacio-tiempo. En este caso, las magnitudes se identifican con formas diferenciales en dimensión 4 y la métrica que resulta es (localmente) la de Lorentz.