



**Determinación del tamaño de muestra para  
experimentos sensoriales:  
un enfoque bayesiano**

T E S I S

Que para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**  
con especialidad en  
**Probabilidad y Estadística**

Presenta:

**Juan José García Juárez**

Director de tesis:

**Dr. Enrique R. Villa Diharce**

---

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto. 8 de febrero de 2018.



**CIMAT**  
CENTRO DE INVESTIGACION  
EN MATEMÁTICAS A. C.

# Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

## Acta de Examen de Grado

Acta No.: 130

Libro No.: 002

Foja No.: 130

En la Ciudad de Guanajuato, Gto., siendo las 11:30 horas del día 8 de febrero del año 2018, se reunieron los miembros del jurado integrado por los señores:

**DR. JOSÉ ANDRÉS CHRISTEN GRACIA** (CIMAT)  
**DRA. ELOÍSA DÍAZ-FRANCÉS MURGUÍA** (CIMAT)  
**DR. ENRIQUE RAÚL VILLA DIHARCE** (CIMAT)

bajo la presidencia del primero y con carácter de secretario el segundo, para proceder a efectuar el examen que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS  
CON ESPECIALIDAD EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**

Sustenta


**JUAN JOSÉ GARCÍA JUÁREZ**

en cumplimiento con lo establecido en los reglamentos y lineamientos de estudios de posgrado del Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., mediante la presentación de la tesis

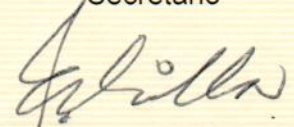
**"DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE MUESTRA PARA  
EXPERIMENTOS SENSORIALES: UN ENFOQUE BAYESIANO "**

Los miembros del jurado examinaron alternadamente al (la) sustentante y después de deliberar entre sí resolvieron declararlo (a):

**APROBADO**

  
\_\_\_\_\_  
**DR. JOSÉ ANDRÉS CHRISTEN GRACIA**  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
**DRA. ELOÍSA DÍAZ-FRANCÉS MURGUÍA**  
Secretario

  
\_\_\_\_\_  
**DR. ENRIQUE RAÚL VILLA DIHARCE**  
Vocal



  
  
**CIMAT**  
DIRECCIÓN  
GENERAL

**DR. VÍCTOR MANUEL RIVERO MERCADO**  
Director General

*A mis padres, por su apoyo incondicional.*

*A mis hermanas, por ser mi inspiración.*

# Agradecimientos

A mis padres Juan José García Briseño y Francisca Juárez Escalante, por su confianza plena, su apoyo incondicional y los consejos dados en los momentos oportunos.

A mis hermanas, por siempre estar al pendiente de cada uno de los pasos que doy, por su complicidad como hermanos y por las risas siempre tan necesarias.

A mis amigos y compañeros, especialmente a Fabián, Ali, Óscar, Adolfo, Natalia y Paulina, con quienes compartí buenos momentos a lo largo de estos dos años e hicieron aún más placentera mi estancia en Guanajuato.

Al Dr. Enrique Villa por su paciencia, comprensión y sus aportes indispensables como asesor de este trabajo. Toda mi admiración y respeto como investigador y como ser humano.

A mis sinodales, Dra. Eloísa Díaz-Francés y Dr. Andrés Christen, por las revisiones y aportes a este trabajo. Su capacidad de análisis y experiencia en las áreas de Estadística y Probabilidad, fueron de gran motivación para mi orientación en este campo del conocimiento.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo recibido en estos dos años para el desarrollo y culminación de mis estudios de maestría.

Al Centro de Investigación en Matemáticas A.C, por permitirme ser parte de esta comunidad científica, por los recursos y apoyos otorgados como estudiante, y por brindarme una educación de calidad.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1. Experimentos sensoriales . . . . .	4
2.2. Censura e Inconsistencia . . . . .	6
2.3. Tamaño de muestra . . . . .	8
<b>3. Análisis de supervivencia</b>	<b>10</b>
3.1. Conceptos elementales . . . . .	10
3.2. Distribución Weibull . . . . .	12
3.3. Estimación . . . . .	13
<b>4. Teoría de decisiones bayesiana</b>	<b>17</b>
4.1. Introducción a la estadística bayesiana . . . . .	17
4.2. Conceptos elementales . . . . .	18
4.3. Función de pérdida y tamaño de muestra. . . . .	21
<b>5. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)</b>	<b>23</b>
5.1. Metrópolis Hastings . . . . .	23
5.2. Muestreo Gibbs . . . . .	26
<b>6. Análisis estadístico de un caso de estudio</b>	<b>28</b>
6.1. Experimentos sensoriales . . . . .	28
6.2. Modelación . . . . .	29

6.3. Distribuciones previas . . . . .	36
6.4. Tamaño de muestra . . . . .	38
6.5. Resultados y discusión . . . . .	43
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>46</b>
<b>Referencias</b>	<b>47</b>

# Índice de figuras

3.2.1.Función de distribución acumulada Weibull, con $\beta = 0.5$ . . . . .	13
3.2.2.Función de distribución acumulada Weibull, con $\eta = 15$ . . . . .	14
3.2.3.Función de riesgo Weibull, con $\eta = 2$ . . . . .	15
3.2.4.Función de supervivencia Weibull, con $\eta = 5$ . . . . .	16
6.2.1.Funciones de distribución por tipo de pan. (a) Mantecadas. (b) Mini- mantecadas. (c) Panqués. . . . .	31
6.2.2.Comportamiento de consistencia para consumidor 1, con $p_c = 0.84$ y tiempo de rechazo al producto $t_1 = 3.2$ . . . . .	33
6.2.3.Estimación de la probabilidad mínima de consistencia $p_c$ para el experi- mento de Mantecadas con Avena. . . . .	35
6.3.1.Distribuciones previas para el experimento sensorial de Panqués con pa- sas. a) Ajuste de distribución de valores extremos para $\beta$ . b) Ajuste de distribución Gama para $\eta$ . . . . .	37
6.4.1.Convergencia de las iteraciones MCMC en JAGS. a) Gráfica de conver- gencia para $\beta$ . b) Gráfica de convergencia para $\eta$ . . . . .	41
6.4.2.a) Autocorrelación parcial para la cadena de $\beta$ . b)Autocorrelación parcial para la cadena de $\eta$ . . . . .	42
6.4.3.a) Aproximación de la distribución marginal posterior de $\beta$ . b)Aproximación de la distribución marginal posterior de $\eta$ . . . . .	42
6.4.4.Estimación la función de riesgo bayesiano para el experimento sensorial de Panqués con Pasas. . . . .	43

# Índice de tablas

2.1. Ejemplo de registro en experimento sensorial. . . . .	6
2.2. Ejemplos de tipos de consumidores. . . . .	7
6.1. Nomenclatura de referencia para la base de datos. . . . .	29
6.2. EMV de $\beta$ para cada experimento. . . . .	30
6.3. EMV de $\eta$ para cada experimento. . . . .	30
6.4. Estimación de la probabilidad mínima de consistencia para los consumi- dores de cada producto. . . . .	36
6.5. Distribuciones previas para $\beta$ por experimento. . . . .	38
6.6. Distribuciones previas para $\eta$ por experimento. . . . .	39
6.7. Tamaño de muestra recomendado por producto. . . . .	44



## Introducción

En la industria de alimentos, una pregunta básica al diseñar un estudio sensorial para determinar el tiempo de vida de un producto, es ¿cuántos consumidores debemos incluir en el estudio? Esto se refiere a la determinación del tamaño muestral necesario para tener la precisión deseada en el estudio.

Mientras que para la determinación de características físicas o químicas de los productos, se emplean dispositivos mecánicos o electrónicos, que pueden medir, dureza, acidez, color, etc., para la determinación de características sensoriales de los productos, se utilizan paneles de jueces entrenados, que usualmente incluyen un número reducido de jueces, de 10 a 20. Se espera que un panel de jueces entrenados pueda determinar el nivel correcto de una característica sensorial, tan bien como un instrumento de medición puede dar la lectura del nivel de una característica física o química. En las mediciones sensoriales son utilizadas personas en lugar de instrumentos o dispositivos de medición.

En los estudios de aceptación es muy importante tener un panel de consumidores participantes, que represente a una población determinada de consumidores potenciales de un producto dado. Esto nos presenta una tarea bastante complicada: elegir un grupo de consumidores, que tengan una información similar del producto para definir su aceptabilidad, y que además tenga un número de participantes adecuado para poder detectar diferencias significativas. En estos estudios de aceptación del producto, no se deben utilizar paneles de jueces entrenados, ya que por su experiencia y el nivel de conocimiento del producto, no se pueden considerar similares o representativos de los consumidores potenciales, ya que estos tienen un conocimiento limitado del producto y además desconocen los procedimientos y protocolos de pruebas sensoriales, mientras

que los jueces entrenados los tienen bien ubicados.

En la literatura encontramos diferentes usos y recomendaciones del número de participantes en los estudios de aceptación, como podemos ver en, Chambers and Baker Wolf (1996), Lawless and Heymann (1998), Meilgaard, Civille, and Carr (1999), Santa Cruz, Martínez, and Hough (2002). En esta tesis, abordamos el problema de la elección del número de consumidores participantes en un estudio sensorial de vida de anaquel, en donde los miembros del panel de consumidores aceptan o rechazan las muestras del producto, que reciben para su evaluación, después de diferentes tiempos de almacenamiento, definidos de acuerdo a un diseño muestral. Aquí desarrollamos una versión bayesiana del procedimiento propuesto por Hough et al. (2007), en donde determinan el número de consumidores necesario en la estimación de la vida de anaquel, utilizando el análisis estadístico de supervivencia. El problema de la estimación de vida de anaquel, puede verse como un problema de análisis de tiempos de vida, común en las áreas de confiabilidad y análisis de supervivencia, pero, con una diferencia importante, en el caso de tiempos de rechazo de alimentos, generalmente no podemos conocer el tiempo exacto en que un consumidor rechaza el producto. En estos estudios sólo tenemos tiempos censurados, con tiempos de censura dados por los tiempos de almacenamiento elegidos en el estudio. Esta diferencia impide utilizar los resultados que encontramos, por ejemplo en la literatura de confiabilidad, sobre tamaños de muestra para estudios de vida acelerada, como en Meeker y Escobar (1998) y Nelson (1990), ya que ellos suponen la existencia de tiempos de falla exactos y tiempos de censura, solo por la derecha, mientras que en los estudios de vida de anaquel todos los tiempos son censurados y la censura por intervalo es preponderante.

En el caso de datos censurados, puede utilizarse un enfoque de simulaciones de Monte Carlo, que también ha sido utilizado por Meeker y Escobar (1998), en estudios de tiempos de vida. Este enfoque puede utilizarse aun si solo tenemos datos censurados, pero teniendo información previa del modelo de los tiempos de rechazo. En nuestro caso existe este tipo de información, ya que se cuenta con resultados de estudios de vida de anaquel anteriores de productos similares (vida de anaquel de pan), que nos brindan información para poder diseñar estudios de simulación.

Nuestro interés en utilizar un enfoque bayesiano radica en la inquietud del cómo incorporar la información histórica de experimentos sensoriales para productos de ca-

racterísticas similares a los que se tiene pensado realizar. Por otro lado, la teoría de decisiones bayesiana, permite visualizar el problema de selección de tamaño de muestra como un intercambio entre el costo de adquisición de la muestra, y la precisión de las cantidades que se desean aproximar, incorporando a la par, información subjetiva de otros experimentos.

En el Capítulo 2, presentamos los conceptos preliminares sobre estudios sensoriales para la determinación de vida de anaquel, ubicando los problemas que generan las censuras por intervalo y la inconsistencia de los consumidores participantes en el estudio. La metodología del análisis de supervivencia, que es relevante en el análisis de datos de vida de anaquel, se presenta en el Capítulo 3, en donde se comentan las distribuciones de uso común en este tipo de estudios. En el Capítulo 4 se discuten conceptos y herramientas de la teoría de decisiones bayesiana, que son de utilidad en la determinación del número de consumidores participantes, ya que este problema se resuelve con un enfoque de teoría de decisiones. Los detalles técnicos de las simulaciones que se llevan a cabo, se presentan en el Capítulo 5, donde se discute la metodología de Cadenas de Markov, de Monte Carlo. En el Capítulo 6, se presenta un caso de estudio, en donde se ilustran los detalles de la metodología propuesta para determinar el tamaño de muestra, ilustrando la elección de la distribución a priori (con base en estudios anteriores, con productos similares) y la implementación del esquema MCMC, para muestrear la distribución posterior de los parámetros. En este capítulo, se enfatiza que la elección de la distribución a priori considerando información histórica puede ser de primordial importancia, debido a que aquí suponemos que no se tienen datos observados, y aunque las muestras son de moderadas en tamaño, aumentarlas puede ser complicado y costoso. Finalmente en el Capítulo 7, se presentan las conclusiones del trabajo y se comentan líneas de investigación que se podrían desarrollar posteriormente.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Experimentos sensoriales

Los tiempos de vida o a la falla de un producto, son aquellos en los que éste deja de cumplir con ciertas especificaciones; o simplemente cuando deja de existir o funcionar. Es de vital importancia - particularmente en el ámbito industrial - estudiar el comportamiento de la vida de los productos que se fabrican, pues de aquí es posible conocer la calidad de los mismos, determinar garantías para los clientes y tomar decisiones que impacten en los procesos de producción y de comercialización.

En relación a la industria alimenticia, los tiempos de vida de un producto pueden estar determinados por el consumidor o por el alimento en sí mismo. Así, un comestible pudiera dejar de tener la calidad que se espera en determinado momento, pero no estar completamente degradado, por lo que su tiempo de vida puede estar determinado por las preferencias de los consumidores o por la descomposición del alimento, según el interés de la empresa o los experimentadores.

Los tiempos de vida de los alimentos son muy importantes para las empresas dedicadas a esta industria, ya que con base en ellos, es posible determinar cuánto tiempo deben estar a la venta en los comercios o tiendas de conveniencia, sin que afecte la satisfacción de sus clientes.

Los *experimentos sensoriales* son una forma de evaluar la calidad de productos de diferente índole, entre ellos, los alimentos. Este tipo de análisis se compone de un conjunto de técnicas para medir las respuestas humanas a los alimentos. En general

existen dos tipos de pruebas de análisis sensorial: orientadas al consumidor y orientadas al producto. Las primeras se basan en seleccionar un conjunto de consumidores con el fin de obtener información sobre sus actitudes o preferencias. Mientras que en las segundas se emplean pequeños paneles de consumidores entrenados que funcionan como instrumento de medición del producto.

En este trabajo de tesis se analizará el caso de experimentos sensoriales orientados al consumidor, particularmente experimentos realizados por una empresa panificadora. En ellos se pretende determinar los tiempos de vida de anaquel de los panes, en los cuales cierta proporción de la población de consumidores los rechazan.

El desarrollo de los experimentos sensoriales orientados al consumidor para productos alimenticios es el siguiente:

- Se contrata una cantidad de personas, las cuales se conoce previamente que son consumidores regulares de los productos de interés, en este caso piezas de pan.
- A cada consumidor se le da a probar muestras de pan del mismo tipo, pero con distintos tiempos de almacenamiento. El experimentador da estas muestras no necesariamente en orden cronológico; de tal forma que la primera muestra a probar, pudiera no ser la del menor tiempo de almacenamiento. Es recomendable (y así se realizó en el caso de estudio) que el consumidor no conozca los tiempos de almacenamiento de los productos que se le está otorgando, esto para dar una mayor aleatoriedad al experimento y evitar sesgos en la información recaudada.
- Finalmente el experimentador pregunta al consumidor en cada muestra otorgada, si le gustó o no el producto. Se registra con un uno si la respuesta fue afirmativa y con un cero en caso contrario. Por lo tanto, se tiene un vector de ceros y unos como observación final para cada consumidor, donde cada entrada es la respuesta del consumidor para las muestras de diferentes tiempos de almacenamiento.

Notemos que las respuestas que interesan en los experimentos sensoriales orientados al consumidor, son las de aceptación o rechazo del producto después de cierto tiempo de almacenamiento. En la literatura, es posible encontrar experimentos en donde la respuesta del consumidor es un número dentro de una escala (llamada *escala hedónica*). Éstas escalas son útiles para detectar pequeñas diferencias en la degradación de los productos, y son usadas precisamente en los experimentos sensoriales orientadas a los

productos. Cuando los consumidores se enfrentan a un producto alimenticio en las tiendas de conveniencia, no asignan al producto una puntuación hedónica de 8 en una escala de 1 a 9 y así deciden que el producto es aceptable, ni asignan al producto una puntuación de 4 y así deciden rechazarlo; por esta razón, las respuestas de *sí* y *no* a la pregunta de si les agrada la muestra dada, son suficientes para los objetivos de los experimentos orientados al consumidor.

## 2.2. Censura e Inconsistencia

Debido a la naturaleza de los datos registrados, no podemos saber con exactitud cuál es el tiempo de rechazo del producto de cada consumidor. Supongamos que vemos el registro de un consumidor como el de la Tabla 2.1. En esta observación, podemos decir

Tabla 2.1: Ejemplo de registro en experimento sensorial.

	Tiempo de almacenamiento				
	Día 0	Día 2	Día 5	Día 7	Día 10
Consumidor	1	1	1	0	0

que la persona rechazó el producto hasta el día 7 del experimento. Sin embargo, esto no significa que su tiempo de rechazo sea exactamente ese, sólo sabemos que al usuario dejó de agradaarle el producto entre el día 5 y el día 7. A este tipo de observaciones se les conoce como *datos censurados*.

En los experimentos sensoriales se pueden presentar tres tipos de censura: por izquierda, por derecha, o por intervalo.

- La *censura por intervalo* se presenta cuando sólo se sabe que el evento de interés ocurrió entre dos tiempos. En el ejemplo del consumidor anterior, se tiene un dato censurado por intervalo ya que el tiempo al rechazo sólo se sabe, se encuentra entre el día 5 y el día 7.
- La *censura por derecha* se da cuando el evento de interés no ocurre durante el periodo en el que estudio se realiza. En este caso, se considerará un dato censurado por derecha si el consumidor sigue aceptando el producto hasta la muestra final.

- *La censura por izquierda* es aquella en que el tiempo a la falla, o en este caso el rechazo del producto, se sabe que es menor a cierto valor pero se ignora cuánto. En los experimentos sensoriales, este tipo de censura puede definirse de distintas maneras; sin embargo, se recomienda que para productos alimenticios, la censura por izquierda se considere cuando el consumidor presente mayor *inconsistencia* en sus respuestas.

Además de la censura, otra característica que se encuentra en las observaciones, debido a la naturaleza del experimento, es la de *inconsistencia* [3]. Diremos que una observación es *inconsistente* si existe alternancia de ceros y unos al final del experimento. Y será *consistente* si el consumidor presenta una secuencia inicial de puros unos y después otra de ceros. Esta cualidad, es una forma de evidenciar si una persona que está participando en el experimento es un consumidor regular del producto o no. A manera de ilustración consideremos las siguientes observaciones de un experimento sensorial para evaluar la calidad de una pieza de pan:

Tabla 2.2: Ejemplos de tipos de consumidores.

Consumidor	Tiempo de almacenamiento						Censura
	0 días	5 días	7 días	10 días	13 días	15 días	
1	1	1	1	0	0	0	Intervalo
2	1	1	1	0	1	0	Intervalo
3	1	1	0	1	1	0	Izquierda
4	1	1	1	1	1	1	Derecha

De los cuatro consumidores de la Tabla 2.2, los *consumidores 1 y 4* son consistentes, mientras que los demás no lo son. Sus respuestas en un principio, son afirmativas en cuánto a su gusto por el pan, y luego rechazan el producto a partir de cierto tiempo. Este comportamiento es el caso más ideal de respuesta, ya que refleja una medida de coherencia como consumidor regular del producto.

El *consumidor 2* como ya se dijo, es inconsistente, y además presenta censura por intervalo al igual que el *consumidor 1*. Es decir, sólo se sabe que al *consumidor 2* le dejó de agrandar el producto entre el día 7 y el día 13 de almacenamiento del pan. De igual manera, sólo se puede inferir que al *consumidor 1* dejó de gustarle el producto

entre el día 7 y el día 10, por lo que ambos son observaciones censuradas por intervalo.

Por otro lado, el *consumidor 3* aceptó el producto hasta un tiempo de almacenamiento de 5 días, después lo rechazó en el día 7 para posteriormente aceptarlo en los días 10 y 13, y luego rechazarlo en el día 15. Con este comportamiento, no pudiéramos decir que al consumidor le deja de gustar el producto entre el día 7 y el día 15; sería preferible sólo suponer que su tiempo de rechazo está antes del día 15 de almacenamiento. Esta observación es censurada por izquierda.

En cuanto al *consumidor 4*, sólo podemos asegurar que, durante los tiempos establecidos para el experimento, no le dejó de gustar el producto. Por lo tanto su tiempo de rechazo al producto es mayor al día 15 de almacenamiento, y será tomada su participación como una observación censurada por derecha.

La inconsistencia de los consumidores puede ser originada por diferentes factores tales como: un efecto de contraste con la muestra previamente probada (ya que el orden de presentación fue aleatorio), o dudas en la mente de los consumidores porque las muestras están muy cerca de sus tiempos de rechazo.

El comportamiento de los registros de cada consumidor, se ve afectado en mayor medida cuando se le da la muestra a probar con tiempo de almacenamiento alrededor de su tiempo de rechazo. Así, la probabilidad de que la persona elija “correctamente” (consistentemente) es mayor cuando la muestra a probar tiene un tiempo de almacenamiento lejos de su tiempo de rechazo y menor cuando está cerca de él. Estas probabilidades de consistencia en la muestra serán modeladas en el Capítulo 6.

## 2.3. Tamaño de muestra

Los experimentos sensoriales se realizan contratando alrededor de 50 personas las cuales - se conoce previamente - son consumidores regulares de los productos de interés. Existen algunas metodologías para determinar qué tamaño de muestra (número de consumidores) utilizar en los experimentos, de tal manera que se obtenga una cierta precisión en la estimación de los tiempos al rechazo de los productos.

Hough et. al. [3] propone una metodología basada en simulación para determinar el tamaño de muestra necesario para realizar estos experimentos. En ella se utiliza una distribución paramétrica para modelar los tiempos de rechazo de los consumidores y



se considera un error de estimación entre el tiempo al rechazo verdadero y el estimado ( $\Delta t$ ) que el experimentador puede asignar previamente. Los resultados de este algoritmo repetitivo de simulación se muestran en forma de curvas operacionales características: error tipo II  $\beta$  contra  $\Delta t$ , de tal forma que el tamaño de muestra que se encuentra utilizando este método, es aquél que satisfaga cierta potencia  $1 - \beta$  y cierta tolerancia  $\Delta t$  que el experimentador desee.

Puesto que el algoritmo anterior requiere de una distribución paramétrica, es necesario conocer de antemano el valor de los parámetros involucrados y a partir de ahí, aplicar la metodología descrita. En este trabajo de tesis, se busca resolver la interrogante de cómo utilizar información previa de experimentos sensoriales anteriores para dar conocimiento de los parámetros involucrados en la distribución subyacente. Además, se aborda el problema de la elección del tamaño de muestra como un problema de Teoría de decisiones Bayesiana, la cual es capaz de incorporar información previa o histórica, que aporte un valor relevante en el conocimiento del fenómeno a estudiar, en este caso, los experimentos sensoriales.

## Análisis de supervivencia

Se tiene particular interés en los tiempos de vida de los productos de una empresa panificadora, en los cuales cierta proporción de los consumidores los rechazan. Una herramienta estadística que surge de manera natural en el análisis de tiempos de vida es el análisis de supervivencia.

El *análisis de supervivencia*, con raíces en la demografía y en las ciencias actuariales, es una de las disciplinas más antiguas de la estadística. Ha sido ampliamente utilizada en campos como: medicina, control de calidad, biología, economía, análisis de confiabilidad en ingeniería, entre otros.

Tiene como objetivo principal, el estudio del tiempo que transcurre hasta que se presenta un determinado evento; este tiempo inicia en un tiempo de origen bien determinado y concluye con la ocurrencia del evento. En este caso, las observaciones consisten en tiempos de duración o ciclos de vida. Para este trabajo, se analizaron los tiempos en los que los consumidores regulares de cierto producto dejan de preferirlo. El tiempo inicial de los experimentos sensoriales, es de cero días de almacenamiento del producto y el evento de interés es el rechazo del producto por parte del consumidor.

Los conceptos mostrados en este capítulo, entre otros relacionados con el análisis de supervivencia, pueden ser estudiados a detalle en Lee (2009) [5] y Meeker (1998) [6].

### 3.1. Conceptos elementales

En el análisis de supervivencia existen funciones que son de gran interés, entre ellas se encuentran: la función de supervivencia y la fuerza de mortalidad.

Sea  $T$  el tiempo al rechazo del producto de un consumidor. Supondremos que ésta es una variable aleatoria no negativa y continua con función de distribución  $F_T(t)$  y función de densidad  $f_T(t)$ .

**Definición 3.1.1** *La función de supervivencia se define como la probabilidad de que el tiempo de rechazo ocurra después de un tiempo  $t$ , es decir,*

$$S_T(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t). \quad (3.1.1)$$

La gráfica de  $S_T(t)$  se conoce como *curva de supervivencia*.

Notemos que la función de supervivencia es una función continua no creciente, con valor de uno cuando  $t = 0$ , y con valor de cero cuando  $t$  tiende a infinito. La función de supervivencia mide la probabilidad de que un producto sea rechazado después de cierto tiempo  $t$ .

**Definición 3.1.2** *La fuerza de mortalidad o función de riesgo se define como la tasa instantánea de rechazo al producto al tiempo  $t$ , es decir,*

$$h_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{P(t \leq T < \Delta t + t | T \geq t)}{\Delta t} \right]. \quad (3.1.2)$$

Utilizando la definición de probabilidad condicional y la ecuación 3.1.1, se tiene que:

$$h_T(t) = \frac{1}{S_T(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{F_T(\Delta t + t) - F_T(t)}{\Delta t} \right].$$

Observando que el límite del lado derecho es la derivada de  $F_T(t)$  con respecto a  $t$ , la cual es la función de densidad  $f_T(t)$ , se concluye que:

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)}. \quad (3.1.3)$$

La función de riesgo puede ser una función creciente, decreciente, constante, o ser una combinación de las anteriores. Es importante mencionar que ésta no es una probabilidad, sino una función del tiempo que nos indica qué tan rápido se degrada un producto de interés.

Notemos que, conociendo alguna de estas cuatro funciones:  $h_T(t)$ ,  $f_T(t)$ ,  $F_T(t)$ ,  $S_T(t)$ , las otras tres también son completamente conocidas. En el análisis de supervivencia la función  $h_T(t)$  es importante de estimar debido a que abastece una descripción probabilista del futuro inmediato de un producto o sujeto que continúa bajo seguimiento.

## 3.2. Distribución Weibull

Esta distribución de probabilidad aunque fue descubierta por Maurice René Fréchet en 1927, fue descrita detalladamente por Waloddi Weibull en 1951, por quien recibe su nombre [8]. Ha sido ampliamente utilizada en distintos contextos, entre los principales se encuentran:

- En ingeniería, para análisis de confiabilidad.
- Finanzas y economía en el análisis de eventos críticos en precios bursátiles.
- En análisis de tiempos de vida (supervivencia).
- Industria eólica, en el estudio de las variaciones en la velocidad del viento.

La función de densidad de una variable aleatoria  $T$  que sigue una distribución de Weibull es:

$$f_T(t; \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad \text{con } t > 0, \quad (3.2.1)$$

donde  $\beta > 0$  y  $\eta > 0$  son conocidos como los parámetros de forma y escala, respectivamente. De tal manera que la función de distribución y de supervivencia son respectivamente:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}, \quad (3.2.2)$$

$$S_T(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}. \quad (3.2.3)$$

Mientras que la función de riesgo está determinada por:

$$h_T(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}. \quad (3.2.4)$$

La conveniencia del uso de ésta distribución se da por la gran flexibilidad de las funciones  $S_T(T)$  y  $f_T(t)$ . Observamos por ejemplo, que cuando  $\beta = 1$  entonces se obtiene el modelo exponencial, y la función de riesgo es contante en el tiempo. Por otro lado, cuando  $\beta > 1$  entonces se garantiza una función de riesgo creciente en el tiempo, y decreciente cuando  $\beta < 1$ . Por otro lado, el parámetro de escala  $\eta$  también es llamado vida característica, ya que coincide con el cuantil  $t_{0.63}$ , es decir, el tiempo de vida en el que el 63% de la población rechaza el producto.

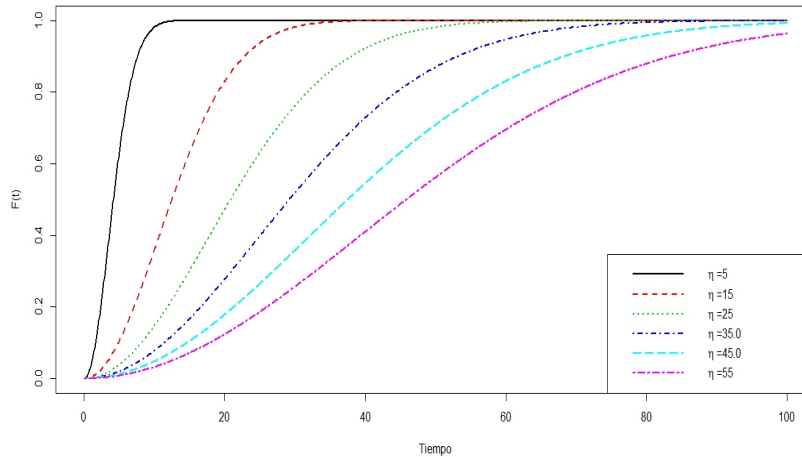


Figura 3.2.1: Función de distribución acumulada Weibull, con  $\beta = 0.5$ .

En las gráficas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4, podemos observar el comportamiento de las funciones de distribución, riesgo y supervivencia, según los valores de los parámetros de forma y escala. Notemos que si fijamos  $\eta$ , entonces conforme el parámetro de forma aumenta, las curvas de supervivencias tienen un decaimiento más pronunciado. El punto donde se interceptan estas curvas es precisamente el cuantil  $t_{0.63}$ , es decir, el parámetro de escala  $\eta$ .

### 3.3. Estimación

Uno de los problemas más comunes dentro del análisis inferencial, consiste en la estimación de los parámetros involucrados en un modelo de probabilidad asignado a un conjunto de datos. Una de las formas más utilizadas para resolver el problema de estimación, es utilizando el método de máxima verosimilitud.

Supongamos que se tiene una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_n$   $n \in \mathbb{N}$ , con función de densidad  $f(X|\theta)$  donde  $\theta$  es un vector de parámetros desconocidos que toma valores en un conjunto  $\Theta$ . La función de verosimilitud del parámetro  $\theta$  es definida como:

$$L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta). \quad (3.3.1)$$

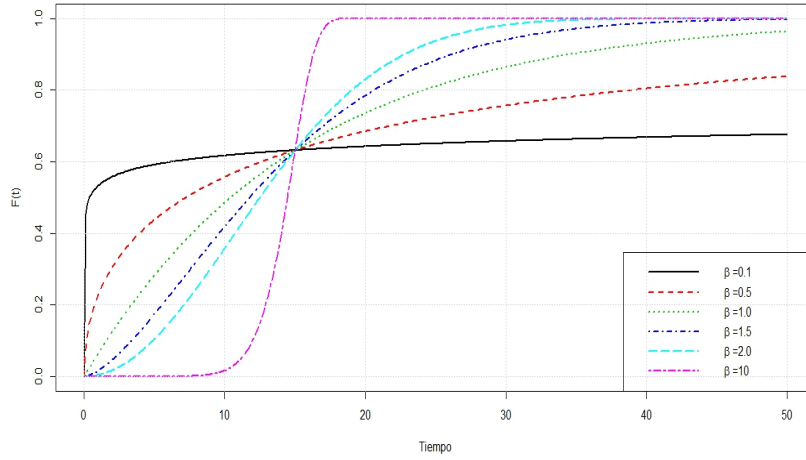


Figura 3.2.2: Función de distribución acumulada Weibull, con  $\eta = 15$ .

El valor de  $\theta$  que maximiza la ecuación 3.3.1 es conocido como el *estimador de máxima verosimilitud*. El método de máxima verosimilitud es muy utilizado en la práctica debido a que, bajo condiciones regulares, proporciona estimadores consistentes, asintóticamente eficientes, y normalmente distribuidos en muestras grandes.

Cuando se trabaja con tiempos de vida, es común contar con información censurada, es decir, con tiempos que a lo sumo se sabe se encuentran en un intervalo.

Denotemos por  $L$ ,  $R$  y  $I$  a los conjuntos de observaciones que son censuradas por izquierda, derecha y por intervalo, respectivamente. Para cada  $x_i$  expresaremos como  $r_i$  y  $l_i$  a los valores de censura por derecha e izquierda de cada valor  $x_i$ . Por lo tanto la función de verosimilitud para datos censurados estaría dada por:

$$L(\theta) = \prod_{x_i \in R} (1 - F(r_i)) \prod_{x_i \in I} (F(r_i) - F(l_i)) \prod_{x_i \in L} (F(l_i)). \quad (3.3.2)$$

Cuando se considera que los datos siguen un modelo Weibull con parámetros  $\theta = (\beta, \eta)^T$ , se tiene entonces que la ecuación 3.3.2 está dada por:

$$L(\beta, \eta) = \prod_{x_i \in R} \left( e^{-\left(\frac{r_i}{\eta}\right)^\beta} \right) \prod_{x_i \in I} \left( e^{-\left(\frac{l_i}{\eta}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{r_i}{\eta}\right)^\beta} \right) \prod_{x_i \in L} \left( 1 - e^{-\left(\frac{l_i}{\eta}\right)^\beta} \right). \quad (3.3.3)$$

Encontrar los estimadores de máxima verosimilitud para  $\beta$  y  $\eta$  de forma analítica para esta última expresión, no es tarea sencilla. Esta estimación se encuentra utilizando métodos de aproximación numérica como el método quasi-Newton. Este tipo de algoritmos generalmente son implementados en software específicos, particularmente, en este

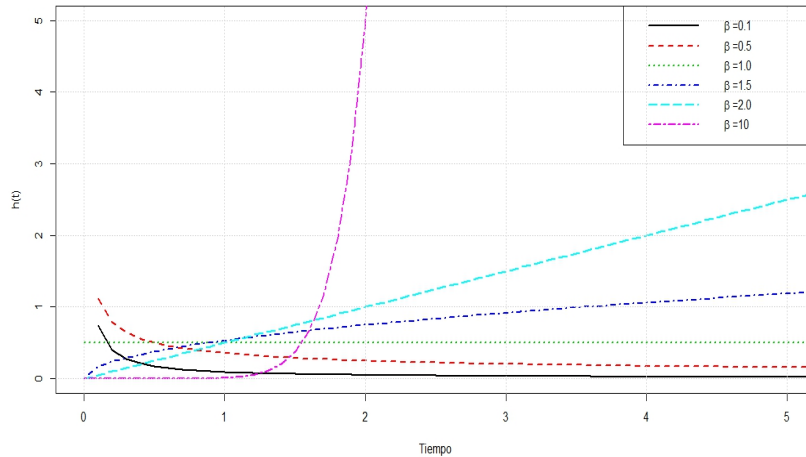


Figura 3.2.3: Función de riesgo Weibull, con  $\eta = 2$ .

trabajo se utiliza el software estadístico R tanto para optimización de la función de verosimilitud como para la implementación de algoritmos MCMC, los cuales se explican en el Capítulo 5.

La función de densidad del modelo Weibull es posible escribirla de la siguiente manera:

$$f(t; \lambda, \nu) = \nu \lambda t^{\nu-1} e^{-\lambda t^\nu} \quad , t > 0 \quad (3.3.4)$$

donde  $\nu = \beta$  y  $\lambda = 1/\eta^\beta$ . Esta reparametrización es utilizada en algunos paquetes o programas estadísticos por sus propiedades computacionales, tal es el caso del programa JAGS (Just Another Gibbs Sampler) que es usado para el análisis de modelos bayesianos usando MCMC, y además está diseñado para trabajar de forma estrecha con el lenguaje R. JAGS será utilizado en este trabajo para la implementación de los algoritmos MCMC que se describen en el Capítulo 5 y por ende la parametrización del modelo Weibull especificada en 3.3.4.

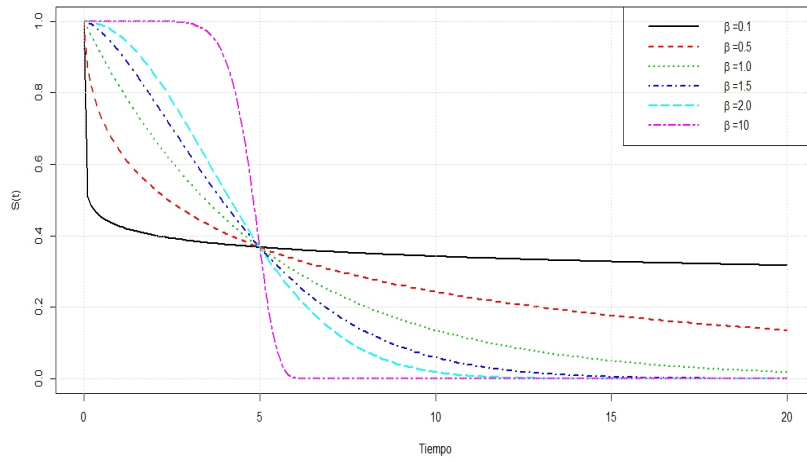


Figura 3.2.4: Función de supervivencia Weibull, con  $\eta = 5$ .



# Teoría de decisiones bayesiana

En este capítulo se establecen los principales conceptos relacionados con la teoría de decisiones, así como una breve explicación sobre los métodos estadísticos bayesianos. Se puede revisar en mayor detalle las definiciones y resultados aquí utilizados en Berger (1985) [1], Parmigiani (2009) [7] y DeGroot (1970) [2].

## 4.1. Introducción a la estadística bayesiana

La estadística Bayesiana utiliza información subjetiva de alguna cantidad o parámetro de interés, para luego incorporarla como parte de un modelo de probabilidad. Supongamos que se tiene un modelo de probabilidad  $f(X|\theta)$  para los datos observados  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  con  $\theta$  un vector de parámetros desconocidos. El enfoque bayesiano considera que  $\theta$  es una variable aleatoria con distribución inicial  $\pi(\theta)$  la cual se puede establecer generalmente de la siguiente manera:

- a) Mediante la opinión de expertos.
- b) Utilizando información de experimentos anteriores.

Esta información de los parámetros, conocida también como *información previa* o *a priori*, es posible combinarla con la creencia o verosimilitud de los datos observados, y a partir de éstos dos, crear un conocimiento más amplio de los mismos. El conocimiento generado se conoce como *información posterior*. Formalmente esto se resumen en la versión del teorema de Bayes más ampliamente utilizada:

**Teorema 4.1.1** *La función de probabilidad (densidad) posterior de  $\theta$ ,  $\pi(\theta|X)$  está dada por:*

$$\pi(\theta|X) = \frac{f(X|\theta)\pi(\theta)}{f(X)} \quad (4.1.1)$$

donde:

$$f(X) = \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta)f(X|\theta)d\theta & \text{Si } \theta \text{ es continua} \\ \sum_{\Theta} \pi(\theta)f(X|\theta) & \text{Si } \theta \text{ es discreta} \end{cases}$$

y  $\Theta$  es el espacio parametral de  $\theta$ .

Notemos que  $f(X)$  no está en función de  $\theta$  por lo que 4.1.1 puede escribirse como:

$$\boxed{\pi(\theta|X) \propto f(X|\theta)\pi(\theta)} \quad (4.1.2)$$

Es decir, para obtener la distribución posterior es necesario: tener un conjunto de datos, de los cuales se planteará la función de verosimilitud  $f(X|\theta)$ , y una distribución a priori de los parámetros que refleje la creencia que tenemos sobre ellos.

La selección de  $\pi(\theta)$  es un tema que a lo largo de los años ha provocado controversias y discusiones desde el punto filosófico, tanto como desde el punto de vista estadístico. Pese a que no se profundizará en el debate de la selección de  $\pi(\theta)$ , nos basta comentar para fines de este trabajo, que las distribuciones previas se pueden clasificar según su impacto en el modelo que se esté aplicando en *informativas y no informativas*. Se dice que una distribución previa es informativa si domina a la verosimilitud, es decir, si tiene un impacto severo en la distribución posterior de  $\theta$ . Una distribución no informativa sería aquella que represente un estado de información inicial vaga de los parámetros.

En este trabajo se presupone que no se tienen datos observados, por lo que la relación dada en 4.1.2 no está determinada completamente. Es por esto que la elección de  $\pi(\theta)$  será uno de los objetos de estudio primordiales de esta tesis, de tal forma que, al utilizar información de experimentos anteriores para su caracterización, la distribución previa de los parámetros de interés será naturalmente una distribución informativa.

## 4.2. Conceptos elementales

En la estadística clásica, se hace uso de la información muestral para realizar inferencias sobre  $\theta$ . Estas inferencias clásicas se hacen, en su mayoría, sin tener en cuenta

el uso que se les dará. En la teoría de decisiones, por otro lado, se busca combinar la información de la muestra con otros aspectos relevantes del problema para tomar la mejor decisión.

El conjunto posible de decisiones a tomar en un problema específico lo denotaremos como  $\mathcal{A}$ , y una decisión particular de éste, a la cual llamaremos *acción* la denotaremos como  $a$ . con base en esto podemos definir lo que es una regla de decisión:

**Definición 4.2.1** *Una regla de decisión  $\delta(x)$  es una función medible del espacio muestral  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{A}$ , el espacio de decisiones. Si  $X = x$  es la información muestral, entonces  $\delta(x)$  es la acción que será tomada. Diremos que dos reglas de decisiones son equivalentes si  $P(\delta_1(x) = \delta_2(x)) = 1$  para todo  $\theta$ .*

Entonces, lo que se busca es encontrar o elegir “la mejor” regla de decisión en algún sentido. Generalmente, se miden las posibles consecuencias de las decisiones por medio de una función de pérdida o de ganancia. La incorporación de una función de pérdida para el análisis estadístico fue estudiado ampliamente por primera vez por Abraham Wald (1950).

La función de pérdida a escoger, será evaluada al tomar la acción  $a$  cuando el valor real del parámetro de interés es  $\theta$ . Por lo tanto, supondremos que la función de pérdida  $L(\theta, a)$ , estará definida para todo  $(\theta, a)$  en  $\Theta \times \mathcal{A}$ .

Sin embargo, al no conocer el valor real de  $\theta$  al tomar una decisión, la función de pérdida  $L(\theta, a)$  no será conocida con certeza. Una forma natural de proceder es tomar el valor esperado de la pérdida de tomar una decisión y luego escoger la decisión “óptima” con respecto a este valor esperado. Esto nos lleva a establecer las siguientes definiciones:

**Definición 4.2.2** *La función de riesgo de una regla de decisión  $\delta(x)$  es definida como:*

$$R(\theta, \delta(x)) = E_{\theta}^X [L(\theta, \delta(X))] = \int_{\mathcal{X}} L(\theta, \delta(X)) dF^X(x|\theta). \quad (4.2.1)$$

**Definición 4.2.3** *La función de riesgo de Bayes de una regla de decisión  $\delta(x)$ , con respecto a una distribución a priori  $\pi$  sobre  $\Theta$  es definida como:*

$$r(\pi, \delta(x)) = E^{\pi} [R(\theta, \delta(x))] = E^{\pi} E_{\theta}^X [L(\theta, \delta(X))]. \quad (4.2.2)$$

Una regla de decisión  $\delta_1$  es preferida sobre una regla  $\delta_2$  si:

$$r(\pi, \delta_1) < r(\pi, \delta_2)$$

Lo anterior es conocido como *el principio de Bayes*. Por otro lado, una regla de decisión que minimice  $r(\pi, \delta)$  es llamada regla de Bayes y es denotada por  $\delta^\pi$ .

**Definición 4.2.4** *La pérdida esperada posterior de una acción  $a$ , cuando la distribución posterior de  $\theta$  es  $\pi(\theta|x)$  se define como:*

$$\rho(\pi(\theta|x), a) = \int_{\Theta} L(\theta, a) dF^{\pi(\theta|x)}(\theta).$$

Una decisión  $a$  que minimice  $\rho(\pi(\theta|x), a)$ , se conoce como acción de Bayes posterior.

**Teorema 4.2.1** *Robert y Casella (2004). Si  $\delta$  es una regla de decisión, entonces:*

$$r(\pi, \delta) = \int_{\mathcal{X}} \rho(\pi(\theta|x), \delta(x)) dF^f(x). \quad (4.2.3)$$

*Demostración:*

Por las definiciones 4.2.2 y 4.2.3 tenemos:

$$\begin{aligned} r(\pi, \delta(x)) &= E^\pi [R(\theta, \delta(x))] \\ &= \int_{\Theta} R(\theta, \delta(x)) dF^\pi(\theta) \\ &= \int_{\Theta} \int_{\Omega} L(\theta, \delta(x)) dF^X(x|\theta) dF^\pi(\theta) \end{aligned}$$

Considerando una función de pérdida acotada, de tal manera que exista un  $K > 0$  tal que  $L(\theta, a) \geq -K > -\infty$ , entonces, por el teorema de Fubini podemos intercambiar el orden de integración obteniendo:

$$r(\pi, \delta) = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} L(\theta, \delta(x)) f(x|\theta) dF^\pi(\theta) \right] dx$$

En el caso discreto, la integral sobre  $\Omega$  se cambia por sumas. Luego, considerando que si  $f_{X|\theta}(x|\theta) = 0$  cuando  $f_X(x) = 0$  casi en todas partes con respecto a  $\pi$ , y utilizando

las definiciones de  $\pi(\theta|x)$  y  $\rho(\pi(\theta|x), \delta)$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
 r(\pi, \delta) &= \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} L(\theta, \delta(x)) f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} L(\theta, \delta(x)) \pi(\theta|x) f_X(x) d\theta \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} L(\theta, \delta(x)) \pi(\theta|x) d\theta \right] f_X(x) dx \\
 &= \int_{\Omega} \rho(\pi(\theta|x), \delta(x)) f_X(x) dx \\
 &= \int_{x: f_X(x) > 0} \rho(\pi(\theta|x), \delta(x)) f_X(x) dx \\
 &= \int_{x: f_X(x) > 0} \rho(\pi(\theta|x), \delta(x)) dF^f(x)
 \end{aligned}$$

■

Por lo que dado cualquier  $x$ , minimizar el riesgo bayesiano será equivalente a minimizar la función de pérdida esperada posterior  $\rho$ .

Estamos interesados en aquella decisión  $\delta$ , que minimice esta última expresión. Es decir, el criterio que se utilizará para determinar si una regla de decisión es la mejor, será eligiendo aquella que minimice de la función de riesgo bayesiana.

### 4.3. Función de pérdida y tamaño de muestra.

La elección de la función de pérdida puede ser definida por el mismo contexto del problema. En este trabajo se considerarán funciones de la forma:

$$L(\theta, a, n) = L_0(\theta, a) + C(n). \quad (4.3.1)$$

donde  $L_0(\theta, a)$  es en sí misma una función de pérdida y  $C(n)$  es una función que mide el costo de observar la muestra, comúnmente una función lineal con respecto a  $n$ . Notemos que la acción  $a$  que minimice  $L_0(\theta, a)$ , también lo hará para la expresión 4.3.1. A continuación se presentan algunos resultados sobre funciones de pérdida mayormente utilizadas en la literatura para variables aleatorias univariadas:

**Resultado 1.** (*Pérdida uno-cero*). Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , con función de densidad previa  $\pi(\theta)$ , entonces al considerar la función de pérdida:

$$L_0(\theta, \delta(x)) = \begin{cases} 1 & , |\theta - \delta(x)| \geq \epsilon \\ 0 & , |\theta - \delta(x)| < \epsilon \end{cases} \quad (4.3.2)$$

y suponiendo que la distribución posterior de  $\theta$  es unimodal, entonces cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , la regla de bayes  $\delta^\pi(X)$ , donde  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ , es la moda de la distribución posterior de  $\theta$ .

**Resultado 2.** (*Pérdida absoluta*). Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , con función de densidad previa  $\pi(\theta)$ , entonces al considerar la función de pérdida absoluta:

$$L_0(\theta, \delta(X)) = |\theta - \delta(X)| \quad (4.3.3)$$

la regla de bayes  $\delta^\pi(X)$ , es la mediana de la distribución posterior de  $\theta$ .

**Resultado 3.** (*Pérdida cuadrática*). Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , con función de densidad previa  $\pi(\theta)$ , entonces al considerar la función de pérdida cuadrática:

$$L_0(\theta, \delta(X)) = (\theta - \delta(X))^2$$

la regla de bayes  $\delta^\pi(X)$  es:

$$\delta^\pi(X) = E_{\theta|X}(\theta|X).$$

Es decir, la media posterior de  $\theta$ .

Este último resultado es posible extenderlo al caso en que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ ; entonces la función de pérdida cuadrática es:

$$L_0(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}(X)) = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\delta}(X))^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\delta}(X))$$

y la regla de bayes  $\boldsymbol{\delta}^\pi(X)$  es entonces la media posterior de  $\boldsymbol{\theta}$ .

En estos casos, se conoce teóricamente la regla de bayes, razón por la cual son ampliamente utilizadas. Sin embargo, pueden plantearse funciones de pérdida en las cuales no sea posible determinar analíticamente la regla de bayes y, por lo tanto, es necesario el uso de métodos numéricos para optimizarlas.

Por otro lado, aún para las funciones de pérdida con una regla de bayes determinada de forma analítica, no siempre es posible tener una distribución posterior conocida para  $\theta$ ; lo que nos plantea el problema de cómo estimar o aproximar la regla de bayes, y por consiguiente, la función de pérdida posterior. Una forma de hacer esto es por medio de simulación Monte Carlo.

# Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

El término *Monte Carlo* es usado para referirse a un conjunto de métodos matemáticos no determinísticos que se empezaron a usar en los 1940s para el desarrollo de armas nucleares, en los cuales se busca aproximar expresiones complejas y costosas de evaluar con exactitud. En este trabajo se consideran métodos Monte Carlo basados en cadenas de Markov, MCMC por sus sigas en inglés. La definición formal de estos métodos es la siguiente:

**Definición 5.0.1** *Un método Monte Carlo de Cadenas de Markov o MCMC, para la simulación de una distribución  $f$  es cualquier método que produzca una Cadena de Markov ergódica  $(X(t))$  cuya distribución estacionaria sea  $f$ .*

El objetivo principal del uso de MCMC, para fines de este trabajo, será el *obtener una muestra  $\theta_1, \dots, \theta_n$  distribuida aproximadamente como  $f$* . En este caso  $f$  será la función de distribución posterior de  $\theta$ . Uno de los algoritmos de simulación Monte Carlo más utilizados y estudiados en la literatura es el algoritmo de Metropolis-Hastings.

## 5.1. Metrópolis Hastings

El algoritmo de Metrópolis-Hastings es un muestreo por rechazo generalizado, que debe su nombre a el físico estadounidense Nicholas Metrópolis (1915 – 1999) y al estadístico canadiense Wilfred Hastings (1930 – 2016).

El método comienza considerando una función objetivo, la cual será en este caso la distribución posterior de interés  $\pi(\theta|X)$ . Se escoge una función condicional auxi-

liar  $q(\cdot|x)$ , llamada también función propuesta o función instrumental. El algoritmo Metrópolis Hastings producirá entonces una Cadena de Markov  $(\theta^{(t)})$  por medio de la siguiente secuencia:

---

**Algoritmo Metrópolis-Hastings**

---

1. Se toma un valor inicial  $\theta^{(0)}$ .
2. Dado  $\theta^{(t)}$ , generar  $y_t \sim q(\cdot|\theta^{(t)})$ .
3. Hacer:

$$\theta^{(t+1)} = \begin{cases} y_t & \text{con probabilidad } \rho(\theta^{(t)}, y_t) \\ \theta^{(t)} & \text{con probabilidad } 1 - \rho(\theta^{(t)}, y_t) \end{cases}$$

donde

$$\rho(x, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y) q(x|y)}{\pi(x) q(y|x)}, 1 \right\}.$$

---

La probabilidad  $\rho$  es conocida como la probabilidad de aceptación de Metropolis-Hastings. Notemos que, al considerar una función simétrica para la distribución propuesta  $q$ , ésta probabilidad se reduce a:

$$\rho(x, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y)}{\pi(x)}, 1 \right\}.$$

Por otro lado, también observamos que  $\rho$  sólo está definida para los valores de la cadena tales que  $\pi(x) > 0$ . Sin embargo, se supondrá que la cadena empezará en un valor  $\theta^{(0)}$  tal que  $\pi(\theta^{(0)}) > 0$ , y de esto se desprende el hecho de que  $\pi(\theta^{(t)}) > 0$  para cada  $t \in \mathbb{N}$ , ya que valores  $y_t$  tales que  $\pi(y_t) = 0$  implicará que  $\rho(\theta^{(t)}, y_t) = 0$  y por lo tanto éstos valores serán rechazados.

Para asegurarnos que el algoritmo produzca una cadena  $(\theta^{(t)})$  tal que su distribución límite sea  $\pi$ , será necesario establecer condiciones mínimas de regularidad para la distribución propuesta  $q$  y para la función objetivo  $\pi$ . Supondremos que el soporte de  $\pi$ ,  $\mathcal{E}$  es conexo, ya que un soporte no conexo puede invalidar el algoritmo. Si el soporte de  $\pi$  es truncado por  $q$ , es decir, si existe  $A \subset \mathcal{E}$  tal que:

$$\int_A \pi(\theta) d\theta > 0 \quad \text{y} \quad \int_A q(y|\theta) dy = 0$$



entonces la cadena evidentemente no recorrerá todo el soporte de  $\pi$ , por lo que la cadena no tendrá como distribución límite a  $\pi$ .

Por lo tanto, una condición mínima suficiente para la elección de la función propuesta será la siguiente:

$$\bigcup_{\theta \in \mathcal{E}} \text{supp } q(\cdot|\theta) \supset \text{supp } \pi.$$

Deseamos además que  $\pi$  sea la distribución estacionaria de la cadena; para determinar que esto efectivamente se cumple, analizamos el kernel de transición producido por el algoritmo Metrópolis-Hastings. Recordamos en primera instancia la definición de un kernel de transición:

**Definición 5.1.1** *Un kernel de transición es una función  $K$  definida sobre  $\mathcal{X} \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$  tal que:*

- i)  $\forall x \in \mathcal{X}$ ,  $K(x, \cdot)$  es una probabilidad medible.*
- ii)  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ,  $K(\cdot, A)$  es medible.*

En el caso continuo, el kernel denota la densidad condicional  $K(x, y)$  de la transición  $K(x, \cdot)$ , es decir,  $P(X \in A|x) = \int_A K(x, y)dy$ .

**Definición 5.1.2** *Una cadena de Markov con kernel de transición  $K$ , satisface la condición de balance detallado si existe una función  $\pi$  que satisfaga:*

$$K(x, y)\pi(x) = \pi(y)K(y, x) \quad \forall(x, y).$$

**Teorema 5.1.1** *Suponga una cadena de Markov con kernel de transición  $K$  que cumple la condición de balance detallado con respecto a  $\pi$ , entonces  $\pi$  es una densidad invariante y por lo tanto la cadena es irreversible.*

*Demostración:*

Consideremos un conunto  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  medible. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} K(y, B)\pi(y)dy &= \int_{\mathcal{X}} \int_B K(y, x)\pi(y)dx dy \\ &= \int_{\mathcal{X}} \int_B K(y, x)\pi(x)dx dy \quad (\text{condición de balance detallado}) \\ &= \int_B \left[ \int_{\mathcal{X}} K(y, x)dy \right] \pi(x)dx \quad (\text{por ser } K \text{ kernel de transición}) \\ &= \int_B \pi(x)dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\pi$  es densidad invariante de la cadena. ■

**Teorema 5.1.2** (*Convergencia Metropolis-Hastings*) Para cada distribución condicional  $q$ , cuyo soporte incluye a  $\mathcal{E}$ ,  $\pi$  es distribución estacionaria de la cadena  $(\theta^{(t)})$  producida por el algoritmo Metrópolis-Hastings descrito anteriormente.

*Demostración:*

El kernel de transición del algoritmo Metropolis-Hastings es:

$$K(\theta, y) = \rho(\theta, y)q(y|\theta) + (1 - r(\theta))\delta_\theta(y)$$

donde  $r(\theta) = \int \rho(\theta, y)q(y|\theta)dy$ ,  $\rho$  es la probabilidad de aceptación del algoritmo y  $\delta_\theta(y)$  es la delta de Dirac en  $\theta$ , de manera que:

$$\rho(\theta, y)q(y|\theta)\pi(\theta) = \rho(y, \theta)q(\theta|y)\pi(y)$$

$$(1 - r(\theta))\delta_\theta(y)f(\theta) = (1 - r(y))\delta_y(\theta)f(y)$$

y se tiene entonces la condición de balance detallado. El resultado se sigue utilizando el teorema 5.1.1. ■

## 5.2. Muestreo Gibbs

Este algoritmo MCMC fue propuesto por los hermanos y matemáticos Stuart Alan Geman y Donald Jay Geman en 1984, tomando el nombre en honor al estadístico Josiah Willard Gibbs. El muestreo de Gibbs es un caso particular del Metropolis Hastings, tal cual se describe en Robert y Casella (2004).

Consideremos un vector aleatorio  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ , donde suponemos que podemos simular de las correspondientes densidades condicionales  $\pi_1, \dots, \pi_p$ . El algoritmo de Gibbs asociado a la transición de  $\theta^{(t)}$  a  $\theta^{(t+1)}$  es el siguiente:

---

### Algoritmo Muestreo de Gibbs

---

1. Se toma un valor inicial  $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})$ .
2. En cada iteración  $t = 1, 2, \dots$ , dado  $\theta^{(t)} = (\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t)})$  generar:

$$\begin{aligned} \theta_1^{(t+1)} &\sim \pi_1 \left( \theta_1 | \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t)} \right) \\ \theta_2^{(t+1)} &\sim \pi_2 \left( \theta_2 | \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t)} \right) \\ &\vdots \\ \theta_p^{(t+1)} &\sim \pi_p \left( \theta_p | \theta_1^{(t+1)}, \theta_2^{(t+1)}, \dots, \theta_{(p-1)}^{(t+1)} \right) \end{aligned}$$

3. Ir al paso 2 e iterar hasta convergencia.

---

Las funciones  $\pi_1, \dots, \pi_p$  son llamadas densidades condicionales; notemos que estas densidades sólo son usadas para simulación. Una de las ventajas más importantes del algoritmos es que, incluso en problemas de altas dimensiones, todas las simulaciones realizadas en cada iteración son univariadas.

## Análisis estadístico de un caso de estudio

En este capítulo se aplicarán los conceptos y herramientas vistos en los capítulos anteriores, con el fin de dar solución al problema de selección del número de consumidores necesarios en los experimentos sensoriales de una empresa panificadora. Esta sección, es producto de un proyecto de vinculación entre la empresa y CIMAT; los productos fueron renombrados ligeramente para fines de confidencialidad, sin afectar la metodología y los resultados aquí obtenidos. Se explicará a detalle la metodología empleada para la determinación de las distribuciones previas para los parámetros del modelo Weibull, la cual tiene como base el algoritmo propuesto por Hough et al. (2007). Además se integrarán los conceptos de la teoría de decisiones bayesiana y la implementación de algoritmos MCMC mediante el programa JAGS ejecutado en el software R, para determinar el tamaño de muestra que cumpla con los requisitos deseados de estimación y de optimización. Por último se muestran los resultados de los análisis realizados.

### 6.1. Experimentos sensoriales

Se cuenta con información histórica de 12 experimentos sensoriales realizados por una empresa panificadora, cada uno correspondiente a la evaluación de un producto distinto. Con el fin de conocer los tiempos en los que cierto porcentaje de la población de consumidores rechaza sus productos, la empresa desea realizar experimentos en un futuro y se pregunta si es óptimo seguir contratando 50 consumidores para la evaluación de sus 12 productos, o si es recomendable aumentar el tamaño de muestra para tener mejores estimaciones, o en un caso más optimista, disminuirla y seguir teniendo buenas estimaciones de los tiempos de interés.

La nomenclatura para referirnos a los diferentes productos se muestran en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Nomenclatura de referencia para la base de datos.

<b>Producto</b>	<b>Referencia</b>
Mantecadas con Avena	Mavena
Mantecadas con Nuez	Mnuez
Panqué de Chocolate	PanqueChoco
Panqué con Nuez	PanqueNuez
Minimantecadas de Capuchino	MiniCapu
Minimantecadas con Blue Berry	MiniBerry
Panqué Natural	Panque138
Minimantecadas con Vainilla	MiniVainilla
Minimantecadas con Blue Berry Especial	MiniBerry163
Panqué de Chocolate Especial	PanqueChoco167
Panqué con Pasas	PanquePasas
Panqué Marmoleado	PanqueMármol

El problema se ha dividido en cuatro partes fundamentales:

- *Modelación de los datos históricos y sus características (censura e inconsistencia).*
- *Elección de distribuciones previas.*
- *Cálculo y simulación de la distribución posterior.*
- *Elección del tamaño de muestra óptimo.*

## 6.2. Modelación

### Análisis de datos históricos

Sean  $t_1, t_2, \dots, t_n$  los tiempos de rechazo al producto de  $n$  consumidores de un experimento sensorial. Como se ha explicado anteriormente, estos tiempos son censurados, y son variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas.

Denotaremos por  $L$ ,  $R$  e  $I$  a los conjuntos de observaciones que son censuradas por izquierda, derecha y por intervalo, respectivamente. Así, para cada  $t_i$  tendremos un tipo de censura según el comportamiento de cada consumidor, y expresaremos como  $r_i$  y  $l_i$  a los valores de censura por derecha e izquierda de cada tiempo al rechazo  $t_i$ .

De tal forma que la función de verosimilitud de  $\beta$  y  $\eta$  corresponde a la siguiente expresión:

$$L(\beta, \eta) = \prod_{t_i \in R} (1 - F(r_i)) \prod_{t_i \in I} (F(r_i) - F(l_i)) \prod_{t_i \in L} (F(l_i)), \quad (6.2.1)$$

donde, debido a las propiedades y características mencionadas en el Capítulo 2,  $F$  es la función de distribución del modelo Weibull con parámetros de forma y escala  $\beta$  y  $\eta$ :

$$F(t) = 1 - \exp(-(t/\eta)^\beta), \quad \beta, \eta > 0.$$

Los valores que maximizan la ecuación 6.2.1, son conocidos como los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de  $\beta$  y  $\eta$ . Esta estimación se encuentra utilizando métodos de aproximación numérica como el método quasi-Newton implementado en el lenguaje R.

A continuación se presentan las estimaciones para cada uno de los 16 experimentos sensoriales de los distintos productos de pan:

Tabla 6.2: EMV de  $\beta$  para cada experimento.

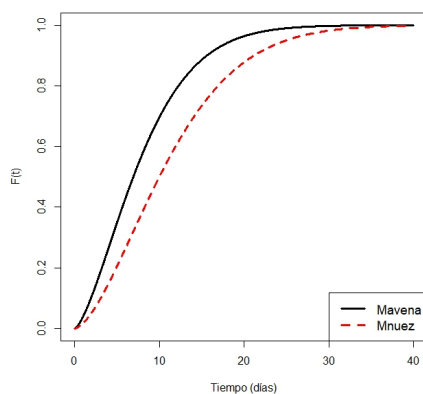
	Mavena	Mnuez	PanqueChoco	PanqueNuez	MiniCapu	MiniBerry
$\hat{\beta}$	1.477573	1.600075	1.233469	1.396624	1.097185	1.23898
	Panque138	MiniVainilla	MiniBerry163	PanqueChoco167	PanquePasas	PanqueMármol
$\hat{\beta}$	1.561638	1.607309	1.374218	1.801553	2.200632	3.021478

Tabla 6.3: EMV de  $\eta$  para cada experimento.

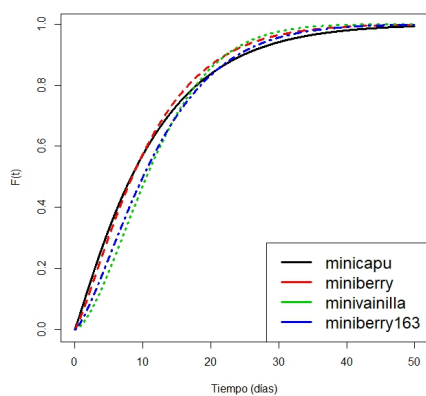
	Mavena	Mnuez	PanqueChoco	PanqueNuez	MiniCapu	MiniBerry
$\hat{\eta}$	8.877606	12.569320	10.317700	9.946830	11.642197	11.392323
	Panque138	MiniVainilla	MiniBerry163	PanqueChoco167	PanquePasas	PanqueMármol
$\hat{\eta}$	11.588812	13.274586	13.120295	7.258958	15.261966	6.126708

Las estimaciones de las Tablas 6.2 y 6.3 determinan la manera en cómo se degradan los productos. Si  $\hat{\beta} > 1$  entonces la función de riesgo Weibull dada por la ecuación 3.1.2 es creciente, lo cual implica degradación.

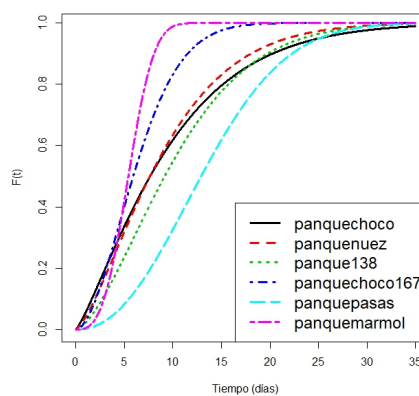
Los productos a estudiar pueden agruparse de diferentes maneras: según su tipo (mantecadas, minimantecadas o panqués), según su ingrediente activo (nuez, por ejemplo), o dependiendo en la forma en cómo éstos se degradan. En este trabajo, el interés principal es observar los productos de manera individual, y de forma conjunta según el tipo de pan. En la Figura 6.2.1 se muestran las funciones de distribución para cada producto agrupadas según el tipo de pan.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.2.1: Funciones de distribución por tipo de pan. (a) Mantecadas. (b) Minimantecadas. (c) Panqués.

En la Figura 6.2.1 podemos notar que las minimantecadas tienen un comportamiento similar en su deterioro por lo menos en los primeros 10 días, después unas se deterioran más rápido que otras. Por otro lado, los panqués parecen discrepar demasiado en cómo se deterioran según el ingrediente activo que contengan: nuez, chocolate, pasas o marmoleado. Esto puede deberse al nivel de actividad de cada ingrediente y su relación con el panqué, de tal forma que cada combinación influya de manera diferente en la velocidad de degradación de cada producto.

En cuanto a las mantecadas, podemos indagar en una posible relación proporcional entre las dos curvas de supervivencia, donde la curva de mantecadas con avena (línea sólida) nos indica un mayor deterioro, o menor porcentaje de preferencia de los consumidores según el

tiempo de almacenamiento, comparándolas con las mantecadas con nuez.

### Probabilidad mínima de consistencia

La capacidad de respuesta que tienen los consumidores como conocedores de los productos, es decir, su consistencia, puede suponerse que sigue un comportamiento como el siguiente: al inicio del estudio (en la muestra con tiempo cero) el consumidor responde afirmativamente; en las muestras más cercanas a su tiempo de rechazo es donde tiene mayor incertidumbre sobre qué responder, y conforme las muestras tienen un tiempo de almacenamiento mucho mayor al de su tiempo de rechazo, le es más sencillo responder negativamente.

Denotaremos como  $p_c$  a la **probabilidad mínima de consistencia** del consumidor  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y supondremos que ésta se da en el tiempo de rechazo al producto  $t_i$  de cada consumidor. Consideremos la siguiente probabilidad

$$p_i(t) = P(\text{El consumidor } i \text{ decida correctamente en el tiempo } t | t_i). \quad (6.2.2)$$

Con esto, deseamos que  $p_i(t_i) = p_c$  y supondremos que  $p_i(t) = 1$  si  $t$  es el tiempo inicial del estudio o el tiempo final. Por lo tanto para modelar la inconsistencia, crearemos una combinación de funciones cuadráticas para cada consumidor con las restricciones anteriores. Entonces la probabilidad en 6.2.2 estará dada por:

$$p_i(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & , t \leq t_i \\ dt^2 + et + f & , t > t_i \end{cases}$$

Considerando un tiempo inicial de cero, y denotando  $t_f$  como el tiempo final del experimento a realizar, se tiene que los coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  están determinados para cada consumidor por:

$$a = \frac{1 - p_c}{t_i^2}, \quad b = -2ap_c, \quad c = 1, \\ d = \frac{p_c - 1}{2t_i t_f - t_i^2 - t_f^2}, \quad e = -2dt_i, \quad f = 1 - dt_f^2 - et_f.$$

Para ejemplificar esto, supongamos que los tiempos de un experimento son 1, 2, 3, 4 y 5 días de almacenamiento. Así, si el consumidor 1 tiene un tiempo de rechazo de  $t_1 = 3.2$  días, entonces su comportamiento de consistencia  $p(t)$  sería como el de la Figura 6.2.2.

Puesto que los consumidores son adquirentes regulares de los productos, supondremos que para cada experimento sensorial la probabilidad mínima de consistencia  $p_c$  es un valor fijo.



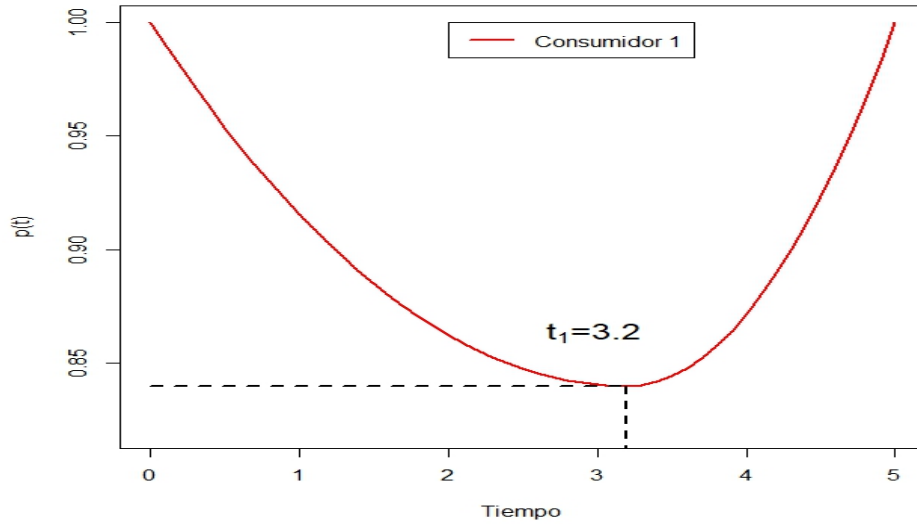


Figura 6.2.2: Comportamiento de consistencia para consumidor 1, con  $p_c = 0.84$  y tiempo de rechazo al producto  $t_1 = 3.2$ .

En el Capítulo 1 se estableció que se considerarán consumidores inconsistentes aquellos con respuestas alternantes de ceros y unos. Supondremos que el porcentaje de consumidores inconsistentes (% CI) de un experimento, es una función de los parámetros del modelo y de la probabilidad mínima de consistencia  $p_c$ , esto es,  $\%CI(\beta, \eta, p_c)$ . Este valor evidentemente es conocido para un experimento dado.

El estudio de la probabilidad mínima de consistencia  $p_c$  para cada experimento sensorial, será fundamental para poder simular el comportamiento de los consumidores. A continuación se presenta un algoritmo de simulación para dar una estimación  $\hat{p}_c$  para la probabilidad mínima de consistencia de un experimento sensorial en particular:

---

**Algoritmo: Estudio de la probabilidad mínima de consistencia.**

---

1. Para un experimento dado, calcular el porcentaje de consumidores inconsistentes de la muestra  $\%CI_0$ .
2. Estimar los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  del modelo Weibull con la muestra original. Esto puede hacerse maximizando la expresión 6.2.1.
3. Usar la distribución Weibull con los parámetros estimados para generar tiempos de rechazo para  $n$  consumidores:  $t_1, \dots, t_n$ , donde  $n$  es el tamaño de muestra del conjunto de datos original.
4. En base a los tiempos de rechazo simulados en el paso 3, generar una secuencia consistente para cada consumidor simulado  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En el ejemplo del consumidor 1, en el que su tiempo de rechazo es de  $t_1 = 3.2$  días, se genera entonces una secuencia de observación como la que sigue:

1 1 1 0 0.

5. Considerando una probabilidad mínima de consistencia  $p_c^1$ , especificar  $p_i(t)$   $i = 1, \dots, n$ .
6. Afectar las secuencias de aceptación-rechazo para cada consumidor, generando una variable aleatoria uniforme  $U(0, 1)$  para cada tiempo del experimento. Cambiar la secuencia si  $U > p_i(t)$ .
7. Repetir pasos 3-6  $B$  veces, teniendo así  $B$  muestras. Para cada muestra generada, calcular el porcentaje de consumidores inconsistentes  $\%CI_1^1, \dots, \%CI_B^1$  y hacer  $\%CI(1) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \%CI_i^1$ .
8. Repetir  $k$  veces los pasos 3 y 7 con distintas probabilidades mínimas de consistencia  $p_c^1, \dots, p_c^k$ , dando origen a  $k$  puntos  $(p_c^1, \%CI(1)), \dots, (p_c^k, \%CI(k))$ .
9. Seleccionar como  $\hat{p}_c$  aquel valor  $p_c^i$  tal que  $\%CI(i) \approx \%CI_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

---

A manera de ilustración del algoritmo, consideremos el experimento sensorial para evaluar la calidad y preferencias de los consumidores de mantecadas con avena. En él se detectaron 20 consumidores inconsistentes de un total de 50, lo que da un  $\%CI_0$  de 0.4. Las estimaciones

de los parámetros Weibull para este experimento son  $\hat{\beta} = 1.4775$  y  $\hat{\eta} = 8.877606$ , mismas que se muestran en las Tablas 6.2 y 6.3. El desarrollo de los pasos 3 al 9 se resume en la Figura 6.2.3.

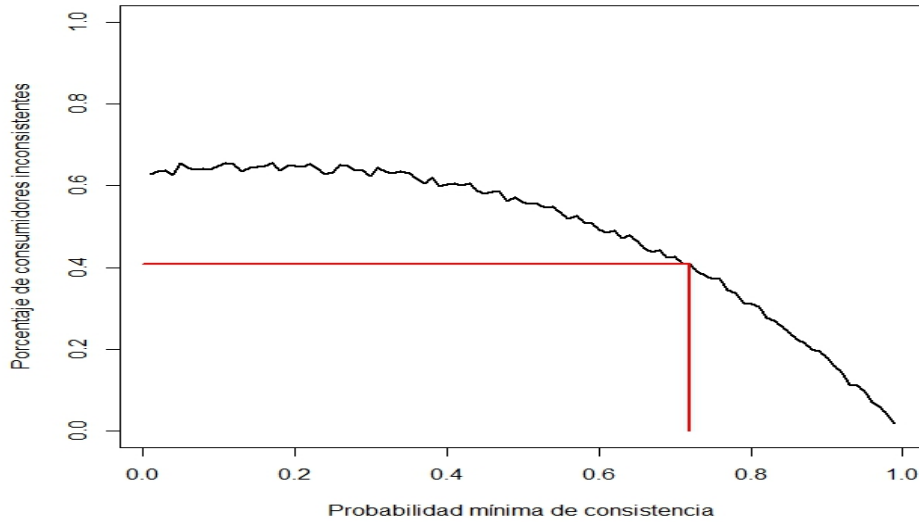


Figura 6.2.3: Estimación de la probabilidad mínima de consistencia  $p_c$  para el experimento de Mantecadas con Avena.

En la Figura 6.2.3 se indica con las líneas rectas: una probabilidad mínima de consistencia estimada de  $\hat{p}_c = 0.71$  que da origen a un porcentaje de consumidores inconsistentes en la muestra del 40 % aproximadamente. Es decir:

$$\%CI(\hat{p}_c, \hat{\beta}, \hat{\eta}) = \%CI(0.71, 1.4775, 8.877606) \approx 0.4.$$

El algoritmo para estimar esta probabilidad  $p_c$  se utilizó para cada producto de la Tabla 6.1. Los resultados se muestran en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4: Estimación de la probabilidad mínima de consistencia para los consumidores de cada producto.

<b>Producto</b>	<b>%CI</b>	<b><math>\hat{p}_c</math></b>
Mantecadas Avena	0.4	0.71
Mantecadas Nuez	0.44	0.18
Panqué Chocolate	0.36	0.71
Panqué Nuez	0.42	0.75
Mini mantecadas Capuchino	0.28	0.72
Mini mantecadas Berry	0.48	0.66
Panqué 138	0.32	0.73
Mini mantecadas vainilla	0.48	0.38
Mini mantecadas Berry 163	0.6	0.23
Panqué Chocolate 167	0.62	0.22
Panqué Pasas	0.46	0.59
Panqué Marmoleado	0.3	0.71

### 6.3. Distribuciones previas

La distribución *a priori* o distribución previa es un elemento fundamental en la inferencia bayesiana. Refleja el conocimiento de un cierto parámetro de interés  $\theta$ , previo a la observación de los datos. En general, se utilizan en la práctica dos tipos de distribuciones a priori: informativas y no informativas. Las primeras son aquellas distribuciones basadas en la experiencia de algún experto o de información histórica, como será en nuestro caso de estudio. En cambio, las distribuciones no informativas son aquellas que no asumen información relevante sobre los parámetros de interés.

Utilizando la información histórica de experimentos sensoriales proporcionados por la empresa panificadora, y con base en un algoritmo de simulación propuesto por Hough et. al. (2007), establecemos la siguiente metodología para la selección de distribuciones a priori para los parámetros de interés  $\eta$  y  $\beta$  de una distribución Weibull.

**Algoritmo: Selección de distribuciones previas**

1. *Estimación de los parámetros del modelo.* Para cada experimento sensorial: modelar los tiempos de rechazo al producto con una distribución Weibull y estimar los parámetros de forma y escala:  $\beta$  y  $\eta$ . Para esto es necesario determinar el tipo de censura de cada observación del experimento y maximizar la función de verosimilitud dada en 6.2.1.
2. *Simular valores observados.* Hacer los pasos 3 al 6 del algoritmo *estudio de la probabilidad mínima de consistencia*, tomando como probabilidad mínima de consistencia  $p_c$  en el paso 5, su correspondiente estimación  $\hat{p}_c$  de la Tabla 6.4 según sea el experimento.
3. *Establecer intervalos de censura y estimación de parámetros de la muestra simulada.* Determinar el tipo de censura para cada observación de la muestra simulada en el paso 3, y estimar los parámetros de la distribución Weibull, como se hizo en el paso 1 con la muestra del experimento original.
4. Repetir los pasos del 2 al 3  $k$  veces. Esto dará origen a dos vectores:  $\beta_k = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)^T$  y  $\eta_k = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_k)^T$ , producto de las estimaciones del paso 3.
5. Seleccionar una distribución paramétrica para  $\beta_k$  y para  $\eta_k$ , las cuales serán las distribuciones a priori de  $\beta$  y  $\eta$  del modelo Weibull.

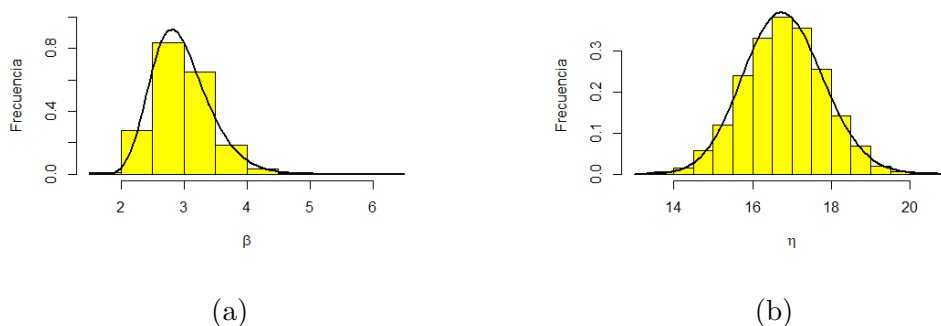


Figura 6.3.1: Distribuciones previas para el experimento sensorial de Panqués con pasas. a) Ajuste de distribución de valores extremos para  $\beta$ . b) Ajuste de distribución Gama para  $\eta$ .

Con base en los algoritmos propuestos en este capítulo, las distribuciones previas para los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  para cada experimento se muestran en las Tablas 6.5 y 6.6.

En las Figuras 6.3.1a y 6.3.1b se ejemplifican las simulaciones para selección de distribuciones previas para el experimento de panqués con pasas. Se eligió un tamaño de simulación de  $k = 5000$ , y la estimación de los parámetros de las distribuciones seleccionadas fue vía máxima verosimilitud.

El ajuste de las densidades a cada simulación fue contrastado con las pruebas no paramétricas Anderson-Darling y Kolmogorov-Smirnov; el p-valor para cada prueba se muestra también en las Tablas 6.5 y 6.6, si uno de estos valores es menor a 0.05, entonces se rechaza a ese nivel de significancia, la hipótesis de que los datos simulados provengan de una distribución en específica.

Tabla 6.5: Distribuciones previas para  $\beta$  por experimento.

Pan	Distribución Previa	P-valor A-D	P-valor K-S
Mantecadas Avena	*EVD(1.94658, 0.29494 , -0.15224)	0.2176	0.1681
Mantecadas Nuez	EVD(2.57371525, 0.55401957, -0.05008897)	0.9146	0.9364
Panqué Chocolate	EVD(1.6885466, 0.2675452, -0.1417546)	0.1219	0.1037
Panqué Nuez	EVD(1.6642110, 0.2967970, -0.1401171)	0.1016	0.2489
Minimantecadas Capuchino	EVD(1.29300335, 0.22053070, -0.09889624)	0.5382	0.7603
Minimantecadas Berry	EVD(1.5486589, 0.2938405, -0.1135197)	0.1315	0.1145
Panqué 138	EVD(1.7756072, 0.262802, -0.1481962)	0.3674	0.3049
Minimantecadas vainilla	EVD(2.6290536, 0.4383114, -0.1106789)	0.4802	0.7511
Minimantecadas Berry 163	EVD( 2.51690719, 0.52175908, -0.06911079)	0.5033	0.3237
Panqué Chocolate 167	EVD(2.4199876972, 0.6138211027, 0.0008675709)	0.9553	0.9906
Panqué Pasas	EVD(2.6179109, 0.3897259, -0.1125372)	0.4705	0.7138
Panqué Mármoleado	EVD(3.3131823, 0.4744896, -0.1278279)	0.4807	0.7823

\*EVD indica distribución de valores extremos (Extreme Value Distribution), con parámetros de localización, escala y forma. .

## 6.4. Tamaño de muestra

Sea  $T$  el tiempo al rechazo de un producto determinado. Consideremos  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ , donde  $t_i$  es el tiempo de rechazo del  $i$ -ésimo consumidor,  $i = 1, \dots, n$ . Estamos interesados en el tamaño de muestra  $n$  que minimice el riesgo bayesiano:

$$r(\pi, \delta) = E^\pi E_\theta^T [L(\theta, \delta(\mathbf{t}), n)] = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{H}} L(\theta, \delta(\mathbf{t}), n) f(\mathbf{t}|\theta) \pi(\theta) d\mathbf{t} d\theta \quad (6.4.1)$$

Tabla 6.6: Distribuciones previas para  $\eta$  por experimento.

PAN	Distribuciones Previas	P-valor A-D	P-valor K-S
Mantecadas Avena	Gama(shape=143.16568, rate= 13.72407)	0.1607	0.1552
Mantecadas Nuez	Gama(shape = 61.54,scale=0.1093,thres =6.476)	0.04066	0.1297
Panqué Chocolate	Gama(111.697200 , 9.426908)	0.8979	0.9444
Panqué Nuez	Lognormal3(shape=0.2147,scale=1.625,thres=4.756)	0.04792	0.1591
Mini mantecadas Capuchino	Gama(71.12444 , 5.46561)	0.8019	0.4889
Mini mantecadas Berry	Lognormal3(shape=0.2008,scale=1.869,thres=5.06)	0.06198	0.1871
Panqué 138	Gama(129.59145, 10.14857 )	0.1877	0.1539
Mini mantecadas vainilla	Gama(251.54027, 17.24445 )	0.9145	0.9146
Mini mantecadas Berry 163	Gama(227.38619, 15.24734)	0.2602	0.3634
Panqué Chocolate 167	Log-logística(shape=0.1138,scale=0.9638,thres=4.564)	0.6127	0.7643
Panqué Pasas	Gama(251.68568, 15.02089 )	0.1538	0.1769
Panqué Marmoleado	Gama(448.73678, 70.51459)	0.5196	0.2726

Gamma, con parámetros de forma y de razón (el recíproco del parámetro de escala) respectivamente.

Lognormal3, con parámetros de forma, escala y localización respectivamente.

Lognormal, con parámetros de forma y escala respectivamente.

Log-logística, con parámetros de forma, escala y localización.

donde  $\theta = (\beta, \eta)$  y  $f(\mathbf{t}|\theta)$  corresponde a la ecuación 6.2.1. Tomaremos como  $L$  a la función de pérdida cuadrática:

$$L(\beta, \eta, n) = (\beta - a)^2 + (\eta - b)^2 + wn \quad (6.4.2)$$

con  $w \in \mathbb{R}$ , el cual será el costo de obtener una muestra de tamaño  $n$ .

Sabemos, del resultado 3 del Capítulo 4, que los valores de  $a$  y  $b$  que minimizan el riesgo bayesiano son:

$$a^* = E_{\beta|\mathbf{t}}(\beta|\mathbf{t}), \quad b^* = E_{\eta|\mathbf{t}}(\eta|\mathbf{t}).$$

Suponiendo que  $\beta$  y  $\eta$  son independientes, entonces se tiene que:

$$\pi(\theta) = \pi_{\beta,\eta}(\beta, \eta) = \pi_{\beta}(\beta)\pi_{\eta}(\eta).$$

Minimizar 6.4.1 de forma analítica es una labor compleja, sin embargo, bajo el sustento de la ley de grandes números es posible aproximar  $r(\pi, \delta)$  mediante el siguiente algoritmo:

1. Elegir un conjunto de posibles valores de  $n$  y un tamaño de simulación  $I$ .
2. Para cada  $n$  tomar  $((\beta_i, \eta_i), \mathbf{t}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Esto se puede hacer generando  $\beta_i$  y  $\eta_i$  de las distribuciones a priori, y luego condicionalmente, generar  $\mathbf{t}_i$  de la verosimilitud.

3. Calcular  $\hat{r}(\pi, n) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I L(\beta_i, \eta_i, a^*, b^*) + C(n)$ .
4. Numéricamente minimizar  $\hat{r}$  con respecto a  $n$ .

### Panqué con pasas

Se ilustrará el procedimiento para encontrar el tamaño de muestra óptimo del experimento sensorial referente al producto panqué con pasas.

Como se explicó anteriormente, en este trabajo se utilizó el programa JAGS para hacer las simulaciones de la distribución posterior debido a su eficiencia computacional y su interrelación con el software estadístico R. Puesto que las distribuciones de valores extremos no se encuentran implementadas en este software, se decidió utilizar las siguientes distribuciones previas:

$$\begin{aligned}\pi_{\beta}(\beta) &\sim U(0, 5) \\ \pi_{\eta}(\eta) &\sim \text{Gama}(251.68568, 15.02089)\end{aligned}$$

1. Se tomó un conjunto posible de valores de  $n$ , en este caso los enteros del 1 a 100, y un tamaño de simulación  $I = 1000$ .
2. Para cada  $n$  se generaron muestras  $(\beta_i, \eta_i, \mathbf{t}_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ , donde  $\beta_i$  y  $\eta_i$  son generadas de las distribuciones previas, y condicionalmente generamos  $\mathbf{t}_i$  de la verosimilitud considerando la probabilidad mínima de consistencia estimada correspondiente; en este caso de  $\hat{p}_c = 0.59$ .
3. Simulamos de la distribución posterior

$$\pi_{\beta, \eta}(\beta, \eta) \propto \pi_{\beta}(\beta) \pi_{\eta}(\eta) f(\mathbf{t} | \beta, \eta),$$

a través del programa JAGS el cual usa métodos MCMC como Metróplis Hastings, Gibbs Sampler o el Slice Sampler para ésta tarea.

Esto genera una secuencia para cada parámetro:  $\boldsymbol{\beta} = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(B)})$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(B)})$ , donde  $B$  es el tamaño de la simulación MCMC.

Aproximamos la media posterior de  $\beta$  y  $\eta$  haciendo:

$$a^* = E_{\beta | \mathbf{t}}(\beta | \mathbf{t}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \beta^{(i)}, \quad b^* = E_{\eta | \mathbf{t}}(\eta | \mathbf{t}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \eta^{(i)},$$

y calculamos

$$\hat{r}(\pi, n) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I L(\beta_i, \eta_i, a^*, b^*) + C(n). \quad (6.4.3)$$



4. Elegimos el valor de  $n$  con la menor estimación del riesgo bayesiano  $\hat{r}$ .

Para el paso 3, es necesario hacer un análisis de convergencia de las distintas cadenas simuladas. Se simularon tres cadenas con 15000 iteraciones, tomando un *burn in* de 2000. Esto se resume en las Figuras 6.4.1a y 6.4.1b.

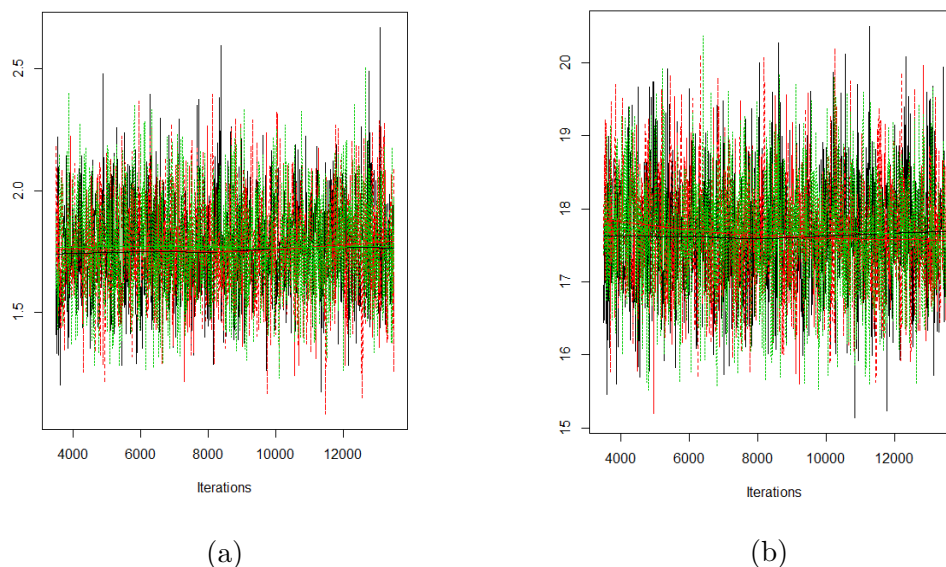


Figura 6.4.1: Convergencia de las iteraciones MCMC en JAGS. a) Gráfica de convergencia para  $\beta$ . b) Gráfica de convergencia para  $\eta$ .

Las simulaciones de la distribución posterior evidentemente están altamente correlacionadas, por lo que es necesario hacer un análisis de autocorrelación parcial para tomar valores cada cierto número de iteraciones. En este caso se tomaron valores cada 100 iteraciones. El resultado de las distribuciones posteriores puede verse en las Figuras 6.4.3a y 6.4.3b.

La estimación de la función de riesgo bayesiano se muestra en la Figura 6.4.4. La curva sólida es una interpolación del tipo “smoothing splines”, la cual en este caso refleja el comportamiento aproximado de la función de riesgo de bayes.

Para este experimento sensorial, el tamaño de muestra que se sugiere escoger, dado que minimiza la función de riesgo de bayes, es:

$$n^* = 32.$$

Debido a la elección de la función de pérdida cuadrática, podemos interpretar que el tamaño de muestra sugerido, es suficiente para tener estimaciones buenas de los parámetros involucrados en la distribución Weibull subyacente. Esto se traduce en buenas aproximaciones de

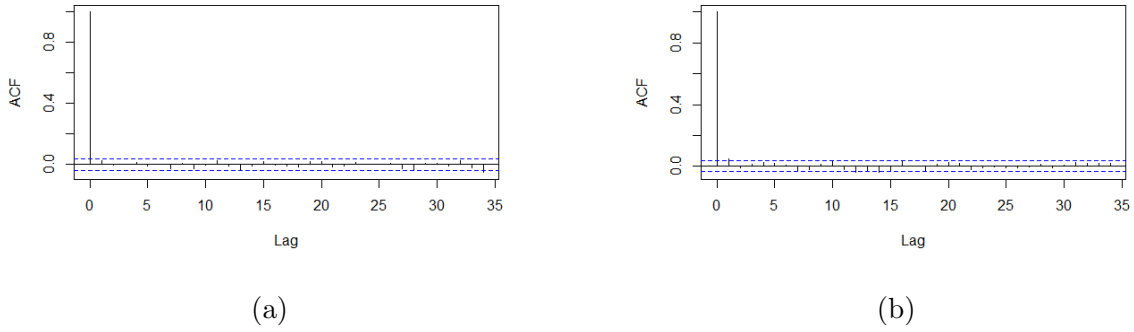


Figura 6.4.2: a) Autocorrelación parcial para la cadena de  $\beta$ . b) Autocorrelación parcial para la cadena de  $\eta$ .

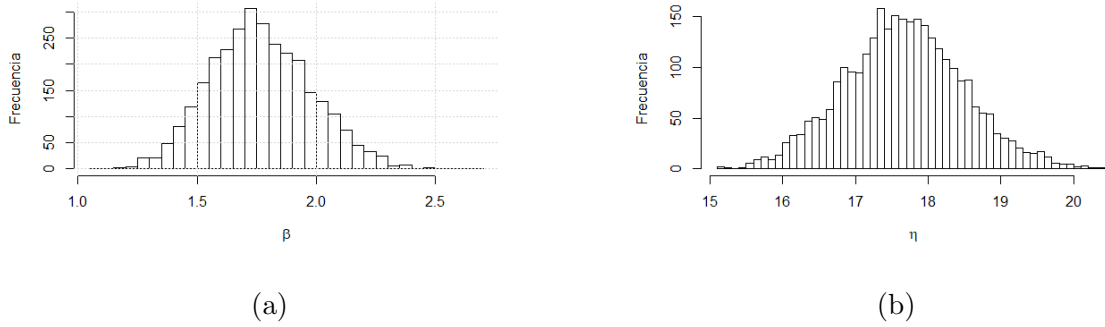


Figura 6.4.3: a) Aproximación de la distribución marginal posterior de  $\beta$ .  
b) Aproximación de la distribución marginal posterior de  $\eta$ .

los tiempos de rechazo de los productos, el cual es el fin máximo de la realización de los experimentos sensoriales.

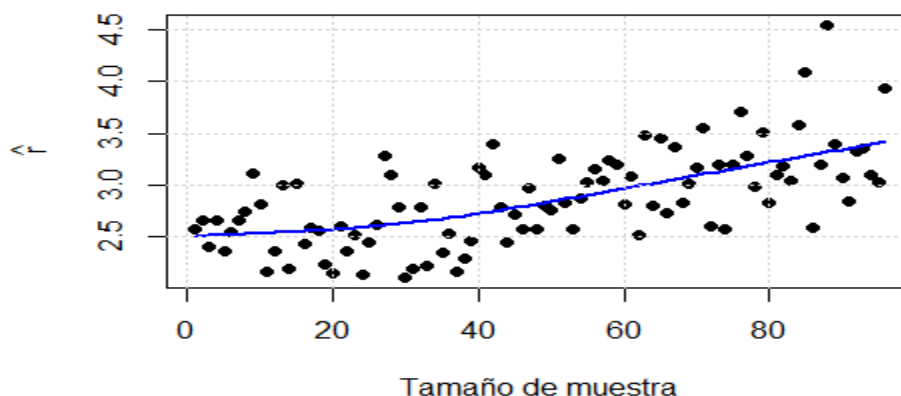


Figura 6.4.4: Estimación la función de riesgo bayesiano para el experimento sensorial de Panqués con Pasas.

## 6.5. Resultados y discusión

Los tamaños de muestras recomendados de acuerdo a la metodología aquí propuesta para los distintos productos se muestran en la Tabla 6.7. Podemos notar que en general los tamaños de muestra recomendados se encuentran por debajo de los 50 consumidores, con excepción para el experimento de Panqué de Chocolate Especial. Este último fue el experimento que mayor porcentaje de consumidores inconsistentes tuvo, por lo cual pareciera natural contratar más personas para tener mejores estimaciones de los tiempos de vida de anáquel para este producto en particular.

Por otro lado, el producto que se necesitaría menor cantidad de personas para la realización del experimento sensorial es el de Panqué Marmoleado, el cual fue uno de los experimentos históricos con menor porcentaje de consumidores inconsistentes. Esto se explica de la siguiente manera: las personas participantes, los cuales se presupone son consumidores regulares del productos, tienen mayor facilidad para distinguir cuándo les deja de agrandar el producto durante la realización del experimento sensorial.

No podemos dejar de comentar el hecho de que los resultados se ven altamente influenciados por el diseño del experimento, las características particulares de cada producto y la selección adecuada de los panelistas que probaron el producto. En cada experimento fueron otorgadas entre 7 y 8 piezas de pan, con días de almacenamiento distintos para sus respectivas muestras, elegidos según la experiencia y conocimiento de los evaluadores.

Tabla 6.7: Tamaño de muestra recomendado por producto.

Producto	Tamaño de muestra
Mantecadas con Avena	49
Mantecadas con Nuez	21
Panqué de Chocolate	24
Panqué con Nuez	25
Minimantecadas de Capuchino	42
Minimantecadas con Blue Berry	33
Panqué Natural	20
Minimantecadas con Vainilla	30
Minimantecadas con Blue Berry Especial	42
Panqué de Chocolate Especial	63
Panqué con Pasas	32
Panqué Marmoleado	21

Otro aspecto importante a considerar es la elección del peso  $w$ , el cual es el costo de tomar un individuo más en la muestra. Este valor impacta fuertemente en la decisión del tamaño de muestra a escoger. En este trabajo se eligió  $w$  de la siguiente manera:

- Al considerar la función de pérdida definida en la ecuación 6.4.2, la función de pérdida esperada posterior evaluada en los valores que la minimizan se convierte en:

$$Var(\beta|\mathbf{t}) + Var(\eta|\mathbf{t}) + wn. \tag{6.5.1}$$

Conforme el tamaño de muestra aumenta, la suma de las varianzas posteriores decrece, mientras que  $wn$  crece. Buscamos dar un valor de  $w$  que penalice la mejora de la precisión (disminución de las varianzas posteriores) que otorga el aumentar el tamaño de muestra. Notemos que existe un problema de comparación de los sumandos de la ecuación 6.5.1, debido a que sus escalas son diferentes.

En ausencia del costo fijo de contratar a un consumidor, el cual pudiera ser considerado como parte de la penalización  $w$ , se propuso tomar a este valor, como la pendiente (positiva) que pasa por los puntos mínimo y máximo relacionados a la estimación de las varianzas posteriores utilizando la ecuación 6.4.3.

La selección de  $w$  puede no ser trivial, y evidentemente, los resultados se ven altamente

afectados por este valor. Una alternativa al procedimiento que seguimos en este trabajo, consiste en estandarizar, a partir de un costo fijo de contrato a un consumidor, tanto la componente de la función de pérdida esperada posterior que depende de los parámetros, como la componente que depende de  $n$ , de tal forma que sean congruentes y comparables en la suma.

## Conclusiones y trabajo futuro

La incorporación de información subjetiva a través de distribuciones previas, es uno de los paradigmas más discutidos en la literatura acerca de los métodos bayesianos. En este trabajo, se establecieron distribuciones previas informativas que apoyaron la creencia de la distribución subyacente de los experimentos sensoriales, para la elección de un tamaño de muestra necesario para tener buenas estimaciones de los tiempos de vida de los productos alimenticios.

Por otro lado, el modelado y estudio de las inconsistencias en las respuestas de los consumidores, aporta un valor agregado a las simulaciones propuestas por Hough [4], y da pauta a otras líneas de estudio relacionadas con el diseño de los experimentos sensoriales.

Dentro de las posibles líneas de trabajo futuro se encuentran:

- Evaluar los cambios de las distribuciones previas informativas a unas no informativas en la selección del tamaño de muestra. Así como el planteamiento de funciones de pérdida en el contexto de experimentos sensoriales, donde se involucre la precisión deseada por los experimentadores.
- Establecer una metodología de simulación para la elección de los días de almacenamiento de los experimentos sensoriales. Es decir, replantear el problema al área de diseños de experimentos, no sólo para la selección del tamaño de muestra, como lo fue en este trabajo.

# Referencias

- [1] Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* (2a. ed.). Springer Verlag, Nueva York.
- [2] DeGroot, M. H. (1970). *Optimal statistical decisions*. McGraw Hill, Nueva York.
- [3] Hough, G., Calle M.L., Serrat C. y Curia A. (2007). Number of consumers necessary for shelf life estimations based on survival analysis statistics. *Food Quality and Preference*, 18:771-775.
- [4] Hough, G. (2010). *Sensory Shelf Life Estimation of Food Products*. CRC Press Taylor & Francis Group, Florida.
- [5] Lee, E.T. y Wang J.W. (2009). *Statistical Methods for Survival Data Analysis* (3a. ed.). J. Wiley, Nueva Jersey.
- [6] Meeker, W.Q. y Escobar, L.A. (1998) *Statistical Methods for Reliability Data*. J. Wiley, Nueva York.
- [7] Parmigiani G. y Inoue L. (2009). *Decision Theory: Principles and Approaches*. J. Wiley, Reino Unido.
- [8] Rinne, H. (2009), *The Weibull Distribution: A Handbook*. Chapman and Hall/CRC
- [9] Robert, C.P. (2007). *The Bayesian Choice From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation* (2a. ed.). Springer Verlag, Nueva York.
- [10] Robert, C.P. y Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods* (2a. ed.). Springer Verlag, Nueva York.
- [11] Wald, A. (1950). *Statistical Decision Functions*. J. Wiley, Nueva York.