CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

TRANSPORTE ÓPTIMO Y EL ENCAJE DE SKOROKHOD

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

Presenta

Oscar Tepoz López

Director de Tesis:

Dr. José Luis Ángel Pérez Garmendia

Guanajuato, Gto., 6 de febrero de 2018

CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

TRANSPORTE ÓPTIMO Y EL ENCAJE DE SKOROKHOD

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

Presenta

Oscar Tepoz López

Director de Tesis:

Dr. José Luis Ángel Pérez Garmendia

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 6 de febrero de 2018

Dedicado a mi abuelo
quien se fue sólo para estar cerca de mí

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por financiar mis estudios de maestría y al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por la oportunidad de realizar mis estudios dentro de sus instalaciones.
A mi familia por todo su apoyo y afecto que me brindaron durante toda esta etapa de mi vida. Al Dr. José Luis por su apoyo y paciencia para la realización de este trabajo.
A mis sinodales por su tiempo en leer y corregir el trabajo para su finalización.
A todos mis amigos y compañeros de la maestría que me apoyaron y trabajamos juntos y a todos mis profesores de la maestría que me brindaron su apoyo y dedicación en sus cursos.

Índice general

Agradecimientos **III**

1 Introducción **3**

1.1 Conceptos clave 4

1.2 Encajes particulares 7

1.2.1 Encaje de raíz 7

1.2.2 Encaje de rost 13

1.2.3 Encaje de cueva 17

2 Preliminares en tiempos de paro y filtraciones **21**

2.1 Espacios y filtraciones 21

2.2 Tiempos de paro aleatorizados 24

3 El problema de optimización y dualidad **33**

3.1 El problema primal 33

3.2 El problema dual 34

3.3 Distribución inicial general 48

Capítulo 1

Introducción

El propósito de esta tesis es presentar de una forma más detallada y precisa varios de los resultados que se presentan en [7]. El artículo trata sobre el problema de encaje de Skorokhod, el cual es un problema clásico que consiste en encontrar un tiempo de paro tal que un movimiento Browniano detenido con ese tiempo de paro tenga una cierta distribución. Esta es la primera versión que se planteó del problema, pero al pasar el tiempo se vio que era posible encontrar varias soluciones. Entonces, comenzó a pensarse en buscar una manera de determinar cual de las soluciones era la mejor dependiendo del caso de estudio planteándose así como un problema de optimización.

En [7] se plantea la versión de optimización del problema y se busca utilizar algunos resultados que existen en la teoría de control para la resolución de este problema. El método que se plantea es utilizar algunos resultados para resolver el problema de transporte, el cual es muy conocido en esa área. Nuestro objetivo será dar las herramientas necesarias para entender como se transforma el problema de encaje de Skorokhod en un problema de optimización. Más precisamente, formularemos el problema de encaje de Skorokhod en su forma dual que consiste en un problema de optimización sobre un conjunto de medidas. Ello nos permitirá usar resultados empleados en el problema de transporte para encontrar la solución a este problema de optimización.

En el primer capítulo daremos las definiciones fundamentales que se trabajarán durante toda la tesis, como lo son la definición del problema de encaje de Skorokhod tanto en su versión original como en la de optimalidad. Después de las definiciones plantearemos los teoremas principales que demostraremos en los capítulos posteriores de la tesis. Para mostrar los antecedentes que existen del estudio del problema y en los cuales es posible identificar la solución; daremos algunos ejemplos tomando algunas restricciones sobre la función de costos. Esto es principalmente para mostrar un poco sobre los antecedentes que existen sobre el estudio de este problema y que bajo ciertos casos es posible identificar la solución que hay.

En el segundo capítulo daremos algunas propiedades de vital importancia para demostrar los resultados principales de la tesis. En este capítulo, primero introduciremos lo que es una desintegración de medida, lo cual permitirá que sobre el conjunto de sub-medidas de probabilidad podamos escoger algunas que nos permitan extrapolar el problema de un espacio de probabilidad cualquiera al espacio canónico. Esto nos permitirá obtener la solución en el espacio canónico y posteriormente derivar la solución en el espacio de probabilidad original.

Finalmente, en el último capítulo se demostrarán los resultados principales. Primero daremos algunos resultados de la teoría de investigación de operaciones que nos permitirán formular el problema primal en su problema dual. Para ello utilizaremos algunos resultados empleados para el problema de transporte. Para finalizar el trabajo se presentará una versión aún más general del problema que estamos trabajando, cuya solución es muy similar a la que planteamos.

1.1. Conceptos clave

En 1961 Anatoliy Volodymyrovych Skorokhod en su libro *Issledovaniya po teorii sluchainykh protsessov* planteó y resolvió por primera vez el problema que actualmente se conoce como el problema de encaje de Skorokhod. A través de los años se han encontrado diferentes soluciones para este problema, cada una de las soluciones ha contribuido al estudio y a la posibilidad de encontrar nuevas soluciones.

El problema de encaje de Skorokhod es el siguiente:

Definición 1.1. Sea B un movimiento Browniano que empieza en cero y consideremos una medida de probabilidad μ sobre la recta real la cual es centrada y tiene segundo momento. El problema de encaje de Skorokhod consiste en construir un tiempo de paro τ tal que

$$B_\tau \text{ se distribuye con la medida de probabilidad } \mu, \qquad \mathbb{E}[\tau] < \infty. \tag{SEP}$$

En principio el problema puede considerarse complejo, pero como se ya se mencionó, existen varias soluciones a este problema. Con este hecho uno comienza a cuestionarse sobre la posibilidad de considerar cuál de las soluciones que se tiene es la "mejor". Mediante esta idea, lo que se ha hecho es plantear este problema como un problema de optimización. Antes de dar la formulación del problema de optimización, damos una definición que será usada durante todo el trabajo presentado.

Definición 1.2. Consideremos el conjunto de todos los caminos detenidos definidos de la siguiente manera

$$S = \{(f, s) : f[0, s] \to \mathbb{R} \text{ es continua}, f(0) = 0\}$$

para la tesis siempre consideraremos una función $\gamma : S \to \mathbb{R}$.

Observemos que si consideráramos al espacio de Wiener entonces tendríamos que f sería un elemento de él, entonces S sería como ver las trayectorias de un movimiento Browniano hasta un tiempo dado. Entonces podemos ver a γ como una función de costos, ya que nos permitirá ver cuál de las soluciones a (SEP) sería la que nos diera una mejor utilidad.

Dada la definición anterior procedemos a plantear una de las formas más generales de ver el problema de encaje de Skorkhod como un problema de optimización.

Definición 1.3. Consideremos una base estocástica $\Omega = (\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ la cual es suficientemente rica para que un movimiento Browniano B este bien definido y una variable aleatoria uniformemente distribuida $\mathcal{G}_0$-medible e independiente de B. El problema de encaje óptimo de Skorokhod es construir un tiempo de paro τ sobre Ω el cual minimice el problema

$$P_\gamma = \left\{ \mathbb{E}\left[\gamma\left((B_t)_{t\leq\tau}, \tau\right)\right] : \tau \text{ solucione (SEP)} \right\}. \tag{OptSEP}$$

En [7] se plantea el siguiente teorema:

Teorema 1.4. *Sea $\gamma : S \to \mathbb{R}$ tal que es una función lower semi-continous (lsc) y acotada por abajo. Entonces* (OptSEP) *admite un tiempo de paro que lo minimiza*

Como podemos observar son pocas las condiciones para la existencia de un mínimo a (OptSEP). Es usual en la Teoría de Control, que el problema (OptSEP) se pueda ver como un problema primal, así que con ello viene el planteamiento de un problema dual que corresponde al siguiente teorema. Denotaremos por $\mathcal{C}(A)$ al conjunto de las funciones continuas, definidas sobre el conjunto A.

Teorema 1.5. *Sea $\gamma : S \to \mathbb{R}$ una función lsc y acotada por abajo, y definimos*

$$D_\gamma = \sup \left\{ \int \psi(y) d\mu(y) : \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad \begin{array}{l} \exists \varphi, \varphi \text{ es una martingala continua}, \varphi_0 = 0, \mathbb{P}\text{-c.s.} \\ \forall t \geq 0, \varphi_t + \psi(B_t) \leq \gamma((B_s)_{s\leq t}, t) \end{array} \right\}$$

donde φ, ψ cumplen que $|\varphi_t| \leq a + bt + cB_t^2$, $|\psi(y)| \leq a + by^2$ para algunos $a, b, c > 0$. Entonces tenemos que

$$P_\gamma = D_\gamma.$$

El objetivo principal de la tesis es dar las herramientas necesarias para poder reformular el problema que plantea el primer teorema y así obtener su forma dual que está en el segundo teorema y así, demostrar el Teorema 1.5 usando algunos métodos conocidos para encontrar la solución al Problema de Transporte, el cual es uno de los problemas de optimización más conocidos. Muchos de los resultados conocidos para el Problema de Transporte se basan en la geometría del soporte de las soluciones aceptables, es decir, qué trayectorias son viables en el problema. Por lo cual, también es conveniente tener establecidas algunas ideas geométricas sobre las trayectorias del movimiento Browniano.

En esta parte de la tesis comenzaremos a dar unas definiciones fundamentales para el desarrollo del trabajo, enfocadas principalmente al aspecto geométrico de las trayectorias, al igual que de las soluciones admisibles y mostraremos algunas soluciones que se conocen a (OptSEP) bajo ciertas condiciones que se tengan sobre γ. Es fácil mostrar que si dos funciones f, h con soportes $[0, s]$ y $[0, u]$ respectivamente tienen el mismo valor final, $f(s) = h(u)$, no necesariamente la trayectoria fue la misma. Como lo que se desea es minimizar $\mathbb{E}[\gamma((B_t)_{t\leq\tau}, \tau)]$ entonces, lo que se busca es ver sobre cuales trayectorias sería conveniente detenernos y cuales son las que se deberían de continuar hasta su tiempo final. Con esta idea se dan las siguientes definiciones que se enfocan en una comparación entre trayectorias.

Definición 1.6. Sean $f, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, y $s, t \in \mathbb{R}_+$ escribiremos por $f \oplus h$ a la concatenación de los caminos $(f, s), (h, u) \in S$ definida de la siguiente manera

$$(f \oplus h)(r) := \begin{cases} f(r), & r \leq s \\ f(s) + h(r - s), & r \in (s, s + u] \end{cases},$$

así, definimos

$$\gamma^{(f,s)\oplus}(h, u) := \gamma(f \oplus h, s + u).$$

Definición 1.7. La pareja $((f, s), (g, t)) \in S \times S$ es una pareja *stop-go*, denotado por $((f, s), (g, t)) \in SG$ si y sólo si $f(s) = g(t)$ y

$$\mathbb{E}\left[\gamma^{(f,s)\oplus}\left((B_u)_{u\leq\sigma}, \sigma\right)\right] + \gamma(g, t) > \gamma(f, s) + \mathbb{E}\left[\gamma^{(g,t)\oplus}\left((B_u)_{u\leq\sigma}, \sigma\right)\right].$$

Definición 1.8. Sea $\Gamma \subseteq S$ definimos los caminos *going* de la siguiente forma

$$\Gamma^{<} := \{(f, s) : \exists(\tilde{f}, \tilde{s}) \in \Gamma, s < \tilde{s} \text{ y } f \equiv \tilde{f} \text{ en } [0, s]\}.$$

Definición 1.9. Un conjunto $\Gamma \subseteq S$ es llamado un conjunto γ-monótono si y sólo si $\Gamma^{<} \times \Gamma$ no contiene ninguna pareja *stop-go*, i.e.

$$SG \cap (\Gamma^{<} \times \Gamma) = \emptyset.$$

Teniendo en mente las definiciones anteriores, daremos un teorema que será utilizado frecuentemente para las soluciones particulares que se trabajarán más adelante. La demostración del teorema debido a su extensión y complejidad no se trabajó en la tesis, pero se puede hallar en [7].

Teorema 1.10. *(Principio de monotonía). Sea $\gamma : S \to \mathbb{R}$ Borel medible. Supongamos que* (OptSEP) *está bien definido y τ es un optimizador. Entonces existe un conjunto de Borel γ-monótono $\Gamma \subset S$ tal que para $\mathbb{P}$-c.s.*

$$((B_t)_{t\leq\tau},\tau)\in\Gamma.$$

El teorema anterior da una propiedad importante sobre el soporte del tiempo de paro óptimo τ al problema (OptSEP). Lo cual, como veremos con la ayuda de los ejemplos mostrados en la siguiente sección, es muy útil ya que permitirá ver el comportamiento de las trayectorias del movimiento Browniano detenidas sobre el tiempo de paro óptimo.

1.2. Encajes particulares

En esta sección de la tesis daremos algunos tipos de soluciones que se conocen para (OptSEP). Las tres soluciones que se muestran comparten la similitud de que la función γ es independiente de la trayectoria del movimiento Browniano. Además, como se verá en su momento, cada una de las soluciones se puede ver como un tiempo de arribo para algún conjunto. La primera solución es la que permitirá entender a las siguientes dos, ya que la segunda solución se puede ver como la inversa de la primera. Mientras que la prueba de la tercera se puede obtener usando las demostraciones de las dos primeras.

Para la primera solución se hará un análisis más a detalle. Primero demostraremos la existencia de la solución y posteriormente, usando varios resultados demostraremos la unicidad de dicha solución. Las mismas propiedades pueden ser demostradas para las otras soluciones, salvo algunos detalles, pero por fines de la tesis no son incluidas.

1.2.1. Encaje de raíz

Como ya se mencionó, la solución será el tiempo de arribo para algún conjunto. La siguiente definición es del tipo de conjuntos sobre cuales se definirán las soluciones a (OptSEP)

Definición 1.11. Un conjunto (cerrado) $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ es una barrera si $(s,x)\in\mathcal{R}$ implica que $(t,x)\in\mathcal{R}$ para cualquier $t>s$.

El siguiente teorema da la existencia del primer tipo de solución a (OptSEP) que daremos.

Teorema 1.12. *Sea $\gamma(f,t)=h(t)$, donde $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ es una función estrictamente convexa tal que* (OptSEP) *está bien definido. Entonces, existe un minimizador de* (OptSEP) *y además, para cualquier minimizador $\hat{\tau}$, existe una barrera $\mathcal{R}$ tal que $\hat{\tau}=\inf\{t\geq 0:(t,B_t)\in\mathcal{R}\}$. En particular, el problema de encaje de Skorokhod tiene una solución del tipo barrera.*

Demostración. Como h es una función convexa entonces, tenemos que posee un mínimo así, h es acotada por abajo. Luego, por la misma propiedad de ser convexa tenemos que es continua en $(0,\infty)$ por lo cual es lsc en $(0,\infty)$. Ahora, para probar que la función h es lsc en todo $\mathbb{R}_+$ sólo falta probar que cumple esta propiedad en el cero. En efecto, sea $x > 0$ entonces, para todo $\lambda \in [0, 1]$ por ser h estrictamente convexa se tiene que $h(\lambda x + (1 - \lambda)0) = h(\lambda x) < \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(0)$. Tomando $\lambda \to 0$ se tiene que $\limsup_{\lambda \to 0^+} h(\lambda x) \leq \limsup_{\lambda \to 0^+} (\lambda h(x) + (1 - \lambda)h(0))$. Como lo último lo tomamos para cualquier $x > 0$ entonces podemos sustituir el lado izquierdo de la desigualdad por $\limsup_{y \to 0^+} h(y)$. Factorizando λ en el lado derecho se tiene que $\limsup_{\lambda \to 0^+} \lambda(h(x) - h(0)) + h(0) = h(0)$

Por lo tanto, h es lsc. Luego, por lo demostrado anteriormente cumple las hipótesis del Teorema 1.4 así, podemos escoger un tiempo de paro $\hat{\tau}$ tal que cumple (OptSEP). Luego, como h es una función lsc, es una función Borel medible y por hipótesis el problema (OptSEP) está bien definido por lo cual podemos aplicar el Teorema 1.10 el cual nos dice que existe un conjunto $\Gamma \subseteq S$ tal que $((B_s)_{s \leq \hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma$ $\mathbb{P}$-c.s. y $(\Gamma^< \times \Gamma) \cap SG = \emptyset$.

Luego, sean $(f, s), (g, t) \in S$ tales que $f(s) = g(t)$. Entonces, procederemos a demostrar que $((f, s), (g, t)) \in SG$ si y sólo si $f(s) = g(t)$ y $t < s$.

Supongamos que $t < s$, y $f(s) = g(t)$. Entonces, para $\hat{\tau}$ un tiempo de paro tenemos que $t + \hat{\tau} < s + \hat{\tau}$ así,

$$t < t + \hat{\tau} < s + \hat{\tau} \qquad \text{y} \qquad t < s < s + \hat{\tau},$$

por ser h una función convexa se sigue que,

$$\frac{h(t + \hat{\tau}) - h(t)}{\hat{\tau}} < \frac{h(s + \hat{\tau}) - h(t)}{s + \hat{\tau} - t} < \frac{h(s + \hat{\tau}) - h(t + \hat{\tau})}{s - t}$$

y

$$\frac{h(s) - h(t)}{s - t} < \frac{h(s + \hat{\tau}) - h(t)}{s + \hat{\tau} - t} < \frac{h(s + \hat{\tau}) - h(s)}{\hat{\tau}}$$

juntando el último término del primer par de desigualdades con el primero del segundo par, obtenemos que $\frac{h(s) - h(t)}{s - t} < \frac{h(s + \hat{\tau}) - h(t + \hat{\tau})}{s - t}$. Luego, quitando términos comunes y acomodando los términos llegamos a que $h(s) + h(t + \hat{\tau}) < h(s + \hat{\tau}) + h(t)$. Finalmente, aplicando esperanzas a ambos términos tenemos que $h(s) + \mathbb{E}[h(t + \hat{\tau})] < \mathbb{E}[h(s + \hat{\tau})] + h(t)$. Por lo tanto, $((f, s), (g, t)) \in SG$.

Ahora, supongamos que $((f, s), (g, t)) \in SG$ entonces,

$$h(s) + \mathbb{E}[h(t + \hat{\tau})] < \mathbb{E}[h(s + \hat{\tau})] + h(t).$$

Es claro que si $s = t$ se tendría que $h(t) + \mathbb{E}[h(s + \hat{\tau})] = \mathbb{E}[h(t + \hat{\tau})] + h(s)$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Luego, si consideramos que $s < t$ usando la misma idea de lo demostrado anteriormente obtendríamos la siguiente expresión:

$$h(s) + \mathbb{E}\left[h(t+\hat{\tau})\right] > \mathbb{E}\left[h(s+\hat{\tau})\right] + h(t),$$

lo cual también contradiría nuestra hipótesis así, tenemos que $t < s$. Por lo cual hemos demostrado que $((f,s),(g,t)) \in SG$ si y sólo si $t < s$.

Ahora, para la siguiente parte de la demostración definamos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{R}_{cl} := \{(s,x) : \exists (g,t) \in \Gamma, g(t) = x, t \leq s\},$$

$$\mathcal{R}_{op} := \{(s,x) : \exists (g,t) \in \Gamma, g(t) = x, t < s\}.$$

Primero, notemos que $\mathcal{R}_{cl}$ y $\mathcal{R}_{op}$ son barreras. Si $(s,x) \in \mathcal{R}_{cl}$ entonces existe $(g,t) \in \Gamma$ tal que $g(t) = x, t \leq s$ de aquí, si tomamos $(r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tal que $s < r$ entonces tenemos que $(g,t) \in \Gamma, g(t) = x, t < s$. Así, $(r,x) \in \mathcal{R}_{cl}$, de manera similar tenemos lo mismo para $\mathcal{R}_{op}$. Por lo tanto, tenemos que ambas son barreras.

Luego, demostraremos que si $(g,t) \in \Gamma$ entonces,

$$\text{ínf}\{s \in [0,t] : (s,g(s)) \in \mathcal{R}_{cl}\} \leq t \leq \text{ínf}\{s \in [0,t] : (s,g(s)) \in \mathcal{R}_{op}\}.$$

Sea $(g,t) \in \Gamma$, es claro que por su definición $(t,g(t)) \in \mathcal{R}_{cl}$. Así,

$$t \in \{s \in [0,t] : (s,g(s)) \in \mathcal{R}_{cl}\},$$

por lo cual se tiene la primera desigualdad. Ahora, para la segunda parte lo haremos por contradicción, es decir, supongamos que $\text{ínf}\{s \in [0,t] : (s,g(s)) \in \mathcal{R}_{op}\} < t$. Entonces, existe $s < t$ tal que $(f,s) := (g_{\upharpoonright[0,s]}, s) \in \Gamma^<$ y $(s,f(s)) \in \mathcal{R}_{op}$, donde $g_{\upharpoonright[0,s]}$ representa la restricción de g sobre $[0,s]$. Luego, por definición de $\mathcal{R}_{op}$ se sigue que existe otro camino $(k,u) \in \Gamma$ tal que $k(u) = f(s)$, $u < s$. Pero por la primera parte de la demostración tenemos que si $k(u) = f(s)$ y $u < s$ entonces, $((f,s),(k,u)) \in SG$ por lo cual,

$$((f,s),(g,t)) \in SG \cap (\Gamma^< \times \Gamma),$$

lo cual es una contradicción ya que por el Teorema 1.10 Γ es γ-monótono. Por tanto, si $(g,t) \in \Gamma$ entonces $\text{ínf}\{s \in [0,t] : (s,g(s)) \in \mathcal{R}_{cl}\} \leq t \leq \text{ínf}\{s \in [0,t] : (s,g(s)) \in \mathcal{R}_{op}\}$.

Luego, consideremos $\omega \in \Omega$ tal que

$$(g,t) = \big((B_s(\omega))_{s \leq \hat{\tau}(\omega)}, \hat{\tau}(\omega)\big) \in \Gamma,$$

entonces de lo demostrado anteriormente,

$$\tau_{cl}(\omega) := \{s : (s, B_s(\omega)) \in \mathcal{R}_{cl}\} \leq \hat{\tau}(\omega) \leq \{s : (s, B_s(\omega)) \in \mathcal{R}_{op}\} =: \tau_{op}(\omega). \tag{1.1}$$

Para finalizar notemos que para casi todo $\omega \in \Omega$, $(\tau_{cl}(\omega), B_{\tau_{cl}}(\omega)) \in \mathcal{R}_{cl}$ ya que $\mathcal{R}_{cl}$ es un conjunto cerrado y por la continuidad del movimiento Browniano. Así, existe $(g, t) \in \Gamma$ tal que $g(t) = B_{\tau_{cl}}(\omega)$, $t \leq \tau_{cl}(\omega)$. Luego, por la propiedad de Markov fuerte $(B_{\tau_{cl}+s})_{s\geq 0}$ es un movimiento Browniano que empieza en $B_{\tau_{cl}}$. Entonces, el conjunto $\{t : B_{t+\tau_{cl}}(\omega) = B_{\tau_{cl}}(\omega)\}$ es perfecto casi seguramente. Sea $\omega \in \Omega$ tal que $\{t : B_t(\omega) = B_{\tau_{cl}}(\omega)\}$ es perfecto entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $r \in (\tau_{cl}(\omega), \tau_{cl}(\omega) + \epsilon)$ tal que $B_r(\omega) = g(t)$ y $t < r$ entonces $(r, B_r(\omega)) \in \mathcal{R}_{op}$, por lo cual

$$\tau_{op}(\omega) \leq r < \tau_{cl}(\omega) + \epsilon, \qquad \epsilon > 0,$$

haciendo tender ϵ hacia cero tenemos que $\tau_{op}(\omega) \leq \tau_{cl}(\omega)$ casi seguramente. Así, $\tau_{cl}(\omega) = \tau_{op}(\omega)$ c.s. y por (1.1) concluimos que $\hat{\tau} = \tau_{cl}$ casi seguramente. ■

Una de las principales consecuencias de la demostración de este teorema es el siguiente corolario, que garantiza la unicidad de la solución al problema.

Corolario 1.13. *Sea $\gamma(f, t) = h(t)$, donde $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente convexa tal que* (OptSEP) *está bien definido. Entonces, existe un minimizador de* (OptSEP)*, el cual es único.*

Demostración. Supongamos que existen T, S tiempos de paro tales que ambos son minimizadores de (OptSEP) entonces, por el teorema anterior existen $\mathcal{R}^1$ y $\mathcal{R}^2$ barreras tales que

$$T = \inf\{t \geq 0, (t, B_t) \in \mathcal{R}^1\} \qquad \text{y} \qquad S = \inf\{t \geq 0, (t, B_t) \in \mathcal{R}^2\}.$$

Sea X una variable aleatoria Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$ independiente de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Definimos al siguiente tiempo de paro $\tau = XT + (1 - X)S$, probaremos que también es solución al (OptSEP).

Primero, notemos que es solución a (SEP). En efecto, sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces $\mathbb{P}(B_\tau \in A) = \mathbb{P}(B_\tau \in A, X = 1) + \mathbb{P}(B_\tau \in A, X = 0)$. Luego, como $\tau = XT + (1 - X)S$ entonces tenemos que $\mathbb{P}(B_\tau \in A) = \mathbb{P}(B_T \in A, X = 1) + \mathbb{P}(B_S \in A, X = 0)$. Ahora, como X es independiente de T y S entonces la ecuación queda de la siguiente forma $\mathbb{P}(B_\tau \in A) = \mathbb{P}(B_T \in A)\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(B_S \in A)\mathbb{P}(X = 0)$. Finalmente, del hecho de que T y S encajan a μ y que X es una variable Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$ llegamos a que $\mathbb{P}(B_\tau \in A) = \frac{1}{2}\mu(A) + \frac{1}{2}\mu(A) = \mu(A)$.

Además, por la independencia de X con $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y debido a que $\mathbb{E}[T] < \infty$ y $\mathbb{E}[S] < \infty$ tenemos que

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[XT + (1 - X)S] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[T] + \mathbb{E}[1 - X]\mathbb{E}[S] < \infty,$$

así τ es solución a (SEP). Luego, para ver la optimalidad tenemos que como T y S son minimizadores entonces $\mathbb{E}[h(T)] = \mathbb{E}[h(S)]$ por lo cual $\mathbb{E}[h(\tau)] = \mathbb{E}[h(XT + (1 - X)S)]$, usando el hecho de que h es convexa tenemos que $\mathbb{E}[h(\tau)] \leq \mathbb{E}[Xh(T) + (1-X)h(S)]$. Después del hecho de que X es independiente de T y S obtenemos que $\mathbb{E}[h(T)] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[h(T)] + \mathbb{E}[(1-X)]\mathbb{E}[h(S)]$. De lo comentado al principio del párrafo podemos implicar que $\mathbb{E}[h(T)] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[h(T)] + \mathbb{E}[(1-X)]\mathbb{E}[h(T) = \mathbb{E}[h(T)]$.

Por lo tanto, τ es solución a (OptSEP). Ahora, por el teorema anterior tenemos que existe $\mathcal{R}$ tal que $\tau = \inf\{t \geq 0 : (t, B_t) \in \mathcal{R}\}$. Entonces,

$$A := XT + (1-X)S = \inf\{t \geq 0 : (t, B_t) \in \mathcal{R}\}$$

lo cual implica que $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$. En efecto, notemos que $\mathbb{P}(A = T) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A = S)$. Así, $\mathbb{P}((A, B_A) = (S, B_S)) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}((A, B_A) = (T, B_T))$. Entonces el punto (A, B_A) con probabilidad un medio es igual al punto $(T, B_T) \in \mathcal{R}^1$ de aquí se tiene que, $(A, B_A) \in \mathcal{R}^1$, análogamente se tiene lo mismo para $\mathcal{R}^2$. Esto nos indica que el tiempo de paro A en algunas ocasiones tocaría a la barrera $\mathcal{R}^1$ mientras que en otras tocaría a la barrera $\mathcal{R}^2$ independientemente de la trayectoria que se escoja, entonces esto quiere decir que $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$. Por lo tanto, $T = S$. ■

En algunos trabajos se ha quitado la restricción de que $\int x^2 \mu(dx) < \infty$ en (SEP) debilitándola al considerar que sólo posea primer momento finito, pero sujeto a la restricción de que el tiempo de paro τ sea *mínimo*.

Definición 1.14. Sea τ un tiempo de paro tal que es solución a (SEP). Entonces decimos que es mínimo si para cualquier otro tiempo de paro τ' tal que

$$B_{\tau'} \sim \mu \qquad \text{y} \qquad \tau' \leq \tau$$

se tiene que $\tau' = \tau$ c.s.

El siguiente teorema será de utilidad posteriormente, ya que dice que no es necesario revisar la segunda condición de (SEP) explícitamente, si no que se puede ver otras propiedades del tiempo de paro.

Teorema 1.15. *Sea μ una medida tal que $\int x^2 \mu(dx) < \infty$ entonces, para un tiempo de paro τ tal que cumpla la primera condición de* (SEP) *se tiene que*

$$\mathbb{E}[\tau] < \infty \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \tau \textit{ es mínimo}$$

Demostración. Supongamos que τ es un tiempo de paro tal que cumple (SEP) entonces, como $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ de la identidad de Wald tenemos que $\mathbb{E}[B_\tau] = 0$ y $\mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau]$. Ahora, sea S otro tiempo de paro tal que cumple (SEP) y $S \leq \tau$, como $B_\tau \overset{d}{=} B_S$ se sigue que

$$0 \leq \mathbb{E}[\tau - S] = \mathbb{E}[\tau] - \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[B_\tau^2] - \mathbb{E}[B_S^2] = 0.$$

Así, $\tau - S = 0$ c.s., por lo cual $S = \tau$ c.s. Por lo tanto, τ es mínimo.

Luego, supongamos que τ es mínimo. Entonces, para todo $n \geq 1$ escogemos sucesiones $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$, $a_n \leq 0$, $n \geq 1$, tales que $\max\{|a_n|, b_n\} = n$ y $\mathbb{E}[B_{T_n}] = 0$ donde

$$T_n = \inf\{t : t \geq \tau, B_t \in [a_n, b_n]\}.$$

Ahora, notar que para todo $n \geq 1$, si $B_\tau \in [a_n, b_n]$, entonces $B_\tau = B_{T_n}$ y por otro lado, si $B_\tau \notin [a_n, b_n]$, entonces $B_\tau < a_n$ o $B_\tau > b_n$ así que $B_\tau^2 > B_{T_n}^2$. Por lo cual, $\mathbb{E}[B_{T_n}^2] \leq \mathbb{E}[B_\tau^2]$.

Luego, de la demostración del Lema 4 en [5] se tiene que existe una sucesión de barreras B_n tales que para sus tiempos de arribo, τ_{B_n} se tiene que

$$\tau_{B_n} \wedge T_n \to T$$

y

$$\mathbb{E}[\tau_{B_n} \wedge T_n] = \mathbb{E}[B_{\tau_{B_n} \wedge T_n}^2] = \mathbb{E}[B_{T_n}^2] \leq \mathbb{E}[B_\tau^2].$$

Finalmente, del Lema de Fatou se tiene que $\mathbb{E}[\tau] \leq \mathbb{E}[B_\tau^2] < \infty$. ■

Usando este teorema se puede demostrar que no sólo la solución a (OptSEP) es única, si no que también la barrera es única.

Proposición 1.16. *Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ barreras tales que sus tiempos de arribo son soluciones a* (SEP) *en su forma débil. Entonces se tiene que $\mathcal{S} = \mathcal{R}$.*

Demostración. Sean $\tau_\mathcal{R}$ y $\tau_\mathcal{S}$ los tiempos de arribo a las barreras $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ respectivamente. Ahora, consideremos al conjunto $R \cup S$, es claro que $R \cup S$ es también una barrera. Luego, definamos a los conjuntos

$$\Omega_\mathcal{R} := \{x : (t,x) \in \mathcal{S} \Rightarrow (t,x) \in \mathcal{R}\} \qquad \text{y} \qquad \Omega_\mathcal{S} := \{x : (t,x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (t,x) \in \mathcal{S}\}.$$

Primero demostraremos que $\mu(\Omega_\mathcal{R} \cup \Omega_\mathcal{S}) = 1$. Notemos que $\mu(\Omega_\mathcal{R} \cup \Omega_\mathcal{S}) = \mu(\Omega_\mathcal{R}) + \mu(\Omega_\mathcal{S}) - \mu(\Omega_\mathcal{R} \cap \Omega_\mathcal{S})$. Luego, del hecho de que $\tau_\mathcal{R}$ y $\tau_\mathcal{S}$ encajan a μ tenemos que $\mu(\Omega_\mathcal{R}) = \mathbb{P}(B_{\tau_\mathcal{R}} \in \Omega_\mathcal{R})$ y $\mu(\Omega_\mathcal{S}) = \mathbb{P}(B_{\tau_\mathcal{S}} \in \Omega_\mathcal{S})$. Como $\mathcal{R}$ es un conjunto cerrado se tiene que $(\tau_\mathcal{R}, B_{\tau_\mathcal{R}}) \in \mathcal{R}$ casi seguramente entonces, $B_{\tau_\mathcal{R}} \in \Omega_\mathcal{R}$ casi seguramente así, $\mathbb{P}(B_{\tau_\mathcal{R}} \in \Omega_\mathcal{R}) = 1$. De manera similar tenemos que $\mathbb{P}(B_{\tau_\mathcal{S}} \in \Omega_\mathcal{S}) = 1$ y como $\mu(\Omega_\mathcal{R} \cap \Omega_\mathcal{S}) \leq 1$ llegamos a que $\mu(\Omega_\mathcal{R} \cup \Omega_\mathcal{S}) \geq 1$. Por lo tanto, $\mu(\Omega_\mathcal{R} \cup \Omega_\mathcal{S}) = 1$.

Ahora, probaremos que $\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}$ encaja a μ. Notemos que para $A \subseteq \Omega_\mathcal{R}$ se cumple que

$$\mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A) \leq \mathbb{P}(B_{\tau_\mathcal{R}} \in A) = \mu(A)$$

análogamente, para $A' \subseteq \Omega_{\mathcal{S}}$

$$\mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A') \leq \mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{S}}} \in A') = \mu(A').$$

Sea $A \in \mathcal{F}$ entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A) &= \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A \cap [(\Omega_{\mathcal{R}} \cap \Omega_{\mathcal{S}}^C) \cup \Omega_{\mathcal{S}}]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A \cap \Omega_{\mathcal{R}} \cap \Omega_{\mathcal{S}}^C\right) + \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A \cap \Omega_{\mathcal{S}}\right). \end{aligned}$$

Luego, de lo comentado anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A \cap \Omega_{\mathcal{R}} \cap \Omega_{\mathcal{S}}^C\right) + \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A \cap \Omega_{\mathcal{S}}\right) &\leq \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{R}}} \in A \cap \Omega_{\mathcal{R}} \cap \Omega_{\mathcal{S}}^C\right) + \mathbb{P}\left(B_{\tau_{\mathcal{S}}} \in A \cap \Omega_{\mathcal{S}}\right) \\ &= \mu\left(A \cap \Omega_{\mathcal{R}} \cap \Omega_{\mathcal{S}}^C\right) + \mu\left(A \cap \Omega_{\mathcal{S}}\right) \\ &= \mu(A), \end{aligned}$$

lo penúltimo se debe al hecho de que $\tau_{\mathcal{R}}, \tau_{\mathcal{S}}$ son soluciones a (SEP). Así,

$$\mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A) \leq \mu(A).$$

Por otro lado,

$$\mu(A) = \mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{S}}} \in A) \leq \mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A).$$

Por lo tanto, $\mu(A) = \mathbb{P}(B_{\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}} \in A)$, es decir, $\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}$ encaja a μ.

Para concluir tenemos que por el teorema anterior, $\tau_{\mathcal{R}}$ al ser solución de (SEP) se tiene que es mínimo. Entonces, como $\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}$ encaja a μ y $\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} \leq \tau_{\mathcal{R}}$ entonces $\tau_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{R}}$ c.s. Por lo tanto, $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

■

Como se puede ver, sólo es posible encontrar una única solución de tipo barrera a (SEP) y por el Corolario 1.13 sabemos que cuando $\gamma(f, t) = h(t)$, donde h es una función estrictamente convexa se tiene que el problema (OptSEP) posee una única solución y es de tipo barrera.

1.2.2. Encaje de rost

Existe una versión análoga del Teorema 1.12 en el caso en el que h es una función estrictamente cóncava, para esto primero daremos la siguiente definición.

Definición 1.17. Un conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ es una barrera inversa si $(s, x) \in \mathcal{R}$ y $s > t$ implica que $(t, x) \in \mathcal{R}$.

Teorema 1.18. *Supongamos que $\mu(\{0\}) = 0$. Sea $\gamma(f, t) = h(t)$, donde $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función estrictamente cóncava tal que* (OptSEP) *está bien definido. Entonces, existe un minimizador τ de* (OptSEP). *Además, para cualquier minimizador τ, existe una barrera inversa $\mathcal{R}$ tal que $\tau = \inf\{t \geq 0 : (t, B_t) \in \mathcal{R}\}$. En particular, el problema de encaje de Skorokhod tiene una solución la cual es el tiempo de arribo a una barrera inversa.*

Demostración. Primero veamos que existe solución a (OptSEP). En efecto, tenemos que como $\gamma(f, t) = h(t)$ y $Img(h) \subseteq \mathbb{R}_+$ entonces h está acotada por abajo. Luego, como h es cóncava, se tiene que h es continua en $(0, \infty)$. A diferencia de la demostración del Teorema 1.12, h no necesariamente tiene que ser lsc en 0, pero como $\mu(\{0\}) = 0$ entonces tenemos que se siguen cumpliendo las hipótesis del Teorema 1.4. Así, (OptSEP) tiene solución, $\hat{\tau}$. Además, por el Teorema 1.10, existe $\Gamma \subseteq S$ tal que $((B_s)_{s\leq\hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma$ c.s. y Γ es γ-monótono. Ahora, procederemos a demostrar que $((f, s), (g, t)) \in SG$ si y sólo si $f(s) = g(t)$ y $t > s$.

Supongamos que $t > s$, entonces como $\hat{\tau}$ es un tiempo de paro tenemos que $s + \hat{\tau} < t + \hat{\tau}$ así,

$$s < s + \hat{\tau} < t + \hat{\tau} \qquad \text{y} \qquad s < t < t + \hat{\tau}$$

por ser h una función cóncava se tiene que

$$\frac{h(s + \hat{\tau}) - h(s)}{\hat{\tau}} > \frac{h(t + \hat{\tau}) - h(s)}{t + \hat{\tau} - s} > \frac{h(t + \hat{\tau}) - h(s + \hat{\tau})}{t - s}$$

y

$$\frac{h(t) - h(s)}{t - s} > \frac{h(t + \hat{\tau}) - h(s)}{t + \hat{\tau} - s} > \frac{h(t + \hat{\tau}) - h(t)}{\hat{\tau}}$$

juntando el último término del primer par de desigualdades con el primero del segundo par, tenemos lo siguiente $\frac{h(t)-h(s)}{t-s} > \frac{h(t+\hat{\tau})-h(s+\hat{\tau})}{t-s}$. Luego, de manera similar que en el caso de la solución tipo barrera, primero ordenaremos los términos de tal manera para tener la siguiente expresión: $h(t) + h(s + \hat{\tau}) > h(t + \hat{\tau}) + h(s)$. Después, aplicando esperanzas a ambos términos de la desigualdad llegamos a que $h(t) + \mathbb{E}[h(s + \hat{\tau})] > \mathbb{E}[h(t + \hat{\tau})] + h(s)$, por lo cual se tiene que $((f, s), (g, t)) \in SG$.

Ahora, supongamos que $((f, s), (g, t)) \in SG$ entonces,

$$h(s) + \mathbb{E}[h(t + \hat{\tau})] < \mathbb{E}[h(s + \hat{\tau})] + h(t).$$

Es claro que si $s = t$ se tendría que $h(t) + \mathbb{E}[h(s + \hat{\tau})] = \mathbb{E}[h(t + \hat{\tau})] + h(s)$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Luego, si consideramos que $s > t$ usando la misma idea de lo demostrado anteriormente obtendríamos la siguiente expresión:

$$h(s) + \mathbb{E}\left[h(t+\hat{\tau})\right] > \mathbb{E}\left[h(s+\hat{\tau})\right] + h(t)$$

lo cual también contradiría nuestra hipótesis así, tenemos que $t < s$. Por lo cual hemos demostrado que $((f,s),(g,t)) \in SG$ si y sólo si $t > s$.

Luego, a partir de este momento en la prueba consideraremos a Γ sin los caminos que terminan en cero, es decir

$$\Gamma \backslash \{(f,s) \in \Gamma : f(s) = 0\} =: \Gamma^0$$

notemos que esto no afecta la propiedad de que sea γ-monótono ya que simplemente los estamos reduciendo, entonces al reducirlo se tiene que aún se cumple que $(\Gamma^< \times \Gamma) \cap SG = \emptyset$. De igual manera, se sigue cumpliendo que $\mathbb{P}\left(((B_t)_{t\leq\hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma\right) = 1$ ya que

$$\mathbb{P}\left(((B_t)_{t\leq\hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma\right) = 1 - \mathbb{P}\left(((B_t)_{t\leq\hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma^0\right) \geq 1 - \mathbb{P}(B_\tau = 0) = 1 - \mu(\{0\}) = 1.$$

Ahora, para la siguiente parte de la demostración definimos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{R}_{cl} := \{(s,x) : \exists (g,t) \in \Gamma, g(t) = x, s \leq t\}$$
$$\mathcal{R}_{op} := \{(s,x) : \exists (g,t) \in \Gamma, g(t) = x, s < t\}.$$

De manera análoga al caso de la solución tipo raíz, definimos a τ_{cl}, τ_{op} como los tiempos de arribo del movimiento Browniano a los conjuntos $\mathcal{R}_{cl}, \mathcal{R}_{op}$ respectivamente, también probaremos primero que $\tau_{cl} \leq \hat{\tau} \leq \tau_{op}$.

Observemos que si $(g,t) \in \Gamma$, entonces $(t, g(t)) \in \mathcal{R}_{cl}$, por lo tanto $t \geq \text{ínf}\{s \in [0,t] : (s, g(s)) \in \mathcal{R}_{cl}\}$. Supongamos que $\text{ínf}\{s \in [0,t] : (s, g(s)) \in \mathcal{R}_{op}\} < t$ entonces existe $s < t$ tal que $(f,s) := (g_{\upharpoonright[0,s]}, s) \in \Gamma^<$ y $(s, f(s)) \in \mathcal{R}_{op}$. De la definición de $\mathcal{R}_{op}$, se sigue que existe $(k,u) \in \Gamma$ tal que $k(u) = g(s)$ y $s < u$, por tanto

$$((f,s),(k,u)) \in (\Gamma^< \times \Gamma) \cap SG,$$

lo cual es una contradicción ya que Γ es γ-monótono. Entonces, $t \leq \text{ínf}\{s \in [0,t] : (s, g(s)) \in \mathcal{R}_{op}\}$. De esto, podemos decir que si $(g,t) \in \Gamma$, entonces,

$$\text{ínf}\{s \in [0,t] : (s, g(s)) \in \mathcal{R}_{cl}\} \leq t \leq \text{ínf}\{s \in [0,t] : (s, g(s)) \in \mathcal{R}_{op}\}.$$

Luego, como $((B_t)_{t\leq\hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma$ casi seguramente, podemos concluir que para casi todo $\omega \in \Omega$

$$\tau_{cl}(\omega) \leq \hat{\tau}(\omega) \leq \tau_{op}(\omega).$$

La siguiente parte de la demostración es diferente al caso de la solución de tipo barrera. Definimos a $b(t) := \text{ínf}\{x > 0 : (t,x) \in \mathcal{R}_{cl}\}$ y $c(t) := \sup\{x < 0 : (t,x) \in \mathcal{R}_{cl}\}$. Ahora, por la continuidad casi segura de B tenemos que para casi todo $\omega \in \Omega$, $(\tau_{cl}(\omega), B_{\tau_{cl}(\omega)}(\omega)) \in \mathcal{R}_{cl}$ así,

$$B_{\tau_{cl}(\omega)}(\omega) \geq b(\tau_{cl}(\omega)) \qquad \text{o} \qquad B_{\tau_{cl}(\omega)}(\omega) \leq c(\tau_{cl}(\omega)),$$

se sigue que,

$$\tau_{cl}(\omega) \in \{t > 0 : B_t(\omega) \notin (c(t), b(t))\}$$

así, $\tau_{cl}(\omega) \geq \text{ínf}\{t > 0 : B_t(\omega) \notin (c(t), b(t))\}$. De manera similar tenemos que

$$\text{ínf}\{t > 0 : B_t(\omega) \notin [c(t), b(t)]\} \geq \tau_{op}(\omega),$$

lo cual nos lleva a

$$\text{ínf}\{t > 0 : B_t \notin (c(t), b(t))\} \leq \tau_{cl} \leq \tau_{op} \leq \text{ínf}\{t > 0 : B_t \notin [c(t), b(t)]\}.$$

Luego, para todo $\epsilon > 0$ definimos a las siguientes variables:

$$\sigma_b := \text{ínf}\{t > 0 : B_t \geq b(t)\}, \quad \sigma_b^+ := \text{ínf}\{t > 0 : B_t > b(t)\} \quad \text{y} \quad \sigma_b^\epsilon := \text{ínf}\{t > 0 : B_t - \epsilon t \geq b(t)\},$$

por la continuidad del movimiento Browniano y debido a que $\epsilon t > 0$ tenemos las siguientes desigualdades

$$\sigma_b \leq \sigma_b^+ \leq \sigma_b^\epsilon.$$

Y por el Teorema de Girsanov tenemos que $\text{lím}_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(\sigma_b^\epsilon \leq t) = \mathbb{P}(\sigma_b \leq t)$ y esto es para todo $t \geq 0$ entonces, $\sigma_b = \sigma_b^+$ casi seguramente. De manera similar si consideramos

$$\sigma_c := \text{ínf}\{t > 0 : B_t \leq c(t)\}, \quad \sigma_c^+ := \text{ínf}\{t > 0 : B_t < c(t)\} \quad \text{y} \quad \sigma_c^\epsilon := \text{ínf}\{t > 0 : B_t + \epsilon t \geq c(t)\}$$

obtenemos que $\sigma_c = \sigma_c^+$ casi seguramente. Así,

$$\text{ínf}\{t > 0 : B_t \notin (c(t), b(t))\} = \text{ínf}\{t > 0 : B_t \notin [c(t), b(t)]\}.$$

Por lo tanto, $\tau_{cl} = \tau_{op}$ casi seguramente. ■

1.2.3. Encaje de cueva

Para terminar esta sección, daremos un teorema que se podría entender como la unificación de los dos tipos de soluciones que se han planteado hasta el momento.

Definición 1.19. Un conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ es una barrera de cueva si existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$, una barrera $\mathcal{R}_1 \subseteq [t_0, \infty) \times \mathbb{R}$ y una barrera inversa $\mathcal{R}_2 \subseteq [0, t_0] \times \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Teorema 1.20. *Sea $t_0 \in \mathbb{R}_+$ y sea $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ tal que*

- $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, $\varphi(t_0) = 1$
- *φ es estrictamente cóncava en $[0, t_0]$*
- *φ es estrictamente convexa en $[t_0, \infty)$.*

Suponga que $\mu(\{0\}) = 0$, sea $\gamma(f, t) = \varphi(t)$. Entonces, existe un minimizador de (OptSEP) *y además, para cualquier minimizador $\hat{\tau}$, existe una barrera de cueva $\mathcal{R}$ tal que $\hat{\tau} = \inf\{t \geq 0 : (t, B_t) \in \mathcal{R}\}$. En particular, el problema de encaje de Skorokhod tiene una solución del tipo barrera de cueva.*

Demostración. De las suposiciones que tenemos de φ tenemos que es acotada, por lo cual (OptSEP) está bien definido. Entonces, del Teorema 1.4 tenemos que existe un minimizador $\hat{\tau}$. Además, del Teorema 1.10 tenemos que existe un conjunto $\Gamma \subseteq S$ tal que $\mathbb{P}\left(((B_t)_{t\leq\hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma\right) = 1$ y Γ es γ-monótono.

Ahora, procederemos a demostrar que

$$((f, s), (g, t)) \in SG \text{ si y sólo si } f(s) = g(t) \text{ y } (s < t \leq t_0 \text{ o } t_0 \leq t < s)$$

Una observación importante que se tiene sobre las hipótesis del teorema es que φ es una función estrictamente creciente en $[0, t_0]$, mientras que φ es estrictamente decreciente en $[t_0, \infty)$. Entonces, si consideramos que posee derivada la función se tiene que φ' es estrictamente positiva en $[0, t_0)$ y es estrictamente negativa en (t_0, ∞).

Sean $s < t \leq t_0$, entonces para cualquier $r > 0$ se tiene que $\varphi(s+r) - \varphi(s) > \varphi(t+r) - \varphi(t)$ es cierto si y sólo si $t \mapsto \varphi(t+r) - \varphi(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, t_0]$, lo cual es cierto ya que si $t, t+r \in [0, t_0]$ tenemos que se cumple debido a que φ es estrictamente cóncava en este intervalo y si $t + r > t_0$ entonces se deriva de que φ' es estrictamente positiva en $[0, t_0]$ y es estrictamente negativa en $[t_0, \infty-)$ entonces $t \mapsto \varphi(t+r)-\varphi(t)$ es estrictamente decreciente. Por lo tanto, $\varphi(s+r)-\varphi(s) > \varphi(t + r) - \varphi(t)$. Análogamente se tiene el mismo resultado si se considera $t_0 \leq t < s$. Por lo tanto, tenemos descrito al conjunto SG de la siguiente forma:

$$SG = \{((f, s), (g, t)) \in S \times S : f(s) = g(t) \text{ y } (s < t \leq t_0 \text{ o } t_0 \leq t < s)\}.$$

Luego, definimos a las barreras de cueva abierta y cerrada de la siguiente forma

$$\mathcal{R}_{op}^0 := \{(t,x) : \exists (f,s) \in \Gamma, f(s) = x, t < s \leq t_0\},$$
$$\mathcal{R}_{op}^1 := \{(t,x) : \exists (f,s) \in \Gamma, f(s) = x, t_0 \leq s < t\},$$
$$\mathcal{R}_{cl}^0 := \{(t,x) : \exists (f,s) \in \Gamma, f(s) = x, t \leq s \leq t_0\},$$
$$\mathcal{R}_{cl}^1 := \{(t,x) : \exists (f,s) \in \Gamma, f(s) = x, t_0 \leq s \leq t\},$$

$\mathcal{R}_{op} := \mathcal{R}_{op}^0 \cup \mathcal{R}_{op}^1$ y $\mathcal{R}_{cl} := \mathcal{R}_{cl}^0 \cup \mathcal{R}_{cl}^1$. Ahora denotaremos los tiempos de arribo a las barreras como $\tau_{\mathcal{R}_{op}} = \tau_{\mathcal{R}_{op}^0} \wedge \tau_{\mathcal{R}_{op}^1}$ y $\tau_{\mathcal{R}_{cl}} = \tau_{\mathcal{R}_{cl}^0} \wedge \tau_{\mathcal{R}_{cl}^1}$.

Dados estas definiciones procederemos a demostrar que si $(g,t) \in \Gamma$ entonces se tiene que $\tau_{\mathcal{R}_{cl}} \leq t \leq \tau_{\mathcal{R}_{op}}$ casi seguramente.

Notemos que si $(g,t) \in \Gamma$ entonces, $(t, g(t)) \in \mathcal{R}_{op}^0 \cap \mathcal{R}_{op}^1 \subseteq \mathcal{R}_{op}^0 \cup \mathcal{R}_{op}^1$. Así, $t \geq \inf\{s : (s, g(s)) \in \mathcal{R}_{op}^0 \cup \mathcal{R}_{op}^1\} = \tau_{\mathcal{R}_{cl}}$ casi seguramente.

Luego, supongamos que $t > \tau_{\mathcal{R}_{op}}$. Sin pérdida de generalidad consideremos que $\tau_{\mathcal{R}_{op}} = \tau_{\mathcal{R}_{op}^0}$ entonces, existe $s < t \leq t_0$ tal que $(f,s) := (g_{\upharpoonright[0,s]}, s) \in \Gamma^<$ y $(s, f(s)) \in \mathcal{R}_{op}^0$. De la definición de $\mathcal{R}_{op}^0$ se sigue que existe $(k,u) \in \Gamma$ tal que $k(u) = g(s)$ y $s < u \leq t_0$, por tanto

$$((f,s),(k,u)) \in (\Gamma^< \times \Gamma) \cap SG,$$

lo cual es una contradicción, ya que suponemos que Γ es γ-monótono casi seguramente. De manera similar se prueba en caso de que $\tau_{\mathcal{R}_{op}} = \tau_{\mathcal{R}_{op}^1}$.

Por lo tanto, casi seguramente $\tau_{\mathcal{R}_{cl}} \leq t \leq \tau_{\mathcal{R}_{op}}$.

Luego, como $((B_t)_{t \leq \hat{\tau}}, \hat{\tau}) \in \Gamma$ casi seguramente, podemos concluir que para casi todo $\omega \in \Omega$

$$\tau_{\mathcal{R}_{cl}}(\omega) \leq \hat{\tau}(\omega) \leq \tau_{\mathcal{R}_{op}}(\omega).$$

Para probar la igualdad en los tiempos de arribo, primero notemos que la unión de los conjuntos

$$\{\omega \in \Omega : \tau_{\mathcal{R}_{op}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{op}^0}(\omega)\} \qquad \text{y} \qquad \{\omega \in \Omega : \tau_{\mathcal{R}_{op}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{op}^1}(\omega)\}$$

tiene masa uno. Entonces, la siguiente parte se hará por casos:

1. Sea $\omega \in \Omega$ tal que $\tau_{\mathcal{R}_{op}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{op}^0}(\omega)$, entonces como $\mathcal{R}_{op}^0 \subseteq \mathcal{R}_{cl}^0$ se tiene que $\tau_{\mathcal{R}_{cl}^0}(\omega) \leq \tau_{\mathcal{R}_{op}^0}(\omega) \leq t_0$. Además, casi seguramente $\tau_{\mathcal{R}_{cl}^1}(\omega) \geq t_0$. Así, $\tau_{\mathcal{R}_{cl}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{cl}^0}(\omega)$. Luego, la igualdad se deriva de manera similar a la solución tipo Rost.

2. Sea $\omega \in \Omega$ tal que $\tau_{op}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{op}^1}(\omega)$, para este caso observemos que igual se puede dividir en dos nuevos casos. Primero si $\tau_{\mathcal{R}_{cl}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{cl}^0}(\omega)$ entonces la igualdad se cumple ya que

$\tau_{\mathcal{R}_{cl}^0}(\omega) \leq t_0 \leq \tau_{\mathcal{R}_{op}^1}(\omega)$ entonces $\tau_{\mathcal{R}_{cl}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{op}}(\omega)$. Luego, si $\tau_{\mathcal{R}_{cl}}(\omega) = \tau_{\mathcal{R}_{cl}^1}(\omega)$ nos encontramos en el caso de solución de tipo raíz.

Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{R}_{cl}} = \tau_{\mathcal{R}_{op}}$ c.s. ■

Capítulo 2

Preliminares en tiempos de paro y filtraciones

En esta sección se darán algunas propiedades que son de vital importancia para la demostración de los teoremas relacionados a la existencia de la solución al problema de encaje, al igual que las propiedades que estas soluciones poseen. La idea de esta parte es demostrar qué relación existe entre un espacio de probabilidad arbitrario, con el espacio canónico, lo cual permitirá que al resolver (OptSEP) en el espacio canónico podamos adaptar la solución al espacio de probabilidad original.

Para esto daremos un teorema que se encuentra en [8] el cual da las condiciones que necesitamos para introducir el concepto de *desintegración de medida*. La desintegración de medidas muestra como la esperanza normal y condicional pueden ser calculadas mediante integración usando distribuciones condicionales adecuadas.

Teorema 2.1. *Sean $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{S})$ dos espacios medibles fijos y una variable aleatoria ξ en X tal que $\mathbb{P}(\xi \in \cdot|\mathcal{F})$ tiene una versión regular ν, es decir, una versión de la función $\mathbb{P}(\xi \in \cdot|\mathcal{F})$ en $Y \times X$ la cual es un kernel de probabilidad de $(Y, \mathcal{S})$ a $(X, \mathcal{F})$. Además, considerar una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible η en Y y una función f medible en $X \times Y$ con $\mathbb{E}[|f(\xi, \eta)|] < \infty$. Entonces,*

$$\mathbb{E}[f(\xi, \eta)|\mathcal{F}] = \int f(s, \eta)\nu(ds), \qquad \textit{c.s.}$$

2.1. Espacios y filtraciones

Antes de comenzar a plantear las ideas principales de esta sección, daremos unas definiciones que utilizaremos en todo el transcurso del capítulo.

Definición 2.2.

1. La σ-álgebra generada en $\Omega \times \mathbb{R}_+$ por todos los procesos adaptados y càdlàg es llamada la σ-álgebra opcional. Un proceso el cual es medible con respecto a esta σ-álgebra es llamado opcional.

2. La σ-álgebra generada en $\Omega \times \mathbb{R}_+$ por todos los procesos adaptados y continuos por la izquierda

es llamada predecible. Un proceso el cual es medible con respecto a esta σ-álgebra es llamado predecible.

3. Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible si para todo $t \geq 0$, el mapeo $[0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}$-medible.

4. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ es progresivamente medible si y sólo si el proceso estocástico

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{(t,\omega)\in A\}}, \qquad t \geq 0, \omega \in \Omega$$

es progresivamente medible.

5. La familia de conjuntos progresivamente medibles forman una σ-álgebra, la cual se llama la σ-álgebra progresiva.

Primero, denotemos por $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ al espacio de todas las funciones continuas que empiezan en cero y que están definidas sobre $\mathbb{R}_+$.

Al espacio le daremos la topología inducida por la convergencia uniforme sobre compactos. A los elementos de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ los denotaremos por ω. Al proceso canónico en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ lo denotaremos a partir de ahora por $(B_t)_{t\geq 0}$, es decir, $B_t(\omega) = \omega_t$. Además, denotaremos por $\mathbb{W}$ a la medida de Wiener en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$. Luego, al conjunto S le podemos dar un orden parcial de la siguiente manera: diremos que (g,t) extiende a (f,s) si $s \leq t$ y además la restricción de g sobre $[0,s]$ es igual a f, i.e. $g_{\upharpoonright[0,s]} \equiv f$. También, consideraremos a S con la topología inducida por la métrica

$$d_s((g,t),(f,s)) := \max\left\{t-s, \sup_{0\leq u\leq s}|f(u)-g(u)|, \sup_{s\leq u\leq t}|f(s)-g(u)|\right\}, \qquad s \leq t.$$

Notemos que S equipada con esta topología es un espacio polaco.

Para esta sección daremos algunas relaciones entre distintos tipos de σ-álgebras que se pueden presentar dentro de un espacio de probabilidad.

1. Sea $\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ la σ-álgebra canónica o natural en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$.

2. Sea $\mathcal{F}^a = (\mathcal{F}_t^a)_{t\geq 0}$ la σ-álgebra aumentada de $\mathcal{F}^0$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$.

El siguiente teorema nos permite garantizar que bajo ciertas condiciones podemos tener las mismas propiedades distribucionales sobre $\mathcal{F}$ que si consideráramos $\mathcal{F}^a$. Entonces, esto ayudará mucho ya que como se sabe, existen muchas propiedades que pueden ser fácilmente demostradas sobre una filtración completa en comparación a si trabajamos sobre filtraciones arbitrarias.

Teorema 2.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $\mathcal{G}^a$ la aumentación usual de $\mathcal{G}$.*

1. *Si τ es un tiempo predecible con respecto a $\mathcal{G}^a$, entonces existe un tiempo predecible τ' con respecto a $\mathcal{G}$ tal que $\tau = \tau'$ c.s. Además, para cualquier proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{G}^a$-predecible, existe un proceso $(X'_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{G}$-predecible, el cual es indistinguible de $(X_t)_{t\geq 0}$.*

2. *Si $(A_t)_{t\geq 0}$ es un proceso creciente, continuo por la derecha y $\mathcal{G}^a$-predecible entonces, existe un proceso creciente $(A'_t)_{t\geq 0}$, el cual es continuo por la derecha y $\mathcal{G}$-predecible (el cual posiblemente tome el valor $+\infty$) tal que es indistinguible de $(A_t)_{t\geq 0}$.*

En la siguiente parte de esta sección consideraremos el mapeo

$$r : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to S, \quad r(\omega, t) = (\omega_{\upharpoonright[0,t]}, t).$$

Observación. Dado que el movimiento Browniano es un proceso de Feller continuo, tenemos que todas las $\mathcal{F}^a$-martingalas continuas por la derecha son continuas y de aquí, todos los $\mathcal{F}^a$-tiempos de paro son predecibles y las σ-álgebras $\mathcal{F}^a$-opcional y $\mathcal{F}^a$-predecible coinciden. Además, debido a que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ es el conjunto de los caminos continuos tenemos que las σ-álgebras $\mathcal{F}^0$-opcional, $\mathcal{F}^0$-predecible y $\mathcal{F}^0$-progresiva coinciden.

De esto último tenemos que si un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es $\mathcal{F}^0$-opcional es equivalente a que sea un proceso $\mathcal{F}^0$-predecible. Entonces, como nuestro interés en esta sección es estudiar procesos $\mathcal{F}^0$-predecibles, podemos utilizar algunos resultados para procesos $\mathcal{F}^0$-opcionales. El siguiente teorema permite ver una descomposición de estos procesos con respecto a la función r, lo cual será importante para entender lo que es un tiempo de paro aleatorizado.

Teorema 2.4. *Conjuntos y funciones en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}^0$-opcionales corresponden a conjuntos Borel medibles y funciones en S. Es decir,*

1. *Un conjunto $D \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$ es $\mathcal{F}^0$-opcional si y sólo si $D = r^{-1}(A)$, $A \subseteq S$.*

2. *Un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso $\mathcal{F}^0$-opcional si y sólo si $X = H \circ r$ para alguna función Borel medible $H : S \to \mathbb{R}$.*

Con base en el teorema anterior, uno puede estar interesado en estudiar las propiedades que tiene la función H. Teniendo esto en mente damos las siguientes definiciones, para proporcionar una idea sobre algunas propiedades que puede poseer la función H.

Definición 2.5. Si X es un proceso $\mathcal{F}^0$-opcional, escribimos por X^S para la única función definida sobre S y con codominio $\mathbb{R}$ que cumple que $X = X^S \circ r$. Decimos que un proceso opcional X es S-continuo (respectivamente S-lsc) si su correspondiente función X^S es continua (respectivamente lsc).

Recordemos la concatenación de dos trayectorias que dimos en el primer capítulo. Sean $f, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, y $s, t \in \mathbb{R}_+$ entonces, la concatenación de los caminos $(f, s), (h, u) \in S$ denotada por $f \oplus h$, se define como

$$(f \oplus h)(r) := \begin{cases} f(r), & r \leq s \\ f(s) + h(r - s), & r \in (s, s + u] \end{cases}.$$

Definición 2.6. Para un mapeo medible $X : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ el cual es acotado o positivo, definimos

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t^0](\omega) := X_t^M(\omega) := \int X((\omega_{\restriction[0,t]}) \oplus \omega')d\mathbb{W}(\omega').$$

También, escribiremos por $X^{M,S}$ a la función que cumple que $X^M = X^{M,S} \circ r$.

Proposición 2.7. *Sea $X \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+))$. Entonces X_t^M es una martingala S-continua, $X_\infty^M = \lim_{t\to\infty} X_t^M$ existe y es igual a X.*

2.2. Tiempos de paro aleatorizados

En esta parte del trabajo daremos algunas definiciones y propiedades relacionadas con los *tiempos de paro aleatorizados*. La idea de los tiempos de paro es que en un tiempo de paro usual, dada alguna trayectoria ω tendríamos un valor $\tau(\omega)$ el cual nos indicaría en que momento el proceso sería detenido. Sin embargo, puede ser que τ dependa de más factores externos a la trayectoria. Aunque, nos interesaría tener una medida τ_ω la cual nos indicaría que bajo la trayectoria ω en que momento se detendría el proceso. Entonces, la idea de esta parte es presentar una forma más concreta de esta idea, para así aprovecharla y dar la definición de un tiempo de paro aleatorizado.

La siguiente definición se refiere a ciertos tipos de medidas que serán la base para definir posteriormente lo que es un tiempo de paro aleatorizado

Definición 2.8. Una medida $\xi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$ es una $\boldsymbol{P}$-medida (con respecto a $\mathbb{W}$) si no carga ningún conjunto $\mathbb{W}$-evanescente, donde un conjunto $A \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ es evanescente si existe un conjunto $B \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ tal que $A \subseteq B$ y $\mathbb{W}(B) = 0$.

Aunque la idea de las $\boldsymbol{P}$-medidas puede ser clara con la definición anterior, es importante dar algunas caracterizaciones de ella, ya que permitirán dar un mejor panorama de como están relacionadas para la construcción de los tiempos de paro aleatorizados.

Teorema 2.9. *Una medida finita $\xi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$ es una $\boldsymbol{P}$-medida si y sólo si existe un proceso creciente, continuo por la derecha, A, tal que $\mathbb{E}[A_\infty] < \infty$ tal que para todo proceso acotado y medible*

$$\xi(X) = \mathbb{E}\left[\int X_s dA_s\right]$$

donde el proceso A es único salvo por indistinguibilidad.

Con esta caracterización de las $\boldsymbol{P}$-medidas, nos enfocaremos en un sub-conjunto de ellas. Denotamos por $\mathcal{P}^{\leq 1}(A)$ al conjunto de todas las sub-medidas de probabilidad definidas en A. Entonces, consideraremos el conjunto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} :&= \{\xi \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+) : \xi(d\omega, dt) = \xi_\omega(dt)\mathbb{W}(d\omega), \xi_\omega \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\mathbb{R}_+) \text{ para } \mathbb{W}\text{-casi todo } \omega\} \\ &= \{\xi \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+) : \text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\xi) \leq \mathbb{W}\} \end{aligned}$$

donde $(\xi_\omega)_{\omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$ es una desintegración de ξ en la primera coordenada $\omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$.

Observación. Si consideramos a $\xi \in \boldsymbol{M}$ y al proceso $A_t(\omega, \xi) = \xi_\omega([0, t])$, el cual es la función de distribución asociada de ξ_ω, podemos notar que en efecto ξ es una $\boldsymbol{P}$-medida.

Una vez que ya hemos dado algunas características de las $\boldsymbol{P}$-medidas. Procederemos a dar la definición de tiempos de paro aleatorizados. Para ello notemos que en el Teorema 2.9, al proceso asociado con respecto a la medida ξ no se le pide que tenga alguna propiedad en particular. Así, si el proceso A, asociado a ξ, posee propiedades particulares, como las descritas en el Teorema 2.4, es posible que ξ tenga otras propiedades adicionales. Por lo cual, podemos intuir que existan $\boldsymbol{P}$-medidas con propiedades particulares que no todas las $\boldsymbol{P}$-medidas tienen.

Definición 2.10. (Tiempo de paro aleatorizado). Una medida $\xi \in \boldsymbol{M}$ se dice que es un tiempo de paro aleatorizado, escrito por $\xi \in RST$ si y sólo si el proceso creciente asociado A es opcional.

En algunos resultados y definiciones necesitaremos hacer una extensión de ξ sobre la recta real para trabajar la trayectoria y el tiempo del proceso al mismo tiempo. Así, introduciremos la siguiente notación:

Notación 2.11. Consideraremos a $(\bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+), \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \bar{\mathbb{W}})$ donde

1. $\bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times [0, 1]$.

2. $\bar{\mathbb{W}}(A_1 \times A_2) = \mathbb{W}(A_1)\mathcal{L}(A_2)$, donde $\mathcal{L}$ denota la medida de Lebesgue.

3. $\bar{\mathcal{F}}$ es la acompletación de $\mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{B}([0, 1])$.

4. $\bar{\mathcal{F}}_t$ es la aumentación usual de $\bar{\mathcal{F}}_t \otimes \mathcal{B}([0, 1])$, para todo $t \geq 0$.

Escribiremos por $\bar{B} = (\bar{B}_t)_{t\geq 0}$ al proceso dado por $\bar{B}_t(\omega, u) = \omega_t$, para todo $t \geq 0$ y $u \in [0, 1]$.

De esto podemos notar que si consideramos al proceso $Y_t(\omega, u) = u$ para todo $t \geq 0$ entonces, $((\bar{B}_t, Y_t))_{t\geq 0}$ es un proceso continuo de Feller. En efecto, es claro que por definición $\bar{B}$ es un proceso continuo. Luego, notemos que Y es un proceso continuo con respecto a ω por ser constante. Además, como estamos considerando la medida de Lebesgue en la segunda coordenada, tenemos que Y es un proceso continuo con respecto a u. Así, $((\bar{B}_t, Y_t))_{t\geq 0}$ es continuo.

Para ver que es un proceso de Feller, sean $0 \leq s < t$ y f una función Borel medible entonces, $\mathbb{E}[f(\bar{B}_t, Y_t)|\bar{\mathcal{F}}_s] = \mathbb{E}[f(\bar{B}_t, Y_s)|\bar{\mathcal{F}}_s]$ debido a que por definición del proceso Y se tiene que $Y_t = Y_s$ casi seguramente. Así, podemos definir $f_s(x) := f(x, Y_s)$, la cual es una función $\bar{\mathcal{F}}_s$ medible. Entonces,

$$\mathbb{E}[f(\bar{B}_t, Y_s)|\bar{\mathcal{F}}_s] = \mathbb{E}[f_s(\bar{B}_t)|\bar{\mathcal{F}}_s] = P_{s,t}f_s(\bar{B}_s) = P_{s,t}f(\bar{B}_s, Y_s)$$

donde P representa la función de transición de un movimiento Browniano, esto se debe a que $(\bar{B}_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano, así que la esperanza condicional del proceso se puede representar como una función de transición de Feller, por lo cual se tiene que el proceso es de Feller. Luego, por los mismos argumentos dados al principio de esta sección tenemos que las σ-álgebras $\bar{\mathcal{F}}$-predecible y $\bar{\mathcal{F}}$-opcional coinciden.

En secciones anteriores dimos unas caracterizaciones de las $\boldsymbol{P}$-medidas. Pero estamos conscientes de que los tiempos de paro aleatorizados son sólo un subconjunto de ellas. Es necesario encontrar caracterizaciones que sólo ellos posean. Bajo esta idea tenemos el siguiente teorema, que a partir de considerar a $\xi \in M$ podemos determinar si es o no un tiempo de paro aleatorizado. Por otro lado, si sabemos que tenemos un tiempo de paro entonces, quisiéramos determinar una relación funcional con un tiempo de paro usual. Debido a que son más conocidos los tiempos de paro, existen más resultados sobre ellos por lo cual es conveniente trabajar con ellos. Además, como veremos en la siguiente sección, esto ayudará para encontrar las soluciones a (OptSEP) a partir de considerar al proceso canónico.

Teorema 2.12. *Sea $\xi \in M$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una función Borel medible $A : S \to [0, 1]$ tal que el proceso $A \circ r$ es creciente, continuo por la derecha y*

$$\xi_\omega([0, s]) := A \circ r(\omega, s) \tag{2.1}$$

   define una desintegración de ξ con respecto a $\mathbb{W}$.

2. *Tenemos que $\xi \in RST$, es decir, dada una desintegración $(\xi_\omega)_{\omega\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$ de ξ, la variable aleatoria $\widetilde{A}_t(\omega) = \xi_\omega([0, t])$ es $\mathcal{F}^a_t$-medible para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

3. *Para todo $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+)$ con soporte en algún intervalo $[0, t]$, $t \geq 0$ y todo $g \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+))$*

$$\int f(s)(g - \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_t^0])(\omega)\xi(d\omega, ds) = 0.$$

4. *En el espacio de probabilidad* $(\bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+), \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \bar{\mathbb{W}})$*, el tiempo aleatorio*

$$\rho(\omega, u) := \text{ínf}\{t \geq 0 : \xi_\omega([0,t]) \geq u\} \tag{2.2}$$

define un $\bar{\mathcal{F}}$ *tiempo de paro.*

Una observación importante de este teorema es que el proceso A en (2.1) es único salvo indistinguibilidad, así que lo denotaremos por A^ξ para marcar que está asociado a la medida ξ. También, podemos notar que el teorema permite dar una forma específica de una desintegración del tiempo de paro aleatorizado en función de r. La siguiente definición, es un auxiliar para aclarar algunas redundancias que puede tener la caracterización de los tiempos de paro aleatorizados.

Definición 2.13. 1. Diremos que $\xi \in RST$ es un tiempo de paro no aleatorizado si y sólo si existe una desintegración $(\xi_\omega)_{\omega\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$ de ξ tal que $\xi_\omega = \delta_{\tau(\omega)}$, donde τ es un tiempo de paro usual. Esto es equivalente a que exista una versión de A^ξ tal que sólo toma los valores 0 y 1.

2. Diremos que $\xi \in RST$ es un tiempo de paro aleatorizado finito si y sólo si

   $\xi(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+) = 1$.

Recordemos que el objetivo es encontrar de entre todos los tiempos de paro τ que cumplen con (SEP) encontrar aquel que cumpla con (OptSEP). Entonces, es importante determinar las propiedades del conjunto solución para determinar si es posible encontrar un minimizador, o que posibles consideraciones debamos de tener para ello. El corolario que sigue permitirá trabajar ese aspecto, ya que da una propiedad importante sobre el conjunto de los tiempos de paro aleatorizados.

Corolario 2.14. *El conjunto* RST *es cerrado con respecto a la topología inducida por las funciones continuas y acotadas en* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$.

El siguiente lema es uno de los resultados fundamentales de la tesis ya que permite hacer un cambio entre los espacios de probabilidad. Con ello, la idea es ver el problema de (OptSEP) definido sobre un espacio de probabilidad arbitrario como una transformación del problema, pero definido sobre el espacio canónico. Entonces, al obtener resultados sobre el problema de encaje y su dualidad en el espacio canónico, mediante la transformación adecuada, podemos obtener los mismos resultados sobre cualquier espacio.

Lema 2.15. *Sea* B *un movimiento Browniano en alguna base estocástica* $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$*, sea* τ *un* $\mathcal{G}$*-tiempo de paro y consideramos*

$$\Phi : \Omega \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+, \qquad \bar{\omega} \mapsto ((B_t(\bar{\omega}))_{t\geq 0}, \tau(\bar{\omega})).$$

Denotemos por $\Phi(\mathbb{P})$ a la función de distribución asociada a la variable Φ con la medida $\mathbb{P}$. Entonces, $\xi := \Phi(\mathbb{P})$ es un tiempo de paro aleatorizado y para cualquier función medible $\gamma : S \to \mathbb{R}$ tenemos que

$$\int \gamma((f,s))r(\xi)(d(f,s)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\gamma((B_t)_{t\leq\tau}, \tau)]. \tag{2.3}$$

Si Ω es suficientemente rico tal que soporta una variable aleatoria uniforme, la cual es $\mathcal{G}_0$-medible entonces para cualquier $\xi \in RST$, podemos encontrar un $\mathcal{G}$-tiempo de paro τ tal que $\xi = \Phi(\mathbb{P})$ y (2.3) *se cumple.*

Demostración. Primero notemos que $\xi \in M$. En efecto, como $\xi := \Phi(\mathbb{P})$ entonces tenemos que $\xi \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+)$. Luego, para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}\xi(A) &= \mathbb{P}(((B_t)_{t\geq 0}, \tau) \in A \times \mathbb{R}_+) \\ &\leq \mathbb{P}((B_t)_{t\geq 0} \in A) \qquad \text{ya que } \mathbb{P}(\tau = \infty) \geq 0 \\ &= \mathbb{W}(A). \end{aligned}$$

Denotaremos por $(\xi_\omega)_{\omega\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$ para una desintegración de ξ con respecto a la medida de Wiener. Se necesita demostrar que $\xi_\omega([0,t])$ es $\mathcal{F}_t^a$-medible. Sea $g : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ una función medible. Si $h = \mathbb{E}_{\mathbb{W}}[g|\mathcal{F}_t^a]$, denotando por $\mathcal{G}_t^a$ a la aumentación usual de $\mathcal{G}$, dado que sólo estamos uniendo a la σ-álgebra con los subconjuntos nulos entonces tenemos que $(B_t)_{t\geq 0}$ es también un $(\mathcal{G}_t^a)_{t\geq 0}$ movimiento Browniano. Por lo cual tenemos lo siguiente

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g((B_t)_{t\geq 0})|\mathcal{G}_t^a] = h((B_t)_{t\geq 0}), \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Luego, por ser $(\xi_\omega)_{\omega\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$ una desintegración tenemos que $\int g(\omega)\xi_\omega([0,t])\mathbb{W}(d\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g((B_r)_{r\geq 0})\mathbb{1}_{\tau\leq t}]$. Además, como τ es un $\mathcal{G}_t$-tiempo de paro se sigue de la propiedad torre que $\int g(\omega)\xi_\omega([0,t])\mathbb{W}(d\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g((B_r)_{r\geq 0})|\mathcal{G}_t^a]\mathbb{1}_{\tau\leq t}]$. Sustituyendo por h la esperanza condicional y poniéndolo en su forma de integral tenemos que

$$\int g(\omega)\xi_\omega([0,t])\mathbb{W}(d\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h((B_r)_{r\geq 0})\mathbb{1}_{\tau\leq t}] = \int h(\omega)\xi_\omega([0,t])\mathbb{W}(d\omega).$$

Luego, de la definición de h tenemos que

$$\begin{aligned}\int h(\omega)\xi_\omega([0,t])\mathbb{W}(d\omega) &= \mathbb{E}_{\mathbb{W}}[\mathbb{E}_{\mathbb{W}}[g|\mathcal{F}_t^a]\xi_\omega([0,t])] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{W}}[\mathbb{E}_{\mathbb{W}}[\mathbb{E}_{\mathbb{W}}[g|\mathcal{F}_t^a]\xi_\omega([0,t])|\mathcal{F}_t^a]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{W}}[\mathbb{E}_{\mathbb{W}}[g|\mathcal{F}_t^a]\mathbb{E}_{\mathbb{W}}[\xi_\omega([0,t])|\mathcal{F}_t^a]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{W}}[g\mathbb{E}_{\mathbb{W}}[\xi_\omega([0,t])|\mathcal{F}_t^a]]\end{aligned}$$

lo último se debe al inciso *(vi)* del Teorema 5.1 de [8]. Así, llegamos a que

$$\mathbb{E}[g\xi_\omega([0,t])] = \mathbb{E}[g\mathbb{E}[\xi_\omega([0,t])|\mathcal{F}_t^a]]$$

para toda función g entonces, se tiene que $\xi_\omega([0,t])$ es $\mathcal{F}_t^a$-medible, y por el Teorema 2.12 inciso (2) tenemos que ξ es un tiempo de paro aleatorizado.

Para la segunda parte, sea $\xi \in RST$. Por el Teorema 2.12 inciso (4), existe un $\bar{\mathcal{F}}$-tiempo de paro ρ' representando a ξ. Como ρ' es $\bar{\mathcal{F}}$-predecible, esto se puede justificar mediante el comentario en la página 287 de [8] que menciona que un tiempo de paro es predecible si es el tiempo de arribo de un proceso continuo, se sigue del Teorema 2.3 que existe un tiempo de paro ρ con respecto a $(\mathcal{F}_t^0 \times \mathcal{B}([0,1]))_{t\geq 0}$ tal que $\rho = \rho'$ casi seguramente. Con esto podemos definir un tiempo aleatorizado en Ω por $\rho((B_t)_{t\geq 0}, Y)$, donde Y es una variable aleatoria uniforme, independiente de B y $\mathcal{G}_0$-medible. Ahora, consideremos el mapeo $\bar{\Phi} : \Omega \to \bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+)$, $\bar{\omega} \mapsto ((B_t(\bar{\omega}))_{t\geq 0}, Y(\bar{\omega}))$. Como ρ es un $(\mathcal{F}_t^0 \times \mathcal{B}([0,1]))_{t\geq 0}$-tiempo de paro y $\bar{\Phi}$ es medible del espacio $(\Omega, \mathcal{G}_t)$ al espacio $(\bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+), \mathcal{F}_t^0 \times \mathcal{B}([0,1]))$, entonces $\rho \circ (B,Y)$ es un $\mathcal{G}$-tiempo de paro. Por lo tanto, podemos tomar a $\xi = \Phi(\mathbb{P})$, donde $\tau = \rho \circ (B,Y)$ y por lo demostrado en la primera parte tenemos que se cumple (2.3). ■

Ahora, consideremos un tiempo de paro aleatorizado finito ξ y un proceso opcional $Y : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ el cual es acotado o positivo y denotamos por $Y_t^\xi := Y_{\xi\wedge t}$. Considerando la representación ρ de ξ como en (2.2) y escribiendo $\bar{Y}_t(\omega,u) = Y_t(\omega)$, tenemos que

$$\bar{Y}_\rho \overset{d}{=} Y_\xi \qquad \text{y} \qquad \bar{Y}_t^\rho \overset{d}{=} Y_t^\xi.$$

Tomando $Y_t = t$ concluimos que $\xi(T) = \bar{\mathbb{E}}[\rho]$, donde T denota la proyección

$$T : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+.$$

Recapitulando que μ tiene media cero y segundo momento finito $\int x^2\mu(dx) =: V$ obtenemos el siguiente lema.

Lema 2.16. *Sea $\xi \in RST$ con representación ρ en $\bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+)$ como en* (2.2). *Suponga que $\bar{B}_\rho \sim \mu$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\int T d\xi = \bar{\mathbb{E}}[\rho] < \infty$.*

2. *$\int T d\xi = \bar{\mathbb{E}}[\rho] = V$.*

3. *$(\bar{B}_{\rho\wedge t})$ es uniformemente integrable.*

Definición 2.17. Denotamos por $RST(\mu)$ al conjunto de todos los tiempos de paro aleatorizados tales que cumplen las hipótesis del Lema 2.16.

Con esta definición vemos que podemos definir un subconjunto de tiempos de paro que están relacionados de alguna forma, similar por un encaje, a una medida en particular. Entonces podemos considerar que este conjunto se puede considerar como el conjunto de soluciones admisibles a (OptSEP), pero es importante saber si este conjunto posee elementos, ya que en caso contrario nos podría indicar que el problema puede no tener solución. Además, como ya habíamos mencionado antes, es importante estudiar la estructura del conjunto para poder determinar que condiciones necesitamos para encontrar un mínimo en caso de que lo tenga o poder saber si no es posible hallar un mínimo. El siguiente teorema, el cual se encuentra en [7], puede verse como una similitud del Corolario 2.14.

Teorema 2.18. *El conjunto $RST(\mu)$ es no vacío y compacto con respecto a la topología débil inducida por las funciones continuas y acotadas en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$.*

Ahora, el siguiente lema es una relación de convergencia entre los $\xi \in RST(\mu)$ con sus representaciones en el espacio de probabilidad que se esté estudiando.

Lema 2.19. *Sea $\xi, \xi_n \in RST(\mu)$, $n \geq 1$ y denotemos a sus representaciones en Ω como en (2.2) por ρ, ρ_n, $n \geq 1$, respectivamente. Entonces, $\xi_n \to \xi$ débilmente si y sólo si $\rho_n \to \rho$ en probabilidad*

La demostración del teorema no se incorpora en este trabajo, pero la idea es considerar una base estocástica $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Luego, consideremos un tiempo de paro τ, el cual es $\mathcal{G}$-medible. Entonces definiendo a ξ como en el Lema 2.15, se sigue que para cualquier función medible y acotada o no negativa $X : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tenemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X((B_t)_t, \tau)] = \int X(\omega, t) d\xi(\omega, t)$. Ahora, si consideramos que el espacio es suficientemente rico tal que soporta una variable aleatoria uniforme Y $\mathcal{G}_0$-medible e independiente del movimiento Browniano B. Considerando que ξ es un tiempo de paro aleatorizado y $\rho \circ (B, Y)$ su representación en Ω como en el Lema 2.15 entonces, para cualquier función medible y acotada o no negativa $X : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$\int X_t(\omega)\xi(d\omega, dt) = \iint X_{\rho(\omega,u)}(\omega)\mathcal{L}(du)\mathbb{W}(d\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{\rho((B_t)_{t\geq 0}, Y)}((B_t)_{t\geq 0})]. \tag{2.4}$$

Para finalizar esta parte de la tesis, daremos algunas definiciones y observaciones de unas extensiones sobre los tiempos de paro aleatorizados que usaremos posteriormente.

Definición 2.20. Sea (Y, ν) un espacio Polaco de probabilidad. Definimos el conjunto de *joinings*, JOIN(ν), de la siguiente forma:

$$\{\pi \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times Y) : \text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+}(\pi_{\restriction \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+\times D}) \in RST, D \in \mathcal{B}(Y), \text{proj}_Y(\pi) \leq \nu\},$$

donde decimos que dos medidas μ, ν definidas sobre el mismo espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ cumplen la relación de orden, $\mu \leq \nu$ si para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $\mu(A) \leq \nu(A)$. También escribiremos por JOIN$^1(\nu)$ para el subconjunto de JOIN(ν) tal que π tiene masa 1.

Si consideramos a Y como la recta real y a $\nu = \mu$ la medida definida en (SEP) podemos considerar que trabajaremos sobre las extensiones de los tiempos de paro aleatorizados tales que su proyección con respecto a su tercera coordenada sea casi similar a la medida de interés.

Definición 2.21. Denotemos por $pred$ a la σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{F}^0$-medibles de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$. Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times Y$ es predecible si es un elemento de $pred \otimes \mathcal{B}(Y)$. Diremos que una función definida en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times Y$ es una función predecible si es medible con respecto a $pred \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Notemos que como antes, los subconjuntos predecibles de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times Y$ corresponden a subconjuntos medibles de $S \times Y$ y de manera análoga para las funciones.

Capítulo 3

El problema de optimización y dualidad

3.1. El problema primal

El problema (OptSEP) consiste primordialmente en minimizar la función $\gamma : S \to \mathbb{R}$ sobre todos los tiempos de paro de un movimiento Browniano, el cual vive en un espacio de probabilidad suficientemente rico. Por el Lema 2.15 sabemos que obtenemos un problema similar si tomamos al movimiento Browniano como el proceso canónico sobre el espacio de Wiener $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ y minimizar sobre todos los tiempos de paro aleatorizados, es decir,

$$P_\gamma = \inf \left\{ \int \gamma \circ r(\omega, t) \xi(d\omega, dt) : \xi \in RST(\mu) \right\} \tag{3.1}$$

El siguiente teorema es la versión para el caso en el que consideramos el proceso canónico del Teorema 1.4.

Teorema 3.1. *Supongamos que $\gamma : S \to \mathbb{R}$ es lsc y acotada por abajo en el sentido de que para algunas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ se cumple en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$ lo siguiente*

$$-\left(a + by + c \max_{r \leq s} B_r^2 \right) \leq \gamma \left((B_r)_{r \leq s}, s \right). \tag{3.2}$$

Entonces el funcional

$$\xi \mapsto \int_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)} \gamma \circ r(\omega, t) \xi(d\omega, dt) \tag{3.3}$$

es lsc y (3.1) *admite un mínimo.*

3.2. El problema dual

El siguiente teorema corresponde al problema Dual del problema de encaje para el caso que estemos trabajando con el proceso canónico.

Teorema 3.2. *Sea $\gamma : S \to \mathbb{R}$ lsc y acotada por abajo en el sentido de* (3.2)*. Definimos*

$$D_\gamma = \sup \left\{ \int \psi(y) d(\mu) : \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \begin{array}{l} \exists \varphi, \varphi \text{ es una martingala } S\text{-continua, } \varphi_0 = 0 \\ \varphi_t(\omega) + \psi(\omega(t)) \leq \gamma \circ r(\omega, t), (\omega, t) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

donde φ, ψ cumplen que $|\varphi_t| \leq a + bt + cB_t^2$, $|\psi(y)| \leq a + by^2$ para algunos $a, b, c > 0$. Entonces, tenemos que

$$P_\gamma = D_\gamma.$$

La demostración de este teorema se dejará para después ya que primero se necesitan dar otros resultados. Una observación que podemos hacer es que usando el Lema 2.15 tenemos que al demostrar este teorema implícitamente se tendrá la demostración del Teorema 1.5. En esta parte se comienza a observar con mayor detenimiento la relación que existe con el problema de transporte, ya que algunos de estos teoremas tienen una versión análoga para ése problema. A partir de ahora consideremos a T como la proyección $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $T(\omega, t, y) = t$.

Proposición 3.3. *Sea $c : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lsc, predecible (cf. Definición 2.21) y acotada por abajo. Escribimos por $V = \int x^2 \mu(dx)$. Entonces*

$$\inf_\pi \int c(\omega, t, y) d\pi(\omega, t, y) = \sup_{(\varphi, \psi)} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mathbb{W} \right). \qquad (\star)$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto

$$\mathit{JOIN}^{1,V}(\mu) := \{\pi \in \mathit{JOIN}^1(\mu); \pi(T) \leq V\}$$

recordando que

$$\mathit{JOIN}^1(\mu) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times Y) : \begin{array}{l} \pi \text{ tiene masa } 1, \\ \mathit{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+}(\pi_{\restriction \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times D}) \in RST, \\ D \in \mathcal{B}(Y), \mathit{proj}_Y(\pi) \leq \mu \end{array} \right\},$$

y el supremo es tomado sobre $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+))$, $\psi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ tales que

$\exists \alpha \geq 0$ *tal que* $\varphi_t^M(\omega)+\psi(y)-\alpha(t-V) \leq c(\omega,t,y)$ *para* $\omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}.$ $(d^M[c,V])$

La proposición anterior puede ser comparada con uno de los teoremas clásicos de dualidad del problema de transporte. El teorema que sigue es uno de los resultados más usados con respecto a la dualidad del problema de transporte.

Teorema 3.4. *(Dualidad de Monge-Kantorovich). Sea* (X_i, μ_i)*,* $i = 1, 2$ *espacios de probabilidad polacos y* $c : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *una función de costos tal que es lsc y acotada por abajo. Entonces*

$$\inf_{\pi} \int c(x_1,x_2)d\pi(x_1,x_2) = \sup_{(\varphi,\psi)} \left(\int \varphi d\mu_1 + \int \psi d\mu_2 \right),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las medidas de probabilidad π *en* $X_1 \times X_2$ *tales que proj*$_{X_1}(\pi) = \mu_1$*, proj*$_{X_2}(\pi) = \mu_2$ *y el supremo es tomado sobre* $\varphi \in \mathcal{C}_b(X_1)$*,* $\psi \in \mathcal{C}_b(X_2)$ *tales que para* $x_1 \in X_1$ *y* $x_2 \in X_2$

$$\varphi(x_1) + \psi(x_2) \leq c(x_1, x_2).$$

La demostración del Teorema 3.4 no se pondrá en este trabajo debido a su extensión y complejidad. Para la demostración de la Proposición 3.2 primero daremos el siguiente teorema, que se conoce como el Teorema Mín-Máx. La demostración de este teorema fue obtenida de [3].

Teorema 3.5. *Sean* K, L *subconjuntos convexos de espacios vectoriales* H_1, H_2 *respectivamente, donde* H_1 *es localmente convexo y sea* $F : K \times L \to \mathbb{R}$ *dada. Si*

1. K *es compacto.*

2. $F(\cdot, y)$ *es continua y convexa en* K *para todo* $y \in L$.

3. $F(x, \cdot)$ *es cóncava en* L *para todo* $x \in K$.

entonces,

$$\sup_{y\in L} \inf_{x\in K} F(x,y) = \inf_{x\in K} \sup_{y\in L} F(x,y).$$

Demostración. Primero notemos que

$$\sup_{y\in L} \inf_{x\in K} F(x,y) \leq \inf_{x\in K} \sup_{y\in L} F(x,y).$$

En efecto, dado que $\sup_{y\in L} F(x,y) \geq F(x,y)$ para todo $y \in L$ y $x \in K$. De aquí

$$\inf_{x\in K}\sup_{y\in L} F(x,y) \geq \inf_{x\in K} F(x,y) \qquad \text{para todo } y\in L$$

de esto, tenemos que $\inf_{x\in K}\sup_{y\in L} F(x,y)$ es una cota superior para $\inf_{x\in K} F(x,y)$ sobre L. Entonces,

$$\sup_{y\in L}\inf_{x\in K} F(x,y) \leq \inf_{x\in K}\sup_{y\in L} F(x,y).$$

Ahora, la siguiente parte de la demostración está conformada en 5 pasos.

Paso 1 Sea $y_0 \in L$ tal que $K_0 = \{x \in K; F(x,y_0) \leq 0\} \neq \emptyset$. Si reemplazamos K por K_0 y restringimos F a $K_0 \times L$, entonces la hipótesis del teorema se cumple. En efecto, por ser F continua en K, tenemos que K_0 es un subconjunto cerrado de K el cual por hipótesis es compacto, entonces K_0 es compacto. Se tiene que verificar que F restringida a $K_0 \times L$ es convexa en X_0. Sean $x_1, x_2 \in K_0$, $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Dado que F es convexa en K, existe un $x_0 \in K$ tal que $F(x_0,y) \leq \xi_1 F(x_1,y) + \xi_2 F(x_2,y)$, para todo $y \in L$. De esto, $F(x_0,y_0) \leq 0$, así que $x_0 \in K_0$.

Paso 2 Demostraremos que si $y_1, y_2 \in L$ son tales que

$$\max_{i=1,2} F(x,y_i) > 0 \qquad \text{para todo } x \in K.$$

Entonces, existe un $y_0 \in L$ tal que $F(x,y_0) > 0$ para todo $x \in K$.

Sea $K_i = \{x \in K : F(x,y_i) \leq 0\}$. Por suposición, consideremos que K_i son conjuntos compactos disjuntos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada $K_i \neq \emptyset$. Ahora, si $x \in K_1$, entonces $F(x,y_1) \leq 0$. Luego, $-F(x,y_1)/F(x,y_2)$ es continua por arriba y no negativa en K_1. Así que podemos encontrar un $x_1 \in K_1$ tal que

$$\max_{x\in K_1} -\frac{F(x,y_1)}{F(x,y_2)} = -\frac{F(x_1,y_1)}{F(x_1,y_2)} = \mu_1 \geq 0.$$

De manera similar, podemos encontrar $x_2 \in K_2$ tal que

$$\max_{x\in K_2} -\frac{F(x,y_1)}{F(x,y_2)} = -\frac{F(x_2,y_1)}{F(x_2,y_2)} = \mu_2 \geq 0.$$

Ahora, $\mu_1\mu_2 < 1$. En efecto, supongamos que $\mu_1\mu_2 \neq 0$. Como $F(x_1,y_1) \leq 0$ y $F(x_2,y_1) > 0$, debido a que $x_i \in K_i$, existen números $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ con $\xi_1 + \xi_2 = 1$ tales que

$$\xi_1 F(x_1,y_1) + \xi_2 F(x_2,y_1) > 0. \tag{3.4}$$

Dado que F es convexa en K, existe un $x_0 \in K$ con

$$F(x_0, y) \leq \xi_1 F(x_1, y) + \xi_2 F(x_2, y) \qquad \text{para todo } y \in L.$$

Por lo cual, $F(x_0, y_1) \leq 0$ es decir, $x_0 \in K_1$ y de aquí que $x_0 \notin K_2$. Luego, $F(x_0, y_2) > 0$ además, como $x_0 \in K_1$, $x_1 \in K_1$, $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ y $\xi_1 + \xi_2 = 1$ tenemos que

$$\xi_1 F(x_1, y_2) + \xi_2 F(x_2, y_2) > F(x_0, y_2) > 0.$$

Así,

$$-\xi_1 \frac{F(x_1, y_1)}{\mu_1} - \xi_2 \mu_2 F(x_2, y_1) > 0$$

que es equivalente a que

$$\xi_1 F(x_1, y_1) + \xi_2 \mu_1 \mu_2 F(x_2, y_1) < 0,$$

despejando a $\xi_1 F(x_1, y_1)$ en (3.4) obtenemos que $\xi_1 F(x_1, y_1) = -\xi_2 F(x_2, y_1)$, sustituyendo esto en lo anterior tenemos que

$$-\xi_2 F(x_2, y_1) + \xi_2 \mu_1 \mu_2 F(x_2, y_1) < 0$$

simplificando obtenemos que

$$\xi_2 F(x_2, y_2)(\mu_1 \mu_2 - 1) < 0.$$

Notemos que $\xi_2 > 0$ ya que en caso contrario tendríamos que $F(x_1, y_1) = 0$, lo cual de la definición de μ_1 tendríamos que $\mu_1 = 0$. Pero esto es una contradicción al hecho de que supusimos que $\mu_1 \mu_2 \neq 0$. Ahora, tomemos números $\nu_1 > \mu_1$, $\nu_2 > \mu_2$, $\nu_1 \nu_2 = 1$ y sea

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \nu_1} = \frac{\nu_2}{1 + \nu_2}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{1 + \nu_2} = \frac{\nu_1}{1 + \nu_1}.$$

Probaremos que

$$\eta_1 F(x, y_1) + \eta_2 F(x, y_2) > 0 \qquad \text{para todo } x \in K.$$

Si $x \notin K_1 \cup K_2$ entonces se tiene que se cumple lo anterior trivialmente ya que $\eta_1, \eta_2 > 0$. Si $x \in K_1$, como

$$\mu_1 = \max_{r\in K_1} -\frac{F(r,y_1)}{F(r,y_2)}$$

entonces,

$$\mu_1 \geq -\frac{F(x,y_1)}{F(x,y_2)}$$

poniendo todos los términos del lado izquierdo obtenemos que

$$0 \leq F(x,y_1) + \mu_1 F(x,y_2)$$

así,

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x,y_1) + \mu_1 F(x,y_2) &< F(x,y_1) + \nu_1 F(x,y_2) && (3.5)\\ &= (1+\nu_1)(\eta_1 F(x,y_1) + \eta_2 F(x,y_2)). && (3.6)\end{aligned}$$

El resultado se cumple para $x \in K_2$ mediante un argumento similar al anterior.

La conclusión del paso 2 se sigue por la concavidad de F en L.

Paso 3 Demostraremos que si existe un conjunto finito $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset L$ tal que

$$\max_{1\leq i\leq m} F(x,y_i) > 0 \qquad \text{para todo } x \in K,$$

entonces existe $y_0 \in L$ tal que $F(x,y_0) > 0$ para todo $x \in K$.

Para la demostración, usaremos inducción sobre m. Para $m = 1$ tenemos que el resultado se cumple de manera trivial. Supongamos que se cumple para $m = p-1$, y supongamos que existe $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\} \subset L$ tales que

$$\max_{1\leq i\leq p} F(x,y_i) > 0 \qquad \text{para todo } x \in K.$$

Sea $K_p = \{x \in K : F(x,y_p) \leq 0\}$. Podemos suponer que $K_p \neq \emptyset$. Ya que en caso contrario no habría nada que probar. Entonces,

$$\max_{1\leq i\leq p-1} F(x,y_i) > 0 \qquad \text{para todo } x \in K_p.$$

Por el paso 1 entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción a F restringida al espacio $K_p \times L$. Se sigue que entonces existe $y_0' \in L$ tal que

$$F(x, y_0') > 0 \qquad \text{para todo } x \in K_p.$$

Ahora, notemos que

$$\max\{F(x, y_p), F(x, y_0')\} > 0 \qquad \text{para todo } x \in K,$$

debido al hecho de que $F(x, y_p) > 0$ para todo $x \notin K_p$. Aplicando el paso 2, nos da que existe un punto $y_0 \in L$ tal que $F(x, y_0) > 0$ para todo $x \in K$, lo cual demuestra el paso 3.

Paso 4 Debemos probar que para cualquier número real α, entonces ya sea que existe un $x_0 \in K$ tal que

$$F(x_0, y) \leq \alpha \qquad \text{para todo } y \in L,$$

o existe un $y_0 \in L$ tal que

$$F(x, y_0) > \alpha \qquad \text{para todo } x \in K.$$

Supongamos que la primera opción es falsa y definimos

$$H(y, \alpha) = \{x \in K : F(x, y) \leq \alpha\}.$$

Entonces,

$$\bigcap_{y \in L} H(y, \alpha) = \emptyset.$$

Pero como K es compacto, entonces debe de existir una subfamilia finita, $H(y_k, \alpha)$, $i = 1, \ldots, m$, con intersección vacía. De aquí, que la unión de sus complementos debe de ser todo X, es decir,

$$\max_{i=1,\ldots,m} F(x, y_i) > \alpha \qquad \text{para todo } x \in K.$$

El resultado se sigue de aplicar el paso 3 a la función $F(x, y) - \alpha$.

Paso 5 Sea $\alpha = \sup_L \inf_K F(x,y)$. Entonces, por el paso 4 existe un $x_0 \in K$ tal que $F(x_0,y) \leq \alpha$ para todo $y \in L$, o existe un $y_0 \in L$ tal que $F(x,y_0) > \alpha$ para todo $x \in K$. Si la primera opción se cumple, entonces se tiene que

$$\sup_L F(x_0,y) \leq \alpha,$$

así,

$$\inf_K \sup_L F(x,y) \leq \alpha = \sup_L \inf_K F(x,y).$$

Si la segunda opción se cumple, entonces

$$\inf_K F(x,y_0) > \alpha,$$

debido a que K es compacto y F es continua en x. De aquí que,

$$\alpha = \sup_L \inf_K F(x,y) > \alpha,$$

lo cual es una contradicción. Por lo cual se tiene que se debe de cumplir que

$$\inf_K \sup_L F(x,y) \leq \alpha = \sup_L \inf_K F(x,y).$$

Por lo tanto, de esto y de lo primero demostrado en la prueba tenemos que

$$\inf_{x\in K} \sup_{y\in L} F(x,y) = \sup_{y\in L} \inf_{x\in K} F(x,y).$$

■

Con el material expuesto tenemos las herramientas necesarias para demostrar la Proposición 3.3

Demostración. (Prueba de la Proposición 3.3)

Primero fijemos un $t_0 > 0$ y consideremos para una medida de probabilidad π en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ y $(\varphi,\psi) \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)) \times \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ las condiciones

$$soporte(\pi) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times [0,t_0] \times \mathbb{R}, \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\pi) = \mathbb{W}, \mathrm{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) = \mu \qquad (p[t_0])$$

$$\varphi(\omega) + \psi(y) \leq c(\omega,t,y), \text{ para } \omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \leq t_0, y \in \mathbb{R}. \qquad (d[c,t_0])$$

Dado que $[0,t_0]$ es un conjunto compacto, tenemos que $\tilde{c} = \text{ínf}_{t\leq t_0} c(\omega,t,y)$ es una función *lower semi-continous*. Entonces, considerando a la función $\tilde{c}$ podemos aplicar el Teorema de dualidad de Monge-Kantorovich (Teorema 3.4) y obtener lo siguiente:

Afirmación 1. Tomando el ínfimo sobre π tal que cumple con $(p[t_0])$ y el supremo sobre (φ,ψ) tales que cumplan con $(d[c,t_0])$, la relación dual $(\star)$ se cumple para funciones lsc y acotadas c : $\mathcal{C}_0 \times [0,t_0] \times \mathbb{R}$.

Ahora, consideremos las restricciones

$$soporte(\pi) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times [0,t_0] \times \mathbb{R}, \text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\pi) = \mathbb{W}, \text{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) = \mu, \int T d\pi \leq V \qquad (p[t_0,V])$$

$$\exists \alpha \geq 0, \text{t.q. } \varphi(\omega) + \psi(y) - \alpha(t-V) \leq c(\omega,t,y), \text{ para } \omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \leq t_0, y \in \mathbb{R}. \quad (d[c,t_0,V])$$

Usando el Teorema mín-máx (Teorema 3.5) con la función $F(\pi,\alpha) = \int (c + \alpha(T-V))d\pi$ sobre el conjunto π que satisface $(p[t_0,V])$ y para $\alpha \geq 0$ obtenemos

$$\inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \int c d\pi = \inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \int c d\pi + 0 = \sup_{\alpha \geq 0} \inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \left(\int c d\pi + \int \alpha(T-V) d\pi \right),$$

esto se debe a que $\int T d\pi \leq V$ en $(p[t_0,V])$ luego, usando el Teorema 3.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \int c d\pi &= \inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \sup_{\alpha \geq 0} \left(\int c d\pi + \alpha \int (T-V) d\pi \right) \\ &= \inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0])} \left(\int c d\pi + \sup_{\alpha \geq 0} \alpha \int (T-V) d\pi \right), \end{aligned}$$

lo último se debe a que como estamos considerando primero obtener el supremo, antes de la restricción $(p[t_0,V])$ entonces la restricción de que $\int T d\pi \leq V$ ya no juega un papel importante, por lo cual podemos quitarla. Luego, por la Afirmación 1 con $\tilde{c} = c + \alpha(T-V)$ tenemos que

$$\inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \int c d\pi = \sup_{\alpha \geq 0} \sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } d[c+\alpha(T-V),t_0]} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right).$$

Finalmente, del hecho de que ya no existe dependencia con α y debido a que

$$\varphi(\omega) + \psi(y) \leq c(\omega,t,y) + \alpha(T-V) \Longleftrightarrow \varphi(\omega) + \psi(y) - \alpha(T-V) \leq c(\omega,t,y)$$

se tiene que

$$\inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \int c d\pi = \sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } d[c,t_0,V]} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right).$$

Con esto, hemos demostrado lo siguiente:

Afirmación 2. Tomando el ínfimo sobre π que cumplen con ($p[t_0, V]$) y el supremo sobre (φ, ψ) que cumplen con ($d[c, t_0, V]$), la relación dual ($\star$) se cumple para funciones lsc y acotadas $c : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times [0, t_0] \times \mathbb{R}$

En el siguiente paso ignoraremos a t_0 y consideremos las restricciones

$$\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\pi) = \mathbb{W}, \text{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) = \mu, \int T d\pi \leq V \qquad (p[V])$$

$$\exists \alpha \geq 0 \text{ t.q. } \varphi(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq c(\omega, t, y), \text{ para } \omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}. \qquad (d[c,V])$$

Afirmación 3. Tomando el ínfimo sobre π que cumplen con ($p[V]$) y el supremo sobre (φ, ψ) tales que ($d[c, V]$), la relación dual ($\star$) se cumple para $c : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ lsc y acotada por abajo.

Dado $c > 0$ lsc con soporte en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times [0, t_0] \times \mathbb{R}$ para algún t_0 considerando las restricciones adecuadas sobre π y (φ, ψ) se tiene que

$$\inf_{\pi \text{ sat. } (p[t_0,V])} \int c d\pi = \inf_{\pi \text{ sat. } (p[V])} \int c d\pi$$

$$\sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } (d[c,t_0,V])} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right) = \sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } (d[c,V])} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right).$$

Estas funciones pueden ser utilizadas para hacer aproximaciones a cualquier función lsc no negativa en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ por abajo. Usando que el conjunto π que cumple ($p[V]$) es compacto, un argumento de aproximación, el cual se puede ver en [2] permite que sea válida la Afirmación 3.

P.D $\pi \in \text{JOIN}^{1,V}(\mu)$ si y sólo si

$$\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\pi) = \mathbb{W}, \text{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) = \mu, \int T d\pi \leq V, \quad y$$

$$\int f(s)(g - \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_t^0])(\omega)k(y)\pi(d\omega, ds, dy) = 0 \qquad (p^M[V])$$

$$\text{para } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+), soporte(f) \subseteq [0,t], t \geq 0, g \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)), k \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}),$$

donde k valida la condición de que $\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+}(\pi_{\restriction \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+\times D}) \in RST$ para todo boreliano D por el Teorema 2.12.

($\Leftarrow$) Tenemos que para todo boreliano D, $\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}\left(\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+}(\pi_{\restriction \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+\times D})\right) = \mathbb{W}$, entonces

$\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+}(\pi_{\restriction \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+\times D}) \in M$. Luego, como se cumple ($p^M[V]$), por el Teorema 2.12 se tiene que $\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+}(\pi_{\restriction \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+\times D}) \in RST$ y por hipótesis se cumple que $\text{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) = \mu$ y $\int T d\pi \leq V$, entonces $\pi \in \text{JOIN}^{1,V}(\mu)$.

($\Rightarrow$) Ahora, supongamos que $\pi \in \text{JOIN}^{1,V}(\mu)$, entonces por el Teorema 2.12 se cumple ($p^M[V]$). Luego, como $\pi(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) = 1$, $\text{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) \leq \mu$ y $\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\pi) \leq \mathbb{W}$ entonces se tiene que $\text{proj}_{\mathbb{R}}(\pi) = \mu$ y $\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\pi) = \mathbb{W}$.

Ahora, aplicaremos el Teorema 3.5 a la función $F(\pi, h) = \int (c+h) d\pi$, donde π se toma sobre el conjunto que satisface ($p[V]$) y h es de la forma

$$h(\omega, s, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)(g_i - \mathbb{E}[g_i|\mathcal{F}^0_{t_i}])(\omega)k_i(y), \tag{3.7}$$

$n \in \mathbb{N}$, $f_i \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $soporte(f) \subseteq [0, t_i], t_i \geq 0$, $g_i \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+))$, $k_i \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

Notemos que el conjunto de las funciones h que cumplen la relación anterior forman un espacio vectorial. Además, el conjunto π que satisface ($p[V]$) es convexo. En efecto, si consideramos $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y π_1, π_2 tales que cumplen ($p[V]$) tenemos que por la linealidad de la proyección

$$\text{proj}_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2) = \alpha\mathbb{W} + \beta\mathbb{W} = \mathbb{W}$$

y

$$\text{proj}_{\mathbb{R}}(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2) = \alpha\mu + \beta\mu = \mu,$$

de manera similar, por la linealidad de la integral de Lebesgue tenemos que

$$\int T d(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2) = \alpha \int T d\pi_1 + \beta \int T d\pi_2 \leq \alpha V + \beta V = V,$$

por lo tanto el conjunto es convexo. Además, como ya habíamos comentado anteriormente, es también un conjunto compacto. Luego, notemos que el conjunto de funciones h que cumplen (3.7) es un espacio vectorial. De esto tenemos que para una función c lsc y acotada se podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \int c d\pi &= \inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \int c d\pi + 0 \\
&= \inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \int c d\pi + \int h d\pi, \qquad \text{para todo } h \text{ que satisface (3.7)} \\
&= \inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \int c d\pi + \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \int h d\pi \\
&= \inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \int (c+h) d\pi, \\
&\quad \text{por ser } \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \int h d\pi \text{ constante con respecto a } \inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \\
&= \inf_{\pi \text{ sat. } (p[V])} \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \int (c+h) d\pi \\
&= \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \inf_{\pi \text{ sat. } (p[V])} \int (c+h) d\pi, \qquad \text{por el Teorema 3.5} \\
&= \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } (d[c+h,V])} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right), \qquad \text{por la Afirmación 3.}
\end{aligned}$$

Como podemos observar la demostración ya está casi concluida ya que de lo anterior tenemos que

$$\inf_{\pi \text{ sat. } (p^M[V])} \int c d\pi = \sup_{h \text{ sat. (3.7)}} \sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } (d[c+h,V])} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right),$$

y por lo demostrado anteriormente, el conjunto de π que satisface ($p^M[V]$) es equivalente a $\text{JOIN}^{1,V}(\mu)$. La siguiente parte de la demostración consiste en ver que pasa con (φ, ψ) que satisfacen $(d[c+h, V])$.

Por hipótesis tenemos que c es predecible. Para (φ, ψ) que satisfacen $(d[c+h, V])$ existe un $\alpha \geq 0$ tal que

$$\varphi(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq (c + h)(\omega, t, y) \tag{3.8}$$

Fijando t y y en la ecuación anterior, obtenemos una desigualdad entre funciones con respecto a ω. Luego, tomando esperanzas condicionales como en la Definición 2.6 se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(\cdot) + \psi(y) - \alpha(t - V)|\mathcal{F}_t^0](\omega) &\leq \mathbb{E}[(c + h)(\cdot, t, y)|\mathcal{F}_t^0](\omega) \\
\Leftrightarrow \varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) &\leq \mathbb{E}[c(\cdot, t, y)|\mathcal{F}_t^0](\omega) + \mathbb{E}[h(\cdot, t, y)|\mathcal{F}_t^0](\omega), \qquad \text{definición 2.6} \\
\Leftrightarrow \varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) &\leq c(\omega, t, y) + \mathbb{E}[h(\cdot, t, y)|\mathcal{F}_t^0](\omega), \qquad \text{por ser } c \text{ predecible} \\
\Leftrightarrow \varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) &\leq c(\omega, t, y),
\end{aligned}$$

lo último se debe a que h es de la forma (3.7). Entonces, para todo $\omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq c(\omega, t, y)$$

así, si (φ, ψ) cumplen con $(d[c+h, V])$ entonces también cumplen con $(d^M[c, V])$. Para demostrar que si se cumple $(d^M[c, V])$ se cumple $(d[c+h, V])$ tenemos que como se satisface $(d^M[c, V])$ entonces existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$\varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq c(\omega, t, y) \text{ para } \omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R},$$

agregando $\varphi_t(\omega)$ tenemos que

$$\varphi_t(\omega) - \varphi_t(\omega) + \varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq c(\omega, t, y)$$

lo cual es equivalente a que

$$\varphi_t(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq c(\omega, t, y) + \varphi_t(\omega) - \varphi_t^M(\omega)$$

ahora, notemos que $\varphi_t(\omega) - \varphi_t^M(\omega)$ es de la forma (3.7), tomando un sólo sumando y siendo $f \equiv k \equiv 1$ entonces, podemos definir a $h(\omega, s, y) = \varphi_t(\omega) - \varphi_t^M(\omega)$. Por lo cual se cumple $(d[c+h, V])$. Así, tenemos que el conjunto donde se cumple $(d^M[c, V])$ es igual al conjunto donde se cumple $(d[c+h, V])$. Por lo tanto,

$$\inf_{\pi \in \text{JOIN}^{1,V}(\mu)} \int c d\pi = \sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } (d^M[c,V])} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right).$$

■

Ahora que ya se tiene la validez sobre el Teorema 3.3 entonces podemos probar el Teorema 3.2. La idea de la prueba consiste en demostrar que se cumplen las dos desigualdades entre P_γ y D_γ. Como veremos en la prueba, una de las desigualdades se cumple de manera trivial sin importar las condiciones de γ, mientras que para la otra desigualdad se necesitará todo el material expuesto en esta parte.

Demostración. (Prueba del Teorema 3.2)

P.D. $D_\gamma \leq P_\gamma$.

Sean (φ, ψ) que cumplen con las restricciones duales y consideremos $\xi \in RST(\mu)$, entonces de (2.4) tenemos que $\int \psi(\omega(y))\xi(d\omega, dt) = \mathbb{E}[\psi(B_{\rho((B_t)_{t\geq 0}, Y)})]$. Extendiendo a B al espacio $\bar{\mathcal{C}}_0(\mathbb{R}_+)$ tenemos que $\int \psi(\omega(y))\xi(d\omega, dt) = \mathbb{E}[\psi(\bar{B}_{\rho((\bar{B}_t)_{t\geq 0}, Y)})]$. Ahora, como estamos considerando a $\xi \in RST(\mu)$ tenemos que $\bar{B}_\rho \sim \mu$ por lo cual, $\int \psi(\omega(t))\xi(d\omega, dt) = \int \psi(y)\mu(dy)$. Por ser φ una martingala se cumple que

$$\int \psi(y)\mu(dy) = \int \psi(\omega(t))\xi(d\omega, dt) + \int \varphi_t(\omega)\xi(d\omega, dt) \leq \int \gamma \circ r(\omega, t)\xi(d\omega, dt)$$

lo último se debe a la restricción dual. De aquí,

$$\int \psi(y)\mu(dy) \leq \int \gamma \circ r(\omega, t)\xi(d\omega, dt)$$

y esto es para todo par (φ, ψ) que cumplan las restricciones duales y $\xi \in RST(\mu)$, tomando supremos en ambos conjuntos se tiene que $D_\gamma \leq P_\gamma$.

P.D. $P_\gamma \leq D_\gamma$.

Para esta parte de la demostración consideremos el espacio $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ y la función de costos

$$c(\omega, t, y) := \begin{cases} \gamma \circ r(\omega, t), & \text{si } \omega(t) = y \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como γ es lsc y acotada por abajo, entonces c también es lsc y acotada por abajo. De esto, podemos aplicar el Teorema 3.3, lo cual implica que se vale $(\star)$. Así, la demostración consistirá en demostrar

$$\sup_{(\varphi,\psi) \text{ sat. } (d^M[c,V])} \left(\int \varphi d\mathbb{W} + \int \psi d\mu \right) \leq D_\gamma \qquad \text{y} \qquad P_\gamma \leq \inf_{\pi \in \text{JOIN}^{1,V}(\mu)} \int c d\pi. \tag{3.9}$$

Para la primera desigualdad de (3.9) consideremos una pareja (φ, ψ) tales que satisfacen $(d^M[c, V])$. Entonces, existe $\alpha \geq 0$ tal que $\varphi_t^M(\omega) + \psi(y) - \alpha(t - V) \leq c(\omega, t, y)$ para todo $\omega \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), t \in \mathbb{R}_+$ y $y \in \mathbb{R}$. Tomando $y = \omega(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_t^M(\omega) + \psi(\omega(t)) - \alpha(t - V) &\leq \gamma \circ r(\omega, t) \\ \Leftrightarrow \varphi_t^M(\omega) + \int \varphi d\mathbb{W} - \int \varphi d\mathbb{W} + \alpha\omega(t)^2 - \alpha\omega(t)^2 + \psi(\omega(t)) - \alpha(t - V) &\leq \gamma \circ r(\omega, t) \\ \Leftrightarrow \left[\underbrace{\varphi_t^M(\omega) - \int \varphi d\mathbb{W} + \alpha(\omega(t)^2 - t)}_{=:\bar{\varphi}(\omega)}\right] + \left[\underbrace{\psi(\omega(t)) + \int \varphi d\mathbb{W} - \alpha\omega(t)^2 + \alpha V}_{=:\bar{\psi}(\omega(t))}\right] &\leq \gamma \circ r(\omega, t). \end{aligned}$$

Notemos que $\alpha(\omega(t)^2 - t)$ es una martingala S-continua que empieza en cero. Además,

$$\mathbb{E}[\varphi_t^M] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi|\mathcal{F}_t^0]\right] = \mathbb{E}[\varphi] = \int \varphi d\mathbb{W}$$

Entonces $\bar{\varphi}$ es una S-continua martingala que empieza en cero, por lo cual $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ cumplen con las restricciones duales del Teorema 3.2. Luego, como $V = \int y^2 \mu(dy)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \bar{\psi}(y)\mu(dy) &= \int (\psi(y) + \int \varphi d\mathbb{W} - \alpha y^2 + \alpha V)\mu(dy) \\
&= \int (\psi(y) - \alpha y^2)\mu(dy) + \int \varphi d\mathbb{W} + \alpha V \\
&= \int \psi(y)\mu(dy) + \int \varphi d\mathbb{W}
\end{aligned}$$

así, por las propiedades del supremo

$$\int \bar{\psi}(y)\mu(dy) = \int \psi(y)\mu(dy) + \int \varphi d\mathbb{W} \leq D_\gamma$$

y esto es para cualesquiera (φ, ψ) que cumplen ($d^M[c, V]$). Por tanto, D_γ es una cota superior para ($d^M[c, V]$), lo cual nos implica la primera desigualdad de (3.9).

Para probar la segunda desigualdad de (3.9), notemos que para cualquier $\pi \in$ JOIN$^{1,V}(\mu)$ que cumpla que $\int c d\pi < \infty$ esta concentrada en el conjunto $\{(\omega, t, y) : \omega(t) = y\}$. Luego, tomando $\xi :=$ proj$_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+}(\pi)$ se tiene que $\xi \in RST$ y $\int c d\pi = \int \gamma d\xi$. En efecto, si consideramos a T como

$$T : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+, \qquad (\omega, t, y) \mapsto (\omega, t)$$

y a una función inversa T^{-1} como

$$T^{-1} : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \qquad (\omega, t) \mapsto (\omega, t, \omega(t))$$

podemos aplicar el Teorema de cambio de medida para así obtener lo deseado. Se sigue que,

$$P_\gamma \leq \int \gamma d\xi = \int c d\pi$$

y esto para cualquier $\pi \in$ JOIN$^{1,V}(\mu)$ tal que $\int c d\pi < \infty$, tomando el ínfimo sobre este conjunto tenemos la segunda desigualdad. ■

3.3. Distribución inicial general

En esta última parte de este capítulo abarcaremos de manera rápida una versión más general del problema primal y del problema dual, el caso en el que estemos trabajando con un movimiento Browniano el cual tiene una distribución inicial λ. Consideremos $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, el conjunto de todas las funciones continuas en $\mathbb{R}_+$, y

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{(f,s) : f[0,s] \to \mathbb{R} \text{ es continua}, f(0) \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 3.6. Sea λ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Diremos que es previa a μ en orden convexo si para cualquier función convexa F se tiene que

$$\int F(x)\lambda(dx) \leq \int F(x)\mu(dx).$$

Unas observaciones importantes que podemos hacer sobre λ si es previa a μ es que también es una medida centrada. Además $V_\lambda = \int x^2\lambda(dx) \leq V < \infty$. Con esto, podemos asegurar que existe una solución al problema de encaje de Skorokhod con distribución inicial λ con primer momento finito. Ahora, para formular el problema primal y dual con esta nueva consideración denotemos por $\mathbb{W}_x$ la ley del movimiento Browniano que empieza en x y pongamos $\mathbb{W}_\lambda(d\omega) = \int \mathbb{W}_x(\omega)\lambda(dx)$ para $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, la ley del movimiento Browniano que empieza en un punto aleatorio de acuerdo a la distribución λ.

Definición 3.7. Sea $\gamma : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ una función que es lsc y acotada por abajo. El problema primal de encaje de Skorkhod con distribución inicial λ consiste en la minimización del problema

$$P_\gamma(\mu,\lambda) = \text{ínf}\left\{\int \gamma \circ r(\omega,t)\xi(d\omega,dt) : \xi \in RST(\lambda,\mu)\right\},$$

donde $RST(\lambda,\mu)$ es le conjunto de todos los tiempos de paro aleatorizados ξ en $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+), \mathbb{W}_\lambda)$ que se encajan a μ y cumplen que $\xi(T) = V - V_\lambda$; en particular $\text{proj}_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(\xi) = \mathbb{W}_\lambda$ y $h(\xi) = \mu$, para el mapeo $h : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$, $(\omega,t) \mapsto \omega(t)$.

Una vez ya establecido el problema primal en este caso, procederemos a dar la versión del Teorema 3.2.

Teorema 3.8. *Sea $\gamma : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lsc y acotada por abajo en el sentido de* (3.2)*. Definimos*

$$D_\gamma(\mu,\lambda) = \sup\left\{\int \psi(y)d(\mu) : \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ \begin{array}{l} \exists\varphi, \varphi \textit{ es una martingala } \mathcal{S}_{\mathbb{R}}\textit{-continua, } \int \varphi_0 d\mathbb{W}_\lambda = 0 \\ \varphi_t(\omega) + \psi(\omega(t)) \leq \gamma \circ r(\omega,t), (\omega,t) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \end{array}\right\}$$

donde φ, ψ cumplen que $|\varphi_t| \leq a + bt + cB_t^2$, $|\psi(y)| \leq a + by^2$ para algún $a, b, c > 0$. Entonces tenemos que

$$P_\gamma(\mu, \lambda) = D_\gamma(\mu, \lambda).$$

Bibliografía

[1] B. Acciaio, M. Beiglböck, F. Penkner, W. Schachermayer, and J. Temme. A trajectorial interpretation of doob's martingale inequalities. *The Annals of Applied Probability*, 23(4):1494–1505, 2013.

[2] Villani Cédric. *Optimal Transport: Old and New*. Springer, 2009.

[3] Adams David R. and Hedberg Lars Inge. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer, 1999.

[4] Rost H. Skorokhod stopping times of minimal variance. *Seminaire de Probabilité*, 511:194–208, 1976.

[5] Monroe Itrel. On embedding right continous martingales in brownian motion. *The Annuals of Mathematical Statistics*, 43(4):1293–1311, 1972.

[6] Obłoj Jan. The skorokhod embedding problem and its offspring. *Probability Surveys*, 1(1549-5787):321–392, 2004.

[7] Beiglböck Mathias, M. G. Cox Alexander, and Martin Huesmann. Optimal transport and skorokhod embedding. *Invent. math.*, 208:327–400, 2016.

[8] Kallenberg Olav. *Foundations of Modern Probability*. Applied Porbability Trust. Springer, 1997.