

CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

**ESTABILIDAD MODULACIONAL DE LAS
SOLUCIONES DE TIPO ONDA PLANA PARA LAS
ECUACIONES NO LINEALES DE SCHRÖDINGER
CONTINUA Y DISCRETA**

PROYECTO DE TESIS QUE PRESENTA

María Berenice Contreras Ortega

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias

ASESOR

Dr. Jesús Adrián Espínola Rocha

CO-ASESOR

Dr. Ignacio Barradas Bribiesca

GUANAJUATO, GUANAJUATO.

Dedicatoria

A mi familia, por ser el motor que me impulsa a seguir adelante cada día con mayor ánimo. Por aguantar todo este tiempo que hemos estado lejos. Por hacerme fuerte en mis momentos de debilidad, por apoyarme siempre, por ser mi razón y motivo, a ellos todo mi amor y mi gratitud siempre.

A Omar, de no haber sido por su perseverancia y ayuda me hubiera regresado hace mucho tiempo.

A mis amigos, hermanos de cubículo; por ayudarme, por levantarme los ánimos, por echarme porras, por quererme. Sin importar el orden: Aarón, Claudia, Daniel, Rosita, Jendry y Mary.

Agradecimientos

El camino no ha sido fácil, pero la experiencia que gané es invaluable.

La realización de esta tesis no hubiera sido posible sin la participación de muchas personas que junto con el CIMAT, han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a término. Para mí es un verdadero placer utilizar este espacio para expresar mi agradecimiento a todos los involucrados.

- Agradezco a Dios por permitirme terminar.
- Agradezco a CONACyT por haberme otorgado la beca de maestría.
- Al CIMAT por todo el apoyo brindado y por todas las oportunidades que me dieron para poder concluir.
- Agradezco de manera muy especial y sincera al Dr. Jesús Adrián Espínola Rocha, por permitirme realizar este trabajo de tesis bajo su dirección, por su apoyo y su disponibilidad para guiarme, ha sido una parte significativa todo este tiempo en mi desarrollo como estudiante y como ser humano. Por toda su paciencia. Siempre dije que si él no se daba por vencido, yo tampoco.
- A mis profesores en CIMAT por todo el conocimiento y sabiduría brindado, en especial al Dr. Ignacio Barradas.
- A la Dra. Monica Moreno, al Dr. Ignacio Barradas y al Dr. Miguel Ángel Moreles, por aceptar ser mis sinodales y dar valiosos aportaciones, observaciones y mejoras a este trabajo de tesis.
- Al Dr. Peter Miller de la Universidad de Michigan en Ann Arbor por las valiosas conversaciones que tuve con él sobre este tema.
- Agradezco al Dr. Francisco Sánchez Sánchez por los valiosos comentarios aportados que enriquecieron este trabajo de tesis.
- Agradezco profundamente a Omar Humberto González Ávila por todo el tiempo, dedicación y amor.
- Quiero dar gracias a mis amigos, a quienes quiero y admiro, no solo como profesionales en las áreas en las que cada uno de ellos se desarrolla, sino como seres humanos. Gracias por todo el cariño.
- Gracias Ángeles, aunque estamos lejos, siempre está muy presente en mi vida. Gracias por darme aliento en esos momentos en los que sólo tu sabías como ayudarme, por tus consejos y por hacerme reír.

- Gracias a Josaphat por aportar ideas, comentarios y correcciones de manera muy positiva a este trabajo de tesis.
- Muchas gracias a Anai Chagoya por su tiempo y dedicación. Por su valiosa aportación al corregir la ortografía de la tesis.

Introducción

La estabilidad es un concepto fundamental en física. Desde un punto de vista simplista, se dice que la estabilidad es la propiedad que tiene un cuerpo de permanecer en un estado de equilibrio o de regresar a él tras haber sufrido una perturbación. El entendimiento sobre lo que es la estabilidad es formado intuitivamente, cada día, conforme se incrementa la experiencia y comprensión del mundo que nos rodea [Anishchenko].

El análisis de estabilidad es una de las tareas primordiales en la planeación de experimentos y en la operación de proyectos, según sea la aplicación física del sistema que se analiza. Es importante hacer el análisis porque con la información obtenida se pueden realizar simulaciones con las cuales se observa la respuesta de un sistema físico o biológico a pequeñas alteraciones. Con esto es posible determinar los parámetros para los cuales la estabilidad de una solución puede ser conservada o perdida [Chiang & Alberto].

Al estudiar la estabilidad de un sistema dinámico lo que interesa saber es el comportamiento de alguna solución del tipo estado estacionario (puntos de equilibrio, orbitas periódicas, ondas solitarias, ondas periódicas, etc.) cuando pequeñas perturbaciones se introducen a dicha solución. Si estas perturbaciones crecen a medida que transcurre el tiempo, entonces se dice que la solución es inestable. De lo contrario, si las pequeñas perturbaciones decaen en el tiempo, entonces la solución es estable [Sandstede]. El análisis de estabilidad que se realizará en este trabajo de tesis estará enfocado en la estabilidad e inestabilidad modulacionales.

La inestabilidad modulacional puede considerarse como un criterio al momento de clasificar el comportamiento cualitativo de ondas moduladas tales como paquetes de ondas. El paquete de ondas, también llamado envolvente, es una superposición lineal de ondas, la cual puede tomar forma de un pulso y se desplaza de forma relativamente compacta antes de dispersarse, esto en caso de que la velocidad de fase sea diferente a la velocidad de grupo. A este fenómeno se le llama dispersión. En muchos sistemas en los cuales las ecuaciones dinámicas admiten soluciones periódicas, representadas por trenes de onda, es posible que se presente inestabilidad modulacional bajo ciertos parámetros. La inestabilidad modulacional se presenta cuando perturbaciones oscilatorias son introducidas a estados estacionarios de tipo tren de onda, las cuales generan un crecimiento exponencial en la amplitud de la onda, conforme transcurre el tiempo, lo que a su vez genera un rompimiento en la envolvente [Scott].

La teoría sobre inestabilidad modulacional comenzó casi de manera simultánea, y paralelamente, en los campos de hidrodinámica y electromecánica (óptica no lineal) al comienzo de la década de los sesenta del siglo pasado. En el año 1965 Whitham sugirió el promedio variacional para ondas cuasi-periódicas (Ecuaciones de Conservación de Whitham). Estas ecuaciones describen las modulaciones en trenes de onda lineales y débilmente no lineales. En ese mismo año Lighthill con ayuda de estas ecuaciones estudió la evolución de ondas débilmente no lineales en aguas profundas. Los resultados de estos estudios fueron los primeros en mostrar la existencia de inestabilidad modulacional para ondas débilmente no lineales en aguas profundas. En 1967 Benjamin y Feir confirmaron por medio de experimentos la existencia de inestabilidad modulacional para ondas no lineales en superficies de agua [Scott], [Yuen & Lake].

Los análisis y resultados descritos en el párrafo anterior fueron válidos solamente para los periodos de crecimiento inicial, pues las ecuaciones de Whitham, tal como fueron aplicadas por Lighthill, llevaron a singularidades en las soluciones dentro de un tiempo finito. Entonces, los esfuerzos fueron dirigidos a la búsqueda de ecuaciones válidas para tiempos más largos. En 1972 Hasimoto y Ono mostraron que la evolución de trenes de onda no lineales en aguas profundas puede ser modelada por medio de la ecuación no lineal de Schrödinger y recuperaron los resultados obtenidos por Benjamin y Feir. Finalmente en el año de 1975 Yuen y Lake mostraron que la ecuación no lineal de Schrödinger es una consecuencia de las ecuaciones de Whitham. Sin embargo, en 1967 Benney y Newell fueron los primeros en estudiar la ecuación no lineal de Schrödinger para un contexto general, pero desconocido para muchos investigadores en el estudio de ondas en aguas profundas de aquel tiempo. Para mayores detalles consulte las referencias [Zakharov], [Scott] y [Yuen & Lake], así como las referencias ahí sugeridas.

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) es una ecuación prototípica de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y dispersivas. En los últimos 40 años, dicha ecuación ha aparecido en diversas áreas de la física y el análisis matemático, entre otras. Encontramos la ecuación no lineal de Schrödinger mayormente en estudios sobre la propagación de la luz a través de fibra óptica no lineal y en los estudios sobre ondas en el agua, como los mencionados anteriormente.

Un artículo que explica los efectos de la inestabilidad modulacional para la ecuación NLS es el realizado por [Hasegawa & Tomita]. En este artículo se reportan las observaciones de inestabilidad modulacional de ondas de luz en cierto material, usando un láser y fibra óptica, entre otras consideraciones. Se menciona que los resultados obtenidos concuerdan con las predicciones teóricas que se realizaron al modelo. Se concluye con la frase: “La inestabilidad modulacional puede presentar un problema para la comunicación óptima de una señal a través de una fibra”. Es decir, una aplicación del análisis de estabilidad de soluciones es la orientada al control de la calidad en el envío de señales.

En la referencia [Kivshar & Peyrard] se explica que la inestabilidad modulacional puede ser la responsable de la formación de concentraciones localizadas de energía, lo que a la vez produce agitaciones de gran amplitud en moléculas de ADN.

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) en su forma estándar es:

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \pm |u(x,t)|^2 u(x,t) = 0, \quad (1)$$

en la cual usualmente las variables reales x y t representan las coordenadas de espacio y tiempo, respectivamente. El signo positivo o negativo en el tercer término de la ecuación (1) indica si se trata de la ecuación no lineal de Schrödinger enfocante o desenfocante [Agrawal],[Scott].

Una de las soluciones de la ecuación NLS son soluciones del tipo onda plana, y tienen la siguiente forma:

$$\bar{u}(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}. \quad (2)$$

Una de las razones que permite clasificar a la ecuación NLS dentro de los sistemas dispersivos es el tipo de solución que admite.

El presente trabajo de tesis se centra en el análisis de estabilidad e inestabilidad modulacional de las soluciones de tipo onda plana para las ecuaciones no lineales de Schrödinger continua y discreta. Es de interés estudiar el comportamiento de soluciones de tipo onda plana a las cuales les son introducidas pequeñas perturbaciones en la amplitud, y en la amplitud y fase simultáneamente. Si cualquiera de las soluciones perturbadas permanece cerca de la solución que se propone originalmente, para todo tiempo t positivo, decimos que la solución original es estable, de otro modo decimos que la solución original es inestable.

En este trabajo de tesis se utilizan dos versiones para discretización de la ecuación no lineal de Schrödinger, en donde se discretiza la variable espacial x , las cuales son:

- La *lattice* de Ablowitz-Ladik (A-L),

$$i\frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2h^2}[u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma|u_n(t)|^2 \frac{u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t)}{2}. \quad (3)$$

- La ecuación no lineal de Schrödinger Discreta (DNLS),

$$i\frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2h^2}[u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma|u_n(t)|^2 u_n(t). \quad (4)$$

Para los esquemas anteriores se proponen soluciones de tipo onda plana de la forma:

$$\bar{u}_n(t) = Ae^{i(n\delta-\omega t)}, \quad (5)$$

donde A es una constante real que representa la amplitud, y $\delta = hk$.

Adicionalmente, existen esquemas discretos para la ecuación no lineal de Schrödinger en el cual se discretizan la variable espacial x y la variable temporal t . El esquema con el cual se trabajará es el

método de Crank-Nicolson linealizado, el cual es:

$$i(u_m^{n+1} - u_m^n) = -\frac{\mu}{2} \left[\frac{(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2} \right] \\ - \sigma \Delta t \left(\frac{3}{2} |u_m^n|^2 - \frac{1}{2} |u_m^{n-1}|^2 \right) \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2},$$

para el cual $\mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Supóngase que el esquema anterior admite soluciones de la forma

$$\bar{u}_m^n = A e^{i\delta m} r^n, \quad (6)$$

en la que A es una constante real para la amplitud, $\delta = k\Delta x$ y $r = e^{-i\omega\Delta t}$.

La pregunta que se buscará responder en este trabajo de tesis es: ¿Qué sucede con la estabilidad de las soluciones (2), (5) y (6) cuando se les introducen pequeñas perturbaciones, ya sea solamente a la amplitud o a la amplitud y fase de manera simultánea?

Para contestar esta pregunta, en el caso continuo, se propondrá la solución perturbada:

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \epsilon P(x, t), \quad (7)$$

en la que $|\epsilon| \ll 1$, y $P(x, t)$ es una función que representa la perturbación introducida a la solución (2), ya sea perturbación en la amplitud o en la amplitud y fase (esto se verá a detalle en el capítulo 3).

El parámetro que servirá para determinar cuándo una solución es estable o inestable modulacionalmente, será la distancia entre la solución de la ecuación y la solución perturbada. Para ello, se usará la norma de la diferencia entre las soluciones $u(x, t)$ y $\bar{u}(x, t)$, esto es:

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\| &= \|\bar{u}(x, t) + \epsilon U(x, t) - \bar{u}(x, t)\| \\ &= |\epsilon| \|U(x, t)\|. \end{aligned}$$

Es decir, el comportamiento de la norma de la diferencia entre la solución (2) de la ecuación NLS y la solución perturbada (7), definirá si la solución es estable o inestable modulacionalmente. La norma que se empleará será la norma de máximo.

Esta idea es muy importante, pues es la que se seguirá a lo largo del trabajo y bajo la cual se realizará el análisis de estabilidad para las soluciones de la ecuación NLS continua, y de manera análoga proponiendo soluciones perturbadas en amplitud y amplitud y fase para los esquemas discretos: Ablowitz-Ladik, DNLS y Crank-Nicolson linealizado, en caso de ser posible.

De acuerdo a los casos que serán analizados y a las herramientas utilizadas, el presente trabajo de tesis se encuentra organizado como sigue:

1. **Transformada de Fourier:** En este capítulo se revisarán los conceptos básicos relacionados con la transformada de Fourier.
2. **Ondas Dispersivas:** En este capítulo se explicará qué son los sistemas dispersivos, se incluyen definiciones relacionadas con este tema y se explica cuál es la relación de estos sistemas y el análisis de Fourier.
3. **Inestabilidad Modulacional:** En este capítulo se explicará de manera detallada el concepto de estabilidad e inestabilidad modulacional.
4. **La Ecuación no Lineal de Schrödinger y su Análisis de Estabilidad:** Este capítulo contiene el análisis de estabilidad de las soluciones para la ecuación NLS continua.
5. **La Ecuación no Lineal de Schrödinger discreta y Análisis de Estabilidad:** De manera análoga, este capítulo contiene el análisis de estabilidad de las soluciones para la ecuación NLS discreta.
6. **El Esquema de Crank-Nicolson Linealizado:** El esquema de Crank-Nicolson es una discretización para la ecuación NLS diferente a la del capítulo anterior. De igual forma aquí se realizará un análisis de estabilidad de soluciones para el esquema de Crank-Nicolson linealizado.

Al final de cada capítulo en el que se realiza el análisis de estabilidad se mostrará una tabla informativa sobre los diferentes casos para los cuales se realizó el análisis y en las cuales se podrá observar las condiciones bajo las cuáles las soluciones presentan estabilidad o inestabilidad modulacional.

Índice general

Dedicatoria	III
Agradecimientos	V
Introducción	IX
1. La Transformada de Fourier	1
1.1. Series de Fourier	1
1.2. Transformada de Fourier	4
1.2.1. Transformada Inversa de Fourier	9
1.2.2. El producto de convolución	11
1.2.3. Solución de la Ecuación no Lineal de Schrödinger	12
1.3. Conclusiones del capítulo	13
2. Ondas Dispersivas	15
2.1. Ondas	15
2.1.1. Propagación de Ondas, Ondas Armónicas y Ondas Planas	16
2.2. Ondas Hiperbólicas	19
2.3. Ondas Dispersivas	19
2.3.1. Correspondencia entre la ecuación y su relación de dispersión	20
2.3.2. Solución general mediante integrales de Fourier.	22
2.3.3. Paquete de Ondas	23
2.3.4. Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo.	25
2.3.5. La Clasificación de la Ecuación no Lineal de Schrödinger como Onda Dispersiva	27
2.4. Conclusiones del capítulo	28
3. Estabilidad e Inestabilidad Modulacional de las Soluciones de la Ecuación no Lineal de Schrödinger.	31
3.1. Espacios de Funciones, Normas y Estabilidad	32
3.2. Inestabilidad Modulacional	34
3.2.1. Inestabilidad Modulacional: Perturbando Amplitud	34
3.2.2. Inestabilidad Modulacional: Perturbando Amplitud y Fase	37
3.3. Conclusiones del capítulo	39
4. La Ecuación no Lineal de Schrödinger y Análisis de Estabilidad de Soluciones de Tipo Onda Plana	41

4.1.	La Relación de Dispersión de la Ecuación no Lineal de Schrödinger	41
4.2.	Estabilidad de las Soluciones de Onda Plana	43
4.2.1.	Estabilidad de las Soluciones de Onda Plana: Perturbación de Amplitud	43
4.2.2.	Estabilidad de las Soluciones de Ondas Planas: Perturbación de Amplitud y Fase	51
4.3.	Conclusiones del capítulo	62
5.	La Ecuación no Lineal de Schrödinger Discreta y su Análisis de Estabilidad de Soluciones de Tipo Ondas Planas.	65
5.1.	La lattice de Ablowitz-Ladik	67
5.1.1.	La relación de dispersión de la lattice de Ablowitz-Ladik	68
5.1.2.	La relación de dispersión de la lattice de Ablowitz-Ladik linealizada	68
5.2.	La Ecuación no Lineal de Schrödinger Discreta	71
5.2.1.	La Relación de Dispersión de la Ecuación no Lineal de Schrödinger Discreta	71
5.2.2.	La relación de dispersión de la ecuación DNLS linealizada: Perturbando la amplitud.	72
5.2.3.	Estabilidad de las soluciones de onda plana de la ecuación DNLS: Perturbación de la amplitud	78
5.2.4.	La relación de dispersión de la ecuación DNLS linealizada: Perturbando amplitud y fase.	84
5.2.5.	Estabilidad de las soluciones de onda plana de la ecuación DNLS: Perturbación de la amplitud y fase	90
5.3.	Conclusiones del capítulo	97
6.	El Método de Crank-Nicolson Linealizado	99
6.1.	La Relación de Dispersión del esquema de Crank-Nicolson linealizado	102
6.2.	La Relación de Dispersión del esquema LCN linealizado	104
6.3.	Análisis de Estabilidad de las Soluciones.	110
6.4.	Análisis de Estabilidad de las Soluciones para los casos $\tilde{\phi}_0 = 0$ y $\psi_0 = 0$	111
6.4.1.	Caso 1: $\tilde{\phi}_0 = 0$	111
6.4.2.	Caso 2: $\psi_0 = 0$	112
6.5.	Análisis de estabilidad con $D=0$	113
6.6.	Análisis de estabilidad para los casos $r = i$ y $-i$	115
6.6.1.	Análisis de estabilidad para $r = i$	117
6.6.2.	Análisis de estabilidad para $r = -i$	118
6.7.	Relación de dispersión del sistema linealizado con $B = 0$	119
6.8.	Conclusiones del capítulo	128
	Conclusiones finales	129
A.	Apéndice	131
A.1.	Análisis	131

1

La Transformada de Fourier

1.1 Series de Fourier

En 1822 Joseph Fourier publicó la *Teoría analítica de calor*, en la cual explica cómo varía la temperatura con el tiempo en los puntos de una placa bidimensional. La explicación que Fourier expuso consistió en una suma de senos y cosenos, cada uno de ellos con una frecuencia múltiplo de una frecuencia base, lo cual conocemos como **serie de Fourier**. La idea de representar problemas complejos como suma de funciones sencillas tuvo aplicaciones en áreas distintas a la termodinámica. Hoy en día ésta es una herramienta casi indispensable en campos de la física y la ingeniería [Alzate].

Las series de Fourier son una herramienta de las matemáticas que nos permite representar una función periódica y continua a trozos en términos de las funciones seno y coseno. Las series de Fourier son series trigonométricas cuyos coeficientes se determinan a partir de una función $f(x)$ [Kreyszig].

Sea $f(x)$ una función periódica, definida en el intervalo $-\pi < x < \pi$. Supongamos que $f(x)$ puede ser representada en términos de la siguiente serie trigonométrica,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.1)$$

para la cual

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

A la serie trigonométrica (1.1) con coeficientes dados por (1.2) y (1.3) se le conoce como serie de Fourier. A los elementos a_n y b_n se les conoce como coeficientes de Fourier.

Las series de Fourier también pueden ser escritas en forma compleja. Esto se hace con la finalidad de simplificar algunos cálculos al momento de trabajar con ellas. Para hacer este cambio utilizamos la identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Por la identidad de Euler tenemos que,

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \\ \sin nx &= \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}). \end{aligned}$$

Utilizando las identidades anteriores, podemos escribir la serie de Fourier (1.1) de la siguiente manera,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (1.4)$$

donde los c_n son los nuevos coeficientes de la serie de Fourier representada en números complejos,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (1.5)$$

Los coeficientes de Fourier a_n , b_n , y c_n están relacionados de la siguiente forma,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0, & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & \text{para } n \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & \text{para } n \leq 0. \end{cases}$$

A partir de ahora, cuando se mencione la serie de Fourier, nos estaremos refiriendo a la serie de Fourier compleja.

Por otra parte, observemos que si $f(x)$ es una función continua y continuamente diferenciable a trozos para $-\pi < x < \pi$, y si además $f(x - \pi) = f(x + \pi)$, es decir, $f(x)$ es periódica, al momento de expresar $f'(x)$ en términos de una serie de Fourier, tenemos que,

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{inx},$$

en donde los \tilde{c}_n tienen la siguiente forma,

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx.$$

Véase que los \tilde{c}_n cumplen lo siguiente,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - (-in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= inc_n, \end{aligned}$$

donde los c_n son los coeficientes de la serie de Fourier correspondientes a $f(x)$.

Análogamente si $f(x)$ es expandida como una función periódica de periodo 2π , y es dos veces continuamente diferenciable, entonces

$$f''(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^2 c_n e^{inx}.$$

Es decir, derivar a la función $f(x)$ dos veces es equivalente a multiplicar los coeficientes c_n de la serie de Fourier para $f(x)$ por $-n^2$.

Por lo tanto, diferenciar una función periódica, de periodo 2π , corresponde a multiplicar cada coeficiente c_n de la serie de Fourier por la cantidad in ,

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in c_n e^{inx})$$

en los intervalos de convergencia uniforme.

La propiedad anterior puede ser considerada como la más importante de los coeficientes de Fourier, ya que permite relacionar las derivadas de una función $f(x)$ con polinomios en n . Usando este hecho es posible reducir un gran número de ecuaciones diferenciales parciales, cuyos coeficientes sean independientes de x , a una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hasta este punto sólo se han considerado funciones de periodo 2π . Es un hecho que en las aplicaciones no todas las funciones periódicas tienen periodo 2π , y existirán funciones periódicas que tendrán otros periodos. Para la teoría de las series de Fourier la transición de trabajar con funciones de periodo $p = 2\pi$ a funciones de periodo $p = 2L$, es en esencia un alargamiento de la escala.

Para representar una función $f(x)$ periódica, continua a trozos en un intervalo $-L \leq x \leq L$ como una serie de Fourier, simplemente se introduce la variable $x' = \frac{\pi}{L}x$, $-\pi \leq x' \leq \pi$:

$$f(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x'\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{inx'}),$$

para la cual los coeficientes c_n son:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}x'\right) e^{-inx'} dx'.$$

Regresando a la variable x se tiene,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(L)} e^{in\frac{\pi}{L}x}, \quad (1.6)$$

con coeficientes $c_n^{(L)}$ dados de la siguiente manera,

$$c_n^{(L)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx. \quad (1.7)$$

Los coeficientes $c_n^{(L)}$ definen a la función $f(x)$ únicamente en el intervalo $(-L, L)$. Para más detalles consulte las referencias [\[Kreyszig\]](#), [\[Weinberger\]](#).

Análogamente al caso en el que $f(x)$ es una función continua de periodo $p = 2\pi$, para las funciones con periodo $p = 2L$ también se satisface el hecho de que derivar $f(x)$ corresponde a multiplicar

su representación en series de Fourier por un cierto factor. Para observar lo anterior, primero se representa a $f'(x)$ en la forma de la ecuación (1.6),

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(L)} e^{in\frac{\pi}{L}x}, \quad (1.8)$$

en la que $\gamma_n^{(L)}$ son los coeficientes de la serie de Fourier para la función $f'(x)$, y tienen la forma:

$$\gamma_n^{(L)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f'(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx. \quad (1.9)$$

Resolviendo la integral que aparece en (1.9) con la fórmula de integración por partes, resulta

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(L)} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f'(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx, \\ &= \frac{1}{2L} \left(f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} \right) \Big|_{-L}^L - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(-in\frac{\pi}{L} \right) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \\ &= \frac{1}{2L} \left[f(L) e^{-in\pi} - f(-L) e^{in\pi} \right] + \frac{i}{2L} \frac{n\pi}{L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\frac{\pi}{L}x} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2L} [f(L) - f(-L)] + in\frac{\pi}{L} c_n(L), \end{aligned}$$

cuando $f(L) = f(-L)$ la expresión anterior se reduce a,

$$\gamma_n^{(L)} = in\frac{\pi}{L} c_n^{(L)}.$$

Sustituyendo el valor de $\gamma_n^{(L)}$ en (1.8), se obtiene,

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\frac{\pi}{L} c_n^{(L)} e^{in\frac{\pi}{L}x}.$$

En otras palabras, los coeficientes $c_n^{(L)}$ dados en (1.7) también satisfacen la propiedad de que diferenciar una función $f(x)$ de periodo $p = 2L$ corresponde a multiplicar dichos coeficiente por el factor $in\pi/L$, como sucede con los coeficientes c_n para una $f(x)$ de periodo $p = 2\pi$.

1.2 Transformada de Fourier

Como ya ha sido mencionado, las series de Fourier son una herramienta matemática, las cuales se utilizan para abordar problemas en los que intervienen funciones periódicas. Sabido es que en la mayoría de las aplicaciones intervienen funciones no periódicas.

El objetivo de esta sección es explicar cómo se generalizan las ideas de las series de Fourier para poder ser aplicadas en funciones no periódicas y decir en qué casos es posible hacer esta generalización.

Considérese que $f(x)$ es una función no periódica, definida para x en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y que $f(x)$ puede ser determinada en término de los coeficientes $c_n^{(L)}$ sobre cualquier subintervalo $(-L, L)$. Ahora se intentará determinar $f(x)$ sobre todo el intervalo $(-\infty, \infty)$, tomando límites cuando $L \rightarrow \infty$.

Suponiendo que $f(x)$ es absolutamente integrable, es decir, que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ converge, entonces para los coeficientes $c_n^{(L)}$ se satisface

$$|c_n^{(L)}| = \frac{1}{2L} \left| \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi x}{L}} dx \right| \leq \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

lo cual tiende a cero cuando $L \rightarrow \infty$, es decir, el límite de cada coeficiente $c_n^{(L)}$ es cero (versión simple del lema de Riemann-Lebesgue, para mayor detalle consulte la referencia [Courant-John]).

Como se pudo observar, carece de utilidad calcular en primera instancia el límite de $c_n^{(L)}$ cuando $L \rightarrow \infty$, pues dicho límite resulta ser cero. Esto implica que los coeficientes $c_n^{(L)}$ de la serie de Fourier para $f(x)$ tienden a cero cuando L tiende a infinito. En vez de eso, consideremos el límite de $2Lc_n^{(L)}$. Si se fija n , entonces $n/L \rightarrow 0$ cuando $L \rightarrow \infty$, de este modo

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} 2Lc_n^{(L)} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi x}{L}} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

El límite anterior es una constante, sea m dicha constante. Como consecuencia a lo anterior no se puede determinar de manera única a $f(x)$, pues podría existir una función $g(x)$ diferente a $f(x)$, para la cual el resultado de integrar $g(x)$ con respecto a x sobre el dominio $(-\infty, \infty)$ sea la misma m que resulta al realizar la integral para $f(x)$ sobre el mismo dominio. Para mayor referencia consultar [Weinberger], [Marsden].

Obsérvese que cuando $L \rightarrow \infty$ el conjunto de los números de la forma $\frac{n\pi}{L}$ (con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), se vuelve cada vez más denso sobre la recta real. Sea $f_L(x)$ cualquier función periódica de periodo $p = 2L$ que puede ser representada como una serie de Fourier, como se vio anteriormente,

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(L)} e^{in\frac{\pi}{L}x}.$$

Haciendo el cambio de variable $k_n = \frac{n\pi}{L}$ y sustituyendo el valor de $c_n^{(L)}$, resulta

$$f_L(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) e^{-ik_n v} dv e^{ik_n x}. \quad (1.10)$$

Ahora se define Δk de la siguiente manera:

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Entonces se tiene que $1/L = \Delta k/\pi$, sustituyendo esto en la ecuación (1.10) se obtiene

$$f_L(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta k \int_{-L}^L f_L(v) e^{-ik_n v} dv e^{ik_n x}. \quad (1.11)$$

Esta expresión de $f_L(x)$ es válida para cualquier L fija, la cual puede ser arbitrariamente grande, pero finita.

Se calcula el límite cuando $L \rightarrow \infty$, resulta

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x),$$

en caso de que dicho límite exista para toda x real y fija. Además, supóngase que la función $f(x)$ no periódica resultante es absolutamente integrable sobre el eje x real.

Por otro lado, véase que cuando $L \rightarrow \infty$, el valor de $\Delta k \rightarrow 0$, por lo cual es natural decir que la serie infinita en la ecuación (1.11) se convierte en una integral que representa a $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ikv} dv e^{ikx} dk. \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) recibe el nombre de **Teorema de Fourier**.

Es posible escribir a la ecuación (1.12) de la siguiente manera,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ikv} dv \right] e^{ikx} dk. \quad (1.13)$$

La expresión entre corchetes es una función de k , la cual se denota por $\hat{f}(k)$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1.14)$$

Si la expresión de $\hat{f}(k)$ en el lado derecho de la ecuación (1.14) converge, será llamada la **Transformada de Fourier de $f(x)$** . Dado que $f(x)$ se supone absolutamente integrable, entonces (1.14) converge [Weinberger].

Para la existencia de la transformada de Fourier de una función $f(x)$ es suficiente con que se cumplan las siguientes dos condiciones: [Kreyszig]

1. La función $f(x)$ tiene que ser continua a trozos en todo intervalo finito.
2. La función $f(x)$ debe ser absolutamente integrable sobre el eje x .

La transformada de Fourier se puede ver como una extensión de los coeficientes c_n de la serie de Fourier para funciones no periódicas. Por lo tanto, la transformada de Fourier debe de tener las mismas propiedades básicas que los coeficientes de Fourier. La primera de estas propiedades explica lo que sucede al aplicar la transformada de Fourier a la derivada de una función $f(x)$.

Proposición 1.2.1. [*Kreyszig*] Sea $f(x)$ una función continua, $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Además, sea $f'(x)$ absolutamente integrable sobre el eje x . Entonces se cumple,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k).$$

Prueba. Integrando por partes y usando el hecho de que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx.\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, por hipótesis, entonces

$$f(x)e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k).$$

□

Proposición 1.2.2. [*Weinberger*] Sea $f(x) \in C^1$ para la cual existe una transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$ asociada a ella. Entonces la siguiente propiedad se cumple:

$$\frac{d\widehat{f}(k)}{dk} = \widehat{-ixf}(k)$$

Prueba. Se tiene que:

$$\frac{d\widehat{f}(k)}{dk} = \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx.$$

Dado que e^{-ikx} es continuo en k , y $f(x)$ es integrable para $-\infty \leq k \leq \infty$, se puede decir:

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{f}(k)}{dk} &= \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dk} e^{-ikx} dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{f}(k)}{dk} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-ikx} dx \\ &= \widehat{-ixf}(k).\end{aligned}$$

□

Esta última propiedad es muy útil, entre otras cosas, para demostrar que la transformada de una Gaussiana es una Gaussiana, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.1. Encontrar la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = e^{-ax^2}.$$

Para este ejemplo se usan las dos proposiciones anteriores. Primero se utiliza la proposición 1.2.2:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \widehat{e^{-ax^2}} \\ \frac{d\hat{f}(k)}{dk} &= \widehat{-ixf(k)} \\ &= \widehat{-ixe^{-ax^2}}(k)\end{aligned}$$

Por linealidad se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}(k)}{dk} &= \frac{i}{2a} \left(\widehat{-2axe^{-ax^2}} \right) (k) \\ &= \frac{i}{2a} (\widehat{e^{-ax^2}})',\end{aligned}$$

y por la proposición 1.2.1, el lado derecho de la última ecuación es:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}(k)}{dk} &= \frac{i}{2a} (ik) \widehat{e^{-ax^2}} \\ &= -\frac{k}{2a} \hat{f}(k),\end{aligned}$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\frac{d\hat{f}(k)}{dk}}{\hat{f}(k)} = -\frac{k}{2a}.$$

Integrando la ecuación anterior resulta

$$\ln(\hat{f}(k)) = -\frac{k^2}{4a} + C,$$

para la cual C es una constante. Finalmente se obtiene:

$$\hat{f}(k) = e^C e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

En el libro [Kreyszig], en el cual se define la transformada de Fourier del mismo modo que en este capítulo, calcula la transformada de Fourier de e^{-ax^2} . El resultado que obtienen es:

$$\widehat{e^{-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

Haciendo una comparación entre el resultado mostrado en [Kreyszig] y el resultado aquí obtenido, se puede concluir que ¹:

$$e^C = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

¹El propósito de este ejemplo es mostrar el uso de las propiedades 1.2.1 y 1.2.2. Existen otras formas de calcular $\widehat{e^{-ax^2}}$. Para más detalles consultar [Kreyszig].

Una propiedad adicional de la transformada de Fourier es la de linealidad como se verá a continuación.

Proposición 1.2.3. *Sea $f(x)$ una función para la cual existe su respectiva transformada de Fourier y sean a y b dos constantes cualesquiera. Entonces se cumple:*

$$\widehat{f(ax - b)}(k) = \frac{1}{|a|} e^{-ikb/a} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right).$$

Prueba. Sea $g(x)$ una función para la cual existe transformada de Fourier y a, b son constantes. Sea la función $g(x)$ una función de la siguiente forma:

$$g(x) \equiv f(ax - b).$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados, resulta

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax - b) e^{-ikx} dx,$$

y haciendo el siguiente cambio de variable $\xi = ax - b$, para $a > 0$ se cumple,

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(\xi+b)/a} f(\xi) d\xi.$$

Si $a < 0$, los límites de integración serán invertidos, lo cual introduce un signo negativo, además a se escribe en términos del valor absoluto $a = -|a|$. De esta manera obtenemos la fórmula con retardo:

$$\widehat{f(ax - b)}(k) = \frac{1}{|a|} e^{-ikb/a} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) \quad (1.15)$$

□

1.2.1 Transformada Inversa de Fourier

En muchos casos, un problema que involucra una ecuación diferencial parcial para una función $u(x, t)$ puede ser reducido a un problema que involucre una ecuación diferencial ordinaria para la transformada de Fourier $\hat{u}(k, t)$ de la función $u(x, t)$. Esto se hace con la finalidad de usar algún método de ecuaciones diferenciales ordinarias y resolver para $\hat{u}(k, t)$. Una vez que se determina la función $\hat{u}(k, t)$ es posible recuperar la función $u(x, t)$ por medio de la transformada inversa de Fourier.

La transformada inversa de Fourier se define como:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk \quad (1.16)$$

De esta manera, con la transformada inversa de Fourier, se puede recuperar una función $u(x)$ unívocamente, después de que a ésta se le haya aplicado la transformada de Fourier [Weinberger].

Ejemplo 1.2.2. Encuentre la solución de la ecuación de calor en una barra infinita, en donde $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$, para la condición inicial $u(x, 0) = e^{-x^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

No se sabe qué forma tiene $u(x, t)$, aun así se empleará su transformada de Fourier,

$$\frac{\widehat{\partial u(x, t)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \widehat{u(x, t)}}{\partial x^2} = 0.$$

Se puede usar la derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ dentro de la integral de Fourier, pues supone que $u(x, t)$ es absolutamente integrable. Para el primer término de la ecuación anterior resulta,

$$\frac{\widehat{\partial u(x, t)}}{\partial t} = \frac{\partial \widehat{u(k, t)}}{\partial t}.$$

Usando dos veces la propiedad 1.2.1 en el segundo término de la ecuación de calor, se tiene

$$\frac{d\widehat{u(k, t)}}{dt} = -k^2 \widehat{u(k, t)}.$$

De este modo, se pasa de tener un problema de ecuaciones diferenciales parciales a uno de ecuaciones ordinarias de primer orden. Al resolver la ecuación diferencial resulta,

$$\widehat{u(k, t)} = C e^{-k^2 t}.$$

Obsérvese que si se evalúa este resultado en $t = 0$ se obtiene:

$$\widehat{u(k, 0)} = C.$$

Lo cual quiere decir que C es la transformada de Fourier de la función $u(x, t)$ en $t = 0$. Por otro lado, la condición inicial del problema es $u(x, 0) = e^{-x^2}$. De lo anterior se concluye que C es la transformada de Fourier de la condición inicial. Entonces,

$$\begin{aligned} C = \widehat{u(x, 0)} &= \widehat{e^{-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}. \end{aligned}$$

Ahora que ya se conoce el valor de C se tienen que

$$\widehat{u(x, t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2(\frac{1}{4}+t)}.$$

Para recuperar la función $u(x, t)$ se aplica la transformada inversa de Fourier a $\widehat{u(x, t)}$, lo que determina a la función $u(x, t)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k, t)} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2(\frac{1}{4}+t)} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2(\frac{1}{4}+t)+ikx} dk. \end{aligned}$$

Con la finalidad de completar un trinomio cuadrado perfecto en el exponente $e^{-k^2(\frac{1}{4}+t)+ikx}$, se multiplicará el valor de $u(x, t)$ por la unidad de la siguiente forma:

$$1 = \exp\left(\frac{x^2}{1+4t}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right).$$

Posteriormente se escribe dicho trinomio como un binomio al cuadrado:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-k^2\left(\frac{1}{4}+t\right) + ikx\right) \exp\left(\frac{x^2}{1+4t}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right) dk \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-k^2\left(\frac{1}{4}+t\right) + ikx + \frac{x^2}{1+4t}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right) dk \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(k\sqrt{\frac{1}{4}+t} - \frac{ix}{\sqrt{1+4t}}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{(1+4t)}\right) dk. \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable $z = \left(k\sqrt{\frac{1}{4}+t} - \frac{ix}{\sqrt{1+4t}}\right)$, es decir, ahora en vez de integrar con respecto a k se integrará con respecto a z . En consecuencia se tiene,

$$\begin{aligned} dz &= \sqrt{\frac{1}{4}+t} dk \\ dk &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+t}} dz. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el cambio de variable anterior, la función $u(x, t)$ ahora tiene esta forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+t}} e\left(-\frac{x^2}{\sqrt{1+4t}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

El valor de la integral es ²:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Finalmente, se obtiene la función $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}},$$

para $t > 0$, en la cual $u(x, 0) = e^{-x^2}$.

1.2.2 El producto de convolución

Sean $f(x)$ y $h(x)$ cualesquiera dos funciones, ambas absolutamente integrables y de cuadrado integrable. El producto de convolución se define como:

$$(f * h)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)h(p)dp \quad (1.17)$$

²Para mayor detalle consulte las notas de la siguiente referencia [[Flaschka](#)].

Teorema 1.2.1. ³ Si $f(x)$ y $h(x)$ son ambas absolutamente integrables y de cuadrado integrable, y $\hat{f}(k)$ y $\hat{h}(k)$ son sus transformadas de Fourier, entonces el producto $\sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{h}(k)$ es la transformada de Fourier del producto de convolución $f * h$, es decir,

$$\widehat{f * h}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{h}(k) \quad (1.18)$$

Prueba. Como primer paso, sea la transformada de Fourier de $f * h$,

$$\widehat{f * h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)h(p)e^{-ikx} dp dx,$$

se intercambia el orden de integración,

$$\widehat{f * h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)h(p)e^{-ikx} dx dp.$$

Haciendo el cambio de variable $x-p=q$, y tomando a q como una nueva variable de integración, resulta

$$\begin{aligned} \widehat{f * h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(q)h(p)e^{-ik(q+p)} dq dp \\ \widehat{f * h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(q)h(p)e^{-ikq} e^{-ikp} dq dp \\ \widehat{f * h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(q)e^{-ikq} dq \int_{-\infty}^{\infty} h(p)e^{-ikp} dp. \end{aligned}$$

Finalmente agregando una unidad de la forma $(\sqrt{2\pi}/\sqrt{2\pi})$ se obtiene

$$\widehat{f * h}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{h}(k).$$

□

1.2.3 Solución de la Ecuación no Lineal de Schrödinger

A continuación se resolverá la ecuación no lineal de Schrödinger con condición inicial $u(x,0) = f(x)$ usando la transformada de Fourier y sus propiedades. La ecuación no lineal de Schrödinger es:

$$iu_t(x,t) + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t) + |u(x,t)|^2u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x). \quad (1.19)$$

En este punto no se sabe quién es $u(x,t)$, sin embargo se trabajará con la transformada de $u(x,t)$, $\widehat{u(x,t)}$. Para poder utilizar la herramienta de transformada de Fourier en este caso, es necesario imponer $|u(x,t)| = A^2$, donde A es un valor real. De este modo se tiene una ecuación lineal y de coeficientes constantes. Usando la propiedad 1.2.1 de la transformada Fourier para el segundo término de la ecuación (1.19), resulta la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$i \frac{d\widehat{u(x,t)}}{dt} + \frac{1}{2}(ik)^2\widehat{u(x,t)} + A^2\widehat{u(x,t)} = 0, \quad (1.20)$$

³Para mayor referencia sobre este teorema favor de consultar [\[Kreyszig\]](#)

la cual se resuelve con la solución general para ecuaciones homogéneas. Con ello se obtiene la siguiente solución para (1.20):

$$\widehat{u(x, t)} = C e^{-i(\frac{1}{2}k^2 - A^2)t}. \quad (1.21)$$

Para determinar el valor de C , se usa la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, y dado que se está trabajando con la transformada de Fourier de $u(x, t)$, se tienen que,

$$\widehat{u(x, 0)} = \widehat{f(x)}.$$

Por otro lado, de la solución (1.21) se observa que

$$\widehat{u(x, 0)} = C e^{-i(\frac{1}{2}k^2 - A^2)0} = C.$$

De esta manera $C = \widehat{f(x)}$, y la solución (1.21) ahora es

$$\widehat{u(x, t)} = \widehat{f(k)} e^{-i(\frac{1}{2}k^2 - A^2)t}. \quad (1.22)$$

Sabemos que la transformada inversa de Fourier determina unívocamente la función original, por lo tanto $u(x, t)$ es:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f(k)} e^{-i(\frac{1}{2}k^2 - A^2)t} e^{ikx} dk. \quad (1.23)$$

La función (1.23) es la solución general de la ecuación no lineal de Schrödinger (1.19) con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, y en donde $\widehat{f(k)}$ se elige de tal modo que la solución (1.23) satisfaga las condiciones iniciales.

1.3 Conclusiones del capítulo

Este capítulo se centra en el tema de la transformada de Fourier como una herramienta para resolver problemas relacionados con ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes. El capítulo comienza con las series de Fourier, pues son el antecedente a las transformadas de Fourier. Después se aborda el tema de la Transformada de Fourier, sus propiedades, el Teorema de Fourier y se finaliza con el producto de convolución.

Las series de Fourier se utilizan para representar funciones periódicas en términos de las funciones seno y coseno. Lo anterior se hace mediante una suma infinita de términos, los cuales consisten en las funciones seno y coseno multiplicadas por un coeficiente c_n . La parte más destacable en las series de Fourier es la propiedad que satisfacen los coeficientes c_n . Esta propiedad consiste en lo siguiente: si se tiene una función $f(x)$ escrita como serie de Fourier, entonces derivar dicha función corresponde a multiplicar cada coeficiente c_n por una cantidad in , en caso de que la función $f(x)$

sea de periodo 2π ; y por $\widehat{in\frac{\pi}{L}}$, si la función $f(x)$ es de periodo $2L$.

La transformada de Fourier es una generalización de los coeficientes c_n de las series de Fourier, pero ahora aplicado a funciones $f(x)$ no periódicas. Para que exista la transformada de Fourier de una función $f(x)$ es necesario que la función cumpla dos condiciones: la función $f(x)$ debe ser continua a trozos en todo intervalo finito y absolutamente integrable sobre el eje x . La transformada de Fourier cumple con las siguientes propiedades:

- Sea $f(x)$ una función continua sobre los reales, $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Además, sea $f'(x)$ absolutamente integrable sobre la línea real. Entonces se cumple,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k).$$

- Sea $f(x) \in C^1$ para la cual existe una transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$ asociada a ella. Entonces la siguiente propiedad se cumple:

$$\frac{d\widehat{f}(k)}{dk} = -i\widehat{xf}(k).$$

- Sea $f(x)$ una función para la cual existe su transformada de Fourier y sean a y b dos constantes cualesquiera. Entonces se cumple,

$$\widehat{f(ax-b)}(k) = \frac{1}{|a|} e^{-ikb/a} \widehat{f}\left(\frac{k}{a}\right).$$

El capítulo finalizó con el Teorema de Fourier, el cual menciona que después de que a una función $f(x)$ se le haya aplicado la transformada de Fourier, es posible recuperar dicha función unívocamente, mediante la transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

En el próximo capítulo se abordará el tema de las ondas dispersivas y su clasificación. Primero se dará una breve introducción sobre ondas hiperbólicas y ondas dispersivas. Después se definirán algunos conceptos sobre ondas, y se continuará con el tema de solución general mediante integrales de Fourier. Como complemento a esa sección se explicará por qué la ecuación no lineal de Schrödinger clasifica como dispersiva.

2

Ondas Dispersivas

En el capítulo anterior se abordó el tema de la transformada de Fourier. Se comenzó el capítulo hablando de las series de Fourier como antecedente a las transformadas de Fourier. Después se explicó el tema de la Transformada de Fourier, sus propiedades, el teorema de Fourier y se finalizó con el producto de convolución. Lo anterior se hizo con la finalidad de apoyar algunos temas que se tratarán en este capítulo.

En el presente capítulo se tratará especialmente el tema de ondas dispersivas. Se comenzará explicando en forma general qué es una onda, así como algunos conceptos relacionados con las mismas. Después se definirán dos tipos de clasificación de ondas: las ondas hiperbólicas y las ondas dispersivas. En relación con las ondas dispersivas se incluirán algunos temas relacionados con ellas. Al final se dará una pequeña explicación sobre por qué las soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger son ondas dispersivas.

2.1 Ondas

Existen diversas definiciones de onda, entre las cuales se destacan las siguientes:

- Una onda es cualquier señal reconocible, transferida de una parte del medio a otra, con una velocidad de propagación reconocible. La señal se puede distorsionar, cambiar su magnitud y su velocidad siempre y cuando sea reconocible [Weinberger].
- Una onda es una perturbación en un sistema físico que es tanto repetitiva en el tiempo como periódica en el espacio. Es capaz de transmitir energía e información de un lugar a otro sin transportar materia [Fitzpatrick].

Diferentes características son importantes en diferentes tipos de onda. Es posible clasificar a las ondas en dos tipos; ondas hiperbólicas y ondas dispersivas. Las ondas hiperbólicas son formuladas matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Por otra parte, las ondas dispersivas se clasifican por el tipo de solución que admite la ecuación que las genera. Esta clasificación no es exclusiva, algunas ondas pueden entrar en ambas clasificaciones y algunas otras en ninguna [Weinberger]. Antes de abordar directamente el tema de las ondas hiperbólicas y dispersivas, se introducirán algunos conceptos básicos relacionados con las ondas.

2.1.1 Propagación de Ondas, Ondas Armónicas y Ondas Planas

Considérese una cantidad física $u(x, t)$, la cual depende solamente de un eje coordenado x y del tiempo t . Si para algún dominio del espacio (x, t) la cantidad $u(x, t)$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

en la que c es una constante, entonces se puede decir que $u(x, t)$ es una onda que se propaga en dirección de x con una velocidad c . A este tipo de ondas se le conoce como *ondas viajeras* [Baldock & Bridgeman].

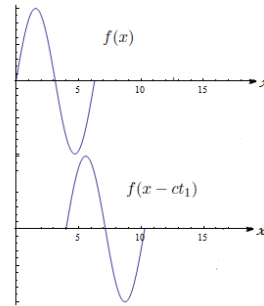


Figura 2.1. Propagación de onda al tiempo t_1

Onda Armónica

Una onda armónica es una función

$$u(\vec{x}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t),$$

para la cual el vector de onda \vec{k} es el vector en cuya dirección se propaga la onda, la magnitud k del vector \vec{k} es el número de onda, ω es la frecuencia y A la amplitud de onda. La onda viaja sobre el vector \vec{k} a una velocidad $c = \omega/k$.

La fase se define como la cantidad $\theta(x, t)$, la cual indica la situación instantánea de una magnitud que varía cíclicamente, describiendo las variaciones entre el valor máximo local (*cresta*) y el valor mínimo local (*valle*). Se denota por:

$$\theta(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t.$$

Una onda armónica compleja tiene la siguiente forma:

$$\varphi(x, t) = Ae^{i\theta(x, t)},$$

en la cual $u(x, t)$ es la parte real de $\varphi(x, t)$ [Baldock & Bridgeman].

En esta tesis se trabajará con una dirección de propagación de la forma $(k, 0, 0)$, de esta manera,

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = (k, 0, 0) \cdot (x, y, z) = kx,$$

y la fase será de la forma $\theta(x, t) = kx - \omega t$.

Obsérvese que si se deriva $\theta(x, t) = kx - \omega t$ con respecto a la variable espacial x , se obtiene el número de onda k . Además, el número de onda es el número de crestas por cada 2π unidades de distancia en dirección de x .

Del mismo modo, si se deriva $\theta(x, t)$ con respecto de la variable temporal se obtiene la frecuencia ω . La frecuencia ω es el número de crestas por cada 2π unidades de tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} &= k \\ -\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} &= \omega. \end{aligned}$$

El ancho de onda se define como $\lambda = 2\pi/k$, es la distancia en el eje x que existe entre cresta y cresta. El periodo de una onda es $\tau = 2\pi/\omega$ y es el tiempo que tarda la onda en viajar de cresta a cresta.

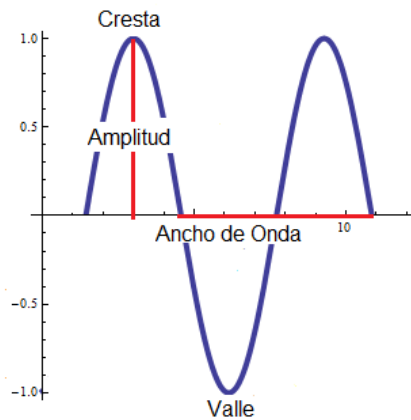


Figura 2.2. Medidas asociadas con las ondas armónicas

Onda Plana

Sea $u(x, t)$ una función que se puede escribir de la siguiente forma:

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

en la cual c es una constante positiva. Se dice que $u(x, t)$ es una onda plana si sobre cualquier plano perpendicular al eje x , $u(x, t)$ es una constante, y conforme el plano se mueve en dirección x con una velocidad constante c , la función $u(x, t)$ mantiene el mismo valor constante sobre ese mismo

plano. A estos planos se les llama frente de ondas [Baldock & Bridgeman].

Las funciones de la forma $u(x, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ y $\varphi(x, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ son ondas planas [Whitham]. Para explicar lo anterior, recuérdese que para el caso \mathbb{R}^3 la fase es de la forma:

$$\theta(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t.$$

Para un valor $\theta(x, t) = \theta_0$ constante y un tiempo fijo $t = t_0$, se tiene

$$\theta_0 = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t_0,$$

entonces,

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \theta_0 + \omega t_0.$$

Dado que ω, θ_0 y t_0 son constantes, resulta

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = K,$$

en el que K es una constante. En la expresión anterior se tiene un producto punto, si $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ y $\vec{x} = (x, y, z)$, se tienen lo siguiente:

$$k_1x + k_2y + k_3z = K. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) representa la ecuación de un plano y es por esta razón que a las funciones $u(x, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ y $\varphi(x, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ se les llama ondas planas. Estos planos reciben el nombre de frentes de onda. Si varía el tiempo t , cambia el valor de $K = \theta_0 + \omega t_0$ y el plano (2.1) también se mueve. Ver figura 2.3 tomada de [Kridnix].

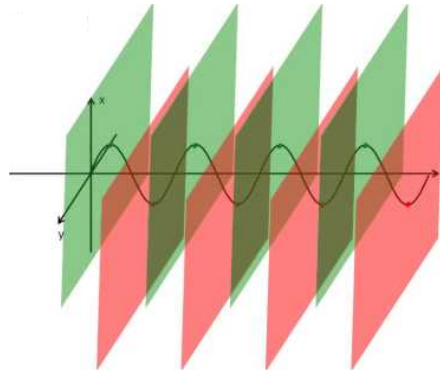


Figura 2.3. Frentes de onda en una onda plana

Para el caso $\vec{k} = (k, 0, 0)$, y un valor $\theta(x, t) = \theta_0$ constante con un tiempo fijo $t = t_0$ se tiene,

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{x} &= \theta_0 + \omega t_0 = K, \\ kx &= K. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $x = \frac{K}{k}$, dado que los valores K y k son constantes, entonces x es un valor constante. Lo cual genera un plano en el cual los vectores que pertenecen a él tienen la entrada x fija y los valores y y z son arbitrarios. Es aquí donde se puede observar que estos planos o frentes de onda son perpendiculares al eje x .

2.2 Ondas Hiperbólicas

Las ondas hiperbólicas pueden ser representadas como solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Los siguientes son modelos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

- Ecuación de onda unidireccional de primer orden:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + c_0 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = 0.$$

- Ecuación de onda de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2},$$

en las cuales c_0 es un coeficiente y ψ depende sólo de x y t .

Como se mencionó antes, las ondas hiperbólicas son aquellas ondas formuladas matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. La forma más general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden es,

$$a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + d \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + e \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F u(x, t) = 0, \quad (2.2)$$

para la cual a, b, c, d, e pueden ser constantes o funciones de x y t , y F es función de x y t . Se dice que la ecuación diferencial parcial (2.2) es hiperbólica si se cumple que $ac - b^2 < 0$ [Sommerfeld].

2.3 Ondas Dispersivas

Clasificar ondas dispersivas es un poco más difícil que clasificar las ondas hiperbólicas, ya que esta clasificación se realiza según el tipo de solución que un sistema admite, en lugar de las propias ecuaciones que estas ondas satisfacen. Un sistema lineal dispersivo es cualquier sistema físico que tiene soluciones de la forma:

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t), \quad (2.3)$$

en el que k es el número de onda, ω es la frecuencia y A la amplitud de onda.

Para problemas que involucren ecuaciones diferenciales parciales, las ondas dispersivas usualmente son reconocidas por la existencia de soluciones elementales de la forma:

$$\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.4)$$

Estas soluciones son de tipo onda plana. Para que un sistema sea dispersivo no sólo debe admitir soluciones de la forma (2.3) o (2.4), además debe cumplir que la velocidad de fase no sea constante.

Para que las soluciones de la forma (2.4) satisfagan al sistema dispersivo, los valores ω y k deben de estar relacionados por una ecuación $G(\omega, k) = 0$, la cual es determinada por el problema. La

relación entre ω y k se llama *relación de dispersión*.

Supóngase que la relación de dispersión se soluciona en la forma de raíces reales $\omega = W(k)$. El número de raíces de ω nos dará el número de soluciones y a cada raíz de ω se le conoce como *modo* [Whitham].

2.3.1 Correspondencia entre la ecuación y su relación de dispersión

La relación de dispersión es la relación que existe entre las variables ω y k a través de las derivadas parciales de la ecuación que describe dicho sistema. Es posible prescindir de la ecuación una vez que se conoce la relación de dispersión, y también se puede construir la ecuación a partir de la relación de dispersión.

Una ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes constantes puede ser escrita como:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x, t) = 0,$$

en el que P es un polinomio en las variables t, x_1, \dots, x_n .

Cuando la solución elemental (2.4) es sustituida en la ecuación diferencial, cada $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t)$ produce un factor $-i\omega$, y cada $\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x, t)$ produce in factor ik_j . De este modo, la relación de dispersión es

$$P(-i\omega, ik_1, \dots, ik_n) = 0, \quad (2.5)$$

en el cual P es un polinomio en las variables $-i\omega, ik_1, \dots, ik_n$ [Whitham].

En base a la relación entre ambos polinomios es posible prescindir de la ecuación cuando la relación de dispersión se conoce, como se verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.3.1.

Encuentre la relación de dispersión y la solución general de la siguiente ecuación diferencial parcial,

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0,$$

con $\gamma > 0$.

Supóngase que la, o las soluciones a este sistema son de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{ikx - i\omega t}$, para la que A es distinto de cero.

Calculando las derivadas parciales de $\varphi(x, t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= -\omega^2 Ae^{ikx - i\omega t} \\ \varphi_{xxxx} &= k^4 Ae^{ikx - i\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned}\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} &= 0, \\ (-\omega^2 + \gamma^2 k^4) A e^{ikx - i\omega t} &= 0, \\ (-\omega^2 + \gamma^2 k^4) \varphi(x, t) &= 0.\end{aligned}$$

Se sabe que $\varphi(x, t)$ es distinto de cero por ser una función exponencial. Por lo tanto se tiene que

$$P(\omega, k) = -\omega^2 + \gamma^2 k^4 = 0,$$

la expresión anterior es la relación de dispersión del sistema.

A las raíces de $P(\omega, k) = 0$ se les denominó como modos. En este caso se tienen dos modos, los cuales son: $W(k) = \pm \gamma k^2$, es decir, $\omega_1 = \gamma k^2$, y $\omega_2 = -\gamma k^2$. Lo cual indica que existen dos soluciones de la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, t) &= A e^{ikx - i\gamma k^2 t} \\ \varphi_2(x, t) &= A e^{ikx + i\gamma k^2 t}.\end{aligned}$$

Finalmente la solución general es:

$$\varphi(x, t) = c_1 \varphi_1(x, t) + c_2 \varphi_2(x, t),$$

para $k \in \mathbb{R}$, en la que c_1 y c_2 son constantes.

Ejemplo 2.3.2. Indique cuál es la ecuación diferencial parcial si su relación de dispersión es la siguiente. Además se sabe que dicha ecuación diferencial acepta soluciones de la forma $\varphi(x, t) = A e^{ikx - i\omega t}$:

$$-\omega - \alpha k - \beta k^3 = 0.$$

Multiplicando por i y por $\varphi(x, t)$ la relación de dispersión se tiene

$$(-i\omega - \alpha ik - \beta ik^3) \varphi(x, t) = 0.$$

Por otro lado, se sabe que cada derivada con respecto al tiempo genera un factor $-i\omega$ y cada derivada con respecto a la variable espacial un factor ik ,

$$\begin{aligned}\varphi_t &= -i\omega A e^{ikx - i\omega t} \\ \varphi_x &= ik A e^{ikx - i\omega t} \\ \varphi_{xxx} &= -ik^3 A e^{ikx - i\omega t}.\end{aligned}$$

Asociando a cada factor su correspondiente derivada se recupera la ecuación diferencial parcial

$$\varphi_t - \alpha \varphi_x + \beta \varphi_{xxx} = 0.$$

2.3.2 Solución general mediante integrales de Fourier.

Para problemas lineales, soluciones más generales son obtenidas mediante superposición a la integral de Fourier. Es decir, se sabe que los sistemas dispersivos admiten soluciones elementales,

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

con $\omega = W(k)$, en la que $W(k)$ se obtiene de la relación de dispersión del sistema. La solución $\varphi(x, t)$ es una solución para el sistema dispersivo, y es válida para cualquier valor de k . Por lo cual es posible superponer la solución $\varphi(x, t)$ sobre todas las k 's para obtener una solución general

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx - iW(k)t} dk, \quad (2.6)$$

en la que $\hat{f}(k)$ es elegida para cumplir las condiciones iniciales y de frontera, siempre y cuando, estos datos cumplan las condiciones para admitir transformadas de Fourier. En nuestro caso para tener congruencia con las definiciones de transformada de Fourier y transformada inversa de Fourier dadas en el capítulo 1, se agregará el coeficiente $1/\sqrt{2\pi}$. Por otro lado, si existen n modos con n diferentes opciones de $W(k)$, entonces se tienen n términos como (2.6), con n funciones $\hat{f}(k)$ y n condiciones iniciales para determinar el problema.

En el ejemplo (2.1.1), se tiene

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0,$$

el número de raíces de la relación de dispersión indican que existen dos modos de la forma $W(k) = \pm \gamma k^2$. En este tipo de casos, en los que las ecuaciones tienen dos modos, es apropiado establecer condiciones iniciales sobre $\varphi(x, 0)$ y $\varphi_t(x, 0)$,

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(k) e^{ikx - iW(k)t} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(k) e^{ikx + iW(k)t} dk, \quad (2.7)$$

con condiciones iniciales, $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$, $\varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x)$.

Tomando en cuenta las condiciones iniciales en la solución (2.7) se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{f}_1(k) + \hat{f}_2(k)\} e^{ikx} dk \\ \varphi_1(x) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W(k) \{\hat{f}_1(k) - \hat{f}_2(k)\} e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Fourier se puede recuperar $\hat{f}_1(k) + \hat{f}_2(k)$ como sigue,

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(k) + \hat{f}_2(k) &= \Phi_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) e^{-ikx} dx \\ -iW(k) \{\hat{f}_1(k) - \hat{f}_2(k)\} &= \Phi_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se puede determinar $\hat{f}_1(k)$ y $\hat{f}_2(k)$,

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(k) &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi_0(k) + \frac{i\Phi_1(k)}{W(k)} \right\} \\ \hat{f}_2(k) &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi_0(k) - \frac{i\Phi_1(k)}{W(k)} \right\}.\end{aligned}$$

Al sustituir $\hat{f}_1(k)$ y $\hat{f}_2(k)$ en (2.7) se obtiene la solución general a un problema con condiciones iniciales $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ y $\varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x)$. [Whitham]

2.3.3 Paquete de Ondas

Al inicio de la sección anterior se explicó que cuando un sistema acepta soluciones de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, es conveniente escribir la solución general de un problema con condición inicial como una integral sobre k . En la sección anterior se nombró a esta solución general como (2.6),

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx - i\omega t} dk,$$

para la cual $\hat{f}(k)$ es la transformada de Fourier de $\varphi(x, 0)$. La solución general (2.6) es una superposición, o combinación lineal de ondas armónicas. Las condiciones iniciales determinan la transformada de Fourier del problema.

Un paquete de ondas es una forma especial de la solución (2.6) en la cual las condiciones iniciales $\varphi(x, 0)$ son elegidas de manera que $\hat{f}(k)$ alcanza su máximo valor en $k = k_0$ y decae rápidamente conforme avanza una distancia $|k - k_0|$. Un paquete de ondas es una superposición lineal de ondas, que toma forma de pulsos, y se desplaza de modo relativamente compacto en el espacio antes de dispersarse. Entonces (2.6) es un paquete de ondas centrado en k_0 y cuyo ancho de paquete de ondas es $2\Delta k$, con $\Delta k = |k - k_0|$. Véase figura 2.4

Lo anterior sugiere escribir la relación de dispersión $\omega = W(k)$ como una serie de Taylor alrededor de k_0 como sigue:

$$W(k) = W(k_0) + W'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}W''(k_0)(k - k_0)^2 + O(k - k_0)^3. \quad (2.8)$$

Supóngase que el sistema no tiene derivadas mayores a las de segundo orden. La solución (2.6) se convierte en:

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx - iW(k)t} dk, \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - (W(k_0) + W'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}W''(k_0)(k - k_0)^2)t)} dk, \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - (W(k_0) + W'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}W''(k_0)(k - k_0)^2)t)} e^{i(k_0 - k_0)x} dk.\end{aligned}$$

Las operaciones que se hicieron en el bloque anterior de cuentas son: se substituyó $W(k)$ por la serie (2.8) y se multiplicó el integrando por una unidad de la forma $e^{i(k_0-k_0)x}$. Sacando de la integral los valores que no dependen de k , se tiene que la solución (2.6) finalmente se convierte en:

$$\varphi(x, t) = e^{i(k_0x - W(k_0)t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i((k-k_0)x + W'(k_0)(k-k_0)t + \frac{1}{2}W''(k_0)(k-k_0)^2t)} dk. \quad (2.9)$$

El factor $e^{i(k_0x - W(k_0)t)}$ es una onda que viaja a una velocidad $v_p = \frac{W(k_0)}{k_0}$, llamada velocidad de fase. El resto de la expresión es la amplitud de la onda, y se llama *envolvente*,

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i((k-k_0)x - W'(k_0)(k-k_0)t - \frac{1}{2}W''(k_0)(k-k_0)^2t)} dk,$$

haciendo el cambio de variable $\kappa = k - k_0$ en la expresión anterior se tiene:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa + k_0) e^{i(\kappa)x - W'(k_0)(\kappa)t - \frac{1}{2}W''(k_0)(\kappa)^2t} d\kappa. \quad (2.10)$$

El término $\frac{1}{2}W''(k_0)(\kappa)^2t$ puede ser despreciado, siempre y cuando se satisfaga la siguiente propiedad:

$$t \ll \frac{1}{W''(k_0)(\kappa)^2}. \quad (2.11)$$

Por lo anterior se tiene que la envolvente (2.10) se ve como:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa + k_0) e^{i\kappa(x - W'(k_0)t)} d\kappa.$$

Al mismo tiempo obsérvese que:

$$\phi(x, t) = G(x - W'(k_0)t),$$

es decir, la envolvente (2.10) se puede ver como una función que viaja en dirección x y se desplaza a una velocidad $v_g = W'(k_0)$, la cual se conoce como velocidad de grupo [Baldock & Bridgeman].

A manera de explicar lo anterior, considérense dos ondas armónicas, con igual amplitud, pero fases θ_1 y θ_2 ligeramente distintas,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= A \operatorname{sen}(k_1x - \omega_1t) \\ u_2(x, t) &= A \operatorname{sen}(k_2x - \omega_2t), \end{aligned}$$

con $k_1 \neq k_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$.

Al sumar $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ resulta:

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) = A[\operatorname{sen}(k_1x - \omega_1t) + \operatorname{sen}(k_2x - \omega_2t)]$$

Usando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

entonces,

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2A \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) \sin\left(\frac{(k_1 + k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right).$$

Sean:

$$\begin{aligned} k &= \frac{k_1 + k_2}{2}, \\ \omega &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \\ \Delta k &= \frac{k_1 - k_2}{2}, \\ \Delta \omega &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que:

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \sin(kx - \omega t).$$

La cual se puede escribir de la siguiente manera:

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) = \phi(x, t) \sin(kx - \omega t),$$

en la cual $\phi(x, t) \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ es una onda, con amplitud $\phi(x, t)$, la cual viaja con una velocidad de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{k}.$$

Además $\phi(x, t)$ es de la forma:

$$\phi(x, t) = 2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t),$$

que a su vez, es una onda que se propaga a una velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

En este caso, $\phi(x, t)$ es la envolvente que resulta al sumar dos ondas armónicas [Alzate].

2.3.4 Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo.

La velocidad de fase es la velocidad a la cual se propagan las ondas armónicas, y se denota por [Crawford]:

$$v_p = \frac{\omega}{k}.$$

Para cualquier modo particular $\omega = \omega(k)$, la velocidad de fase está dada en términos del número de onda k . Diferentes números de onda producirán diferentes velocidades de propagación de ondas. Esto explica el concepto de dispersión. Cuando se tiene una solución general (2.6), los componentes con diferentes números de onda k se dispersarán a medida de que el tiempo pase [Whitham].

La velocidad de grupo es una propiedad local del paquete de ondas, es la velocidad con la que las variaciones en la forma de la amplitud de la onda, también llamada *envolvente*, se propagan en el espacio. La velocidad de grupo es más significativa que la velocidad de fase y se define como [Scott]:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

En síntesis, la superposición de soluciones con diferentes números de onda se propaga con la velocidad de grupo.

Cuando sucede que $\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0$, se tiene como consecuencia que el sistema no clasifica como dispersivo dado que la velocidad de fase y la velocidad de grupo coinciden.

Supóngase que se tiene un sistema para el cual la relación de dispersión es $W(k) = ck$, en la que c es una constante. En este caso se satisface $\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0$.

La velocidad de fase de este sistema es:

$$v_p = \frac{W(k)}{k} = \frac{ck}{k} = c.$$

Y la velocidad de grupo del sistema es:

$$v_g = \frac{d(W(k))}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = c.$$

Como se puede observar, en este caso la velocidad de fase es la misma que la velocidad de grupo y el sistema no es dispersivo. Un ejemplo en el que ocurre lo anterior es la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

En resumen, para que un sistema dispersivo clasifique como tal debe cumplir:

- Admitir soluciones de la forma (2.4)
- La segunda derivada de ω con respecto a k sea distinta de cero, es decir:

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \neq 0.$$

En la siguiente figura se pueden apreciar el paquete de ondas, y los lugares donde actúan la velocidad de grupo y la velocidad de fase.

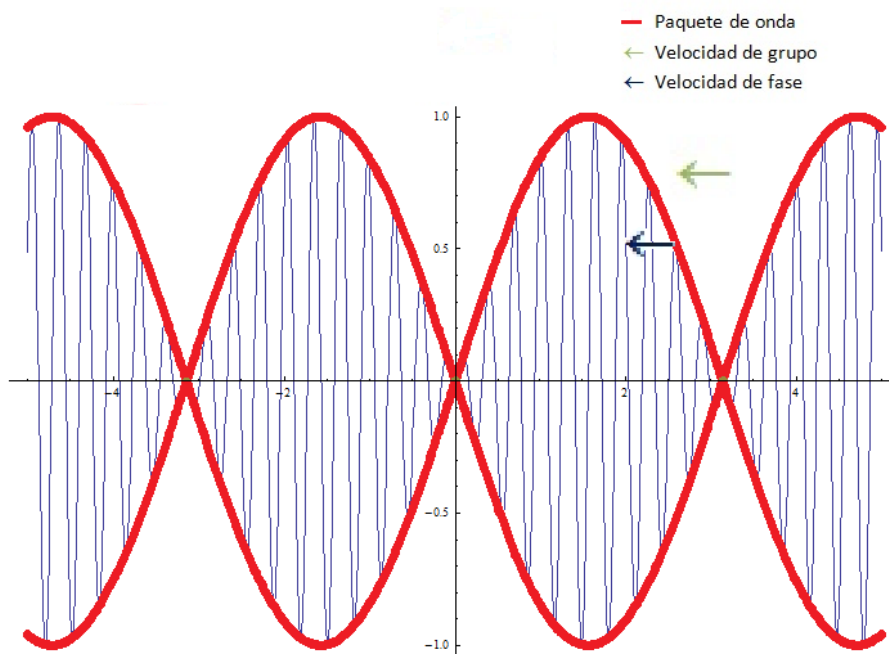


Figura 2.4. Paquete de ondas, velocidad de fase y velocidad de grupo

2.3.5 La Clasificación de la Ecuación no Lineal de Schrödinger como Onda Dispersiva

En secciones anteriores se ha abordado el tema de las ondas dispersivas. Al final de la sección anterior se dieron un par de criterios para saber si un sistema clasificaba como dispersivo o no. A continuación se mostrará que la ecuación no lineal de Schrödinger es un sistema dispersivo.

Para que la ecuación no lineal de Schrödinger clasifique como dispersiva tiene que cumplir:

- Admitir soluciones de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$
- La segunda derivada de ω con respecto a k sea diferente de cero, es decir:

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \neq 0.$$

Como primer paso se verá que las soluciones de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ satisfacen la ecuación no lineal de Schrödinger. La ecuación NLS es:

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \sigma |u(x, t)|^2 u(x, t).$$

Sustituyendo las soluciones de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ en la ecuación NLS resulta,

$$i \frac{\partial Ae^{i(kx - \omega t)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Ae^{i(kx - \omega t)}}{\partial x^2} - \sigma |Ae^{i(kx - \omega t)}|^2 Ae^{i(kx - \omega t)},$$

derivando e igualando a cero se obtiene,

$$i(-i\omega)Ae^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}(ik)^2Ae^{i(kx-\omega t)} + \sigma|A|^2Ae^{i(kx-\omega t)} = 0.$$

Factorizando $Ae^{i(kx-\omega t)}$,

$$\left(\omega - \frac{1}{2}k^2 + \sigma|A|^2\right)Ae^{i(kx-\omega t)} = 0.$$

Dado que siempre se cumple que $Ae^{i(kx-\omega t)} \neq 0$ se puede eliminar, por lo tanto,

$$\omega - \frac{1}{2}k^2 + \sigma|A|^2 = 0.$$

Esta igualdad se satisface cuando ω sea de la siguiente forma:

$$\omega(k) = \frac{1}{2}k^2 - \sigma|A|^2.$$

Es decir, cuando ω es de la forma anterior, las soluciones de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ son soluciones para la ecuación no lineal de Schrödinger.

Ahora, se verá si se cumple que la segunda derivada de $\omega(k)$ con respecto de k es diferente de cero.

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \frac{1}{2}k^2 - \sigma|A|^2, \\ \frac{d\omega(k)}{dk} &= \frac{1}{2}2k, \\ \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} &= 1.\end{aligned}$$

Como se observa, la segunda derivada de $\omega(k)$ con respecto de k es diferente de cero.

Por lo tanto la ecuación no lineal de Schrödinger es un sistema dispersivo.

2.4 Conclusiones del capítulo

Este capítulo se centró en el tema de ondas dispersivas, inició con una breve definición de onda, y se dieron algunos conceptos relacionados con ellas. Después, se explicó que existen dos tipos de clasificación de ondas: las ondas hiperbólicas y las ondas dispersivas. Se discutieron algunos temas relacionados directamente con las ondas dispersivas, tales como: relación de dispersión, solución general mediante integrales de Fourier, paquete de ondas, velocidad de fase y velocidad de grupo. Se finalizó el capítulo dando argumentos sobre por qué las soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger se clasifican como ondas dispersivas.

Las ondas hiperbólicas son aquellas ondas que se formulan matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Por otra parte, las ondas dispersivas se clasifican por el

tipo de solución que admite la ecuación que las genera. La clasificación no es exclusiva, algunas ondas pueden entrar en ambas clasificaciones y algunas otras en ninguna

En problemas que involucren ecuaciones diferenciales parciales, usualmente las ondas dispersivas son reconocidas por la existencia de soluciones elementales de tipo onda plana, de la forma:

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

Para satisfacer dichas ecuaciones, los valores ω y k de la expresión anterior, deben de estar relacionados por una ecuación $G(\omega, k) = 0$, la cual es determinada por cada problema. A esta relación se le conoce como *relación de dispersión*.

Dado que la solución $\varphi(x, t)$ es una solución para el sistema dispersivo, válida para cualquier valor de k , se puede superponer la solución $\varphi(x, t)$ sobre todas las k 's para obtener una solución más general,

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx - iW(k)t} dk, \quad (2.12)$$

para la cual $\hat{f}(k)$, es elegida para cumplir las condiciones iniciales y de frontera, siempre y cuando, estos datos cumplan las condiciones para admitir transformadas de Fourier. Es aquí donde se observa directamente la relación de este capítulo con el capítulo anterior.

Estas soluciones generales describen paquetes de ondas. Un paquete de ondas es una superposición lineal de ondas, que toma la forma de pulsos y desplaza de manera compacta en el espacio antes de dispersarse. El paquete de ondas se puede ver como una solución en forma de tren de ondas, en el cual la amplitud de este tren de ondas en lugar de ser constante es una función que depende de x y t . A esta variación de la amplitud se le llama *envolvente* y es la que genera los pulsos. En un paquete de ondas existen dos tipos de velocidades: la velocidad de fase y la velocidad de grupo.

La velocidad de fase, es la tasa a la cual la fase de una onda se propaga en el espacio y se denota por:

$$v_p = \frac{\omega}{k}.$$

La velocidad de grupo es la velocidad con la que las variaciones en la forma de la amplitud de la onda o la *envolvente* se propagan en el espacio. La velocidad de grupo se define de la siguiente forma:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Cuando en un sistema se cumple que $\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0$ se tiene como consecuencia que el sistema no clasifica como dispersivo dado que la velocidad de fase y la velocidad de grupo coinciden. Un sistema es dispersivo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Admitir soluciones de la forma (2.4)

- La segunda derivada de ω con respecto a k sea distinta de cero, es decir:

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \neq 0.$$

La ecuación no lineal de Schrödinger satisface las dos condiciones anteriores, por lo tanto es un sistema dispersivo. Lo anterior es relevante dado que el tema principal de esta tesis involucra a la ecuación no lineal de Schrödinger y las soluciones de tipo onda plana que admite. Lo expuesto en este capítulo apoya y justifica las soluciones elegidas para esta ecuación.

3

Estabilidad e Inestabilidad Modulacional de las Soluciones de la Ecuación no Lineal de Schrödinger.

En este capítulo se abordará el significado de inestabilidad modulacional y se verá cómo se relaciona este concepto con las soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS).

Como se dijo en la introducción, la estabilidad es un concepto fundamental en física. Un fenómeno se encuentra en estado estacionario cuando las variables físicas de éste no cambian conforme transcurre el tiempo. Ya sea que dichas variables físicas sean las mismas para todo tiempo, o cambien en periodos de tiempo, y se repitan de manera idéntica para cada periodo.

Se dice que un estado estacionario es estable si bajo pequeñas alteraciones cambian sus variables físicas, pero después de un tiempo t finito vuelve al mismo estado estacionario. De otro modo el fenómeno es inestable [Scott].

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad están fuertemente asociados con el estudio del comportamiento de soluciones de ecuaciones diferenciales. Estudiar la estabilidad de las soluciones es fundamental, ya que solamente las que son estables pueden ser reproducibles experimentalmente. Aunque las soluciones inestables existen en teoría, rara vez o nunca podrán ser observadas. Por lo tanto, con un estudio de estabilidad se podrá distinguir a las soluciones que se pueden realizar experimentalmente de las que no [Lafortune]. Desde un punto de vista práctico es importante poder analizar la estabilidad de un sistema, ya que las perturbaciones siempre van a estar presentes de una forma u otra.

En ecuaciones diferenciales ordinarias los puntos de equilibrio juegan un papel fundamental. Un punto de equilibrio ha de satisfacer un cierto criterio de estabilidad para ser relevante físicamente [Hirsch & Smale].

Considérese una ecuación diferencial

$$x' = f(x), \tag{3.1}$$

donde $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$, f es C^1 , y B es un abierto contenido en \mathbb{R}^n . Un punto $\bar{x} \in B$ se dice que es un punto de equilibrio si $f(\bar{x}) = 0$.

Un punto de equilibrio es estable si las soluciones próximas permanecen próximas en todo instante posterior. La definición matemática de un punto de equilibrio, tomando el sistema (3.1) como referencia es ¹:

1. **Punto de equilibrio estable:** El punto \bar{x} es un punto de equilibrio estable si para todo entorno V de B existe un entorno $V_1 \subset V$ tal que toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en V_1 está definida y permanece en V para todo $t > 0$.
2. **Punto de equilibrio asintóticamente estable:** El punto \bar{x} es un punto de equilibrio asintóticamente estable si para todo entorno V de B existe un entorno $V_1 \subset V$ tal que toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en V_1 está definida y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
3. **Punto de equilibrio inestable:** El punto \bar{x} es un punto de equilibrio inestable si existe un entorno V de \bar{x} tal que para todo entorno $V_1 \subset V$, existe al menos una solución $x(t)$ con $x(0)$ en V_1 tal que a partir de algún $\tau > 0$, $x(\tau)$ no permanece enteramente en V .

En el análisis de estabilidad de las soluciones para la ecuación no lineal de Schrödinger se buscará seguir la idea que se maneja en ecuaciones diferenciales ordinarias. Se establecerán criterios de estabilidad para una solución de la ecuación no lineal de Schrödinger $u(x, t)$, en lugar de un punto, como en el caso anterior. A continuación se explicará a grandes rasgos el proceso utilizado para establecer los criterios de estabilidad que se emplearán en los capítulos posteriores.

3.1 Espacios de Funciones, Normas y Estabilidad

La estabilidad modulacional es un sólo tipo de estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Hay una gran cantidad de diferentes tipos de estabilidad. En esta sección se describirá cómo se pueden definir algunos de estos tipos de estabilidad y mencionaremos otros.

Para comenzar, se tiene que especificar en qué espacio “viven” dichas soluciones, y una norma asociada a dicho espacio. Por ejemplo, en el caso tratado en esta tesis, es el espacio de funciones continuas y periódicas de periodo $\frac{2\pi}{|k|}$ para algún k en \mathbb{R} , k distinto de cero, con dominio en $\left[0, \frac{2\pi}{|k|}\right] \times \mathbb{R}^+$ y contradominio en \mathbb{C} :

$$u : \left[0, \frac{2\pi}{|k|}\right] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C},$$

es decir, (x, t) se encuentra en $\left[0, \frac{2\pi}{|k|}\right] \times \mathbb{R}^+$ y $u(x, t)$ está en \mathbb{C} . La norma en cuestión es la norma de máximo:

$$\|u(x, t)\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 2\pi/|k|]} |u(x, t)|, \quad \text{para } t \geq 0 \text{ fijo.}$$

Si $k = 0$, se piensa en funciones:

$$u : (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

¹Las definiciones de puntos de equilibrio fueron tomadas del libro [Hirsch & Smale]

Entonces, si trabajamos con otro tipo de espacios y sus normas podemos definir otros tipos de estabilidad [Lieb-Loss]. Por ejemplo, para funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con norma:

$$\|f\|_1 = \sqrt[2]{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx},$$

tenemos el espacio de funciones integrables o espacio de funciones $L^1(\mathbb{R})$. Si cambiamos de norma, en la norma $L^2(\mathbb{R})$,

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx},$$

tenemos el espacio de funciones cuadrado integrable, o el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$.

El espacio H^1 es el espacio de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que f y f' pertenecen al espacio de funciones cuadrado integrable, con norma:

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^1}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx, \\ \|f\|_{H^1}^2 &= \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2. \end{aligned}$$

La norma H^1 está fuertemente relacionada a la norma de la energía en mecánica cuántica. El hamiltoniano (la energía) es:

$$H[\Psi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} |\Psi_x|^2 + V(x) |\Psi|^2 dx,$$

cuando el potencial $V(x) \geq 0$ entonces la ecuación anterior define la norma. Nótese que la ecuación de Schrödinger se sigue del principio variacional:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i \frac{\delta H}{\delta \Psi^*},$$

donde $\frac{\delta H}{\delta \Psi^*}$ es la derivada de Frèchet de H con respecto a Ψ^* (el complejo conjugado de Ψ).

Para la ecuación NLS, el hamiltoniano es:

$$H[\Psi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} |\Psi_x|^2 + \sigma |\Psi|^4 dx,$$

el cual define una norma en el caso enfocante $\sigma = 1$. Para otros tipos de norma, ver [Lieb-Loss]. Es importante notar que una solución estable en una norma específica puede no ser estable en una norma diferente.

En este trabajo se decidió usar la norma de máximo pues, por una parte, es sencilla su formulación, y por otra, había aun casos abiertos para su estudio, como lo son los casos semi-discretos y los casos discreto-discreto.

Cabe hacer notar que se le llama estabilidad modulacional cuando se trabaja en el espacio $\|\cdot\|_\infty$ (se calculan modelos de funciones para calcular esta norma) de funciones periódicas. Para otros tipos de normas no se le llama modulacional. Aún considerando un espacio y una norma, hay muchos tipos de estabilidad: estabilidad lineal, no lineal, espectral, orbital, estructural, entre otras [Scott].

Estudios sobre estabilidad de soluciones de la ecuación NLS se pueden encontrar, por ejemplo, en las siguientes referencias: [Cazanave y Lions], [Vuslaeb y Perelman], [Bronski, Carr, Deconick y Kutz], [Terrones, McLaughlin, Overman y Pearlstein], [Weinstein], [Mizumachi y Pelinovsky], [Kapitula y Sanstade 1] y [Kapitula y Sanstade 2].

3.2 Inestabilidad Modulacional

La inestabilidad modulacional es uno de los tipos de inestabilidad presentes en la naturaleza. El campo de estudio que comprende la inestabilidad modulacional es muy amplio, pues este tipo de inestabilidad puede estar presente en fenómenos tanto a nivel microscópico como a gran escala. Lo anterior explica el porqué la inestabilidad modulacional ha tenido gran auge y relevancia en los últimos sesenta años.

Los estudios sobre inestabilidad modulacional se iniciaron en 1960, de manera independiente, por los científicos del oeste (Estados Unidos y Europa), y científicos soviéticos. Por lo general estos estudios estaban orientados a diferentes aplicaciones en física. La mayoría de los primeros trabajos en el oeste estaban relacionados con hidrodinámica: ondas de agua, convección, etc. Por otro lado, los trabajos sobre inestabilidad modulacional de los científicos soviéticos estaban vinculados con los entonces recientes progresos en: electrodinámica, incluyendo óptica no lineal (lasers, autofocalización, ondas de radio no lineales etc.) y física de plasma [Zakharov].

La ecuación NLS admite soluciones uniformes en forma de ondas continuas, entre otras. Una cuestión importante es la estabilidad de las soluciones de tipo onda plana frente a pequeñas perturbaciones. Cuando las perturbaciones rompen la uniformidad de la onda continua, iniciando un crecimiento exponencial en la amplitud de la onda, entonces se presenta la inestabilidad modulacional [Scott].

3.2.1 Inestabilidad Modulacional: Perturbando Amplitud

Se tiene la ecuación no lineal de Schrödinger,

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \sigma |u(x, t)|^2 u(x, t). \quad (3.2)$$

Suponiendo que para la ecuación (3.2) existen soluciones de la forma,

$$\bar{u}(x, t) = A e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (3.3)$$

en donde A y k son reales, y además $\omega(k)$ es la relación de dispersión de sistema.

Ahora, es importante saber qué sucede con la estabilidad de la solución (3.3) cuando se perturba su amplitud. Para esto se propone la solución perturbada,

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \epsilon U(x, t), \quad (3.4)$$

donde $U(x, t) = a(x, t)e^{i(kx - \omega t)}$, y $|\epsilon| \ll 1$. De este modo la solución (3.4) se ve de la siguiente forma,

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + \epsilon a(x, t)e^{i(kx - \omega t)} = (A + \epsilon a(x, t))e^{i(kx - \omega t)}.$$

En la expresión anterior se observa de manera más clara la forma en que se introduce la perturbación a la amplitud a la solución (3.3). Para examinar la evolución de la perturbación $a(x, t)$ se realizará el siguiente análisis.

Se tiene la solución elemental (3.3) y la solución perturbada (3.4), y se busca saber cuál es la distancia en norma que existe entre la solución perturbada y la solución elemental,

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\| &= \epsilon \|U(x, t)\| = \epsilon \|a(x, t)e^{i(kx - \omega t)}\|, \\ &= \epsilon \|a(x, t)\| \|e^{i(kx - \omega t)}\| = \epsilon \|a(x, t)\|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La estabilidad que se busca es modulacional, es decir, se quiere saber qué sucede con el módulo de la diferencia entre las soluciones $u(x, t)$ y $\bar{u}(x, t)$, razón por la cual se utilizará la norma del máximo.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la norma del máximo se define como:

$$\|f(\cdot)\|_{\max} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Entonces:

1. Si $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso se dice que la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
2. Si $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow C$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow O(\epsilon)$, cuando $t \rightarrow \infty$, donde C es una constante. Para este caso se dice que la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.
3. Si $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso se dice que la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

Para analizar el comportamiento de $\|a(x, t)\|_{\max}$, se establecerá una ecuación para $a(x, t)$ mediante la sustitución de $u(x, t)$ en la ecuación NLS entre otros cálculos. La solución $a(x, t)$ será:

$$a(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t)}$$

para la cual \tilde{a}_1 y κ serán constantes reales.

Una vez que se propone la solución $a(x, t)$, se establecerá un sistema de ecuaciones compuesto de dicha ecuación y su complejo conjugado. En el que $\Omega(\kappa)$ es la relación de dispersión del sistema que ahora depende de $a(x, t)$, y $\Omega(\kappa)$ puede ser un valor real o complejo. Los valores $\Omega(\kappa)$ pueden ser expresados de la siguiente forma,

$$\Omega(\kappa) = \text{Re}(\Omega) + i\text{Im}(\Omega).$$

Lo que se busca es determinar el comportamiento de $\|a(x, t)\|_{\max}$, cuando $t \rightarrow \infty$. Se tiene que:

$$\|a(\cdot, t)\|_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |a(x, t)| = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t)}|.$$

Dado que $\Omega(\kappa) = \text{Re}(\Omega) + i\text{Im}(\Omega)$, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \|a(\cdot, t)\|_{\max} &= \max_{x \in [0, 2\pi]} |\tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t - i\text{Im}(\Omega)t)}| = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t)} e^{-i\text{Im}(\Omega)t}| \\ &= \max_{x \in [0, 2\pi]} |\tilde{a}_1| |e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t)}| |e^{\text{Im}(\Omega)t}|. \end{aligned}$$

Por otra parte, el módulo de un número se define como:

$$|z| = (z \cdot z^*)^{1/2}, \tag{3.6}$$

en el cual z^* es el conjugado de z . De acuerdo a esta definición se tiene que,

$$|e^{i\theta}| = (e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta})^{1/2} = (e^{i\theta - i\theta})^{1/2} = 1^{1/2} = 1.$$

Por lo anterior se puede decir que,

$$|e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t)}| = 1,$$

en donde κ , x y $\text{Re}(\Omega)t$ son reales. Como consecuencia resulta,

$$\|a(\cdot, t)\|_{\max} = |\tilde{a}_1| \max_{x \in [0, 2\pi]} |e^{\text{Im}(\Omega)t}|,$$

es decir, la norma $\|a(\cdot, t)\|_{\max}$ depende del valor de $|e^{\text{Im}(\Omega)t}|$, pues \tilde{a}_1 es una constante.

De lo anterior se desprenden tres casos:

1. Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.
2. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
3. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

3.2.2 Inestabilidad Modulacional: Perturbando Amplitud y Fase

Recuérdese la ecuación no lineal de Schrödinger (3.2) es:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \sigma |u(x, t)|^2 u(x, t).$$

Suponiendo que para esta ecuación existen soluciones de la forma (3.3),

$$\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega(k)t)},$$

para las cuales A y k son reales, y además $\omega(k)$ es la relación de dispersión de sistema.

Ahora, es de interés saber qué sucede con la estabilidad de la solución (3.3) cuando se perturba su amplitud y fase de manera simultánea. Para ello se propone la siguiente solución perturbada:

$$u(x, t) = (\bar{u}(x, t) + \epsilon U(x, t))Z(x, t),$$

en la cual $U(x, t) = a(x, t)e^{i(kx - \omega t)}$, $|\epsilon| \ll 1$ y $a(x, t)$ es una función para la amplitud. Además, la función $Z(x, t) = e^{i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)}$, y $\tilde{\phi}(x, t)$ es una función continua y acotada la cual perturba la fase. Al sustituir $U(x, y)$ y $Z(x, t)$ en la solución $u(x, t)$ se ve de la siguiente forma,

$$u(x, t) = (Ae^{i(kx - \omega t)} + \epsilon a(x, t)e^{i(kx - \omega t)})e^{i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)} = (A + \epsilon a(x, t))e^{i(kx - \omega t + \epsilon\tilde{\phi}(x, t))}. \quad (3.7)$$

En la expresión anterior se puede observar de manera más clara la forma en que se introduce la perturbación a la amplitud y a la fase de la solución (3.3). En este caso no se trabaja directamente con la solución (3.7), se le hace una modificación a la solución anterior de la cual resulta la siguiente solución²:

$$u(x, t) = (1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))\bar{u}(x, t), \quad (3.8)$$

donde $\tilde{A}(x, t) = \frac{a(x, t)}{A}$.

Teniendo la solución elemental (3.3) y la solución perturbada (3.8), se buscará saber cuánto se separan ambas soluciones en norma, es decir,

$$\|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\| = \|(\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))\bar{u}(x, t)\| = A\|(\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))e^{i(kx - \omega t)}\|$$

$$\|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\| = A\|\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)\| \|e^{i(kx - \omega t)}\| = A\|\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)\|. \quad (3.9)$$

Como se dijo anteriormente, la estabilidad que se busca es modulacional, es decir, se requiere saber qué sucede con el módulo de la diferencia entre las soluciones $u(x, t)$ y $\bar{u}(x, t)$. Por lo que de nueva cuenta se utilizará la norma del máximo.

Entonces:

²En el siguiente capítulo se explicarán con mayor detalle las modificaciones que sufre la solución $u(x, t)$.

1. Si $\|\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)\|_{\max} \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\|_{\max} \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
2. Si $\|\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)\|_{\max} \rightarrow C$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\|_{\max} \rightarrow O(\epsilon)$, cuando $t \rightarrow \infty$, donde C es una constante. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.
3. Si $\|\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\|u(x, t) - \bar{u}(x, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

Para analizar el comportamiento de $\|\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)\|_{\max}$, en el capítulo siguiente se establecerá una ecuación para $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$ mediante la sustitución de $u(x, t)$ en la ecuación NLS, entre otros cálculos. Las soluciones que se propondrán para $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$ serán:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(x, t) &= \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t)}, \\ \tilde{\phi}(x, t) &= \tilde{a}_2 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t)}\end{aligned}$$

en las que \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 y κ serán constantes reales.

Una vez que se conoce qué forma tienen las soluciones $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$, será establecido un sistema de ecuaciones con ellas; posteriormente se calculará la relación de dispersión $\Omega(\kappa)$ del sistema que ahora depende de $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$.

Los valores $\Omega(\kappa)$ se escribirán de la siguiente forma:

$$\Omega(\kappa) = \text{Re}(\Omega) + i\text{Im}(\Omega).$$

Lo que se buscará es el comportamiento para $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max}$, cuando t tiende a infinito.

Se tiene que:

$$\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon| (|\tilde{A}(x, t) + i\tilde{\phi}(x, t)|). \quad (3.10)$$

Usando la igualdad (3.6):

$$\begin{aligned}\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} &= \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon| (|\langle \tilde{A}(x, t) + i\tilde{\phi}(x, t) | \langle \tilde{A}(x, t) \rangle' - i \langle \tilde{\phi}(x, t) \rangle' \rangle|)^{1/2}, \\ &= \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon| (|\tilde{A}(x, t)|^2 + |\tilde{\phi}(x, t)|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo $\tilde{A}(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t)}$ y $\tilde{\phi}(x, t) = \tilde{a}_2 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t)}$ se obtiene:

$$\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon| (|\tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t}|^2 + |\tilde{a}_2 e^{i(\kappa x - \Omega(\kappa)t}|^2)^{1/2}.$$

Dado que $\Omega(\kappa) = \text{Re}(\Omega) + i\text{Im}(\Omega)$, entonces,

$$\begin{aligned}\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} &= \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon| (|\tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t - i\text{Im}(\Omega)t}|^2 + |\tilde{a}_2 e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t - i\text{Im}(\Omega)t}|^2)^{1/2}, \\ &= \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon| (|\tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t} e^{\text{Im}(\Omega)t}|^2 + |\tilde{a}_2 e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t} e^{\text{Im}(\Omega)t}|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Como \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 y $e^{\text{Im}(\Omega)t}$ son números reales, los términos anteriores se pueden agrupar de la siguiente manera:

$$\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\epsilon|(\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2)^{1/2} \left(|e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t)}|^2 |e^{\text{Im}(\Omega)t}|^2 \right)^{1/2}.$$

Recuérdese que el módulo de un número de la forma $e^{i\theta}$ es 1, donde θ es real. Dado que κ , x y $\text{Re}(\Omega)t$ son reales, se tiene que:

$$|e^{i(\kappa x - \text{Re}(\Omega)t)}| = 1.$$

Como consecuencia resulta,

$$\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} (|\epsilon|(\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2)^{1/2}) |e^{\text{Im}(\Omega)t}|.$$

Sea $K = |\epsilon|(\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2)^{1/2}$. Considerando este cambio la expresión anterior es:

$$\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} K |e^{\text{Im}(\Omega)t}|.$$

La norma $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max}$ depende del valor de $|e^{\text{Im}(\Omega)t}|$, pues K es una constante. Nótese que la distancia entre $u(x, t)$ y $\bar{u}(a, t)$ está de nuevo en función de $e^{\text{Im}(\Omega)t}$.

De lo anterior se desprenden tres casos:

1. Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.
2. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
3. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

3.3 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se abordaron los conceptos de estabilidad e inestabilidad modulacionales, los cuales son parte central de este trabajo de tesis.

De manera intuitiva se puede decir que una onda plana de la forma $\bar{u}(x, t)$ es estable cuando ondas planas cercanas $u(x, t)$ son soluciones cuya tendencia es regresar hacia $\bar{u}(x, t)$, de tal modo que quedan contenidas en una vecindad de $\bar{u}(x, t)$ conforme transcurre el tiempo. Siguiendo la idea anterior, una solución de tipo onda plana $\bar{u}(x, t)$ es asintóticamente estable si las soluciones cercanas $u(x, t)$ tienden a $\bar{u}(x, t)$ conforme transcurre el tiempo y la alcanzan en el límite cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, $u(x, t)$ se aproxima tanto a $\bar{u}(x, t)$ que parecen casi la misma solución pero nunca lo son.

Al principio del capítulo se mencionó de manera general qué es la estabilidad e inestabilidad en un sistema. Después se explicaron formalmente estos conceptos para las ecuaciones diferenciales ordinarias, en donde se dieron las definiciones de puntos de equilibrio asintóticamente estables, estables e inestables. Al final de esa sección se hace una analogía entre los puntos de equilibrio para EDO y las soluciones de tipo onda plana para la ecuación NLS.

En las secciones siguientes fue explicado a grandes rasgos el proceso que se utilizará para establecer los criterios de estabilidad e inestabilidad modulacional para las soluciones de tipo onda plana de la ecuación NLS continua; perturbando amplitud, y amplitud y fase.

Para ambos casos, en donde fue perturbada solamente amplitud o amplitud y fase de manera simultánea, se concluye que el factor determinante para establecer los criterios de estabilidad e inestabilidad modulacionales es el valor de $\text{Im}(\Omega)$, donde Ω está dado por la relación de dispersión $G(\Omega, \kappa)$, asociada a las ecuaciones para $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$.

Los criterios de estabilidad que fueron establecidos, de manera general para el caso NLS continua son los siguientes:

1. Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.
2. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
3. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|\epsilon\tilde{A}(\cdot, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

Estos son los criterios que serán utilizados en el capítulo siguiente para determinar bajo qué condiciones la solución de tipo onda plana $\bar{u}(x, t)$ para la ecuación NLS es estable o inestable modulacionalmente.

Para los capítulos 5 y 6 será utilizado el mismo criterio sobre Ω para clasificar a las soluciones de tipo onda plana de la ecuación DNLS y el esquema de Crank-Nicolson, como estables o inestables modulacionalmente. La manera de establecer este criterio será totalmente análoga al caso NLS continua.

4

La Ecuación no Lineal de Schrödinger y Análisis de Estabilidad de Soluciones de Tipo Onda Plana

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) surge en varios temas relacionados con la física, esta ecuación se utiliza para modelar diferentes fenómenos con aplicaciones a diferentes campos tales como: física de semiconductores, condensación de Bose-Einstein, física de plasma, dinámica biomolecular, ondas en el agua y óptica no lineal por mencionar algunos. Para mayor detalle sobre estas aplicaciones, consultar las siguientes referencias [Belmonte] , [Scott] y las referencias ahí sugeridas.

El objetivo de este capítulo será encontrar condiciones de inestabilidad modulacional mediante perturbaciones de las soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger continua. Será analizado el comportamiento de las soluciones perturbadas para diferentes casos. Después se clasifican dichas soluciones como estables o inestables modulacionalmente. El capítulo se ha organizado de la siguiente manera:

1. Cálculo de la relación de dispersión de la ecuación NLS.
2. Se propone una solución perturbada en amplitud para la ecuación NLS.
3. Linealización de la ecuación no lineal de Schrödinger alrededor de la solución de tipo onda plana $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$.
4. Análisis de estabilidad de la solución de onda plana $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$.
5. Se propone una solución perturbada en amplitud y fase para la ecuación NLS.
6. Se repiten la linealización la ecuación no lineal de Schrödinger y el análisis de estabilidad de las soluciones de tipo onda plana para este caso.
7. Resumen y tabla de resultados obtenidos en el capítulo.

4.1 La Relación de Dispersión de la Ecuación no Lineal de Schrödinger

Recuérdese que la relación de dispersión es la relación $G(\omega, k) = 0$ que existe entre las variables ω y k a través de las derivadas parciales de la ecuación que describe a un sistema dispersivo. En esta sección se calculará la relación que existe entre ω y k a través de las parciales de la ecuación NLS.

Considérese la ecuación no lineal de Schrödinger

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \sigma |u(x, t)|^2 u(x, t), \quad (4.1)$$

para la cual $\sigma = \pm 1$. El signo positivo indica NLS enfocante y el signo negativo NLS desenfocante [Agrawal].

Suponiendo que

$$\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.2)$$

satisface la ecuación (4.1), para la que A es una constante real o compleja distinta de cero. Si A es compleja, se puede escribir en forma polar $A = |A|e^{i\phi}$, para la cual ϕ es el argumento de A . La solución (4.2) quedaría de la siguiente forma:

$$\bar{u}(x, t) = |A|e^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)} = |A|e^{i(kx - \omega t + \phi)}. \quad (4.3)$$

Obsérvese que las soluciones (4.2) con A real, y (4.3) con A compleja son prácticamente iguales, sólo que en la solución (4.3) se tiene un incremento o disminución en la fase $\theta(x, t) = (kx - \omega t)$, en el que ϕ es el ángulo de desfase entre la onda descrita por la solución (4.3) con respecto a la onda descrita por la solución (4.2). El desfase se puede ver desde el punto de vista de la variable espacial $\theta(x, t) = (k(x + \frac{\phi}{k}) - \omega t)$; o con respecto a la variable temporal $\theta(x, t) = (kx - \omega(t - \frac{\phi}{\omega}))$. Esta variación en la fase no afecta los resultados obtenidos en el análisis de estabilidad de las soluciones. Por esta razón, a lo largo de este trabajo se considerará a la constante A real.

Se suponen soluciones de la forma (4.2) ya que la ecuación NLS es un sistema dispersivo.

Para calcular la relación de dispersión de la ecuación (4.1) se sustituye en ella la solución (4.2)

$$i \frac{\partial Ae^{i(kx - \omega t)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Ae^{i(kx - \omega t)}}{\partial x^2} - \sigma |Ae^{i(kx - \omega t)}|^2 Ae^{i(kx - \omega t)},$$

derivando e igualando a cero se obtiene:

$$i(-i\omega)Ae^{i(kx - \omega t)} + \frac{1}{2}(ik)^2 Ae^{i(kx - \omega t)} + \sigma |A|^2 Ae^{i(kx - \omega t)} = 0.$$

Factorizando $Ae^{i(kx - \omega t)}$

$$\left(\omega - \frac{1}{2}k^2 + \sigma |A|^2 \right) Ae^{i(kx - \omega t)} = 0.$$

Cabe señalar que siempre se cumple que $Ae^{i(kx - \omega t)} \neq 0$. Por lo tanto

$$\omega - \frac{1}{2}k^2 + \sigma |A|^2 = 0.$$

Finalmente, se obtiene la relación de dispersión de la ecuación NLS

$$\omega(k) = \frac{1}{2}k^2 - \sigma |A|^2. \quad (4.4)$$

4.2 Estabilidad de las Soluciones de Onda Plana

En esta sección se analizará el comportamiento de las soluciones de tipo onda plana cuando son perturbadas en primer lugar por la amplitud, y en segundo lugar por la amplitud y fase simultáneamente; esto con la finalidad de saber si su comportamiento es modulacionalmente estable o inestable.

4.2.1 Estabilidad de las Soluciones de Onda Plana: Perturbación de Amplitud

A continuación se perturba la amplitud de la solución (4.2), para lo cual se agrega una pequeña perturbación a la amplitud de la solución $\bar{u}(x, t)$, dando como resultado la siguiente solución perturbada:

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \epsilon U(x, t), \quad (4.5)$$

en la cual $\bar{u}(x, t)$ está dado por (4.2), $|\epsilon| \ll 1$, $U(x, t) = a(x, t)e^{i(kx - \omega t)}$ es la perturbación introducida a la solución $\bar{u}(x, t)$, y $a(x, t)$ es una función para la amplitud perturbada.

Se sustituye la solución perturbada (4.5) en (4.1) con la finalidad de obtener una ecuación para $a(x, t)$, al obtener una expresión para $a(x, t)$ se podrá analizar más adelante la evolución de la perturbación,

$$i \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + i \frac{\partial \epsilon U}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sigma |\bar{u} + \epsilon U|^2 (\bar{u} + \epsilon U). \quad (4.6)$$

Por el momento préstese atención al término no lineal, el cual se desarrollará y agrupará en potencias de ϵ . Recuérdese que para los números complejos se cumple que $|z|^2 = z \cdot z^*$, en el cual z^* es el conjugado de z . Usando esta propiedad en el último término de la ecuación (4.6) resulta

$$\begin{aligned} \sigma |\bar{u} + \epsilon U|^2 (\bar{u} + \epsilon U) &= \sigma (\bar{u} + \epsilon U) (\bar{u} + \epsilon U)^* (\bar{u} + \epsilon U) \\ &= \sigma (\bar{u} + \epsilon U) (\bar{u}^* + \epsilon U^*) (\bar{u} + \epsilon U) \\ &= \sigma (|\bar{u}|^2 + \epsilon (\bar{u}^* U + \bar{u} U^*) + \epsilon^2 |U|^2) (\bar{u} + \epsilon U) \\ &= \sigma |\bar{u}|^2 \bar{u} + \epsilon \sigma (2U |\bar{u}|^2 + \bar{u}^2 U^*) + \sigma \epsilon^2 (2|U|^2 \bar{u} + U^2 \bar{u}^*) + \sigma \epsilon^3 |U|^2 U. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.6) y reacomodando los términos en potencias de ϵ se obtiene la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \sigma |\bar{u}|^2 \bar{u} \right) + i \epsilon \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sigma \epsilon (\bar{u}^2 U^* + 2U |\bar{u}|^2) \\ &\quad - \sigma \epsilon^2 (2\bar{u} |U|^2 + U^2 \bar{u}) - \sigma \epsilon^3 |U|^2 U. \end{aligned}$$

Recuérdese que se ha definido a la constante ϵ como un elemento cuyo valor absoluto es mucho menor que 1, lo que implica que los valores absolutos de ϵ^2 y ϵ^3 son mucho más pequeños aún. Con ello, los términos de orden $O(\epsilon^2)$ y $O(\epsilon^3)$ aportan un valor insignificante a la ecuación, razón por la cual no se tomarán en cuenta. Nótese que los términos que se encuentran entre paréntesis en el lado izquierdo de la ecuación anterior no están multiplicados por ϵ , no obstante, la expresión entre

paréntesis equivale a cero, pues $\bar{u}(x, t)$ resuelve la ecuación NLS (4.1). Los únicos términos que no se eliminan son los que están multiplicados por ϵ , los cuales son:

$$i \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sigma(\bar{u}^2 U^* + 2U|\bar{u}|^2). \quad (4.7)$$

Ésta es la linealización de la ecuación no lineal de Schrödinger alrededor de la solución $\bar{u}(x, t)$. Véase que en la ecuación (4.7) ya no aparece la constante ϵ , pues aparece en ambos lados de la igualdad y simplemente se factoriza.

Se sustituye $U(x, t)$ en la ecuación (4.7), recordando que $U(x, t) = a(x, t)e^{i(kx - \omega t)}$. Usando el hecho de que $|\bar{u}|^2 = A^2$ se obtiene

$$i \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} + \omega a(x, t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} - k^2 a(x, t) \right) - \sigma(A^2 a^*(x, t) + 2a(x, t)A^2).$$

Al sustituir $U(x, t)$, el término $e^{i(kx - \omega t)}$ aparece en ambos lados de la igualdad, y por esta razón ya no aparece en la expresión anterior. Usando la relación de dispersión (4.4) se eliminan los términos subrayados, y como resultado se genera la siguiente expresión:

$$i \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - ik \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} - \sigma(A^2 a^*(x, t) + a(x, t)A^2). \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) es la ecuación linealizada de la amplitud perturbada alrededor de la solución $\bar{u}(x, t)$. A continuación se calculará su relación de dispersión.

Considérese la ecuación (4.8) y su complejo conjugado, con A real

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - ik \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} - \sigma A^2(a(x, t) + a^*(x, t)). \\ -i \frac{\partial a^*(x, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a^*(x, t)}{\partial x^2} + ik \frac{\partial a^*(x, t)}{\partial x} - \sigma A^2(a^*(x, t) + a(x, t)). \end{aligned}$$

Lo anterior se puede escribir como un sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a(x, t) \\ a^*(x, t) \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x, t) \\ a^*(x, t) \end{pmatrix} - ik \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} a(x, t) \\ a^*(x, t) \end{pmatrix} \\ &+ \sigma A^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x, t) \\ a^*(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se supondrán soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} a(x, t) \\ a^*(x, t) \end{pmatrix} = e^{i(kx - \Omega t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

en las cuales \tilde{a}_1 y \tilde{a}_2 son constantes, para de este modo encontrar su relación de dispersión. Sustituyendo (4.9) en el sistema anterior y eliminando el factor $e^{i(\kappa x - \Omega t)}$ resulta

$$\Omega \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{\kappa^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} + k\kappa \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} + \sigma A^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix},$$

lo cual es equivalente a

$$(\Omega - k\kappa) \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{\kappa^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} + \sigma A^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora sea $\lambda = \Omega - k\kappa$ y sustituyendo λ en la expresión anterior

$$\lambda \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2 & -\sigma A^2 \\ \sigma A^2 & -(\frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene solución no trivial si

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2 - \lambda & -\sigma A^2 \\ \sigma A^2 & -(\frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2 + \lambda) \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= - \left[\left(\frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2 - \lambda \right) \left(\frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2 + \lambda \right) \right] + \sigma^2 A^4 \\ &= - \left(\frac{\kappa^2}{2} - \sigma A^2 \right)^2 + \lambda^2 + \sigma^2 A^4 \\ &= \lambda^2 - \frac{\kappa^2}{4} (\kappa^2 - 4\sigma A^2). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lambda^2 = \frac{\kappa^2}{4} (\kappa^2 - 4\sigma A^2).$$

Como $\lambda = \Omega - k\kappa$, se tiene que la relación de dispersión es:

$$(\Omega - k\kappa)^2 = \frac{\kappa^2}{4} (\kappa^2 - 4\sigma A^2). \quad (4.10)$$

Para el caso $k = 0$ se obtiene la siguiente relación de dispersión:

$$\Omega^2 = \frac{\kappa^2}{4} (\kappa^2 - 4\sigma A^2). \quad (4.11)$$

Cabe resaltar que este resultado es el mismo que aparece en [Agrawal] para el mismo caso.

Análisis de Estabilidad: $k = 0$

Para el análisis de estabilidad de las soluciones considérese primero el caso $k = 0$ y posteriormente el caso $k \neq 0$, comenzando con $k = 0$ por simplicidad. La intención en el análisis es partir de un caso sencillo, para después continuar con caso más general. A su vez, para $k = 0$ y $k \neq 0$ se desprenden dos subcasos principales: cuando $\sigma = 1$, es decir, el caso enfocante de la ecuación no lineal de Schrödinger; y cuando $\sigma = -1$, el caso desenfocante.

(a) **Caso desenfocante:** Cuando $\sigma = -1$, la relación de dispersión (4.11) es:

$$\Omega^2 = \frac{\kappa^2}{4}(\kappa^2 + 4A^2). \quad (4.12)$$

Dado que A y κ son reales, se obtiene que

$$\frac{\kappa^2}{4}(\kappa^2 + 4A^2) > 0,$$

lo que implica que Ω^2 es positiva, por lo tanto las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (4.12) son reales y toman los siguientes valores:

$$\Omega_{1,2} = \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{\kappa^2 + 4A^2}.$$

Dado que los valores Ω_1 y Ω_2 de la relación de dispersión son reales, las soluciones

$$a_1(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega_1 t)},$$

y

$$a_2(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x + \Omega_2 t)}$$

son soluciones puramente oscilatorias y acotadas.

Puede relacionarse este análisis de estabilidad con lo establecido en el capítulo de inestabilidad modulacional (Capítulo 3). Véase que las raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, o visto de otro modo, las partes imaginarias $\text{Im}(\Omega_1)$ y $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Para este caso se tiene que

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Lo anterior se cumple para $a_1(x, t)$ y $a_2(x, t)$. Por lo tanto, $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente estable.

(b) **Caso enfocante:** Con $\sigma = 1$ y $k = 0$ la relación de dispersión es:

$$\Omega^2 = \frac{\kappa^2}{4}(\kappa^2 - 4A^2), \quad (4.13)$$

lo que lleva a otros dos subcasos:

(i) Si

$$|\kappa| > 2|A|,$$

entonces Ω^2 es positivo. Los valores Ω_1 y Ω_2 obtenidos de la relación de dispersión (4.13) son reales y de la siguiente forma:

$$\Omega_{1,2} = \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{\kappa^2 - 4A^2}.$$

Por lo tanto, las soluciones

$$a_1(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega_1 t)},$$

y

$$a_2(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x + \Omega_2 t)},$$

son soluciones puramente oscilatorias.

Haciendo de nuevo una relación con el capítulo de inestabilidad modulacional, puede verse que las partes imaginarias $\text{Im}(\Omega_1)$ y $\text{Im}(\Omega_2)$, son cero. En este caso se tiene que

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Lo anterior se satisface para $a_1(x, t)$ y $a_2(x, t)$. Por lo tanto puede concluirse que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$, es una solución modulacionalmente estable.

(ii) Si

$$|\kappa| < 2|A|,$$

entonces Ω^2 es negativo. Lo cual indica que las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (4.13) son imaginarias, y tienen la siguiente forma:

$$\Omega_{1,2} = \pm i \left| \frac{\kappa}{2} \sqrt{|\kappa^2 - 4A^2|} \right|.$$

Sea $\Omega_c = \left| \frac{\kappa}{2} \sqrt{|\kappa^2 - 4A^2|} \right|$, Ω_c es real y positivo.

Las soluciones son:

$$\begin{aligned} a_{1,2}(x, t) &= \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x \pm \Omega_{1,2} t)} = \tilde{a}_1 e^{i\kappa x} e^{\pm i\Omega_{1,2} t} \\ &= \tilde{a}_1 e^{i\kappa x} e^{\pm i\Omega_c t} = \tilde{a}_1 e^{i\kappa x} e^{\mp \Omega_c t}. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \tilde{a}_1 e^{i\kappa x} e^{-\Omega_c t} \\ a_2(x, t) &= \tilde{a}_1 e^{i\kappa x} e^{\Omega_c t}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $a_1(x, y) = e^{i\kappa x} e^{-\Omega_c t}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, y que $a_2(x, y) = e^{i\kappa x} e^{+\Omega_c t}$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

A diferencia de los casos anteriores, en esta ocasión se tiene que las raíces Ω_1 y Ω_2 son imaginarios, diferentes de cero, una raíz positiva, y la otra su conjugado. Sea Ω_1 la raíz tal que se cumple que $\text{Im}(\Omega_1) < 0$, y Ω_2 la raíz tal que $\text{Im}(\Omega_2) > 0$. Asociando lo anterior con el capítulo de inestabilidad modulacional se tiene:

1. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
2. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

En base a lo anterior se puede decir que si se elige la raíz Ω_1 y su correspondiente solución $a_1(x, t)$, entonces la solución $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si es escogida la raíz Ω_2 y su correspondiente solución $a_2(x, t)$, se tiene que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente inestable.

Considerando una solución general de la forma:

$$a(x, t) = c_1 a_1(x, t) + c_2 a_2(x, t),$$

para la cual c_1 y c_2 son constantes. El comportamiento del módulo de $a(x, t)$ conforme t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $|a_1(x, t)|$ y $|a_2(x, t)|$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Finalmente, al considerar una solución general, puede concluirse para este caso que la solución $\bar{u}(x, t)$ es una solución modulacionalmente inestable.

Análisis de la Estabilidad: $k \neq 0$

Recuérdese que la relación de dispersión del sistema linealizado (4.10) es:

$$(\Omega - k\kappa)^2 = \frac{\kappa^2}{4}(\kappa^2 - 4\sigma A^2).$$

En el anterior análisis de estabilidad de las soluciones se tomó $k = 0$ en la relación de dispersión del sistema linealizado (4.10). A continuación se hará algo parecido pero considerando $k \neq 0$ en la ecuación (4.10). Se procederá a analizar los casos desenfocante $\sigma = -1$ y enfocante $\sigma = 1$.

- (a) **Caso desenfocante:** Para este caso se tiene $\sigma = -1$ y $k \neq 0$, por lo cual la relación de dispersión del sistema linealizado (4.10) toma la siguiente forma

$$(\Omega - k\kappa)^2 = \frac{\kappa^2}{4}(\kappa^2 + 4A^2).$$

Tomando en cuenta que κ y A son reales, puede observarse que los valores de Ω también son reales. Despejando Ω se tiene:

$$\Omega_{1,2} = k\kappa \pm \frac{\kappa}{2}(\kappa^2 + 4A^2)^{1/2}.$$

Dado que la constante k es real, las raíces Ω_1 y Ω_2 de la relación de dispersión son reales. Para cada valor de Ω se tiene una solución de la forma $a(x, t)$:

$$a_1(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega_1 t)} = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - (k\kappa + \frac{\kappa}{2}(\kappa^2 + 4A^2)^{1/2})t)},$$

y

$$a_2(x, t) = \tilde{a}_2 e^{i(\kappa x + \Omega_2 t)} = \tilde{a}_2 e^{i(\kappa x - (k\kappa - \frac{\kappa}{2}(\kappa^2 + 4A^2)^{1/2})t)}.$$

Véase que las soluciones $a_1(x, t)$ y $a_2(x, t)$ son puramente oscilatorias.

Puede verse que tanto la parte imaginaria $\text{Im}(\Omega_1)$, como $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Relacionando lo anterior con el capítulo de inestabilidad modulacional se tiene que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para ese caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Lo anterior se satisface para $a_1(x, t)$ y $a_2(x, t)$. Por lo tanto, se puede concluir que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente estable.

- (b) **Caso enfocante:** En este caso $\sigma = 1$ y $k \neq 0$, la relación de dispersión del sistema linealizado (4.10) es:

$$(\Omega - k\kappa)^2 = \frac{\kappa^2}{4}(\kappa^2 - 4A^2).$$

Dado que las constantes κ y A son reales no puede concluirse este caso de forma directa como se hizo en el caso anterior. Del caso enfocante se siguen los siguientes dos subcasos:

- (i) Si se cumple que:

$$|\kappa| > 2|A|,$$

se tiene que $(\Omega - k\kappa)^2$ es positivo. Lo cual implica que:

$$\Omega_{1,2} = k\kappa \pm \frac{\kappa}{2}(\kappa^2 - 4A^2)^{1/2},$$

en las cuales k es una constante real, entonces los valores $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (4.10) son la suma de dos cantidades reales, y por lo tanto $\Omega_{1,2}$ son valores reales.

Dado que los valores que puede tomar Ω son reales, las soluciones $a_1(x, t)$ y $a_2(x, t)$ son de la forma:

$$a_1(x, t) = e^{i(\kappa x - \Omega_1 t)},$$

y

$$a_2(x, t) = e^{i(\kappa x - \Omega_2 t)},$$

las cuales son soluciones puramente oscilatorias.

Nuevamente se observa que las partes imaginarias $\text{Im}(\Omega_1)$ y $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Lo que se establece para este caso en el capítulo de inestabilidad modulacional es que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Dado que lo anterior se satisface para $a_1(x, t)$ y $a_2(x, t)$, se concluye que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente estable.

- (ii) Si $|\kappa| < 2|A|$, entonces $(\Omega - k\kappa)^2 < 0$, lo cual indica que los valores $\Omega_{1,2}$ que puede tomar Ω en la relación de dispersión (4.10) son:

$$\Omega_{1,2} = k\kappa \pm i \left| \frac{\kappa}{2} \right| \sqrt{|\kappa^2 - 4A^2|}.$$

Sea $\Omega_c = \left| \frac{\kappa}{2} \right| \sqrt{|\kappa^2 - 4A^2|}$. Entonces las soluciones de la forma $a(x, t)$ asociadas a estos valores de Ω son:

$$\begin{aligned} a_{1,2}(x, t) &= e^{i(\kappa x - \Omega_{1,2}t)}, \\ &= e^{i\kappa x} e^{-ik\kappa t - i\pm\Omega_c t}, \\ &= e^{i(\kappa x - k\kappa t)} e^{\mp\Omega_c t}. \end{aligned}$$

- La solución $a_1(x, t)$ es:

$$a_1(x, t) = e^{i(\kappa x - k\kappa t)} e^{-\Omega_c t},$$

la cual tiende a cero cuando t tiende a infinito.

- La solución $a_2(x, t)$ es:

$$a_2(x, t) = e^{i(\kappa x - k\kappa t)} e^{+\Omega_c t},$$

y tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

En esta ocasión se observa que las raíces Ω_1 y Ω_2 son de la forma $\Omega_1 = \text{Re}(\Omega_1) + i\text{Im}(\Omega_1)$, y $\Omega_2 = \text{Re}(\Omega_2) + i\text{Im}(\Omega_2)$. Sea Ω_1 la raíz para la cual $\text{Im}(\Omega_1) < 0$, y Ω_2 la raíz tal que $\text{Im}(\Omega_2) > 0$. Realizando la correlación con el capítulo de inestabilidad modulacional se obtiene:

1. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
2. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.

En base a lo anterior puede decirse que si se elige la raíz Ω_1 y su correspondiente solución $a_1(x, t)$, entonces la solución $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si se elige la raíz Ω_2 y la correspondiente solución $a_2(x, t)$, se tiene que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente inestable.

Considérese una solución general de la forma:

$$a(x, t) = c_1 a_1(x, t) + c_2 a_2(x, t),$$

para la cual c_1 y c_2 son constantes. El comportamiento del módulo de $a(x, t)$ conforme t tiende a infinito, se puede ver como la superposición de los comportamientos de $|a_1(x, t)|$ y $|a_2(x, t)|$ cuando t tiende a infinito. Entonces

$$\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Al considerar una solución general, se concluye para este caso que la solución $\bar{u}(x, t)$ es una solución modulacionalmente inestable.

4.2.2 Estabilidad de las Soluciones de Ondas Planas: Perturbación de Amplitud y Fase

En el análisis de estabilidad de las soluciones de onda plana para la ecuación no lineal de Schrödinger de la sección anterior sólo se vio el comportamiento de las soluciones cuando se perturbó la amplitud de las mismas. Ahora se analizará cuál es el comportamiento de dichas soluciones cuando se perturba amplitud y fase al mismo tiempo.

Sea la ecuación no lineal de Schrödinger (4.1), como en la sección 4.1 de este capítulo,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \sigma |u|^2 u.$$

Y suponiendo, al igual que en el inicio del capítulo, que

$$\bar{u}(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)},$$

para la cual $A \neq 0$ es una constante real, satisface la ecuación NLS. La solución $\bar{u}(x, t)$ es la misma que aparece al inicio de este capítulo.

Se estudiará la estabilidad de la solución $\bar{u}(x, t)$, perturbando su amplitud y su fase como sigue:

$$u(x, t) = (\bar{u}(x, t) + \epsilon U(x, t)) Z(x, t),$$

para la cual $U(x, t) = a(x, t) e^{i(kx - \omega t)}$ es la perturbación introducida a la amplitud de la solución $\bar{u}(x, t)$ y $a(x, t)$ es una función para la amplitud; la función $Z(x, t) = e^{i\epsilon \tilde{\phi}(x, t)}$ es la perturbación que se introduce a la fase de la solución $\bar{u}(x, t)$ en la que $\tilde{\phi}(x, t)$ es una función continua y acotada la cual perturba la fase; además se elige ϵ tal que $|\epsilon| \ll 1$.

Sustituyendo $U(x, t)$ y $Z(x, t)$ en $u(x, t)$ se obtiene:

$$u(x, t) = (A + \epsilon a(x, t)) e^{i(kx - \omega t + \epsilon \tilde{\phi}(x, t))}. \quad (4.14)$$

Puede verse que $\epsilon a(x, t)$ y $\epsilon \tilde{\phi}(x, t)$ son pequeñas perturbaciones para la amplitud y fase respectivamente.

Para realizar el análisis de estabilidad, se comenzará haciendo una aproximación lineal de la solución (4.14). Primero se reescribe la exponencial de (4.14) como producto de dos exponenciales,

$$u(x, t) = (A + \epsilon a(x, t))e^{i(kx - \omega t)}e^{i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)}.$$

Luego, se escribe $e^{i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)}$ como una serie de la forma $1 + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t) + O(\epsilon^2)$. Con lo que al sustituir se obtiene,

$$u(x, t) = (A + \epsilon a(x, t))(1 + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t) + O(\epsilon^2))e^{i(kx - \omega t)},$$

realizando la multiplicación indicada, y agrupando los términos de $O(1)$, $O(\epsilon)$ y $O(\epsilon^2)$, se obtiene:

$$u(x, t) = \left(A + \epsilon a(x, t) + iA\epsilon\tilde{\phi}(x, t) + O(\epsilon^2) \right) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Puede reescribirse la expresión anterior de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \left(1 + \epsilon \frac{a(x, t)}{A} + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t) \right) A e^{i(kx - \omega t)}.$$

Los términos de orden ϵ^2 ya no aparecen, pues se suponen muy pequeños para ser tomados en cuenta.

Para facilitar la notación se hace el siguiente cambio:

$$\tilde{A}(x, t) = \frac{a(x, t)}{A}.$$

Recuérdese que $\bar{u}(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$, por lo tanto la aproximación lineal de la solución perturbada (4.14) finalmente es:

$$u(x, t) = (1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))\bar{u}(x, t). \quad (4.15)$$

Se sustituye la solución perturbada (4.15) en la ecuación NLS (4.1) con la finalidad de obtener ecuaciones para $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$ y de este modo analizar más adelante la evolución de estas perturbaciones

$$\begin{aligned} i \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i\epsilon \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) \bar{u}(x, t) + i(1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)) \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 (\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))\bar{u}(x, t)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial (\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} \right) \\ - \frac{1}{2} \left((1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)) \frac{\partial^2 \bar{u}(x, t)}{\partial x^2} \right) - \sigma |1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) \\ + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)|^2 |\bar{u}|^2 (1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))\bar{u}(x, t). \quad (4.16) \end{aligned}$$

Se toma $|1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)|^2$ y se linealiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)|^2 &= (1 + \epsilon\tilde{A}(x, t))^2 - i^2 \epsilon^2 \tilde{\phi}(x, t)^2 \\ &= 1 + 2\epsilon\tilde{A}(x, t) + \epsilon^2 \tilde{A}(x, t)^2 + \epsilon^2 \tilde{\phi}(x, t)^2. \end{aligned}$$

Dado que $|\epsilon|$ se supone muy pequeño, se pueden despreciar los términos de orden ϵ^2 . Considerando esto, la expresión anterior queda como sigue:

$$|1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)|^2 \simeq 1 + 2\epsilon\tilde{A}(x, t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)|^2(1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)) &\simeq \\ (1 + 2\epsilon\tilde{A}(x, t))(1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)) + O(\epsilon^2) &\simeq \\ 1 + 3\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t) + O(\epsilon^2). & \end{aligned}$$

Como se argumentó antes, los términos de orden ϵ^2 aportan un valor insignificante, razón por la cual no serán tomados en cuenta. La expresión anterior ahora es:

$$|1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)|^2(1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)) \simeq 1 + 3\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t). \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.17) en (4.16) resulta

$$\begin{aligned} i \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i\epsilon \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) \bar{u}(x, t) + i \underbrace{(1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}_{\text{de (4.17)}} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2(\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x^2} \bar{u}(x, y) + 2 \frac{\partial(\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} \right) \\ - \frac{1}{2} \left((1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t)) \frac{\partial^2 \bar{u}(x, t)}{\partial x^2} \right) - \underbrace{\sigma(1 + \epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}_{\text{de (4.17)}} |\bar{u}|^2 \bar{u}(x, y) \\ - 2\sigma\epsilon\tilde{A}(x, t) |\bar{u}|^2 \bar{u}(x, y). \quad (4.18) \end{aligned}$$

Los términos señalados se eliminan ya que $\bar{u}(x, t)$ satisface la ecuación NLS. De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} i \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i\epsilon \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) \bar{u}(x, t) = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x^2} \bar{u}(x, y) \\ - \frac{\partial(\epsilon\tilde{A}(x, t) + i\epsilon\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} - 2\sigma\epsilon\tilde{A}(x, t) |\bar{u}|^2 \bar{u}(x, y). \quad (4.19) \end{aligned}$$

La ecuación (4.19) es la linealización de la ecuación no lineal de Schrödinger alrededor de la solución $\bar{u}(x, t)$ cuando se perturba amplitud y fase. El análisis de estabilidad se realizará para los casos $k = 0$ y $k \neq 0$.

Análisis de la Estabilidad de las Soluciones: Caso $k = 0$

Para este caso $k = 0$, es decir, $\bar{u}(x, t)$ es independiente de x , y por lo tanto,

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Con lo anterior (4.19) se reduce a

$$i \left(\frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) \bar{u}(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\tilde{A}(x, t) + i \tilde{\phi}(x, t))}{\partial x^2} \bar{u}(x, t) - 2\sigma \tilde{A}(x, t) |\bar{u}(x, t)|^2.$$

Dado que $\bar{u}(x, t) \neq 0$ se puede eliminar

$$i \left(\frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\tilde{A}(x, t) + i \tilde{\phi}(x, t))}{\partial x^2} - 2\sigma \tilde{A}(x, t) |\bar{u}|^2. \quad (4.20)$$

Ahora obsérvese por separado la parte real y la parte imaginaria de (4.20),

$$\frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.21)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} - 2\sigma \tilde{A}(x, t) |\bar{u}(x, t)|^2. \quad (4.22)$$

La ecuación (4.21) tiene la parte imaginaria, y la ecuación (4.22) tiene la parte real.

Derivando la ecuación (4.21) con respecto a t , y derivando dos veces la ecuación (4.22) con respecto a x ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.23)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} - 2\sigma \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} |\bar{u}(x, t)|^2. \quad (4.24)$$

Igualando las ecuaciones (4.23) y (4.24), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^4 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^4} - \sigma A^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.25)$$

Dado que A es real, entonces se tiene que $|\bar{u}(x, t)|^2 = A^2$. La ecuación (4.25) se puede escribir como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \sigma A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{A}(x, t) = 0. \quad (4.26)$$

Al igual que en la sección 4.2.1, se buscan soluciones para (4.26) de la forma

$$\tilde{A}(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x - \Omega t)}, \quad (4.27)$$

en la que \tilde{a}_1 es una constante real.

Se sustituye (4.27) en (4.26) para poder encontrar la relación de dispersión de la ecuación linealizada. De este modo se obtiene

$$\left(-\Omega^2 + \frac{1}{4} (i\kappa)^4 + \sigma A^2 (i\kappa)^2 \right) \tilde{a}_1 e^{i\kappa x - i\Omega t} = 0. \quad (4.28)$$

Dado que $e^{i\kappa x - i\Omega t}$, es distinto de cero entonces

$$-\Omega^2 + \frac{1}{4}\kappa^4 - \sigma A^2 \kappa^2 = 0,$$

ésta es la relación de dispersión del sistema linealizado. Se expresará la relación de dispersión anterior como una función de κ

$$\Omega^2(\kappa) = \kappa^2 \left(\frac{1}{4}\kappa^2 - \sigma A^2 \right). \quad (4.29)$$

Con la relación de dispersión del sistema linealizado (4.29), se procede a efectuar el análisis de estabilidad de la solución para los casos desenfocante $\sigma = -1$ y enfocante $\sigma = 1$.

- (a) **Caso desenfocante:** Para este caso se tiene $\sigma = -1$, y la relación de dispersión del sistema linealizado (4.29) es:

$$\Omega^2 = \kappa^2 \left(\frac{1}{4}\kappa^2 + A^2 \right).$$

Tomando en cuenta que κ y A son reales puede verse que las raíces de Ω^2 son reales y tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \kappa \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 + A^2} \\ \Omega_2 &= -\kappa \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 + A^2}. \end{aligned}$$

Para estos valores de Ω las soluciones $\tilde{A}_{1,2}(x, t)$ son:

$$\tilde{A}_{1,2}(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i\kappa x - i\Omega_{1,2}t}.$$

Por lo anterior, se tiene que tanto la parte imaginaria $\text{Im}(\Omega_1)$ como la parte imaginaria $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Relacionando lo anterior con el capítulo de inestabilidad modulacional se tiene que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|\tilde{A}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Lo anterior se satisface para $\tilde{A}_1(x, t)$ y $\tilde{A}_2(x, t)$. Como Ω es real, las soluciones $\tilde{A}_{1,2}(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i(\kappa x \pm \Omega t)}$ son soluciones puramente oscilatorias y por lo tanto acotadas, puede concluirse que $\bar{u}(x, t) = A e^{-i\omega t}$ es una solución modulacionalmente estable.

- (b) **Caso enfocante:** Para el caso enfocante $\sigma = 1$, la relación de dispersión del sistema linealizado (4.29) es:

$$\Omega^2(\kappa) = \kappa^2 \left(\frac{1}{4}\kappa^2 - A^2 \right).$$

Al igual que en el caso desenfocante las constantes κ y A son reales, sin embargo no se puede concluir de forma directa como se hizo en el caso anterior por el cambio en σ . Por lo tanto, del caso enfocante se siguen los siguientes dos subcasos:

(i) Si $|\kappa| > 2|A|$, entonces Ω^2 es positivo. Las raíces de la relación de dispersión son:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= |\kappa| \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 - A^2}, \\ \Omega_2 &= -|\kappa| \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 - A^2},\end{aligned}$$

y son raíces reales. Entonces,

$$\tilde{A}_{1,2}(x, t) = \tilde{a}_1 e^{i\kappa x \pm i\Omega_{1,2}t}.$$

Obsérvese que las partes imaginarias $\text{Im}(\Omega_1)$ y $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Lo que se estableció para este caso en el capítulo de inestabilidad modulacional es que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|\tilde{A}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow |\tilde{a}_1|$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Dado que esto se satisface para $\tilde{A}_1(x, t)$ y $\tilde{A}_2(x, t)$, puede concluirse que $\bar{u}(x, t) = Ae^{-i\omega t}$ es una solución modulacionalmente estable.

(ii) Si $|\kappa| < 2|A|$, implica que Ω^2 es menor que cero, por lo tanto las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión,

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= i|\kappa| \sqrt{\left|\frac{1}{4}\kappa^2 - A^2\right|}, \\ \Omega_2 &= -i|\kappa| \sqrt{\left|\frac{1}{4}\kappa^2 - A^2\right|},\end{aligned}$$

son imaginarias.

Sustituyendo los valores $\Omega_{1,2}$ en la solución $\tilde{A}(x, t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{1,2}(x, t) &= \tilde{a}_1 e^{i\kappa x \pm i\Omega_{1,2}t} \\ &= \tilde{a}_1 e^{i\kappa x} e^{\pm\Omega_c t},\end{aligned}$$

para las cuales $\Omega_c = |\kappa| \sqrt{\left|\frac{1}{4}\kappa^2 - A^2\right|}$.

Sea Ω_1 la raíz para la que se cumple que $\text{Im}(\Omega_1) > 0$, y Ω_2 la raíz para la cual $\text{Im}(\Omega_2) < 0$. Realizando la correlación con el capítulo de inestabilidad modulacional se tiene que:

1. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.
 2. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces $\|a(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
-

En base a lo anterior puede decirse que si se elige la raíz Ω_1 y su correspondiente solución $\tilde{A}_1(x, t)$, entonces la solución $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente inestable. De otro modo, si se elige la raíz Ω_2 y su correspondiente solución $\tilde{A}_2(x, t)$, se tiene que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente asintóticamente estable.

Considérese una solución general de la forma:

$$\tilde{A}(x, t) = c_1 \tilde{A}_1(x, t) + c_2 \tilde{A}_2(x, t),$$

en la cual c_1 y c_2 son constantes. Puede verse el comportamiento del módulo de $\tilde{A}(x, t)$ conforme t tiende a infinito como la superposición de los comportamientos de $|\tilde{A}_1(x, t)|$ y $|\tilde{A}_2(x, t)|$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|\tilde{A}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Al considerar una solución general, se concluye para este caso que la solución $\bar{u}(x, t)$ es una solución modulacionalmente inestable.

Análisis de la Estabilidad de las Soluciones: $k \neq 0$

Ahora se realizará el análisis de estabilidad de las soluciones de onda plana para la ecuación no lineal de Schrödinger en el caso $k \neq 0$. Se retoma el análisis desde la ecuación (4.19), la cual es:

$$i \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i\epsilon \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) \bar{u}(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\epsilon \tilde{A}(x, t) + i\epsilon \tilde{\phi}(x, t))}{\partial x^2} \bar{u}(x, t) - \frac{\partial (\epsilon \tilde{A}(x, t) + i\epsilon \tilde{\phi}(x, t))}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} - 2\sigma \epsilon \tilde{A}(x, t) |\bar{u}|^2 \bar{u}(x, t).$$

Dado que ϵ es un factor que se encuentra en todos los términos de la expresión anterior, se puede factorizar y prescindir de él.

$$i \left(\frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} + i \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) \bar{u}(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\tilde{A}(x, t) + i\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x^2} \bar{u}(x, t) - \frac{\partial (\tilde{A}(x, t) + i\tilde{\phi}(x, t))}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial x} - 2\sigma \tilde{A}(x, t) |\bar{u}|^2 \bar{u}(x, t). \quad (4.30)$$

Se separan los términos de (4.30) en parte real y parte imaginaria, como sigue:

$$\frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x^2} - k \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial x}, \quad (4.31)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} + k \frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial x} - 2\sigma \tilde{A}(x, t) |\bar{u}(x, t)|^2. \quad (4.32)$$

La ecuación (4.31) tiene los términos de la parte imaginaria y la ecuación (4.32) tiene a los términos correspondientes a la parte real.

Para estas ecuaciones, se buscan soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(x, t) \\ \tilde{\phi}(x, t) \end{pmatrix} = e^{i(\kappa x - \Omega t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

en las que \tilde{a}_1 y \tilde{a}_2 son constantes. Se sustituye (4.33) en las ecuaciones anteriores para así encontrar la relación de dispersión de la ecuación linealizada, tomando en cuenta que $|\bar{u}(x, t)|^2 = A^2$ y que A es real. De este modo se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -i\Omega\tilde{a}_1 &= -\frac{1}{2}(i\kappa)^2\tilde{a}_2 - ik\kappa\tilde{a}_1 \\ i\Omega\tilde{a}_2 &= -\frac{1}{2}(i\kappa)^2\tilde{a}_1 + ik\kappa\tilde{a}_2 - 2\sigma|A|^2\tilde{a}_1 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} i\Omega - ik\kappa & \frac{\kappa^2}{2} \\ \frac{\kappa^2}{2} - 2\sigma|A|^2 & -i\Omega + ik\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

El cual tiene una solución no trivial cuando

$$\det \begin{pmatrix} i\Omega - ik\kappa & \frac{\kappa^2}{2} \\ \frac{\kappa^2}{2} - 2\sigma|A|^2 & -i\Omega + ik\kappa \end{pmatrix} = 0,$$

lo que ocurre cuando

$$(i\Omega - ik\kappa)(-i\Omega + ik\kappa) - \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{\kappa^2}{2} - 2\sigma|A|^2 \right) = 0,$$

es decir,

$$(i\Omega - ik\kappa)^2 = \kappa^2 \left(\frac{4\sigma|A|^2 - \kappa^2}{4} \right).$$

De tal modo que la relación de dispersión del sistema linealizado es:

$$(i\Omega - ik\kappa)^2 = \kappa^2 \left(\sigma|A|^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right). \quad (4.35)$$

Con la relación de dispersión del sistema linealizado (4.35) se procede a hacer el análisis de estabilidad de la solución de onda plana para los casos desenfocante $\sigma = -1$ y enfocante $\sigma = 1$.

- (a) **Caso desenfocante:** En este caso $\sigma = -1$. Tomando en cuenta que k, κ y A son reales, la relación de dispersión del sistema linealizado (4.35) es:

$$(i\Omega - ik\kappa)^2 = -\kappa^2 \left(A^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right).$$

Calculando las raíces de la relación de dispersión anterior se tiene:

$$i\Omega = ik\kappa \pm i \left(|\kappa| \left(A^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right)^{1/2} \right),$$

y multiplicando por el factor $-i$ ambos lados de la igualdad,

$$\Omega = k\kappa \pm \left(|\kappa| \left(A^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right)^{1/2} \right).$$

Obsérvese que Ω es real y tiene los siguientes valores.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= k\kappa + \left(|\kappa| \left(A^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right)^{1/2} \right) \\ \Omega_2 &= k\kappa - \left(|\kappa| \left(A^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Para facilitar la notación se introduce una nueva variable $\Omega_c = \left(|\kappa| \left(A^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right)^{1/2} \right)$.

Sustituyendo los valores de Ω en la solución propuesta (4.33), se tiene

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,2}(x, t) \\ \tilde{\phi}_{1,2}(x, t) \end{pmatrix} = e^{i(\kappa x - \Omega t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = e^{i(\kappa x - k\kappa t \pm \Omega_c t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Como $\Omega \in \mathbb{R}$, las soluciones $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$ son soluciones puramente oscilatorias y acotadas.

Véase que las partes imaginarias $\text{Im}(\Omega_1)$ y $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Lo que se establece para este caso en el capítulo de inestabilidad modulacional es que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|\tilde{A}(\cdot, t) + i\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Lo anterior se satisface para $\tilde{A}_{1,2}(x, t)$ y $\tilde{\phi}_{1,2}(x, t)$. Puede así concluirse que $\bar{u}(x, t)$, es una solución modulacionalmente estable.

- (b) **Caso enfocante:** En este caso $\sigma = 1$. Recuérdese que k, κ y A son constantes reales. La relación de dispersión del sistema linealizado (4.35) es

$$(i\Omega - ik\kappa)^2 = \kappa^2 \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right).$$

En el caso enfocante no se puede concluir sobre la estabilidad de la solución de una manera tan directa como en el caso desenfocante ya que no conoce el signo de

$$\left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right).$$

Del caso enfocante se siguen los siguientes dos subcasos:

- (i) Si $|\kappa| > 2|A|$, se tiene que $\left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right) < 0$. Tomando este resultado en cuenta, las raíces de la relación de dispersión son:

$$i\Omega - ik\kappa = \pm i|\kappa| \left| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right) \right|^{1/2}.$$

Multiplicando por un factor $-i$ a ambos lados de la igualdad y despejando Ω , se obtiene:

$$\Omega = k\kappa \pm |\kappa| \left| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right) \right|^{1/2},$$

Obsérvese que Ω es real y tiene los siguientes valores.

$$\Omega_1 = k\kappa + |\kappa| \left| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right) \right|^{1/2},$$

$$\Omega_2 = k\kappa - |\kappa| \left| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right) \right|^{1/2}.$$

Al igual que el caso anterior se introduce $\Omega_c = \left(|\kappa| \left| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right) \right|^{1/2} \right)$.

Sustituyendo los valores de Ω en la solución propuesta(4.33) se tiene que,

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,2}(x, t) \\ \tilde{\phi}_{1,2}(x, t) \end{pmatrix} = e^{i(\kappa x \pm \Omega_{1,2} t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = e^{ikx - ik\kappa t \pm \Omega_c} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Como Ω es real, las soluciones $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{\phi}(x, t)$ son soluciones puramente oscilatorias y acotadas. Dado que las partes imaginarias $\text{Im}(\Omega_1)$ y $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero, para este caso, lo establecido en el capítulo de inestabilidad modulacional es:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|\tilde{A}(\cdot, t) + i\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente estable.

Lo anterior se satisface para $\tilde{A}_{1,2}(x, t)$ y $\tilde{\phi}_{1,2}(x, t)$. Puede así concluirse que para este caso $\bar{u}(x, t)$ es también una solución modulacionalmente estable.

- (ii) Si $|\kappa| < 2|A|$, se tiene que $0 < \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right)$. La relación de dispersión es:

$$(i\Omega - ik\kappa)^2 = |\kappa|^2 \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right).$$

Calculando las raíces de la relación de dispersión, se obtiene:

$$i\Omega - ik\kappa = \pm |\kappa| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Multiplicando por un factor $-i$ a ambos lados de la igualdad y despejando Ω resulta,

$$\Omega_1 = k\kappa + i|\kappa| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2},$$

$$\Omega_2 = k\kappa - i|\kappa| \left(A^2 - \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,2}(x, t) \\ \tilde{\phi}_{1,2}(x, t) \end{pmatrix} &= e^{i(\kappa x - \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{i\kappa x} e^{i\kappa t} e^{\pm|\kappa|(A^2 - \frac{\kappa^2}{4})^{1/2}t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que Ω_1 es la raíz para la cual se cumple que $\text{Im}(\Omega_1) > 0$, y Ω_2 es la raíz para la cual $\text{Im}(\Omega_2) < 0$. Realizando la correlación con el capítulo de inestabilidad modulacional se tiene que:

1. Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces $\|\tilde{A}(\cdot, t) + i\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente inestable.
2. Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces $\|\tilde{A}(\cdot, t) + i\tilde{\phi}(\cdot, t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces la solución $\bar{u}(x, t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.

En base a lo anterior se puede decir que si se elige la raíz Ω_1 y sus correspondientes soluciones $\tilde{A}_1(x, t)$ y $\tilde{\phi}_1(x, t)$, entonces $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente inestable. De otro modo, si se elige la raíz Ω_2 y sus correspondientes soluciones $\tilde{A}_2(x, t)$ y $\tilde{\phi}_2(x, t)$, se tiene que $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ es una solución modulacionalmente asintóticamente estable.

Considerando soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, t) &= c_1\tilde{A}_1(x, t) + c_2\tilde{A}_2(x, t), \\ \tilde{\phi}(x, t) &= c_3\tilde{\phi}_1(x, t) + c_4\tilde{\phi}_2(x, t), \end{aligned}$$

en las que c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes.

El comportamiento de $\|\tilde{A}(x, t) + i\tilde{\phi}(x, t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|\tilde{A}_1(x, t) + i\tilde{\phi}_1(x, t)\|_{\max}$ y $\|\tilde{A}_2(x, t) + i\tilde{\phi}_2(x, t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|\tilde{A}(x, t) + i\tilde{\phi}(x, t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo que al considerar una solución general como la anterior, se concluye para este caso que la solución $\bar{u}(x, t)$ es una solución modulacionalmente inestable.

4.3 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se llevó a cabo un análisis de estabilidad de las soluciones de tipo onda plana $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ para la ecuación NLS. Este análisis se realizó tomando en cuenta diferentes casos y subcasos. A continuación y a manera de resumen se presenta la siguiente tabla con los resultados obtenidos en este capítulo:

Perturbación	Casos		Tipo de Onda	
Amplitud	$k = 0$	$\sigma = -1$ (Desenfocante)	Estable	
		$\sigma = 1$ (Enfocante)	$ \kappa > 2 A $	Estable
			$ \kappa < 2 A $	Inestable
	$k \neq 0$	$\sigma = -1$ (Desenfocante)	Estable	
		$\sigma = 1$ (Enfocante)	$ \kappa > 2 A $	Estable
			$ \kappa < 2 A $	Inestable
Amplitud y Fase	$k = 0$	$\sigma = -1$ (Desenfocante)	Estable	
		$\sigma = 1$ (Enfocante)	$ \kappa > 2 A $	Estable
			$ \kappa < 2 A $	Inestable
	$k \neq 0$	$\sigma = -1$ (Desenfocante)	Estable	
		$\sigma = 1$ (Enfocante)	$ \kappa > 2 A $	Estable
			$ \kappa < 2 A $	Inestable

Tabla 4.1. Análisis de Estabilidad para NLS.

Obsérvese que cuando se perturbó la amplitud de la solución $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ se presentó inestabilidad modulacional tanto en el caso $k = 0$ como en el caso $k \neq 0$. Para ambos casos se presentó inestabilidad modulacional cuando signo(σ) fue igual a uno y el número de onda κ de la solución $a(x, t) = \tilde{a}_1 e^{\kappa x - \Omega t}$ fue menor que dos veces la amplitud A ; es decir, $\sigma = 1$ y $\kappa < 2|A|$.

Cuando se perturbaron simultáneamente la amplitud y la fase de la solución $\bar{u}(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, también se presentó inestabilidad modulacional tanto en el caso $k = 0$ como en el $k \neq 0$. De igual manera se presentó inestabilidad modulacional para el caso enfocante ($\sigma = 1$) para el cual el número de onda κ de las soluciones $\tilde{A}(x, t) = \tilde{a}_1 e^{\kappa x - \Omega t}$ y $\tilde{\phi} = \tilde{a}_2 e^{\kappa x - \Omega t}$ es menor que dos veces la amplitud A , es decir, $\kappa < 2|A|$.

Como conclusión, para el caso NLS continua las condiciones que determinan la inestabilidad modulacional son: encontrarse en el caso enfocante ($\sigma = 1$) y que se cumpla $\kappa < 2|A|$. Para los casos en los cuales no se cumplen estas condiciones las soluciones son modulacionalmente estables.

Estos resultados indican que cuando un paquete de ondas que contenga soluciones de la forma $\bar{u}(x, t)$ se romperá en algún tiempo t positivo, si alguna de estas soluciones presenta un tipo de perturbación en la amplitud o amplitud y fase, y estas perturbaciones entran en los parámetros para los cuales existe inestabilidad modulacional, descritos anteriormente.

5

La Ecuación no Lineal de Schrödinger Discreta y su Análisis de Estabilidad de Soluciones de Tipo Ondas Planas.

La ecuación no lineal de Schrödinger discreta (DNLS) es uno de los modelos dinámicos no lineales fundamentales. Por un lado se debe a que es la discretización de la ecuación NLS la cual tiene una amplia gama de aplicaciones. Por otra parte la ecuación DNLS es un modelo físico de interés por mérito propio. Quizás el primer conjunto de investigaciones que generó interés en las ecuaciones del tipo DNLS fue el del área de la óptica no lineal, en particular el de la fabricación de arreglos de las guías de ondas [Kevrekidis].

El objetivo de este capítulo es dar dos diferentes discretizaciones para la ecuación NLS y realizar el análisis de estabilidad de las soluciones para dichas discretizaciones, en caso de ser posible. En el análisis de estabilidad se buscará encontrar condiciones de inestabilidad modulacional mediante perturbaciones de las soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger discreta. Posteriormente se clasifican dichas soluciones como estables o inestables modulacionalmente. Este capítulo se divide principalmente en dos secciones: la *lattice* de Ablowitz-Ladik (A-L) y la ecuación no lineal de Schrödinger discreta. Al final de la segunda sección se incluirá una tabla de resultados y serán comparados con los resultados obtenidos con los resultados del caso continuo.

Diferencias finitas y la ecuación no lineal de Schrödinger

El método de diferencias finitas requiere de un conjunto discreto de puntos. En este capítulo se discretizará solamente a la variable espacial. Entonces, nuestro conjunto estará compuesto de puntos equiespaciados pertenecientes al eje x .

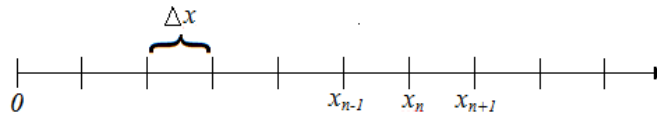


Figura 5.1. Discretización del eje x .

La imagen anterior representa al conjunto de puntos discretos en x , en el que $h = \Delta x$ es la distancia

que existe entre cualquier par de puntos consecutivos [Cebeci]. Además,

$$x_0 = 0, \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh = nh, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para simplificar, se introduce la siguiente notación:

$$u_n(t) = u(nh, t) = u(x_n, t),$$

en la que u es una función definida en el conjunto x_n y la variable continua t . Se escribirá $u_n(t)$ para denotar el valor de u en los puntos (x_n, t) .

En el capítulo 4 fue definida la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) como:

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \sigma |u(x, t)|^2 u(x, t).$$

Se usarán diferencias finitas para aproximar el valor de la segunda derivada en el punto x_n . Por definición la segunda derivada de una función en el punto x es:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}.$$

Si en lugar de que h tienda a cero, es considerado un valor fijo para $|h| \ll 1$ diferente de cero, puede aproximarse el valor de la segunda derivada en el punto x_n usando el siguiente esquema:

$$\frac{\partial^2 u_n(t)}{\partial x^2} = \frac{u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)}{h^2} + O(h^2).$$

Se descartan los términos de orden $O(h^2)$, al ser poco significativos. Finalmente se concluye que la ecuación DNLS es:

$$i \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2h^2} [u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma |u_n(t)|^2 u_n(t).$$

La *lattice* de Ablowitz-Ladik se obtiene mediante un esquema similar al anterior; la única diferencia es que se reemplaza el término no lineal $-\sigma |u_n(t)|^2 u_n(t)$ por la siguiente expresión [Scott]:

$$-\sigma |u_n(t)|^2 u_n(t) \simeq -\sigma |u_n(t)|^2 \frac{u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t)}{2},$$

en la cual se aproxima el valor de $u_n(t)$ mediante el promedio de la función $u(x, t)$ evaluada en los puntos x_{n-1} y x_{n+1} . De esta forma se obtiene la *lattice* de Ablowitz-Ladik, la cual es:

$$i \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2h^2} [u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma |u_n(t)|^2 \frac{u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t)}{2}.$$

El capítulo está organizado como sigue:

- La *lattice* de Ablowitz-Ladik (A-L)

1 Cálculo de la relación de dispersión de la *lattice* de Ablowitz-Ladik.

- 2 Cálculo de la relación de dispersión de la *lattice* de Ablowitz-Ladik linealizada.
- 3 Conclusiones de la sección.
- La ecuación no lineal de Schrödinger discreta (DNLS)
 - 4 Cálculo de la relación de dispersión de la ecuación no lineal de Schrödinger discreta.
 - 5 Se propone una solución perturbada en amplitud para la ecuación no lineal de Schrödinger discreta.
 - 6 Linealización de la ecuación no lineal de Schrödinger discreta alrededor de la solución de onda plana $\bar{u}_n(t)$.
 - 7 Análisis de estabilidad de la solución de tipo onda plana $\bar{u}_n(t) = Ae^{i(n\delta - \omega t)}$.
 - 8 Se propone una solución perturbada en amplitud y fase para la ecuación no lineal de Schrödinger discreta.
 - 9 Se repite el proceso de linealización la ecuación no lineal de Schrödinger discreta y el análisis de estabilidad de las soluciones de tipo onda plana para este caso.
 - 10 Resumen y tabla de resultados obtenidos en esta sección.

5.1 La lattice de Ablowitz-Ladik

La *lattice* de Ablowitz-Ladik es un sistema que en el límite continuo recupera la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS)[[Scott](#)] y es la siguiente ecuación:

$$i \frac{du_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] - \sigma |u_n|^2 \left(\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \right), \quad (5.1)$$

para la cual $\sigma = \pm 1$. El signo positivo indica (A-L) enfocante y el signo negativo (A-L) desenfocante.

Suponiendo que

$$\bar{u}_n(t) = Ae^{i(n\delta - \omega t)}, \quad (5.2)$$

satisface la ecuación (5.1), en la cual $\delta = k\hbar$, y además A es una constante real como se explicó en el capítulo 4.

Nótese que la solución (5.2) cumple las siguientes propiedades:

$$\bar{u}_{n+1}(t) = e^{i\delta} \bar{u}_n(t), \quad (5.3)$$

$$i \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = \omega \bar{u}_n(t). \quad (5.4)$$

5.1.1 La relación de dispersión de la lattice de Ablowitz-Ladik

Se calculará la relación de dispersión de la *lattice* de Ablowitz-Ladik usando las propiedades (5.3), (5.4) y sustituyendo la solución (5.2) en (5.1)

$$i \frac{dAe^{in\delta-i\omega t}}{dt} = -\frac{1}{2} [Ae^{i(n+1)\delta-i\omega t} - 2Ae^{in\delta-i\omega t} + Ae^{i(n-1)\delta-i\omega t}] - \sigma |Ae^{in\delta-i\omega t}|^2 \left(\frac{Ae^{i(n+1)\delta-i\omega t} + Ae^{i(n-1)\delta-i\omega t}}{2} \right).$$

Al usar las propiedades (5.3) y (5.4) en la expresión anterior, se obtiene

$$\omega \bar{u}_n(t) = -\frac{1}{2} [e^{i\delta} \bar{u}_n(t) - 2\bar{u}_n(t) + e^{-i\delta} \bar{u}_n(t)] - \sigma |\bar{u}_n(t)|^2 \left(\frac{e^{i\delta} \bar{u}_n(t) + e^{-i\delta} \bar{u}_n(t)}{2} \right).$$

Dado que el término $\bar{u}_n(t)$ aparece multiplicando ambos lados de la igualdad puede prescindirse de él. Por otro lado, se tiene que $|\bar{u}_n(t)|^2 = |A|^2$. De esta manera, la ecuación anterior queda como

$$\omega = 1 - \frac{(e^{i\delta} + e^{-i\delta})}{2} - \sigma |A|^2 \left(\frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2} \right).$$

Será usada la siguiente identidad en la ecuación anterior,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

y finalmente, es obtenida la relación de dispersión de la *lattice* de Ablowitz-Ladik,

$$\omega = 1 - \cos \delta - \sigma |A|^2 \cos \delta, \quad (5.5)$$

o bien,

$$\omega = 1 - (1 + \sigma |A|^2) \cos \delta. \quad (5.6)$$

5.1.2 La relación de dispersión de la lattice de Ablowitz-Ladik linealizada

Ahora que ya es conocida la expresión para la relación de dispersión (5.5), se verá qué sucede cuando se perturba la amplitud de la solución $\bar{u}_n(t)$.

Se define la siguiente solución perturbada:

$$u_n(t) = \bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t), \quad (5.7)$$

para la cual $\bar{u}_n(t)$ es la solución (5.2), se elige ϵ tal que $|\epsilon| \ll 1$, $U_n(t) = a_n(t)e^{i(n\delta-\omega t)}$ es la perturbación que se introdujo a la amplitud de la solución $\bar{u}_n(t)$ y $a_n(t)$ es una función para la amplitud.

Para esta nueva solución perturbada se buscará una expresión para $a_n(t)$; para ello primero debe sustituirse (5.7) en la *lattice* de Ablowitz-Ladik,

$$i \frac{du_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma |u_n(t)|^2 \left(\frac{u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t)}{2} \right).$$

Sustituyendo

$$u_n(t) = \bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)$$

en la expresión anterior, resulta:

$$i \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + i\epsilon \frac{dU_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[\bar{u}_{n+1}(t) + \epsilon U_{n+1}(t) - 2\bar{u}_n - 2\epsilon U_n(t) + \bar{u}_{n-1} + \epsilon U_{n-1}(t)] - \sigma |\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2 \left(\frac{\bar{u}_{n+1} + \epsilon U_{n+1}(t) + \bar{u}_{n-1} + \epsilon U_{n-1}(t)}{2} \right). \quad (5.8)$$

Usando las propiedades (5.3) y (5.4) en la ecuación (5.8) se tiene

$$\omega \bar{u}_n(t) + i\epsilon \frac{dU_n(t)}{dt} = \bar{u}_n(t)(1 - \cos(\delta)) - \epsilon \left(\frac{U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) - \sigma |\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2 \left(\bar{u}_n(t) \cos(\delta) + \epsilon \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) \right). \quad (5.9)$$

Se toma $|\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2$ del término no lineal de la ecuación (5.9) y se desarrolla usando la propiedad para los números complejos $|z|^2 = z \cdot z^*$, en el que z^* es el conjugado de z . Lo que da como resultado,

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2 &= \bar{u}_n(t)\bar{u}_n^*(t) + \epsilon \bar{u}_n(t)U_n^*(t) + \epsilon \bar{u}_n^*(t)U_n(t) + \epsilon^2 U_n(t)U_n^*(t) \\ &= |\bar{u}_n(t)|^2 + \epsilon(\bar{u}_n(t)U_n^*(t) + \bar{u}_n^*(t)U_n(t)) + \epsilon^2 |U_n(t)|^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en el término no lineal de (5.9) resulta,

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2 \left(\bar{u}_n(t) \cos(\delta) + \epsilon \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) \right) &= |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t) \cos(\delta) \\ &+ \epsilon |\bar{u}_n(t)|^2 \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) + \epsilon \cos(\delta) (|\bar{u}_n(t)|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)), \end{aligned}$$

descartando los términos de orden $O(\epsilon^2)$ y $O(\epsilon^3)$.

En base a los últimos cálculos, la ecuación (5.9) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega \bar{u}_n(t) + i\epsilon \frac{dU_n(t)}{dt} &= \bar{u}_n(t)(1 - \cos(\delta)) - \sigma |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t) \cos(\delta) + \epsilon \left(-\frac{U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) \\ &- \sigma \epsilon |\bar{u}_n(t)|^2 \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) - \sigma \epsilon \cos(\delta) (|\bar{u}_n(t)|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)). \end{aligned}$$

Sustituyendo $|\bar{u}_n(t)|^2 = |A|^2$ y reordenando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t) \underbrace{[\omega - (1 - \cos(\delta)) + \sigma |A|^2 \cos(\delta)]}_{\text{}} + i\epsilon \frac{U_n(t)}{dt} &= -\epsilon \frac{1}{2} [U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)] \\ &- \sigma \epsilon |A|^2 \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) - \sigma \epsilon \cos(\delta) (|A|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)). \end{aligned}$$

Los términos señalados se anulan, pues satisfacen la relación de dispersión (5.5), resultando

$$i\epsilon \frac{dU_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\epsilon[U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)] - \sigma\epsilon|A|^2 \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) - \sigma\epsilon \cos(\delta)(|A|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)).$$

Factorizando ϵ en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación para $U_n(t)$,

$$i \frac{dU_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)] - \sigma|A|^2 \left(\frac{U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)}{2} \right) - \sigma \cos(\delta)(|A|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)). \quad (5.10)$$

Recuérdese que $U_n(t) = a_n(t)e^{i(n\delta - \omega t)}$. Por lo tanto, la ecuación (5.10) ahora es

$$\begin{aligned} \omega a_n(t)e^{i(n\delta - \omega t)} + i \frac{da_n(t)}{dt} e^{i(n\delta - \omega t)} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - 2a_n(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}]e^{i(n\delta - \omega t)} \\ - \sigma|A|^2 \left(\frac{a_{n+1}(t)e^{i\delta} + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}}{2} \right) e^{i(n\delta - \omega t)} &- \sigma \cos(\delta)|A|^2 a_n(t)e^{i(n\delta - \omega t)} \\ - \sigma \cos(\delta)\bar{u}_n(t)^2 a_n^*(t)e^{i(n\delta - \omega t)}. & \end{aligned} \quad (5.11)$$

El término $e^{i(n\delta - \omega t)}$ aparece en ambos lados de la igualdad; puede ser factorizado y eliminado de la ecuación anterior. Posteriormente, se agrega a la ecuación (5.11) un cero de la forma:

$$a_n(t) \cos(\delta) + a_n(t) - a_n(t) \cos(\delta) - a_n(t) = 0.$$

Lo anterior con la finalidad de poder eliminar algunos términos de la ecuación (5.11). Haciendo esto se obtiene,

$$\begin{aligned} \omega a_n(t) + i \frac{da_n(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}e^{i\delta} - 2a_n + a_{n-1}e^{-i\delta}] - \sigma|A|^2 \left(\frac{a_{n+1}e^{i\delta} + a_{n-1}e^{-i\delta}}{2} \right) \\ - \sigma \cos(\delta)|A|^2 a_n(t) &- \sigma \cos(\delta)A^2 a_n^*(t) + a_n(t) \cos(\delta) + a_n(t) - a_n(t) \cos(\delta) - a_n(t). \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} a_n(t) \underbrace{(\omega - 1 + \cos(\delta) + \sigma|A|^2 \cos(\delta))}_{\text{factor}} + i \frac{da_n(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}e^{i\delta} - 2a_n + a_{n-1}e^{-i\delta}] \\ - \sigma|A|^2 \left(\frac{a_{n+1}e^{i\delta} + a_{n-1}e^{-i\delta}}{2} \right) &- \sigma \cos(\delta)A^2 a_n^*(t) + a_n(t) \cos(\delta) - a_n(t). \end{aligned}$$

Los términos señalados son cero, ya que satisfacen la relación de dispersión (5.5). Finalmente, es obtenida una ecuación para $a_n(t)$

$$\begin{aligned} i \frac{da_n(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}e^{i\delta} - 2a_n + a_{n-1}e^{-i\delta}] - \sigma|A|^2 \left(\frac{a_{n+1}e^{i\delta} + a_{n-1}e^{-i\delta}}{2} \right) \\ - \sigma \cos(\delta)A^2 a_n^*(t) &+ a_n(t) \cos(\delta) - a_n(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

A partir de este punto no fue posible continuar con el análisis de estabilidad, pues no se encontró una manera de seguir simplificando los términos y por lo tanto, no fue posible concluir algo sobre la estabilidad de las soluciones para este esquema.

En la Enciclopedia de la Ciencia no Lineal [Scott] se comenta que al momento de esa edición no se conocía una aplicación física directa de la *lattice* de Ablowitz-Ladik; sin embargo, es comúnmente utilizada como punto de partida en análisis de perturbaciones de sistemas físicos más relevantes como el que sigue.

5.2 La Ecuación no Lineal de Schrödinger Discreta

5.2.1 La Relación de Dispersión de la Ecuación no Lineal de Schrödinger Discreta

Considérese la ecuación no lineal de Schrödinger discreta (DNLS) como sigue:

$$i \frac{du_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma |u_n(t)|^2 u_n(t), \quad (5.13)$$

para la cual $\sigma = \pm 1$. El signo positivo de sigma indica DNLS enfocante y el signo negativo DNLS desenfocante.

Supóngase que

$$\bar{u}_n(t) = A e^{i(n\delta - \omega t)} \quad (5.14)$$

satisface a la ecuación (5.13), para la cual A es real y distinta de cero, y $\delta = kh$.

Nótese que para la solución (5.14) se cumplen las siguientes propiedades:

$$\bar{u}_{n+1}(t) = e^{i\delta} \bar{u}_n(t), \quad (5.15)$$

$$i \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = \omega \bar{u}_n(t). \quad (5.16)$$

Para encontrar la relación de dispersión de la ecuación DNLS, primero debe sustituirse la solución (5.14) en la ecuación (5.13):

$$i \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[\bar{u}_{n+1}(t) - 2\bar{u}_n(t) + \bar{u}_{n-1}(t)] - \sigma |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t),$$

usando las propiedades (5.15) y (5.16) en la expresión anterior se obtiene

$$\omega \bar{u}_n(t) = -\frac{1}{2}[e^{i\delta} \bar{u}_n(t) - 2\bar{u}_n(t) + e^{-i\delta} \bar{u}_n(t)] - \sigma |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t).$$

Por último se elimina el término $\bar{u}_n(t)$, pues es un factor que aparece multiplicando en ambos lados de la igualdad y siempre es diferente de cero. Además tómesese en cuenta el hecho de que $|\bar{u}_n(t)|^2 = |A|^2$. Así se tiene

$$\omega = -\frac{1}{2}[e^{i\delta} - 2 + e^{-i\delta}] - \sigma|A|^2.$$

En la ecuación anterior se usa la siguiente identidad:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (5.17)$$

con lo cual se obtiene

$$\omega - 1 + \cos(\delta) + \sigma|A|^2 = 0. \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) es la relación de dispersión de la ecuación DNLS.

5.2.2 La relación de dispersión de la ecuación DNLS linealizada: Perturbando la amplitud.

Al igual que en el capítulo anterior, se comenzará a perturbar la solución (5.14) por la amplitud. Para ello se propone la siguiente solución perturbada,

$$u_n(t) = \bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t), \quad (5.19)$$

para la cual $\bar{u}_n(t)$ es (5.14), ϵ se elige tal que $|\epsilon| \ll 1$, $U_n(t) = a_n(t)e^{i(n\delta - \omega t)}$ es una función que se introduce para perturbar la amplitud de la solución $\bar{u}_n(t)$ y $a_n(t)$ es una función para la amplitud perturbada.

Se sustituye la solución perturbada (5.19) en la ecuación (5.13), con la finalidad de obtener una ecuación para $a_n(t)$ y de este modo analizar posteriormente la evolución de la perturbación,

$$i \left(\frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + \epsilon \frac{dU_n(t)}{dt} \right) = -\frac{1}{2} [\bar{u}_{n+1}(t) + \epsilon U_{n+1}(t) - 2\bar{u}_n(t) - 2\epsilon U_n(t) + \bar{u}_{n-1}(t) + \epsilon U_{n-1}(t)] - \sigma |\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2 (\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)). \quad (5.20)$$

Tomando el término no lineal de (5.20) y usando la siguiente propiedad para los números complejos $|z|^2 = z \cdot z^*$, en la que z^* es el conjugado de z , resulta

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)|^2 (\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)) &= (\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)) (\bar{u}_n^*(t) + \epsilon U_n^*(t)) (\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)) \\ &= |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t) + \epsilon [2|\bar{u}_n(t)|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)] + \\ &\quad \epsilon^2 [2|U_n(t)|^2 \bar{u}_n(t) + U_n(t)^2 \bar{u}_n^*(t)] + \epsilon^3 |U_n(t)|^2 U_n(t). \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en (5.20) y descartando los términos de orden ϵ^2 y ϵ^3 se tiene,

$$i \left(\frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + \epsilon \frac{dU_n(t)}{dt} \right) = -\frac{1}{2} [\bar{u}_{n+1}(t) + \epsilon U_{n+1}(t) - 2\bar{u}_n(t) - 2\epsilon U_n(t) + \bar{u}_{n-1}(t) + \epsilon U_{n-1}(t)] - \sigma [|\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t) + \epsilon [2|\bar{u}_n(t)|^2 U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2 U_n^*(t)]]. \quad (5.21)$$

Los términos la ecuación anterior se reordenan,

$$\underbrace{i\frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + \frac{1}{2}[\bar{u}_{n+1}(t) - 2\bar{u}_n(t) + \bar{u}_{n-1}(t)] + \sigma|\bar{u}_n(t)|^2\bar{u}_n(t)}_{\text{}} + i\epsilon\frac{dU_n(t)}{dt} + \frac{1}{2}\epsilon[U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)] - \sigma\epsilon[2|\bar{u}_n(t)|^2U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2U_n^*(t)] = 0.$$

Dado que los términos señalados satisfacen la ecuación DNLS, estos se pueden eliminar y solamente permanecen en la ecuación (5.21) los términos de orden ϵ . Por lo tanto, la ecuación (5.21) se reduce a la siguiente ecuación:

$$i\frac{dU_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)] - \sigma[2|\bar{u}_n(t)|^2U_n(t) + \bar{u}_n(t)^2U_n^*(t)]. \quad (5.22)$$

La ecuación (5.22) es la linealización de la ecuación no lineal de Schrödinger discreta alrededor de la solución $\bar{u}_n(t)$ cuando se perturba la amplitud.

Recuérdese que $U_n(t) = a_n(t)e^{i(n\delta - \omega t)}$. Por cuestiones de notación se usará $\theta_n = n\delta - \omega t$ y de este modo se tiene que

$$U_n(t) = a_n(t)e^{i\theta_n}.$$

Si se sustituye el valor de $U_n(t)$ en la ecuación (5.22) se obtiene,

$$\begin{aligned} i\frac{d(a_n(t)e^{i\theta_n})}{dt} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\theta_{n+1}} - 2a_n(t)e^{i\theta_n} + a_{n-1}(t)e^{i\theta_{n-1}}] \\ &\quad - \sigma[2|\bar{u}_n(t)|^2a_n(t)e^{i\theta_n} + \bar{u}_n(t)^2a_n^*(t)e^{-i\theta_n}]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Se deriva del lado izquierdo de la ecuación (5.23), se factoriza $e^{i\theta_n}$ del lado derecho y se sustituye $|\bar{u}_n(t)|^2 = A^2$; con ello se obtiene,

$$\begin{aligned} \left(\omega a_n(t) + i\frac{da_n(t)}{dt}\right) e^{i\theta_n} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - 2a_n(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}]e^{i\theta_n} \\ &\quad - \sigma[2A^2a_n(t) + A^2a_n^*(t)]e^{i\theta_n}. \end{aligned}$$

Dado que el factor $e^{i\theta_n}$ se encuentra en ambos lados de la igualdad, puede ser eliminado de la ecuación. Paralelamente se añade un cero al lado derecho de la igualdad de la siguiente forma

$$a_n(t)(1 - \cos(\delta)) - a_n(t)(1 - \cos(\delta)) = 0.$$

Así se tiene,

$$\begin{aligned} \omega a_n(t) + i\frac{da_n(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - 2a_n(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}] - \sigma[2A^2a_n(t) + A^2a_n^*(t)] \\ &\quad + a_n(t)(1 - \cos(\delta)) - a_n(t)(1 - \cos(\delta)). \end{aligned}$$

Haciendo un reacomodo de términos se obtiene,

$$\begin{aligned} a_n(t) \underbrace{[\omega - 1 + \cos(\delta) + \sigma A^2]}_{\text{}} + i\frac{da_n(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - 2a_n(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}] \\ &\quad - \sigma A^2[a_n(t) + a_n^*(t)] - a_n(t)(1 - \cos(\delta)). \end{aligned}$$

Por la relación de dispersión (5.18) los términos señalados son cero, de tal modo que finalmente se obtiene,

$$i \frac{da_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - 2a_n(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}] - \sigma A^2[a_n(t) + a_n^*(t)] - a_n(t)(1 - \cos(\delta)). \quad (5.24)$$

La ecuación (5.24) es la ecuación linealizada para la amplitud perturbada de la ecuación DNLS. Lo que sigue ahora, es calcular la relación de dispersión de la ecuación (5.24).

Para calcular la relación de dispersión de la ecuación (5.24), considérense a (5.24) y a su complejo conjugado:

$$i \frac{da_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - 2a_n(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta}] - \sigma A^2[a_n(t) + a_n^*(t)] - a_n(t)(1 - \cos(\delta)). \quad (5.25)$$

$$-i \frac{da_n^*(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[a_{n+1}^*(t)e^{-i\delta} - 2a_n^*(t) + a_{n-1}^*(t)e^{i\delta}] - \sigma A^2[a_n(t) + a_n^*(t)] - a_n^*(t)(1 - \cos(\delta)). \quad (5.26)$$

Si las ecuaciones (5.25) y (5.26) son sumadas término a término, resulta:

$$i \left(\frac{da_n(t)}{dt} - \frac{da_n^*(t)}{dt} \right) = -\frac{1}{2} \left[a_{n+1}(t)e^{i\delta} + a_{n+1}^*(t)e^{-i\delta} - 2a_n(t) - 2a_n^*(t) + a_{n-1}e^{-i\delta} + a_{n-1}^*(t)e^{i\delta} \right] - 2\sigma A^2 (a_n^*(t) + a_n(t)) - (1 - \cos \delta) (a_n^*(t) + a_n(t)).$$

Por linealidad de la derivada, del lado izquierdo de la igualdad se deriva la resta de $a_n(t)$ y $a_n^*(t)$; mientras que por el lado derecho se puede escribir $a_n(t) = \text{Re}(a_n(t)) + i\text{Im}(a_n(t))$ y $a_n^*(t) = \text{Re}(a_n(t)) - i\text{Im}(a_n(t))$, y de manera similar se hace lo mismo para $a_{n+1}(t)$, $a_{n+1}^*(t)$, $a_{n-1}(t)$ y $a_{n-1}^*(t)$. De este modo se obtiene:

$$i \left(\frac{d(a_n(t) - a_n^*(t))}{dt} \right) = -\frac{1}{2} \left[\text{Re}(a_{n+1}(t))e^{i\delta} + i\text{Im}(a_{n+1}(t))e^{i\delta} + \text{Re}(a_{n+1}(t))e^{-i\delta} - i\text{Im}(a_{n+1}(t))e^{-i\delta} \right. \\ \left. - 2 \left(\text{Re}(a_n(t)) + i\text{Im}(a_n(t)) \right) - 2 \left(\text{Re}(a_n(t)) - i\text{Im}(a_n(t)) \right) \right. \\ \left. + \text{Re}(a_{n-1}(t))e^{-i\delta} + i\text{Im}(a_{n-1}(t))e^{-i\delta} + \text{Re}(a_{n-1}(t))e^{i\delta} - i\text{Im}(a_{n-1}(t))e^{i\delta} \right] \\ - 2\sigma A^2 \left(\text{Re}(a_n(t)) - i\text{Im}(a_n(t)) + \text{Re}(a_n(t)) + i\text{Im}(a_n(t)) \right) \\ - (1 - \cos \delta) \left(\text{Re}(a_n(t)) - i\text{Im}(a_n(t)) + \text{Re}(a_n(t)) + i\text{Im}(a_n(t)) \right).$$

Reagrupando los términos de la ecuación anterior se tiene:

$$i \frac{d(2i\text{Im}(a_n(t)))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\text{Re}(a_{n+1}(t))(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + i\text{Im}(a_{n+1}(t))(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) - 2(2\text{Re}(a_n(t))) \right] \\ + \text{Re}(a_{n-1}(t))(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) - i\text{Im}(a_{n-1}(t))(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \\ - 2\sigma A^2(2\text{Re}(a_n(t))) - (1 - \cos \delta)(2\text{Re}(a_n(t))).$$

Dividiendo entre 2 ambos lados de la igualdad, y usando la identidad de Euler en la expresión anterior, se generarán senos y cosenos,

$$-\frac{d(\operatorname{Im}(a_n(t)))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{Re}(a_{n+1}(t))(\cos \delta) - \operatorname{Im}(a_{n+1}(t))(\sin \delta) - 2(\operatorname{Re}(a_n(t))) + \operatorname{Re}(a_{n-1}(t))(\cos \delta) + \operatorname{Im}(a_{n-1}(t))(\sin \delta) \right] - \operatorname{Re}(a_n(t))(2\sigma A^2 + (1 - \cos \delta)).$$

Los términos que tengan $\sin \delta$ y $\cos \delta$ del lado derecho de la igualdad son agrupados y se saca de los corchetes el término $-2\operatorname{Re}(a_n(t))$. De este modo se obtiene la siguiente ecuación para $\operatorname{Im}(a_n(t))$,

$$-\frac{d(\operatorname{Im}(a_n(t)))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\cos \delta \left(\operatorname{Re}(a_{n+1}(t)) - 2\operatorname{Re}(a_n(t)) + \operatorname{Re}(a_{n-1}(t)) \right) + \sin \delta \left(\operatorname{Im}(a_{n-1}(t)) - \operatorname{Im}(a_{n+1}(t)) \right) \right] - 2\operatorname{Re}(a_n(t))\sigma A^2. \quad (5.27)$$

Por otro lado, si se resta las ecuaciones (5.25) y (5.26) término a término, resulta:

$$i \frac{d(a_n(t) + a_n^*(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[a_{n+1}(t)e^{i\delta} - a_{n+1}^*(t)e^{-i\delta} - 2a_n(t) + 2a_n^*(t) + a_{n-1}(t)e^{-i\delta} - a_{n-1}^*(t)e^{i\delta} \right] - a_n(t)(1 - \cos \delta) + a_n^*(t)(1 - \cos \delta).$$

En el lado derecho de la igualdad se escribe $a_n(t) = \operatorname{Re}(a_n(t)) + i\operatorname{Im}(a_n(t))$ y $a_n^*(t) = \operatorname{Re}(a_n(t)) - i\operatorname{Im}(a_n(t))$, y análogamente se hace lo mismo para $a_{n+1}(t)$, $a_{n+1}^*(t)$, $a_{n-1}(t)$ y $a_{n-1}^*(t)$. De este modo se obtiene:

$$i \frac{d2\operatorname{Re}(a_n(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{Re}(a_{n+1}(t))e^{i\delta} + i\operatorname{Im}(a_{n+1}(t))e^{i\delta} - \operatorname{Re}(a_{n+1}(t))e^{-i\delta} + i\operatorname{Im}(a_{n+1}(t))e^{-i\delta} - 2(\operatorname{Re}(a_n(t)) + i\operatorname{Im}(a_n(t)) - \operatorname{Re}(a_n(t)) + i\operatorname{Im}(a_n(t))) + \operatorname{Re}(a_{n-1}(t))e^{-i\delta} + i\operatorname{Im}(a_{n-1}(t))e^{-i\delta} - \operatorname{Re}(a_{n-1}(t))e^{i\delta} + i\operatorname{Im}(a_{n-1}(t))e^{i\delta} \right] - (1 - \cos \delta)(\operatorname{Re}(a_n(t)) + i\operatorname{Im}(a_n(t)) - \operatorname{Re}(a_n(t)) + i\operatorname{Im}(a_n(t))).$$

Reagrupando los términos de la ecuación anterior se tiene:

$$2i \frac{d\operatorname{Re}(a_n(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{Re}(a_{n+1}(t))(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) + i\operatorname{Im}(a_{n+1}(t))(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) - 2(2\operatorname{Im}(a_n(t))) + \operatorname{Re}(a_{n-1}(t))(e^{-i\delta} - e^{i\delta}) + i\operatorname{Im}(a_{n-1}(t))(e^{-i\delta} + e^{i\delta}) \right] - (1 - \cos \delta)(2i\operatorname{Im}(a_n(t))).$$

Se divide entre $2i$ en ambos lados de la igualdad y se usa la identidad de Euler, lo que generará senos y cosenos en la expresión anterior,

$$\frac{d\operatorname{Re}(a_n(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{Re}(a_{n+1}(t)) \sin \delta + \operatorname{Im}(a_{n+1}(t)) \cos \delta - 2\operatorname{Im}(a_n(t)) - i\operatorname{Re}(a_{n-1}(t)) \sin \delta + \operatorname{Im}(a_{n-1}(t)) \cos \delta \right] - (1 - \cos \delta)(\operatorname{Im}(a_n(t))).$$

Se agrupan los términos que tengan $\sin \delta$ y $\cos \delta$ del lado derecho de la igualdad y se saca de los corchetes el término $-2\text{Im}(a_n(t))$. De este modo se obtiene una ecuación para $\text{Re}(a_n(t))$,

$$\frac{d\text{Re}(a_n(t))}{dt} - \frac{1}{2} \left[\sin \delta \left(\text{Re}(a_{n+1}(t)) - \text{Re}(a_{n-1}(t)) \right) + \cos \delta \left(\text{Im}(a_{n+1}(t)) - 2\text{Im}(a_n(t)) + \text{Im}(a_{n-1}(t)) \right) \right]. \quad (5.28)$$

De esta manera se tienen dos ecuaciones, una para $\text{Re}(a_n(t))$ y otra para $\text{Im}(a_n(t))$:

$$\frac{d\text{Re}(a_n(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\sin \delta \left(\text{Re}(a_{n+1}(t)) - \text{Re}(a_{n-1}(t)) \right) + \cos \delta \left(\text{Im}(a_{n+1}(t)) - 2\text{Im}(a_n(t)) + \text{Im}(a_{n-1}(t)) \right) \right], \quad (5.29)$$

$$\frac{d\text{Im}(a_n(t))}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\cos \delta \left(\text{Re}(a_{n+1}(t)) - 2\text{Re}(a_n(t)) + \text{Re}(a_{n-1}(t)) \right) + \sin \delta \left(\text{Im}(a_{n+1}(t)) - \text{Im}(a_{n-1}(t)) \right) \right] - 2\text{Re}(a_n(t))\sigma A^2. \quad (5.30)$$

Supóngase que existen soluciones de la forma:

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(a_n(t)) \\ \text{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} = e^{i(n\Delta - \Omega t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

en la cual \tilde{a}_1 y \tilde{a}_2 son constantes.

Las soluciones propuestas satisfacen las siguientes propiedades:

$$\text{Re}(a_{n+1}(t)) = e^{i\Delta} \text{Re}(a_n(t)), \quad (5.32)$$

$$\text{Im}(a_{n+1}(t)) = e^{i\Delta} \text{Im}(a_n(t)), \quad (5.33)$$

$$\frac{d\text{Re}(a_n(t))}{dt} = -i\Omega \text{Re}(a_n(t)), \quad (5.34)$$

$$\frac{d\text{Im}(a_n(t))}{dt} = -i\Omega \text{Im}(a_n(t)). \quad (5.35)$$

Sustituyendo las propiedades (5.32), (5.33), (5.34) y (5.35), en la ecuación (5.29) se obtiene,

$$-i\Omega \text{Re}(a_n(t)) = -\frac{1}{2} \left[\sin \delta \left(\text{Re}(a_n(t))e^{i\Delta} - \text{Re}(a_n(t))e^{-i\Delta} \right) + \cos \delta \left(\text{Im}(a_n(t))e^{i\Delta} - 2\text{Im}(a_n(t)) + \text{Im}(a_{n-1}(t))e^{-i\Delta} \right) \right],$$

$$-i\Omega\text{Re}(a_n(t)) = -\frac{1}{2} \left[\sin \delta \left(\text{Re}(a_n(t))(e^{i\Delta} - e^{-i\Delta}) \right) + \cos \delta \left(\text{Im}(a_n(t))(e^{i\Delta} - 2 + e^{-i\Delta}) \right) \right].$$

Usando la identidad de Euler se tiene:

$$-i\Omega\text{Re}(a_n(t)) = \left[-i \sin \delta \sin \Delta \text{Re}(a_n(t)) - \cos \delta \cos \Delta \text{Im}(a_n(t)) + \cos \delta \text{Im}(a_n(t)) \right]. \quad (5.36)$$

Ahora se usan las propiedades (5.32), (5.33), (5.34) y (5.35) en la ecuación (5.30), resultando

$$\begin{aligned} -(-i\Omega)\text{Im}(a_n(t)) &= -\frac{1}{2} \left[\cos \delta \left(\text{Re}(a_n(t))e^{i\Delta} - 2\text{Re}(a_n(t)) + \text{Re}(a_n(t))e^{-i\Delta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \delta \left(\text{Im}(a_n(t))e^{-i\Delta} - \text{Im}(a_n(t))e^{i\Delta} \right) \right] - 2\text{Re}(a_n(t))\sigma A^2, \end{aligned}$$

$$i\Omega\text{Im}(a_n(t)) = -\frac{1}{2} \left[\cos \delta \text{Re}(a_n(t))(e^{i\Delta} - 2 + e^{-i\Delta}) + \sin \delta \text{Im}(a_n(t))(e^{-i\Delta} - e^{i\Delta}) \right] - 2\text{Re}(a_n(t))\sigma A^2.$$

Usando la identidad de Euler se tiene:

$$i\Omega\text{Im}(a_n(t)) = \left[-\cos \delta \cos \Delta \text{Re}(a_n(t)) + \cos \delta \text{Re}(a_n(t)) + i \sin \delta \sin \Delta \text{Im}(a_n(t)) \right] - 2\text{Re}(a_n(t))\sigma A^2. \quad (5.37)$$

Finalmente, se obtienen ecuaciones para la parte real e imaginaria de $a_n(t)$, ecuación (5.36) y ecuación (5.37) respectivamente, las cuales son:

$$\begin{aligned} -i\Omega\text{Re}(a_n(t)) &= \left[-i \sin \delta \sin \Delta \text{Re}(a_n(t)) - \cos \delta \cos \Delta \text{Im}(a_n(t)) + \cos \delta \text{Im}(a_n(t)) \right], \\ i\Omega\text{Im}(a_n(t)) &= \left[-\cos \delta \cos \Delta \text{Re}(a_n(t)) + \cos \delta \text{Re}(a_n(t)) + i \sin \delta \sin \Delta \text{Im}(a_n(t)) \right] \\ &\quad - 2\text{Re}(a_n(t))\sigma A^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como el siguiente sistema de ecuaciones

$$i\Omega \begin{pmatrix} \text{Re}(a_n(t)) \\ \text{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \sin \delta \sin \Delta & \cos \delta (\cos \Delta - 1) \\ \cos \delta (1 - \cos \Delta) - 2\sigma A^2 & i \sin \delta \sin \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re}(a_n(t)) \\ \text{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

El sistema (5.38) tiene una solución no trivial cuando se cumple:

$$\det \begin{pmatrix} i(\sin \delta \sin \Delta - \Omega) & -\cos \delta (1 - \cos \Delta) \\ \cos \delta (1 - \cos \Delta) - 2\sigma A^2 & i(\sin \delta \sin \Delta - \Omega) \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$-(\sin \delta \sin \Delta - \Omega)^2 - [-(\cos \delta)^2 (1 - \cos \Delta)^2 + 2\sigma A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta)] = 0.$$

Despejando $(\sin \delta \sin \Delta - \Omega)^2$ se tiene:

$$(\Omega - \sin \delta \sin \Delta)^2 = (\cos \delta)^2 (1 - \cos \Delta)^2 - 2\sigma A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta). \quad (5.39)$$

La ecuación (5.39) es la relación de dispersión del sistema linealizado cuando se perturba la amplitud.

5.2.3 Estabilidad de las soluciones de onda plana de la ecuación DNLS: Perturbación de la amplitud

A continuación será realizado el análisis de estabilidad de las soluciones de la forma (5.14), considerando los casos: $\cos \delta = 1$ y $\cos \delta \neq 1$; y en cada uno de ellos los subcasos $\sigma = 1$ enfocante, y $\sigma = -1$ desenfocante. Además se considerará $|A| > 1$.

Análisis de estabilidad: $\cos(\delta) = 1$

Cuando $\cos(\delta) = 1$, la relación de dispersión (5.39) es:

$$\Omega^2 = (1 - \cos \Delta)^2 - 2\sigma A^2(1 - \cos \Delta),$$

si se factoriza el término $(1 - \cos \Delta)$, resulta

$$\Omega^2 = (1 - \cos \Delta)[(1 - \cos \Delta) - 2\sigma A^2], \quad (5.40)$$

Ahora se verá qué forma tienen las raíces Ω para la relación de dispersión (5.40), para los casos enfocante y desenfocante, considerando además $|A| > 1$.

(a) **Caso desenfocante:** Si $\sigma = -1$, la relación de dispersión (5.40) es:

$$\Omega^2 = (1 - \cos \Delta)[(1 - \cos \Delta) + 2A^2].$$

Nótese que el factor $(1 - \cos(\Delta))$ es siempre mayor o igual que cero, es decir, el lado derecho de la expresión anterior es no negativo. A su vez, lo anterior significa que las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (5.40) son reales, y tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{(1 - \cos(\Delta)) + 2A^2} \sqrt{1 - \cos(\Delta)}, \\ \Omega_2 &= -\sqrt{(1 - \cos(\Delta)) + 2A^2} \sqrt{1 - \cos(\Delta)}. \end{aligned}$$

Entonces las soluciones (5.31) tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_{1,2n}(t)) \\ \operatorname{Im}(a_{1,2n}(t)) \end{pmatrix} = e^{i(n\Delta - \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}$$

Como se puede notar, son soluciones puramente oscilatorias y acotadas.

Puede relacionarse este resultado con los criterios de estabilidad que fueron establecidos en el capítulo 3. Cuando las raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, las partes imaginarias de Ω , $\operatorname{Im}(\Omega_1)$ y $\operatorname{Im}(\Omega_2)$, son cero. Entonces se tiene que:

- Si $\operatorname{Im}(\Omega) = 0$, entonces $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow K$, cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

(b) **Caso enfocante:** Si $\sigma = 1$, la relación de dispersión (5.40) es:

$$\Omega^2 = (1 - \cos(\Delta))[(1 - \cos(\Delta)) - 2A^2].$$

Obsérvese que $(1 - \cos(\Delta))$ es siempre mayor o igual que cero y menor o igual que dos, y que $2A^2 > 2$ ya que se eligió $|A| > 1$. Esto implica que el término $(1 - \cos(\Delta)) - 2A^2$ es negativo. Lo cual significa que las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (5.40) son imaginarias y tienen la forma:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -i\sqrt{1 - \cos \Delta}\sqrt{|1 - \cos \Delta - 2A^2|} \\ \Omega_2 &= i\sqrt{1 - \cos \Delta}\sqrt{|1 - \cos \Delta - 2A^2|}\end{aligned}$$

Entonces las soluciones (5.31) tienen la forma:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_n(t)) \\ \operatorname{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} &= e^{i(n\Delta - \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_{(1,2)n}(t)) \\ \operatorname{Im}(a_{(1,2)n}(t)) \end{pmatrix} &= e^{in\Delta} e^{\pm\Omega_c t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

para las cuales $\Omega_c = \sqrt{1 - \cos \Delta}\sqrt{|1 - \cos \Delta - 2A^2|}$.

Entonces se tiene que las raíces Ω_1 y Ω_2 son números imaginarios puros, uno positivo y el otro su conjugado. Al relacionar lo anterior con lo señalado en el capítulo 3 se tiene lo siguiente:

- Si $\operatorname{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
- Si $\operatorname{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Es decir, si es elegida la raíz Ω_1 y su correspondiente solución $a_{1n}(t)$, resulta que la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si es elegida Ω_2 y su solución asociada es $a_{2n}(t)$, resulta que $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

Nótese que

$$|e^{\Omega_c t}|,$$

tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Además obsérvese que

$$|e^{-\Omega_c t}|,$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Considerando la siguiente solución general:

$$a_n(t) = c_1 a_{1n}(t) + c_2 a_{2n}(t),$$

para la cual c_1 y c_2 son constantes.

El comportamiento de $\|a_n(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|a_{1n}(t)\|_{\max}$ y $\|a_{2n}(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Análisis de estabilidad: $\cos \delta \neq 1$

Para este caso, la relación de dispersión (5.39) se considera como originalmente:

$$(\Omega - \sin \delta \sin \Delta)^2 = \cos^2 \delta (1 - \cos \Delta)^2 - 2\sigma A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta).$$

Considérese $|A| > 1$.

A continuación se realizará el análisis de estabilidad de las soluciones de la ecuación DNLS para los casos enfocante y desenfocante.

(a) **Caso enfocante:** Para este caso $\sigma = 1$, y la relación de dispersión (5.39) es:

$$(\Omega - \sin \delta \sin \Delta)^2 = (\cos \delta)^2 (1 - \cos \Delta)^2 - 2A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta). \quad (5.41)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado del lado izquierdo e igualando a cero se tiene:

$$\Omega^2 - 2(\sin \delta \sin \Delta)\Omega + (\sin \delta)^2 (\sin \Delta)^2 - (\cos \delta)^2 (1 - \cos \Delta)^2 + 2A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta) = 0.$$

Calculando las raíces Ω_1 y Ω_2 usando la fórmula general,

$$\Omega_{1,2} = \sin \delta \sin \Delta \pm \sqrt{\cos \delta (1 - \cos \Delta) [\cos \delta (1 - \cos \Delta) - 2A^2]}. \quad (5.42)$$

De (5.42) puede afirmarse lo siguiente:

1. $\sin \delta \sin \Delta$ es real.
2. $(1 - \cos \Delta)$ es positivo, y además $0 \leq (1 - \cos \Delta) \leq 2$.
3. Dado que $|A| > 1$, entonces $2A^2 > 2$, por consecuencia y $\cos \delta (1 - \cos \Delta) - 2A^2 < 0$.

Por lo anterior se puede concluir que el valor de $\cos \delta$ va a definir las raíces Ω_1 y Ω_2 como reales o complejas. Por lo tanto, se desprenden un par de casos más: $\cos \delta \leq 0$, y $\cos \delta > 0$.

(i) Si $\cos \delta \leq 0$ entonces.

$$\cos \delta (1 - \cos \Delta) [\cos \delta (1 - \cos \Delta) - 2A^2] \geq 0,$$

Entonces las raíces Ω_1 y Ω_2 son reales y de la forma:

$$\Omega_{1,2} = \sin \delta \sin \Delta \pm \sqrt{\cos \delta (1 - \cos \Delta) [\cos \delta (1 - \cos \Delta) - 2A^2]}.$$

Para estos valores $\Omega_{1,2}$, las soluciones (5.31) quedan como sigue:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_{(1,2)n}(t)) \\ \operatorname{Im}(a_{(1,2)n}(t)) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n + \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que estas soluciones son puramente oscilatorias y acotadas. Por lo tanto, resulta que $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

Haciendo una relación de este resultado con los criterios de estabilidad del capítulo 3, resulta que cuando las raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, las partes imaginarias de Ω , $\operatorname{Im}(\Omega_1)$ y $\operatorname{Im}(\Omega_2)$, son cero. Para este caso se tiene que:

- Si $\operatorname{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow K$, cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

- (ii) Nótese que si $\cos \delta > 0$ resulta,

$$\cos \delta(1 - \cos \Delta)[\cos \delta(1 - \cos \Delta) - 2A^2] < 0,$$

entonces las raíces Ω_1 y Ω_2 son complejas y de la forma:

$$\Omega_{1,2} = \sin \delta \sin \Delta \pm i \sqrt{\cos \delta(1 - \cos \Delta) |\cos \delta(1 - \cos \Delta) - 2A^2|}.$$

Para estos valores $\Omega_{1,2}$, las soluciones (5.31) quedan como sigue:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_n(t)) \\ \operatorname{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n \pm \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Sea Ω_b como sigue,

$$\Omega_b = \sqrt{\cos \delta(1 - \cos \Delta) |\cos \delta(1 - \cos \Delta) - 2A^2|}.$$

Para estos valores de Ω la soluciones (5.31) son:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_n(t)) \\ \operatorname{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} = e^{in\Delta} e^{-i(\sin \delta \sin \Delta \pm i\Omega_b)t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_{(1,2)n}(t)) \\ \operatorname{Im}(a_{(1,2)n}(t)) \end{pmatrix} = e^{i(n\Delta - \sin \delta \sin \Delta)} e^{\pm i\Omega_b t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que las raíces Ω_1 y Ω_2 son números complejos; una es el complejo conjugado de la otra. En el capítulo 3 se estableció lo siguiente:

- Si $\operatorname{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
- Si $\operatorname{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Es decir, si es elegida la raíz Ω_1 y su correspondiente solución $a_{1n}(t)$, resulta que la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si es elegida Ω_2 y su solución asociada es $a_{2n}(t)$, resulta que $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

De igual manera, nótese que el valor de

$$|e^{\Omega_b t}|,$$

tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Además véase que el valor de

$$|e^{-\Omega_b t}|,$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Considerando una solución general de la forma:

$$a_n(t) = c_1 a_{1n}(t) + c_2 a_{2n}(t),$$

para la cual c_1 y c_2 son constantes.

El comportamiento de $\|a_n(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|a_{1n}(t)\|_{\max}$ y $\|a_{2n}(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

(b) **Caso desenfocante:** Para este caso $\sigma = -1$ y la relación de dispersión (5.39) es:

$$(\Omega - \sin \delta \sin \Delta)^2 = (\cos \delta)^2 (1 - \cos \Delta)^2 + 2A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta). \quad (5.43)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado del lado izquierdo e igualando a cero se tiene:

$$\Omega^2 - 2(\sin \delta \sin \Delta)\Omega + (\sin \delta)^2 (\sin \Delta)^2 - (\cos \delta)^2 (1 - \cos \Delta)^2 - 2A^2 \cos \delta (1 - \cos \Delta) = 0.$$

Se calculan las raíces Ω_1 y Ω_2 usando la fórmula general,

$$\Omega_{1,2} = \sin \delta \sin \Delta \pm \sqrt{\cos \delta (1 - \cos \Delta) [\cos \delta (1 - \cos \Delta) + 2A^2]}. \quad (5.44)$$

Al igual que en el caso enfocante, de (5.44) puede afirmarse lo siguiente:

1. $\sin \delta \sin \Delta$ es real.
2. $(1 - \cos \Delta)$ es positivo, y además $0 \leq (1 - \cos \Delta) \leq 2$.
3. Dado que $|A| > 1$, entonces $2A^2 > 2$, por consecuencia y $\cos \delta (1 - \cos \Delta) + 2A^2 > 0$.

Por lo anterior, se concluye que el valor de $\cos \delta$ nuevamente definirá a las raíces Ω_1 y Ω_2 como reales o complejas. Por lo tanto, se desprenden un par de casos más: $\cos \delta \geq 0$, y $\cos \delta < 0$.

(i) Si $\cos \delta \geq 0$ entonces,

$$\cos \delta(1 - \cos \Delta)[\cos \delta(1 - \cos \Delta) + 2A^2] \geq 0,$$

las raíces Ω_1 y Ω_2 son reales y de la forma:

$$\Omega_{1,2} = \sin \delta \sin \Delta \pm \sqrt{\cos \delta(1 - \cos \Delta)[\cos \delta(1 - \cos \Delta) + 2A^2]}.$$

Para estos valores $\Omega_{1,2}$, las soluciones (5.31) quedan como sigue:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_n(t)) \\ \operatorname{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n + \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que estas soluciones son puramente oscilatorias y acotadas.

Haciendo una relación de este resultado con los criterios de estabilidad que fueron establecidos en el capítulo 3, resulta que cuando las raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, las partes imaginarias de Ω , $\operatorname{Im}(\Omega_1)$ y $\operatorname{Im}(\Omega_2)$, son cero. Para este caso se tiene que:

◦ Si $\operatorname{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow K$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

(ii) Ahora si $\cos \delta < 0$ resulta,

$$\cos \delta(1 - \cos \Delta)[\cos \delta(1 - \cos \Delta) + 2A^2] < 0.$$

Entonces las raíces Ω_1 y Ω_2 son complejas y de la forma:

$$\Omega_{1,2} = \sin \delta \sin \Delta \pm i\sqrt{|\cos \delta(1 - \cos \Delta)[\cos \delta(1 - \cos \Delta) + 2A^2]|}.$$

Sea Ω_b como sigue,

$$\Omega_b = \sqrt{|\cos \delta(1 - \cos \Delta)[\cos \delta(1 - \cos \Delta) + 2A^2]|}.$$

Para estos valores de Ω la soluciones (5.31) son:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_n(t)) \\ \operatorname{Im}(a_n(t)) \end{pmatrix} = e^{in\Delta} e^{-i(\sin \delta \sin \Delta \pm i\Omega_b)t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_{(1,2)n}(t)) \\ \operatorname{Im}(a_{(1,2)n}(t)) \end{pmatrix} = e^{i(n\Delta - \sin \delta \sin \Delta)} e^{\pm \Omega_b t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en los casos anteriores, se tiene que las raíces Ω_1 y Ω_2 son números complejos; una es el complejo conjugado de la otra. En el capítulo 3 se establece lo siguiente para estos casos:

◦ Si $\operatorname{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.

- Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Es decir, si se elige la raíz Ω_1 y su correspondiente solución $a_{1n}(t)$, resulta que la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si es elegida Ω_2 y su solución asociada es $a_{2n}(t)$, resulta que $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

De igual manera, nótese que el valor de

$$|e^{\Omega_b t}|,$$

tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Además véase que el valor de

$$|e^{-\Omega_b t}|,$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Considérese una solución general de la forma:

$$a_n(t) = c_1 a_{1n}(t) + c_2 a_{2n}(t),$$

para la cual c_1 y c_2 son constantes.

El comportamiento de $\|a_n(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|a_{1n}(t)\|_{\max}$ y $\|a_{2n}(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|a_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

Los resultados para el caso $\cos(\delta) \neq 1$ se resumen en los siguientes dos puntos:

- (i) Si $\text{signo}(\sigma) = -\text{signo}(\cos \delta)$, entonces las raíces Ω son reales, y la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.
- (ii) Si $\text{signo}(\sigma) = \text{signo}(\cos \delta)$, entonces las raíces Ω son imaginarias, y la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

5.2.4 La relación de dispersión de la ecuación DNLS linealizada: Perturbando amplitud y fase.

En la sección anterior se presentó el análisis de estabilidad de las soluciones de tipo onda plana para la ecuación DNLS en el caso en que solamente se perturba la amplitud de la solución. En esta sección se hará un análisis análogo al de la sección anterior, pero ahora serán perturbadas la amplitud y fase de las soluciones de tipo onda plana para la ecuación DNLS.

En primer lugar se calculará la relación de dispersión de la ecuación linealizada para la amplitud y fase perturbada en la solución de la ecuación DNLS.

Considérese la ecuación DNLS como al inicio de esta sección (5.13)

$$i \frac{du_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2}[u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)] - \sigma|u_n(t)|^2 u_n(t).$$

Al igual que antes, supóngase que la función (5.14) satisface la ecuación anterior

$$\bar{u}_n(t) = A e^{i(n\delta - \omega t)},$$

para la cual A es real y diferente de cero.

Del mismo modo hay que recordar que la solución (5.14) cumple las propiedades (5.15) y (5.16),

$$\bar{u}_{n+1}(t) = e^{i\delta} \bar{u}_n(t),$$

$$i \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = \omega \bar{u}_n(t).$$

La relación de dispersión para la ecuación DNLS es la ecuación (5.18),

$$\omega = 1 - \cos(\delta) - \sigma|A|^2.$$

Para perturbar la solución (5.14) en amplitud y por la fase, se propone la siguiente solución perturbada,

$$u_n(t) = (\bar{u}_n(t) + \epsilon U_n(t)) Z_n(t), \quad (5.45)$$

para la cual $U_n(t) = a_n(t) e^{i(n\delta - \omega t)}$ es la perturbación introducida a la amplitud de la solución $u_n(t)$ y $a_n(t)$ es una función para la amplitud; la función $Z_n(t) = e^{i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)}$ es la perturbación que se introduce a la fase de la solución $\bar{u}_n(t)$ en la que $\tilde{\phi}_n(t)$ es una función continua y acotada para la fase perturbada; además se elige ϵ tal que $|\epsilon| \ll 1$.

Sustituyendo el valor de $U_n(t)$ y $Z_n(t)$ en la solución $u_n(t)$, resulta:

$$u_n(t) = (A + \epsilon a_n(t)) e^{i(n\delta - \omega t + \epsilon \tilde{\phi}_n(t))}. \quad (5.46)$$

Al escribir $u_n(t)$ de esta forma, se nota que $\epsilon a_n(t)$ y $\epsilon \tilde{\phi}_n(t)$ son pequeñas perturbaciones introducidas a la amplitud y fase de la solución, respectivamente.

Se comenzará el análisis de estabilidad haciendo una aproximación lineal a la ecuación (5.13) de la solución (5.46). Primero reescribiendo la exponencial de (5.46) como producto de dos exponenciales,

$$u_n(t) = (A + \epsilon a_n(t)) e^{i(n\delta - \omega t)} e^{i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)},$$

después, se desarrolla en series de potencias el término $e^{i\epsilon\tilde{\phi}_n(t)}$,

$$u_n(t) = (A + \epsilon a_n(t))(1 + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t) + O(\epsilon^2))e^{i(n\delta - \omega t)},$$

realizando la multiplicación indicada, y agrupando los términos de $O(1)$, $O(\epsilon)$ y $O(\epsilon^2)$, se obtiene:

$$u_n(t) = (A + \epsilon a_n(t) + iA\epsilon\tilde{\phi}_n(t) + O(\epsilon^2))e^{i(n\delta - \omega t)}.$$

Puede reescribirse la expresión anterior de la siguiente forma:

$$u_n(t) = \left(1 + \frac{\epsilon a_n(t)}{A} + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t)\right) A e^{i(n\delta - \omega t)}.$$

Los términos de orden $O(\epsilon^2)$ ya no aparecen en la ecuación anterior, pues son muy pequeños para tomarlos en cuenta.

Para facilitar la notación se hace el siguiente cambio de variable:

$$\tilde{A}_n(t) = \frac{a_n(t)}{A}.$$

Entonces la aproximación lineal de la solución perturbada (5.46) es:

$$u_n(t) = (1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t))\bar{u}_n(t). \quad (5.47)$$

El siguiente paso es sustituir la solución perturbada $u_n(t)$ (5.47) en la ecuación DNLS (5.13) con la finalidad de obtener ecuaciones para $\tilde{A}_n(t)$ y $\tilde{\phi}_n(t)$ y posteriormente poder analizar la evolución de estas perturbaciones

$$\begin{aligned} i \left(\epsilon \frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} + i\epsilon \frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} \right) \bar{u}_n(t) + i \left(1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t) \right) \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = \\ - \frac{1}{2} \left[\left(1 + \epsilon\tilde{A}_{n+1}(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_{n+1}(t) \right) \bar{u}_{n+1}(t) - 2 \left(1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t) \right) \bar{u}_n(t) \right. \\ \left. + \epsilon\tilde{A}_{n-1}(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_{n-1}(t) \right) \bar{u}_{n-1}(t) \Big] - \sigma |u_n(t)|^2 \cdot u_n(t). \quad (5.48) \end{aligned}$$

El término no lineal de la ecuación (5.48) es:

$$|u_n(t)|^2 u_n(t) = |1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t)|^2 (1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t)) |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t).$$

Se elige el factor $|1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t)|^2$ del término no lineal de la ecuación (5.48) y se desarrolla usando la propiedad para los números complejos $|z|^2 = z \cdot z^*$, en el que z^* es el conjugado de z . De lo cual resulta,

$$\begin{aligned} |1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t)|^2 &= (1 + \epsilon\tilde{A}_n(t))^2 - i^2 \epsilon^2 \tilde{\phi}_n(t)^2 \\ &= 1 + 2\epsilon\tilde{A}_n(t) + \epsilon^2 \tilde{A}_n(t)^2 + \epsilon^2 \tilde{\phi}_n(t)^2. \end{aligned}$$

Se pueden despreciar los términos de orden $O(\epsilon^2)$, ya que el módulo de ϵ es mucho menor que uno. Considerando lo anterior la expresión queda como sigue:

$$|1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)|^2 \simeq 1 + 2\epsilon \tilde{A}_n(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)|^2 (1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)) &\simeq (1 + 2\epsilon \tilde{A}_n(t))(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)) + O(\epsilon^2), \\ &\simeq 1 + 3\epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

De igual forma, no se tomarán en cuenta los términos de orden $O(\epsilon^2)$, pues aportan un valor muy pequeño. El término no lineal ahora es:

$$|u_n(t)|^2 u_n(t) \simeq (1 + 3\epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)) |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t). \quad (5.49)$$

Sustituyendo (5.49) en la ecuación (5.48) se tiene,

$$\begin{aligned} i \left(\epsilon \frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} + i\epsilon \frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} \right) \bar{u}_n(t) + i \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) \right) \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = \\ - \frac{1}{2} \left[(1 + \epsilon \tilde{A}_{n+1}(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_{n+1}(t)) \bar{u}_{n+1}(t) - 2(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)) \bar{u}_n(t) + \right. \\ \left. (1 + \epsilon \tilde{A}_{n-1}(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_{n-1}(t)) \bar{u}_{n-1}(t) \right] - \sigma \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) + 2\epsilon \tilde{A}_n(t) \right) |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t). \quad (5.50) \end{aligned}$$

Se suma a la expresión anterior un cero de la siguiente forma,

$$-\frac{1}{2} [1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t)] [\bar{u}_{n+1}(t) + \bar{u}_{n-1}(t) - \bar{u}_{n+1}(t) - \bar{u}_{n-1}(t)] = 0.$$

De este modo se tiene,

$$\begin{aligned} i \left(\epsilon \frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} + i\epsilon \frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} \right) \bar{u}_n(t) + i \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) \right) \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} = \\ - \frac{1}{2} \left[\left(1 + \epsilon \tilde{A}_{n+1}(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_{n+1}(t) \right) \bar{u}_{n+1}(t) + \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) \right) \left(\bar{u}_{n+1}(t) - \bar{u}_{n+1}(t) \right) \right. \\ \left. - 2 \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) \right) \bar{u}_n(t) + \left(1 + \epsilon \tilde{A}_{n-1}(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_{n-1}(t) \right) \bar{u}_{n-1}(t) + \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) \right. \right. \\ \left. \left. + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) \right) \left(\bar{u}_{n-1}(t) - \bar{u}_{n-1}(t) \right) \right] - \sigma \left(1 + \epsilon \tilde{A}_n(t) + i\epsilon \tilde{\phi}_n(t) \right) |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t) - \sigma 2\epsilon \tilde{A}_n(t) |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t). \end{aligned}$$

Se hace un reordenamiento de términos a la expresión anterior, de tal modo que pueda observarse

que los términos que a continuación se señalan se eliminan, ya que satisfacen la ecuación DNLS,

$$i \left(\epsilon \frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} + i\epsilon \frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} \right) \bar{u}_n(t) + i(1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + \epsilon\tilde{\phi}_n(t)) \underbrace{\left(i \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + \frac{1}{2} [\bar{u}_{n+1}(t) - 2\bar{u}_n(t) + \bar{u}_{n-1}(t)] \right)}_{+ \sigma |\bar{u}_n(t)|^2 \bar{u}_n(t)} = -\frac{1}{2} \left[(1 + \epsilon\tilde{A}_{n+1}(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_{n+1}(t))\bar{u}_{n+1}(t) + (1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t))(-\bar{u}_{n+1}(t) - \bar{u}_{n-1}(t)) + (1 + \epsilon\tilde{A}_{n-1}(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_{n-1}(t))\bar{u}_{n-1}(t) \right] - \sigma 2\epsilon\tilde{A}_n(t)|\bar{u}_n(t)|^2\bar{u}_n(t).$$

Por lo tanto la ecuación (5.50), es equivalente a la siguiente expresión,

$$i \left(\epsilon \frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} + i\epsilon \frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} \right) \bar{u}_n(t) = -\frac{1}{2} \left[(1 + \epsilon\tilde{A}_{n+1}(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_{n+1}(t))\bar{u}_{n+1}(t) + (1 + \epsilon\tilde{A}_n(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_n(t))(-\bar{u}_{n+1}(t) - \bar{u}_{n-1}(t)) + (1 + \epsilon\tilde{A}_{n-1}(t) + i\epsilon\tilde{\phi}_{n-1}(t))\bar{u}_{n-1}(t) \right] - \sigma 2\epsilon\tilde{A}_n(t)|\bar{u}_n(t)|^2\bar{u}_n(t). \quad (5.51)$$

La ecuación (5.51) es la linealización de la ecuación no lineal de Schrödinger discreta alrededor de la solución $\bar{u}_n(t)$ cuando se perturban la amplitud y fase.

Se separarán las partes real e imaginaria de la ecuación (5.51). Primero escribiendo la parte imaginaria, y después la parte real. Usando las propiedades (5.15) y (5.16), la identidad de Euler, y el hecho de que $|\bar{u}_n|^2 = A^2$, resulta

$$\frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} = \cos(\delta)\tilde{\phi}_n(t) - \frac{1}{2} \left[\tilde{\phi}_{n+1}(t)e^{i\delta} + \tilde{\phi}_{n-1}(t)e^{-i\delta} \right], \quad (5.52)$$

$$-\frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} = \tilde{A}_n(t) \cos(\delta) - \frac{1}{2} \left[\tilde{A}_{n+1}(t)e^{i\delta} + \tilde{A}_{n-1}(t)e^{-i\delta} \right] - 2\sigma\tilde{A}_n(t)A^2. \quad (5.53)$$

La ecuación (5.52) tiene los términos correspondientes a la parte imaginaria de (5.51) y la ecuación (5.53) tiene a los términos correspondientes a la parte real.

Supóngase que

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_n(t) \\ \tilde{\phi}_n(t) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n - \Omega t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

para las cuales \tilde{a}_1 y \tilde{a}_2 son contantes, satisfacen a las ecuaciones (5.52) y (5.53). Nótese que (5.54) tiene las siguientes propiedades:

$$\tilde{A}_{n+1}(t) = e^{i\Delta} \tilde{A}_n(t). \quad (5.55)$$

$$\frac{d\tilde{A}_n(t)}{dt} = -i\Omega\tilde{A}_n(t), \quad (5.56)$$

$$\tilde{\phi}_{n+1}(t) = e^{i\Delta} \tilde{\phi}_n(t), \quad (5.57)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}_n(t)}{dt} = -i\Omega\tilde{\phi}_n(t). \quad (5.58)$$

Sustituyendo (5.54) en las ecuaciones (5.52) y (5.53), usando las cuatro propiedades anteriores y la identidad de Euler, se obtiene,

$$\begin{aligned} -i\Omega\tilde{A}_n(t) &= \cos(\delta)\tilde{\phi}_n(t) - \frac{1}{2}\left[\tilde{\phi}_n(t)e^{i(\delta+\Delta)} + \tilde{\phi}_n(t)e^{-i(\delta+\Delta)}\right] \\ &= (\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta))\tilde{\phi}_n(t), \\ i\Omega\tilde{\phi}_n(t) &= \cos(\delta)\tilde{A}_n(t) - \frac{1}{2}\left[\tilde{A}_n(t)e^{i(\delta+\Delta)} + \tilde{A}_n(t)e^{-i(\delta+\Delta)}\right] - 2\sigma\tilde{A}_n(t)A^2 \\ &= (\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta))\tilde{A}_n(t) - 2\sigma\tilde{A}_n(t)A^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$i\Omega \begin{pmatrix} \tilde{A}_n(t) \\ \tilde{\phi}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta)) \\ \cos(\delta) + \cos(\delta + \Delta) - 2\sigma A^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_n(t) \\ \tilde{\phi}_n(t) \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Este sistema tiene una solución no trivial cuando se cumple lo siguiente,

$$\det \begin{pmatrix} -i\Omega & -(\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta)) \\ \cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta) - 2\sigma A^2 & -i\Omega \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, cuando se cumple que

$$(i\Omega)^2 + (\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta) - 2\sigma A^2)(\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta)) = 0.$$

Se despeja Ω^2 de la ecuación anterior,

$$\Omega^2 = [(\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta) - 2\sigma A^2)(\cos(\delta) - \cos(\delta + \Delta))]. \quad (5.60)$$

Para reescribir la ecuación (5.60), se usarán las siguientes identidades trigonométricas:

- (1) $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
- (2) $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
- (3) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$.
- (4) $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$.
- (5) $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$.

Utilizando la igualdad (1) en (5.60), se tiene,

$$\Omega^2 = \left[\left(-2 \sin\left(\frac{2\delta + \Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{-\Delta}{2}\right) - 2\sigma A^2 \right) \left(-2 \sin\left(\frac{2\delta + \Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{-\Delta}{2}\right) \right) \right].$$

Usando ahora las igualdades (2) y (3) en la expresión anterior, resulta,

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \left(\left(2 \left[\sin(\delta) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cos(\delta) \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right) - 2\sigma A^2 \right) \\ &\quad \left(2 \left[\sin(\delta) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cos(\delta) \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

lo que es igual a:

$$\Omega^2 = \left(2 \left[\sin(\delta) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cos(\delta) \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] - 2\sigma A^2 \right) \left(2 \left[\sin(\delta) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cos(\delta) \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] \right).$$

Finalmente, usando las propiedades (4) y (5) en la expresión anterior, resulta:

$$\Omega^2 = ([\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2\sigma A^2) (\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))). \quad (5.61)$$

Con ello, la ecuación (5.61) es la relación de dispersión del sistema linealizado cuando se perturba la amplitud y la fase de la solución de tipo onda plana de la ecuación DNLS.

5.2.5 Estabilidad de las soluciones de onda plana de la ecuación DNLS: Perturbación de la amplitud y fase

Análisis de estabilidad: $\cos(\delta) = 1$

Cuando $\cos(\delta) = 1$, la relación de dispersión (5.61) es:

$$\Omega^2 = [(1 - \cos(\Delta)) - 2\sigma A^2](1 - \cos(\Delta)). \quad (5.62)$$

Ahora se analizarán que forma tienen las raíces Ω para la relación de dispersión (5.62), en los casos enfocante y desenfocante con $|A| > 1$.

(a) **Caso desenfocante:** Si $\sigma = -1$, la relación de dispersión (5.62) es:

$$\Omega^2 = [(1 - \cos(\Delta)) + 2A^2](1 - \cos(\Delta)).$$

Se sabe que $(1 - \cos(\Delta))$ es siempre mayor o igual que cero. Por lo tanto, el lado derecho de la expresión anterior es positivo. Esto a su vez significa que las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (5.62) son reales, y tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{(1 - \cos(\Delta)) + 2A^2} \sqrt{1 - \cos(\Delta)}, \\ \Omega_2 &= -\sqrt{(1 - \cos(\Delta)) + 2A^2} \sqrt{1 - \cos(\Delta)}. \end{aligned}$$

Entonces las soluciones (5.54) tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n - \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Como se puede notar, las soluciones $\tilde{A}_n(t)$ y $\tilde{\phi}_n(t)$ son puramente oscilatorias y acotadas.

Se puede relacionar este resultado con los criterios de estabilidad que fueron establecidos en el capítulo 3. Dado que raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, entonces las partes imaginarias de $\Omega_{1,2}$ son cero. Para este caso se tiene que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow K$, cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

- (b) **Caso enfocante:** Si $\sigma = 1$, la relación de dispersión (5.62) es:

$$\Omega^2 = [(1 - \cos(\Delta)) - 2A^2](1 - \cos(\Delta)).$$

Dado que $|A| > 1$ y $(1 - \cos(\Delta))$ es siempre mayor o igual que cero y menor que dos, implica que el lado derecho de la expresión anterior es negativo. Lo cual significa que las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión (5.62) son imaginarias y tienen la forma:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -i\sqrt{1 - \cos \Delta} \sqrt{|1 - \cos \Delta - 2A^2|}, \\ \Omega_2 &= i\sqrt{1 - \cos \Delta} \sqrt{|1 - \cos \Delta - 2A^2|}.\end{aligned}$$

Entonces las soluciones (5.54) tienen la forma:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} &= e^{i(n\Delta \pm i\Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} &= e^{in\Delta} e^{\pm\Omega_c t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

en las cuales $\Omega_c = \sqrt{1 - \cos \Delta} \sqrt{|1 - \cos \Delta - 2A^2|}$.

Las raíces Ω_1 y Ω_2 son números imaginarios puros, uno positivo y el otro su conjugado. Al relacionar lo anterior con lo que fue establecido en el capítulo 3, se tiene lo siguiente:

- Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
- Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Es decir, si se elige la raíz Ω_1 y sus correspondientes soluciones $\tilde{A}_{1n}(t)$ y $\tilde{\phi}_{1n}(t)$, entonces la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si se elige Ω_2 y sus soluciones asociadas $\tilde{A}_{2n}(t)$ y $\tilde{\phi}_{2n}(t)$, entonces $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

Nótese que

$$|e^{\Omega_c t}|,$$

tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Además, véase que

$$|e^{-\Omega_c t}|,$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Considerando las siguientes soluciones generales:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n(t) &= c_1 \tilde{A}_{1n}(t) + c_2 \tilde{A}_{2n}(t), \\ \tilde{\phi}_n(t) &= c_3 \tilde{\phi}_{1n}(t) + c_4 \tilde{\phi}_{2n}(t),\end{aligned}$$

para las cuales c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes.

El comportamiento de $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|\tilde{A}_{1n}(t) + i\tilde{\phi}_{1n}(t)\|_{\max}$ y $\|\tilde{A}_{2n}(t) + i\tilde{\phi}_{2n}(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

Análisis de estabilidad: $\cos(\delta) \neq 1$

Para este caso la relación de dispersión (5.61) conserva su forma y es:

$$\Omega^2 = ([\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2\sigma A^2) (\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))).$$

Recuérdese que $|A| > 1$.

A continuación se hará el análisis de estabilidad de las soluciones de la ecuación DNLS para los casos enfocante y desenfocante.

(a) **Caso enfocante:** Para este caso $\sigma = 1$, y la relación de dispersión (5.61) es:

$$\Omega^2 = ([\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2) (\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))). \quad (5.63)$$

De este caso se siguen un par de subcasos:

(i) Obsérvese que si

$$\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta)) \leq 0,$$

entonces,

$$[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2 < 0.$$

Esto a su vez provoca que Ω^2 sea positivo. Dado que Ω^2 es positivo, las raíces Ω de la relación de dispersión (5.63) son reales, y tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \sqrt{\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2}, \\ \Omega_2 &= -\sqrt{\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2}.\end{aligned}$$

Para estos valores $\Omega_{1,2}$, las soluciones (5.54) quedan como sigue:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n + \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que las soluciones $\tilde{A}_n(t)$ y $\tilde{\phi}_n(t)$ son puramente oscilatorias y acotadas. Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

Haciendo una relación de este resultado con los criterios de estabilidad que fueron establecidos en el capítulo 3, cuando las raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, entonces tanto $\text{Im}(\Omega_1)$ como $\text{Im}(\Omega_2)$ son cero. Para este caso se tiene que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow K$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

(ii) Nótese que si

$$\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta)) > 0,$$

Dado que $|A| > 1$ resulta

$$[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2 < 0.$$

La relación de dispersión es:

$$\Omega^2 = ([\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2) (\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))).$$

Tomando en cuenta las observaciones anteriores, se concluye que Ω^2 es negativo. Las raíces Ω de la relación de dispersión son imaginarias y son:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -i\sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))]}, \\ \Omega_2 &= i\sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))]}. \end{aligned}$$

Sea

$$\Omega_c = \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] - 2A^2} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))]}.$$

Para estos valores de Ω las soluciones (5.54) son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} &= e^{i(n\Delta \pm i\Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} &= e^{in\Delta} e^{\pm\Omega_c t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces Ω_1 y Ω_2 son número imaginarios puros, uno positivo y el otro su conjugado. En el capítulo 3 se establece lo siguiente para estos casos:

- Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
- Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Es decir, si es elegida la raíz Ω_1 y sus correspondientes soluciones $\tilde{A}_{1n}(t)$ y $\tilde{\phi}_{1n}(t)$, resulta que la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si se elige Ω_2 y sus soluciones asociadas $\tilde{A}_{2n}(t)$ y $\tilde{\phi}_{2n}(t)$, resulta que $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

De igual manera, nótese que el valor de

$$|e^{\Omega_1 t}|,$$

tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Además véase que el valor de

$$|e^{-\Omega_2 t}|,$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Considerando soluciones más generales de la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n(t) &= c_1 \tilde{A}_{1n}(t) + c_2 \tilde{A}_{2n}(t), \\ \tilde{\phi}_n(t) &= c_3 \tilde{\phi}_{1n}(t) + c_4 \tilde{\phi}_{2n}(t),\end{aligned}$$

en las cuales c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes.

El comportamiento de $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|\tilde{A}_{1n}(t) + i\tilde{\phi}_{1n}(t)\|_{\max}$ y $\|\tilde{A}_{2n}(t) + i\tilde{\phi}_{2n}(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente, para este caso.

(b) **Caso desenfocante:** En este caso $\sigma = -1$

$$\Omega^2 = ([\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2) (\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))). \quad (5.64)$$

Al igual que en el caso enfocante, de aquí se desprenden un par de casos más:

(i) Obsérvese que si

$$\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta)) \geq 0,$$

entonces

$$[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2 > 0.$$

Esto a su vez implica que Ω^2 sea positivo. Dado que Ω^2 es positivo, las raíces Ω de la relación de dispersión (5.64) son reales y de la siguiente forma:

$$\Omega_{1,2} = \pm \sqrt{\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2}.$$

Para estos valores $\Omega_{1,2}$, las soluciones (5.54) quedan como sigue:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} = e^{i(\Delta_n - \Omega_{1,2}t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones $\tilde{A}_n(t)$ y $\tilde{\phi}_n(t)$ son puramente oscilatorias y acotadas. Por lo tanto, resulta que $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

Haciendo una relación de este resultado con los criterios de estabilidad del capítulo 3, cuando las raíces $\Omega_{1,2}$ son reales, las partes imaginarias de $\Omega_{1,2}$ son cero. Para este caso se tiene que:

- Si $\text{Im}(\Omega) = 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow K$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.

(ii) Cuando se cumple que

$$\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta)) < 0,$$

resulta que,

$$[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2 > 0.$$

Pues recuérdese que se considera que $|A| > 1$.

La relación de dispersión es:

$$\Omega^2 = ([\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2) (\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))).$$

Tomando en cuenta la observación anterior, se concluye que Ω^2 es negativo. Las raíces $\Omega_{1,2}$ de la relación de dispersión son imaginarias y son:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -i\sqrt{|\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))|} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2}, \\ \Omega_2 &= i\sqrt{|\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))|} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2}. \end{aligned}$$

Sea

$$\Omega_c = \sqrt{|\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))|} \sqrt{[\sin(\delta) \sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta))] + 2A^2}.$$

Para estos valores de Ω las soluciones (5.54) son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} &= e^{i(n\Delta \pm i\Omega_c t)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1,2)n}(t) \\ \tilde{\phi}_{(1,2)n}(t) \end{pmatrix} &= e^{in\Delta} e^{\pm\Omega_c t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al igual que en otros casos, las raíces Ω_1 y Ω_2 son números imaginarios puros, uno positivo y el otro su conjugado. En el capítulo 3 se tiene lo siguiente para estos casos:

- Si $\text{Im}(\Omega) < 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable.
- Si $\text{Im}(\Omega) > 0$, entonces, $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Si se elige la raíz Ω_1 y sus correspondientes soluciones $\tilde{A}_{1n}(t)$ y $\tilde{\phi}_{1n}(t)$, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente asintóticamente estable. De otro modo, si se elige Ω_2 y sus soluciones asociadas $\tilde{A}_{2n}(t)$ y $\tilde{\phi}_{2n}(t)$, $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

De igual manera nótese que

$$|e^{\Omega ct}|,$$

tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Igualmente véase que

$$|e^{-\Omega ct}|,$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Considerando soluciones generales de la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n(t) &= c_1\tilde{A}_{1n}(t) + c_2\tilde{A}_{2n}(t), \\ \tilde{\phi}_n(t) &= c_3\tilde{\phi}_{1n}(t) + c_4\tilde{\phi}_{2n}(t),\end{aligned}$$

para las cuales c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes.

El comportamiento de $\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito, es la superposición de los comportamientos de $\|\tilde{A}_{1n}(t) + i\tilde{\phi}_{1n}(t)\|_{\max}$ y $\|\tilde{A}_{2n}(t) + i\tilde{\phi}_{2n}(t)\|_{\max}$ cuando t tiende a infinito. Entonces:

$$\|\tilde{A}_n(t) + i\tilde{\phi}_n(t)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Para este caso, la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Los resultados para el caso $\cos(\delta) \neq 1$ pueden resumirse de la siguiente manera:

- (i) Si $\text{signo}(\sigma) = -\text{signo}(\sin(\delta)\sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta)))$, entonces las raíces Ω son reales, y la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.
- (ii) Si $\text{signo}(\sigma) = \text{signo}(\sin(\delta)\sin(\Delta) + \cos(\delta)(1 - \cos(\Delta)))$, entonces las raíces Ω son imaginarias, y la solución $\bar{u}_n(t)$ es inestable modulacionalmente.

Tanto en el caso $\cos(\delta) = 1$ como en el caso $\cos(\delta) \neq 1$, se tomó como condición que $|A| > 1$. Esto se hizo para poder asegurar la existencia de inestabilidad modulacional en aquellos casos en que ésta se presenta. En la referencia [Kevrekidis], el autor Panayotis Kevrekidis escribe en la página 144 un comentario al respecto: para el caso enfocante, independientemente de la amplitud A , siempre existirá un número de onda lo suficientemente pequeño, tal que la solución $\bar{u}_n(t)$ será inestable modulacionalmente.

5.3 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se realizó un análisis de estabilidad de las soluciones de tipo onda plana para la ecuación DNLS. Se tomaron en cuenta diferentes casos y subcasos. A continuación y a manera de resumen se presentan las siguientes tablas que contienen los resultados obtenidos en este capítulo.

Perturbación	Casos		Tipo de Onda	
Amplitud	$\cos \delta = 1$	$\sigma = -1$ (Desenfocante) y $ A > 1$	Estable	
		$\sigma = 1$ (Enfocante) y $ A > 1$	Inestable	
	$\cos \delta \neq 1$	$\sigma = -1,$ $ A > 1$ (Desenfocante)	$\cos \delta \geq 0$	Estable
			$\cos \delta < 0$	Inestable
		$\sigma = 1,$ $ A > 1$ (Enfocante)	$\cos \delta \leq 0$	Estable
			$\cos \delta > 0$	Inestable
Amplitud y Fase	$\cos \delta = 1$	$\sigma = -1$ (Desenfocante) y $ A > 1$	Estable	
		$\sigma = 1$ (Enfocante) y $ A > 1$	Inestable	
	$\cos \delta \neq 1$	$\sigma = -1,$ $ A > 1$ (Desenfocante)	$Q \geq 0$	Estable
			$Q < 0$	Inestable
		$\sigma = 1,$ $ A > 1$ (Enfocante)	$Q \leq 0$	Estable
			$Q > 0$	Inestable

Para la cual $Q = \sin \delta \sin \Delta + \cos \delta (1 - \cos \Delta)$

Tabla 5.1. Análisis de Estabilidad para DNLS.

Cuando se perturbó la amplitud de las solución $\bar{u}_n(t) = Ae^{i(\delta_n - \omega t)}$, se tuvieron las siguientes condiciones en las cuales se presentó inestabilidad modulacional:

- Para $\cos \delta = 1$, cuando $\sigma = 1$ (enfocante) y $|A| > 1$, se tiene que las soluciones son modulacionalmente inestables.
- Para $\cos \delta \neq 1$ se tuvieron los siguientes subcasos de inestabilidad:
 - a) En el caso desenfocante ($\sigma = -1$), cuando $|A| > 1$ y $\cos \delta < 0$.
 - b) En el caso enfocante ($\sigma = 1$), cuando $|A| > 1$ y $\cos \delta > 0$.

Cuando se perturbó la amplitud y la fase en la solución $\bar{u}_n(t) = Ae^{i(\delta_n - \omega t)}$, el análisis arrojó las siguientes condiciones de inestabilidad modulacional:

- Para $\cos \delta = 1$ cuando, $\sigma = 1$ (enfocante) y $|A| > 1$ se encontró que las soluciones son inestables.

- Cuando $\cos \delta \neq 1$, la estabilidad o inestabilidad de las soluciones dependen del valor de $Q = \sin \delta \sin \Delta + \cos \delta(1 - \cos \Delta)$; considerando este valor Q se obtuvieron los siguientes subcasos en los cuales se presenta inestabilidad:
 - a) En el caso desenfocante ($\sigma = -1$), cuando $|A| > 1$ y $Q < 0$.
 - b) En el caso enfocante ($\sigma = 1$), cuando $|A| > 1$ y $Q > 0$.

Si no se cumplen las condiciones descritas anteriormente, entonces las soluciones son estables.

Los resultados para el caso $\cos(\delta) \neq 1$ tanto cuando se perturbó amplitud como cuando se perturbo amplitud y fase son similares. Sea $\tau = \cos \delta$ en el caso para el cual se perturba amplitud; y $\tau = Q$ para el caso en el que se perturban amplitud y fase. Entonces los resultados de los análisis se resumen en los siguientes dos puntos:

- (i) Si $\text{signo}(\sigma) = -\text{signo}(\tau)$, entonces las raíces Ω son reales, y la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente estable.
- (ii) Si $\text{signo}(\sigma) = \text{signo}(\tau)$, entonces las raíces Ω son imaginarias, y la solución $\bar{u}_n(t)$ es modulacionalmente inestable.

Se puede decir que cuando un paquete de ondas contenga soluciones de la forma $\bar{u}_n(t)$ el paquete de ondas se puede romper a partir de algún tiempo t . Esta ruptura sucederá si alguna de estas soluciones presenta un tipo de perturbación, ya sea en amplitud o amplitud y fase, además si estas perturbaciones se encuentran en los casos para los cuales existe inestabilidad modulacional.

Al comparar los resultados obtenidos en este capítulo con los resultados del capítulo 4, se obtienen las siguientes conclusiones. En algunos casos para los cuales se presenta estabilidad modulacional en las soluciones de la ecuación NLS, no se repite la estabilidad para las soluciones de la ecuación DNLS. Lo anterior se puede observar al contrastar las tablas que se encuentran al final de ambos capítulos. Lo anterior confirma lo explicado en la referencia [Kivshar & Peyrard], en la cual se menciona que es importante analizar las versiones discretas que los modelos continuos puedan tener, ya que en varios esquemas no lineales discretos pueden manifestarse efectos de inestabilidad modulacional, que a veces no existen en el modelo continuo.

6

El Método de Crank-Nicolson Linealizado

El método de Crank-Nicolson es un método de diferencias finitas usado para encontrar la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales. Se trata de un método implícito e incondicionalmente estable [Cebeci]. El método fue desarrollado por John Crank y Phyllis Nicolson en el año 1947.

Diferencias finitas y el método de Crank-Nicolson

Como ya ha sido mencionado, el método de diferencias finitas trabaja con un conjunto discreto de puntos. Para el método de Crank-Nicolson se requieren discretizaciones en la variable temporal y espacial. Entonces, el siguiente conjunto discreto de puntos estará compuesto de una malla puntos pertenecientes al plano (x, t) . La siguiente figura ilustra lo mencionado anteriormente,

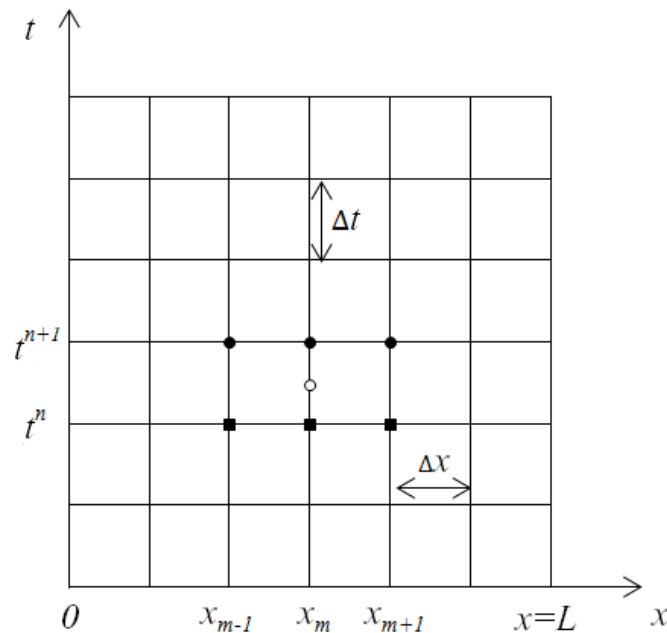


Figura 6.1. Discretización del plano (x,t) para el método de Crank-Nicolson.

en el cual Δx es la distancia que existe entre cualquier par de puntos consecutivos en el eje x y Δt es la distancia que existe entre cualquier par de puntos consecutivos en t . Además,

$$x_0 = 0, \quad x_m = x_{m-1} + \Delta x = x_0 + m\Delta x = m\Delta x, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$t^0 = 0, \quad t^n = t^{n-1} + \Delta t = t^0 + n\Delta t = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

El método de Crank-Nicolson se usa generalmente en ecuaciones dispersivas, como por ejemplo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F \left(T, x, t, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right),$$

y es de la siguiente manera:

$$\frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[F_m^{n+1} \left(T, x, t, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + F_m^n \left(T, x, t, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right], \quad (6.1)$$

en el que el lado izquierdo de (6.1) es la aproximación de la derivada de $T(x_i, t^{n+\frac{1}{2}})$ con respecto a la variable temporal, usando diferencias centrales, y el lado derecho es el promedio del operador F para los tiempo t^{n+1} y t^n respectivamente. La fórmula de diferencias centrales es:

$$\frac{\partial T(x_i, t^n)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Obsérvese que en la fórmula para el método de Crank-Nicolson (6.1), en el lado izquierdo no aparece el coeficiente $1/2$, y el numerador es de la forma $T_m^{n+1} - T_m^n$ a diferencia de la expresión anterior, esto se debe a que el punto en el cual se estima la derivada con respecto al tiempo es $T(x_i, t^{n+\frac{1}{2}})$ y el número de paso es $\frac{1}{2}\Delta t$ [Cebeci].

La ecuación no lineal de Schrödinger es:

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \sigma |u(x, t)|^2 u(x, t).$$

Discretizando la ecuación NLS utilizando el método de Crank-Nicolson (6.1), se obtiene:

$$i \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2(\Delta x)^2} \right] - \frac{\sigma}{2} \frac{|u_m^{n+1}|^2 + |u_m^n|^2}{2} (u_m^{n+1} + u_m^n). \quad (6.2)$$

Usualmente se utiliza una variante de (6.2) con la finalidad de ahorrar tiempo al momento de utilizar el método de Crank-Nicolson (6.1) en la ecuación NLS. Esta variante es el método de *Crank-Nicolson linealizado*. A grandes rasgos, en este esquema se aproxima el coeficiente $|u|^2$ del término no lineal de la ecuación NLS mediante extrapolación lineal [Chang].

El método de extrapolación lineal es un método mediante el cual se aproxima el valor de una función en el punto x_* ; esto mediante la creación de una recta $y(x)$ que une a los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$, donde $f(x_*) \approx y(x_*)$ cuando x_* es muy cercano a x_n . El esquema es el siguiente:

$$y(x_*) = y(x_{n-1}) + \frac{x_* - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} (y(x_n) - y(x_{n-1})).$$

En este caso se quiere aproximar el valor de una función en el punto t^{n+1} , para el cual la distancia entre dos puntos consecutivos es Δt . El esquema resulta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(t^{n+1}) &= y(t^{n-1}) + \frac{t^{n+1} - t^{n-1}}{t^n - t^{n-1}}(y(t^n) - y(t^{n-1})), \\ &= y(t^{n-1}) + \frac{2\Delta t}{\Delta t}(y(t^n) - y(t^{n-1})). \end{aligned}$$

El esquema que resulta es:

$$y(t^{n+1}) = 2y(t^n) - y(t^{n-1}). \quad (6.3)$$

Usando el esquema (6.3) para aproximar los valores de $|u_m^n|^2$ y $|u_m^{n+1}|^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} |u_m^n|^2 &\approx 2|u_m^{n-1}|^2 - |u_m^{n-2}|^2, \\ |u_m^{n+1}|^2 &\approx 2|u_m^n|^2 - |u_m^{n-1}|^2. \end{aligned}$$

Sumando los valores para $|u_m^n|^2$ y $|u_m^{n+1}|^2$ resulta:

$$|u_m^{n+1}|^2 + |u_m^n|^2 \approx 2|u_m^n|^2 + |u_m^{n-1}|^2 - |u_m^{n-2}|^2.$$

Despejando el valor de $|u_m^{n-2}|^2$ como sigue,

$$|u_m^{n-2}|^2 = 2|u_m^{n-1}|^2 - |u_m^n|^2.$$

Finalmente se tiene que:

$$|u_m^{n+1}|^2 + |u_m^n|^2 \approx 3|u_m^n|^2 - |u_m^{n-1}|^2.$$

Sustituyendo lo anterior en el esquema de Crank-Nicolson (6.2) se obtiene el siguiente esquema de Crank-Nicolson linealizado:

$$\begin{aligned} i \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2(\Delta x)^2} \right] \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{3|u_m^n|^2}{2} - \frac{|u_m^{n-1}|^2}{2} \right) (u_m^{n+1} + u_m^n). \end{aligned} \quad (6.4)$$

El objetivo de este capítulo es dar condiciones de inestabilidad modulacional mediante perturbaciones de las soluciones del método de Crank-Nicolson linealizado, para esto se realizara un análisis del comportamiento de dichas soluciones perturbadas para algunos casos. Después dichas soluciones se clasificarán como estables o inestables modulacionalmente. El capítulo está organizado de la siguiente forma:

1. Cálculo de la relación de dispersión del método de Crank-Nicolson linealizado.
2. Se propone una solución perturbada en amplitud y fase para el método de Crank-Nicolson linealizado.
3. Linealización alrededor de la solución de tipo onda plana \bar{u}_m^n .
4. Análisis de estabilidad.
5. Resumen y tabla de resultados obtenidos en el capítulo.

6.1 La Relación de Dispersión del esquema de Crank-Nicolson linealizado

Considérese el esquema de Crank-Nicolson linealizado (LCN):

$$i(u_m^{n+1} - u_m^n) = -\frac{\mu}{2} \left[\frac{(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2} \right] - \sigma \Delta t \left(\frac{3}{2}|u_m^n|^2 - \frac{1}{2}|u_{m-1}^n|^2 \right) \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}, \quad (6.5)$$

en el cual $\mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Supóngase que admite soluciones de la forma:

$$\bar{u}_m^n = A e^{i(kx_m - \omega t^n)},$$

para las cuales A puede ser real o compleja distinta de cero, $x_m = m\Delta x$ y $t^n = n\Delta t$. La solución anterior se puede reescribir, mediante unos cambios de variables, como sigue:

$$\bar{u}_m^n = A e^{i\delta m} r^n, \quad (6.6)$$

en el cual $\delta = k\Delta x$ y $r = e^{-i\omega\Delta t}$.

Nótese que las soluciones de la forma (6.6) tienen las siguientes propiedades:

$$\bar{u}_m^{n+1} = \bar{u}_m^n r, \quad (6.7)$$

$$\bar{u}_{m+1}^n = \bar{u}_m^n e^{i\delta}, \quad (6.8)$$

$$|\bar{u}_m^n| = A|r|^n. \quad (6.9)$$

Sustituyendo (6.6) en la ecuación (6.5) y usando las propiedades (6.7), (6.8) y (6.9), se obtiene la siguiente ecuación:

$$i(\bar{u}_m^n r - \bar{u}_m^n) = -\frac{\mu}{2} \left[\frac{(\bar{u}_m^n e^{i\delta} r - 2\bar{u}_m^n r + \bar{u}_m^n e^{-i\delta} r) + (\bar{u}_m^n e^{i\delta} - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_m^n e^{-i\delta})}{2} \right] - \sigma \Delta t \left(\frac{3}{2}A^2|r|^{2n} - \frac{1}{2}A^2|r|^{2(n-1)} \right) \frac{\bar{u}_m^n r + \bar{u}_m^n}{2}.$$

Ya que el factor \bar{u}_m^n se encuentra en ambos lados de la igualdad y es distinto de cero se puede eliminar,

$$i(r - 1) = -\frac{\mu}{4} [r(e^{i\delta} - 2 + e^{-i\delta}) + (e^{i\delta} - 2 + e^{-i\delta})] - \frac{\sigma \Delta t}{4} A^2 |r|^{2n} (3 - |r|^{-2})(r + 1).$$

Obsérvese que $-\frac{\mu}{4}$ se puede escribir como $\frac{\mu}{(2i)^2}$, y que $(e^{i\delta} - 2 + e^{-i\delta})$ se puede expresar como un binomio al cuadrado de la forma $(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})^2$. Tomando en cuenta estas propiedades la expresión anterior se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i(r-1) &= (r+1) \left[\mu \left(\frac{e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}}{2i} \right)^2 - \frac{\sigma\Delta t}{4} A^2 |r|^{2n} (3 - |r|^{-2}) \right], \\ i(r-1) &= (r+1) \left[\mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma\Delta t}{4} A^2 |r|^{2n} (3 - |r|^{-2}) \right]. \end{aligned}$$

Sea

$$B = \left[\mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma\Delta t}{4} A^2 |r|^{2n} (3 - |r|^{-2}) \right],$$

la expresión anterior se convierte en,

$$i(r-1) = (r+1)B. \quad (6.10)$$

Nótese que B es real. Ahora, si se realizan algunas operaciones algebraicas a la ecuación (6.10), se concluye que $|r| = 1$, como se explica a continuación:

$$\begin{aligned} i(r-1) &= (r+1)B \Rightarrow \\ ir - rB &= B + i \Rightarrow \\ r(i-B) &= B + i \Rightarrow \\ r &= \frac{B+i}{i-B} \Rightarrow \\ |r| &= 1. \end{aligned}$$

Se sabe que $|r| = 1$, sustituyendo este valor en B resulta:

$$B = \mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma\Delta t}{4} A^2 1^{2n} (3 - 1^{-2}),$$

lo que es igual a:

$$B = \mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma\Delta t}{2} A^2. \quad (6.11)$$

Finalmente, usando (6.11) en (6.10) se obtiene la relación de dispersión del esquema LCN, la cual es:

$$i(r-1) = (r+1) \left(\mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma\Delta t}{2} A^2 \right). \quad (6.12)$$

El hecho de que $|r| = 1$ proporciona otro dato adicional en términos de estabilidad del esquema de Crank-Nicolson linealizado. Para muchos esquemas existen restricciones sobre la manera en que deben de elegirse Δx y Δt de modo que el sistema sea estable y por lo tanto útil computacionalmente. En el libro [Strikwerda] aparece la siguiente definición de estabilidad:

Definición 6.1.1. *Un esquema de un paso en diferencias finitas con coeficientes constantes es estable en una región de estabilidad Λ , en el cual Δx y Δt pertenecen a Λ , si y solo si existe una constante K independiente de $\theta, \Delta x$ y Δt , tal que:*

$$|g(\theta, \Delta x, \Delta t)| \leq 1 + K\Delta t.$$

Si $g(\theta, \Delta x, \Delta t)$ es independiente de Δx y Δt entonces la condición de estabilidad es:

$$|g(\theta)| \leq 1.$$

donde $g(\theta)$ es un factor amplificante, y $\theta = \Delta x k$.

La cantidad $g(\theta)$ recibe el nombre de factor amplificante debido a que es una cantidad para la cual se satisface la siguiente igualdad:

$$\hat{V}_m^{n+1} = g(\theta)\hat{V}_m^n, \quad (6.13)$$

en la cual \hat{V}_m^n es la transformada de Fourier V_m^n . Básicamente esta igualdad dice que la solución del esquema al tiempo $n + 1$ es equivalente a multiplicar la transformada de Fourier de la solución al tiempo n por el factor amplificante $g(\theta)$. De la ecuación (6.13) se obtiene la siguiente expresión:

$$\hat{V}_m^n = g(\theta)^n \hat{V}_m^0. \quad (6.14)$$

Un esquema en diferencias finitas poseerá un factor amplificante según las características de dicho esquema. Una manera de encontrar el factor amplificante es sustituir $V_m^n = g(\theta)^n e^{im\theta}$ en el esquema a analizar. La ecuación que resulte de dicha sustitución puede ser resuelta para encontrar el factor amplificante. Para mayores detalles consulte la referencia [Strikwerda].

Al inicio de la sección 6.1 se substituyó $\bar{u}_m^n = Ae^{i\delta m} r^n$ en el esquema de Crank-Nicolson linealizado. Obsérvese que en nuestro caso el factor amplificante $g(\theta)^n$ es r^n . Además, se concluye al final de la sección 6.1 que $|r| = 1$. Dado que $|r| = 1$ se satisface la condición de estabilidad de la definición (6.1.1), por lo tanto el esquema de Crank-Nicolson linealizado es estable, y no solo eso, debido a que no existen restricciones sobre cómo elegir Δx y Δt para que se satisfaga $|r| = 1$, entonces se concluye que el esquema de Crank-Nicolson linealizado es incondicionalmente estable.

6.2 La Relación de Dispersión del esquema LCN linealizado

Para hacer el análisis de estabilidad de la solución (6.6), se propone la siguiente solución perturbada en la que se introducen pequeñas perturbaciones a la amplitud y fase de la solución \bar{u}_m^n ,

$$u_m^n = (\bar{u}_m^n + U_m^n) Z_m^n, \quad (6.15)$$

para la cual \bar{u}_m^n es la solución (6.6). Para perturbar la amplitud se utiliza la función $U_m^n = \epsilon a_m^n e^{i\delta m} r^n$. Para perturbar la fase de \bar{u}_m^n se usa la función $Z_m^n = e^{i\epsilon \tilde{\phi}_m^n}$. Suponiendo a_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$ son reales. Y además $|\epsilon| \ll 1$, pues se desea introducir pequeñas perturbaciones.

La solución (6.15) se escribe de la siguiente manera:

$$u_m^n = (A + \epsilon a_m^n) r^n e^{i\delta m + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n},$$

Haciendo una aproximación lineal de la solución u_m^n , desarrollando en series de potencias el término $e^{i\epsilon \tilde{\phi}_m^n}$ y despreciando los términos de orden mayor o igual a ϵ^2 . De esta forma resulta:

$$u_m^n = (A + \epsilon a_m^n + Ai\epsilon \tilde{\phi}_m^n) r^n e^{i\delta m}.$$

Factorizando A de la expresión anterior,

$$u_m^n = A(1 + \epsilon \frac{a_m^n}{A} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) r^n e^{i\delta m}.$$

Sea $\tilde{A}_m^n = \frac{a_m^n}{A}$. La aproximación lineal de la solución perturbada es:

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n. \quad (6.16)$$

Recuérdese que para la ecuación NLS, la cual admite soluciones de la forma $u(x, t) = Ae^{kx - i\omega t}$, en el caso $k = 0$ la relación de dispersión de la ecuación NLS es:

$$\omega = \sigma A^2.$$

Haciendo una analogía de lo anterior, se considera el siguiente caso especial en el cual se elige $\delta = k\Delta x = 0$, lo cual implica que,

$$B = -\frac{\sigma \Delta t}{2} A^2, \quad (6.17)$$

y la solución $\bar{u}_m^n = Ae^{i\delta m} r^n$, cuando $\delta = 0$, queda de la siguiente manera:

$$\bar{u}_m^n = Ar^n. \quad (6.18)$$

Como siguiente paso, se sustituye la solución perturbada (6.16) en la ecuación (6.5) con la finalidad de obtener ecuaciones para \tilde{A}_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$ y de esta forma poder analizar posteriormente la evolución de estas perturbaciones. Como es una expresión muy larga, se hará en tres partes. Primero el lado izquierdo de la ecuación (6.5),

$$i(u_m^{n+1} - u_m^n) = i[(1 + \epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} - (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n].$$

Los términos anteriores se reacomodan de la siguiente manera:

$$i(u_m^{n+1} - u_m^n) = i(\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n) + i[(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} - (\epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n]. \quad (6.19)$$

La segunda parte corresponde a la segunda derivada espacial discreta, la cual esta en el lado derecho de la ecuación (6.5),

$$u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} = (1 + \epsilon \tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_{m+1}^{n+1}) \bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2(1 + \epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} + (1 + \epsilon \tilde{A}_{m-1}^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1}) \bar{u}_{m-1}^{n+1}.$$

Los términos anteriores se reordenan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} &= \frac{(\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1})}{2} + (\epsilon\tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_{m+1}^{n+1})\bar{u}_{m+1}^{n+1} - \\ & 2(\epsilon\tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_m^{n+1})\bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon\tilde{A}_{m-1}^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_{m-1}^{n+1})\bar{u}_{m-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

De manera análoga para $u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n$ resulta,

$$\begin{aligned} u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n &= \frac{(\bar{u}_{m+1}^n - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_{m-1}^n)}{2} + (\epsilon\tilde{A}_{m+1}^n + i\epsilon\tilde{\phi}_{m+1}^n)\bar{u}_{m+1}^n - \\ & 2(\epsilon\tilde{A}_m^n + i\epsilon\tilde{\phi}_m^n)\bar{u}_m^n + (\epsilon\tilde{A}_{m-1}^n + i\epsilon\tilde{\phi}_{m-1}^n)\bar{u}_{m-1}^n. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Se usan (6.20) y (6.21) en la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \left[\frac{(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1})}{2} + (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \right] &= \\ \frac{\mu}{4} \left[\frac{(\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}) + (\bar{u}_{m+1}^n - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_{m-1}^n)}{2} \right] &- \frac{\mu}{4} \left[(\epsilon\tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_{m+1}^{n+1})\bar{u}_{m+1}^{n+1} \right. \\ - 2(\epsilon\tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_m^{n+1})\bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon\tilde{A}_{m-1}^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_{m-1}^{n+1})\bar{u}_{m-1}^{n+1} &+ (\epsilon\tilde{A}_{m+1}^n + i\epsilon\tilde{\phi}_{m+1}^n)\bar{u}_{m+1}^n \\ - 2(\epsilon\tilde{A}_m^n + i\epsilon\tilde{\phi}_m^n)\bar{u}_m^n + (\epsilon\tilde{A}_{m-1}^n + i\epsilon\tilde{\phi}_{m-1}^n)\bar{u}_{m-1}^n &\left. \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Para la tercera parte se aproximará el término no lineal de la ecuación (6.5), el cual es,

$$\sigma\Delta t \left(\frac{3}{2}|u_m^n|^2 - \frac{1}{2}|u_m^{n-1}|^2 \right) \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}. \quad (6.23)$$

Véase la forma que tienen $|u_m^n|^2$ y $|u_m^{n-1}|^2$,

$$\begin{aligned} |u_m^n|^2 &= |1 + \epsilon\tilde{A}_m^n + i\epsilon\tilde{\phi}_m^n|^2 |\bar{u}_m^n|^2 = [(1 + \epsilon\tilde{A}_m^n)^2 + (\epsilon\tilde{\phi}_m^n)^2] |\bar{u}_m^n|^2 \\ &= [1 + 2\epsilon\tilde{A}_m^n + \epsilon^2\tilde{A}_m^{2n} + \epsilon^2\tilde{\phi}_m^{2n}] |\bar{u}_m^n|^2. \end{aligned}$$

Los términos de orden ϵ^2 pueden ser despreciados, pues son muy pequeños y aportan muy poco a la expresión anterior. De este modo,

$$|u_m^n|^2 \simeq (1 + 2\epsilon\tilde{A}_m^n) |\bar{u}_m^n|^2.$$

De manera análoga se calcula $|u_m^{n-1}|^2$, teniendo como resultado,

$$|u_m^{n-1}|^2 \simeq (1 + 2\epsilon\tilde{A}_m^{n-1}) |\bar{u}_m^{n-1}|^2.$$

De este modo se tiene que la expresión (6.23) al sustituir (6.16) en ella es,

$$\begin{aligned} \sigma\Delta t \left(\frac{3}{2}|u_m^n|^2 - \frac{1}{2}|u_m^{n-1}|^2 \right) \frac{(u_m^{n+1} + u_m^n)}{2} &= \frac{\sigma\Delta t}{4} \left(3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2 + 2(3\epsilon\tilde{A}_m^n |\bar{u}_m^n|^2 \right. \\ - \epsilon\tilde{A}_m^{n-1} |\bar{u}_m^{n-1}|^2) &\left. \left((\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^n) + (\epsilon\tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon\tilde{\phi}_m^{n+1})\bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon\tilde{A}_m^n + i\epsilon\tilde{\phi}_m^n)\bar{u}_m^n \right) \right). \end{aligned}$$

Realizando las operaciones anteriores y despreciando los términos de orden mayor o igual a ϵ^2 , resulta:

$$\begin{aligned} \sigma \Delta t \left(\frac{3}{2} |u_m^n|^2 - \frac{1}{2} |u_m^{n-1}|^2 \right) \frac{(u_m^{n+1} + u_m^n)}{2} &= \frac{\sigma \Delta t}{4} \left[(3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2)(\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^n) + \right. \\ &2(3\epsilon \tilde{A}_m^n |\bar{u}_m^n|^2 - \epsilon \tilde{A}_m^{n-1} |\bar{u}_m^{n-1}|^2)(\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^n) + (3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2)[(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \\ &\left. \bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Una vez realizadas estas tres partes se hace la suma de ellas, el resultado de esta suma es la sustitución de la solución perturbada (6.15) en el esquema LCN.

Al sumar las expresiones (6.19), (6.22) y (6.24), los términos subrayados se pueden eliminar ya que satisfacen el esquema LCN. La expresión que resulta es,

$$\begin{aligned} i[(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} - (\epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n] &= -\frac{\mu}{4} \left[(\epsilon \tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_{m+1}^{n+1}) \bar{u}_{m+1}^{n+1} - \right. \\ &2(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_{m-1}^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1}) \bar{u}_{m-1}^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_{m+1}^n + i\epsilon \tilde{\phi}_{m+1}^n) \bar{u}_{m+1}^n \\ &\left. - 2(\epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n + (\epsilon \tilde{A}_{m-1}^n + i\epsilon \tilde{\phi}_{m-1}^n) \bar{u}_{m-1}^n \right] - \frac{\sigma \Delta t}{4} \left[2(3\epsilon \tilde{A}_m^n |\bar{u}_m^n|^2 - \epsilon \tilde{A}_m^{n-1} \right. \\ &|\bar{u}_m^{n-1}|^2)(\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^n) + (3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2)[(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_m^n + \\ &\left. i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n \right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

La ecuación (6.25) es la linealización del esquema (LCN) alrededor de la solución \bar{u}_m^n cuando se perturban amplitud y fase.

Ahora, la ecuación (6.25) se separa en parte real e imaginaria. Recuérdese que \tilde{A}_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$ son reales. La parte imaginaria de la expresión anterior es:

$$\begin{aligned} \epsilon \tilde{A}_m^{n+1} \bar{u}_m^{n+1} - \epsilon \tilde{A}_m^n \bar{u}_m^n &= -\frac{\mu \epsilon}{4} \left[\tilde{\phi}_{m+1}^{n+1} \bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\tilde{\phi}_m^{n+1} \bar{u}_m^{n+1} + \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1} \bar{u}_{m-1}^{n+1} + \tilde{\phi}_{m+1}^n \bar{u}_{m+1}^n \right. \\ &\left. - 2\tilde{\phi}_m^n \bar{u}_m^n + \tilde{\phi}_{m-1}^n \bar{u}_{m-1}^n \right] - \frac{\sigma \Delta t \epsilon}{4} \left[(3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2)(\tilde{\phi}_m^{n+1} \bar{u}_m^{n+1} + \tilde{\phi}_m^n \bar{u}_m^n) \right]. \end{aligned}$$

La parte real de (6.25) es:

$$\begin{aligned} -(\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1} \bar{u}_m^{n+1} - \epsilon \tilde{\phi}_m^n \bar{u}_m^n) &= -\frac{\mu \epsilon}{4} \left[\tilde{A}_{m+1}^{n+1} \bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\tilde{A}_m^{n+1} \bar{u}_m^{n+1} + \tilde{A}_{m-1}^{n+1} \bar{u}_{m-1}^{n+1} + \right. \\ &\tilde{A}_{m+1}^n \bar{u}_{m+1}^n - 2\tilde{A}_m^n \bar{u}_m^n + \tilde{A}_{m-1}^n \bar{u}_{m-1}^n \left. \right] - \frac{\sigma \Delta t \epsilon}{4} \left[2(3\tilde{A}_m^n |\bar{u}_m^n|^2 - \tilde{A}_m^{n-1} |\bar{u}_m^{n-1}|^2) \right. \\ &\left. (\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^n) + (3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2)(\tilde{A}_m^{n+1} \bar{u}_m^{n+1} + \tilde{A}_m^n \bar{u}_m^n) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado $\bar{u}_m^n = Ar^n$ y $|r| = 1$, lo cual implica que $|\bar{u}_m^n| = A$. También se tiene que $\bar{u}_m^{n+1} = r\bar{u}_m^n$, $\bar{u}_{m+1}^n = e^{i\delta} \bar{u}_m^n$, con $\delta = 0$, lo cual conlleva a que las ecuaciones anteriores se simplifiquen de la

siguiente manera,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m^{n+1}r - \tilde{A}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[(\tilde{\phi}_{m+1}^{n+1} - 2\tilde{\phi}_m^{n+1} + \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1})r + (\tilde{\phi}_{m+1}^n - 2\tilde{\phi}_m^n + \tilde{\phi}_{m-1}^n) \right] \\ &\quad - \frac{\sigma\Delta t}{2} A^2 (\tilde{\phi}_m^{n+1}r + \tilde{\phi}_m^n), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} -(\tilde{\phi}_m^{n+1}r - \tilde{\phi}_m^n) &= -\frac{\mu}{4} \left[(\tilde{A}_{m+1}^{n+1} - 2\tilde{A}_m^{n+1} + \tilde{A}_{m-1}^{n+1})r + (\tilde{A}_{m+1}^n - 2\tilde{A}_m^n + \tilde{A}_{m-1}^n) \right] \\ &\quad - \frac{\sigma\Delta t}{2} A^2 \left[(3\tilde{A}_m^n - \tilde{A}_m^{n-1})(r+1) + (\tilde{A}_m^{n+1}r + \tilde{A}_m^n) \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

La ecuación (6.26) corresponde a la parte imaginaria y la ecuación (6.27) corresponde a la parte real de (6.25). Estas son las ecuaciones linealizadas alrededor de la solución \bar{u}_m^n .

Una vez que se obtienen las ecuaciones (6.26) y (6.27) se procede a calcular la relación de dispersión correspondiente al sistema acoplado de las ecuaciones (6.26) y (6.27). Supóngase que

$$\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n, \quad (6.28)$$

$$\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n, \quad (6.29)$$

satisfacen las ecuaciones (6.26) y (6.27), para las cuales ψ_0 y $\tilde{\phi}_0$ son constantes reales, $\varphi = \kappa\Delta x$ y $\rho = e^{-i\Omega\Delta t}$, donde κ es real y Ω puede ser real o imaginaria. Nótese que las soluciones (6.28) y (6.29) tienen las siguientes propiedades:

$$\tilde{A}_m^{n+1} = \rho \tilde{A}_m^n, \quad (6.30)$$

$$\tilde{\phi}_m^{n+1} = \rho \tilde{\phi}_m^n, \quad (6.31)$$

$$\tilde{A}_{m+1}^n = e^{i\varphi} \tilde{A}_m^n, \quad (6.32)$$

$$\tilde{\phi}_{m+1}^n = e^{i\varphi} \tilde{\phi}_m^n. \quad (6.33)$$

Se sustituyen las soluciones (6.28) y (6.29) en las ecuaciones (6.26) y (6.27). Adicionalmente, se usan las cuatro propiedades anteriores. Al sustituir para la ecuación (6.26) resulta,

$$\begin{aligned} (\rho r - 1)\tilde{A}_m^n &= -\frac{\mu}{4} [(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})\rho\tilde{\phi}_m^n r + (e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})\tilde{\phi}_m^n] \\ &\quad - \frac{\sigma\Delta t}{2} A^2 [(\rho r + 1)\tilde{\phi}_m^n], \end{aligned}$$

$$(\rho r - 1)\tilde{A}_m^n = -\frac{\mu}{4} (e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})^2 (\rho r + 1)\tilde{\phi}_m^n - \frac{\sigma\Delta t}{2} A^2 [(\rho r + 1)\tilde{\phi}_m^n].$$

Por la identidad de Euler se tiene que:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})}{2i}.$$

Al hacer esta sustitución y considerando que $e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi} = (e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})^2$, la expresión anterior es:

$$(\rho r - 1)\tilde{A}_m^n = \mu \sin^2(\varphi/2)(\rho r + 1)\tilde{\phi}_m^n - \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2 [(\rho r + 1)\tilde{\phi}_m^n].$$

Recuérdese que $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n$ y $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n$, al sustituir estas soluciones en la expresión anterior resulta,

$$(\rho r - 1)\psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n = \mu \sin^2(\varphi/2)(\rho r + 1)\tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n + -\frac{\sigma \Delta t}{2} A^2 [(\rho r + 1)\tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n].$$

Recuérdese que $B = -\frac{1}{2}\sigma \Delta t A^2$. Finalmente, el resultado de sustituir las soluciones (6.28) y (6.29), en la ecuación (6.26) es:

$$(\rho r - 1)\psi_0 = (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\tilde{\phi}_0. \quad (6.34)$$

En un proceso análogo al anterior, se sustituirán las soluciones (6.28) y (6.29) en la ecuación (6.27), y usando las propiedades (6.30), (6.31), (6.32) y (6.33) resulta,

$$\begin{aligned} -(\rho r - 1)\tilde{\phi}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})\rho r \tilde{A}_m^n + (e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})\tilde{A}_m^n \right] \\ &\quad - \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2 \left[\left(3 - \frac{1}{\rho} \right) (r + 1)\tilde{A}_m^n + (\rho r + 1)\tilde{A}_m^n \right], \\ &= \mu \sin^2(\varphi/2)(\rho r + 1)\tilde{A}_m^n - \frac{1}{2}\sigma \Delta t A^2 \left[\left(3 - \frac{1}{\rho} \right) (r + 1) + (\rho r + 1) \right] \tilde{A}_m^n. \end{aligned}$$

Se tiene que $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n$, $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n$, y $B = -\frac{1}{2}\sigma \Delta t A^2$, al sustituir estos valores en la expresión anterior resulta:

$$-(\rho r - 1)\tilde{\phi}_0 = (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\psi_0 + B \left(3 - \frac{1}{\rho} \right) (r + 1)\psi_0. \quad (6.35)$$

Entonces las ecuaciones (6.34) y (6.35), respectivamente, quedan como sigue:

$$\begin{aligned} (\rho r - 1)\psi_0 &= (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\tilde{\phi}_0, \\ -(\rho r - 1)\tilde{\phi}_0 &= (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\psi_0 + B \left(3 - \frac{1}{\rho} \right) (r + 1)\psi_0. \end{aligned}$$

Nótese que si se multiplica la ecuación (6.34) por el término $(\rho r - 1)$ y la ecuación (6.35) por el término $-(\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)$ (ambas ecuaciones se usan en su nueva forma) se obtiene:

$$(\rho r - 1)^2 \psi_0 = \underline{(\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho^2 r^2 - 1)\tilde{\phi}_0},$$

$$\begin{aligned} \underline{(\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho^2 r^2 - 1)\tilde{\phi}_0} &= -(\mu \sin^2(\varphi/2) + B)^2(\rho r + 1)^2\psi_0 - (\mu \sin^2(\varphi/2) + B) \\ &\quad (\rho r + 1)B\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)(r + 1)\psi_0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Los términos subrayados son iguales, entonces,

$$(\rho r - 1)^2 = -(\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)[(\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1) + B\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)(r + 1)].$$

La ecuación anterior se simplifica al introducir la siguiente variable, $D = \mu \sin^2(\varphi/2) + B$, de esta manera se tiene:

$$(\rho r - 1)^2 = -D(\rho r + 1)[D(\rho r + 1) + B\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)(r + 1)]. \quad (6.37)$$

La ecuación (6.37) es la relación de dispersión del esquema LCN linealizado alrededor de \bar{u}_m^n .

6.3 Análisis de Estabilidad de las Soluciones.

En el capítulo 3 se estableció que la estabilidad de una solución dependerá de cuánto se aleja en norma la solución original $\bar{u}_m^n = Ae^{i\delta m}r^n$ de la solución perturbada u_m^n , en este caso sería:

$$\begin{aligned} \|u_m^n - \bar{u}_m^n\| &= \|(\epsilon\tilde{A}_m^n + i\epsilon\tilde{\phi}_m^n)\bar{u}_m^n\| = A\|\epsilon(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)e^{i\delta m}r^n\|, \\ \|u_m^n - \bar{u}_m^n\| &= A\|(\epsilon\tilde{A}_m^n + i\epsilon\tilde{\phi}_m^n)\| \|e^{i\delta m}r^n\| = A\|\epsilon\| \|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|. \end{aligned}$$

De lo anterior se observa que lo que determina cuánto se aleja la solución original \bar{u}_m^n de la solución perturbada u_m^n es el comportamiento de $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|$ cuando n tiende a infinito.

Al igual que en capítulo 3 se usará la norma del máximo, de este modo se tiene que,

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}} (|\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n|) = \max_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{|\tilde{A}_m^n|^2 + |\tilde{\phi}_m^n|^2}.$$

Recuérdese que para números complejos se satisface $|z|^2 = z \cdot z^*$, en el que z^* es el conjugado de z , entonces:

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{(\tilde{A}_m^n)(\tilde{A}_m^n)' + (\tilde{\phi}_m^n)(\tilde{\phi}_m^n)'}$$

Sustituyendo $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n$ y $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n$,

$$\begin{aligned} \|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} &= \max_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{(\psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n)(\psi_0 e^{-i\varphi m} \rho^n) + (\tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n)(\tilde{\phi}_0 e^{-i\varphi m} \rho^n)}, \\ &= \max_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{(\psi_0^2 e^{i\varphi m} e^{-i\varphi m} |\rho|^{2n}) + (\tilde{\phi}_0^2 e^{i\varphi m} e^{-i\varphi m} |\rho|^{2n})}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el módulo de un número de la forma $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$, en el cual θ es real. Dado que φ y m y son reales se tiene lo siguiente:

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{(\psi_0^2 |\rho|^{2n}) + (\tilde{\phi}_0^2 |\rho|^{2n})} = \sqrt{(\psi_0^2 + \tilde{\phi}_0^2) |\rho|^{2n}}.$$

Sea $K = \sqrt{\psi_0^2 + \tilde{\phi}_0^2}$; con este cambio la expresión anterior es:

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}} K |\rho|^n.$$

La norma $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max}$ depende del valor de $|\rho|$, pues K es una constante.

De lo anterior se desprenden tres casos:

1. Si $|\rho| = 1$, entonces, $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} \rightarrow K$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable.
2. Si $|\rho| < 1$, entonces, $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente asintóticamente estable.
3. Si $|\rho| > 1$, entonces, $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente inestable.

6.4 Análisis de Estabilidad de las Soluciones para los casos $\tilde{\phi}_0 = 0$ y $\psi_0 = 0$.

6.4.1 Caso 1: $\tilde{\phi}_0 = 0$.

Se dará inicio haciendo el análisis de estabilidad de la soluciones de la forma $\bar{u}_m^n = Ar^n$, con la solución perturbada en amplitud y fase propuesta anteriormente (6.20),

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + \epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n.$$

En la sección anterior se establecieron las ecuaciones (6.34) y (6.35) para encontrar la relación de dispersión del sistema linealizado (6.37). Para hacer el análisis de estabilidad de soluciones en éste y el siguiente caso, se trabajará con las ecuaciones (6.34) y (6.35), las cuales respectivamente son,

$$\begin{aligned} (\rho r - 1)\psi_0 &= (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\tilde{\phi}_0, \\ -(\rho r - 1)\tilde{\phi}_0 &= (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\psi_0 + B\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)(r + 1)\psi_0. \end{aligned}$$

Supóngase que $\tilde{\phi}_0 = 0$ y $\psi_0 \neq 0$ para la ecuación (6.34), lo cual nos genera,

$$(\rho r - 1)\psi_0 = 0. \tag{6.38}$$

Entonces:

$$\rho r - 1 = 0.$$

Se despeja ρ y calcula su módulo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{r}, \\ |\rho| &= \left| \frac{1}{r} \right| = \frac{1}{|r|} = 1.\end{aligned}$$

Cabe recordar que $|r| = 1$.

La solución perturbada es

$$\bar{u}_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + \epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n,$$

para la cual,

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m^n &= \psi_0 e^{im\varphi} \rho^n, \\ \tilde{\phi}_m^n &= \tilde{\phi}_0 e^{im\varphi} \rho^n.\end{aligned}$$

Se tiene que $\tilde{\phi}_0 = 0$, entonces $\tilde{\phi}_m^n = 0$. Por otro lado, $|\rho| = 1$, donde $\rho = e^{-i\Omega\Delta t}$, lo que implica que,

$$|e^{-i\Omega\Delta t}| = 1,$$

lo que significa que Ω es real.

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m^n &= \psi_0 e^{im\varphi} \rho^n, \\ &= \psi_0 e^{im\varphi} e^{\pm i\Omega\Delta tn}, \\ &= \psi_0 e^{im\varphi \pm i\Omega\Delta tn}.\end{aligned}$$

La función \tilde{A}_m^n es puramente oscilatoria y es acotada, lo cual implica que $u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n) \bar{u}_m^n$ es acotada. Con base en lo anterior se llega a la conclusión que \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable. Este resultado concuerda con los criterios de estabilidad establecidos en la sección 6.3.

6.4.2 Caso 2: $\psi_0 = 0$.

Análogamente se trabajará con las ecuaciones (6.34) y (6.35),

$$\begin{aligned}(\rho r - 1)\psi_0 &= (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\tilde{\phi}_0, \\ -(\rho r - 1)\tilde{\phi}_0 &= (\mu \sin^2(\varphi/2) + B)(\rho r + 1)\psi_0 + B\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)(r + 1)\psi_0.\end{aligned}$$

Supóngase que $\psi_0 = 0$ en la ecuación (6.35), lo que genera,

$$(\rho r - 1)\tilde{\phi}_0 = 0, \tag{6.39}$$

en donde $\tilde{\phi}_0 \neq 0$. Igual que en el caso anterior $\rho r - 1 = 0$.

Se despeja ρ y se calcula su módulo,

$$|\rho| = 1.$$

Recuérdese que la solución perturbada es

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + \epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n,$$

en la cual,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m^n &= \psi_0 e^{im\varphi} \rho^n, \\ \tilde{\phi}_m^n &= \tilde{\phi}_0 e^{im\varphi} \rho^n. \end{aligned}$$

Como el valor de ψ_0 es cero, entonces $\tilde{A}_m^n = 0$, además $|\rho| = 1$, en donde $\rho = e^{-i\Omega\Delta t}$, entonces,

$$|e^{-i\Omega\Delta t}| = 1,$$

lo cual, como se mencionó anteriormente, implica que Ω es real.

Análogamente al caso anterior, se concluye que $\tilde{\phi}_m^n$ es puramente oscilatoria y acotada, lo cual implica que $u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n$ es acotada y finalmente \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable. Nótese que este resultado es congruente con los criterio de estabilidad establecidos en la sección 6.3.

6.5 Análisis de estabilidad con $D=0$.

Como se estableció antes, la relación de dispersión del esquema LCN linealizado es la ecuación (6.37), la cual es,

$$(\rho r - 1)^2 = -D(\rho r + 1) \left[D(\rho r + 1) + B \left(3 - \frac{1}{\rho} \right) (r + 1) \right],$$

donde $D = \mu \sin^2(\varphi/2) + B$ y $B = -\frac{1}{2}\sigma\Delta t A^2$.

Se multiplica la relación de dispersión (6.37) por ρ en ambos lados de la igualdad,

$$\rho(\rho r - 1)^2 = -\rho D(\rho r + 1) \left[D(\rho r + 1) + B \left(3 - \frac{1}{\rho} \right) (r + 1) \right],$$

lo anterior es para que la relación de dispersión (6.37), tenga estructura de polinomio y pueda realizarse el análisis del comportamiento de la solución perturbada.

Haciendo el desarrollo de la expresión anterior e igualando a cero resulta:

$$\begin{aligned} \rho^3(r^2(D^2 + 1)) + \rho^2[2r(D^2 - 1) + 3DBr(1 + r)] + \\ \rho(1 + D^2 + DB(1 + r)(3 - r)) - BD(1 + r) = 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Se va a trabajar con la ecuación (6.40), la cual es equivalente a la ecuación (6.37) y se buscará saber cómo es la magnitud (módulo) de ρ .

En esta sección se realizará el análisis de estabilidad para el caso $D = 0$. La variable D fue introducida al final de la sección (6.2) en la ecuación (6.37) para simplificar la expresión de la relación de dispersión del sistema linealizado para el esquema LCN.

Como ya fue explicado se va a trabajar con la ecuación (6.40), que es una expresión equivalente para la relación de dispersión (6.37), para el caso $D = 0$, en el cual $\varphi \neq 2n\pi$ con $n \in (-\infty, \infty)$. Nótese que cuando $D = 0$, el valor de σ es 1, es decir, cuando $D = 0$ no es posible analizar el caso desenfocante ($\sigma = -1$).

Si $D = \mu \sin^2(\varphi/2) + B$ es igual a cero, la relación de dispersión (6.37) queda:

$$\rho^3 r^2 - 2\rho^2 r + \rho = 0. \quad (6.41)$$

La ecuación (6.41) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\rho(\rho^2 r^2 - 2\rho r + 1) = 0.$$

Inmediatamente se observa que una raíz del polinomio (6.41) es $\rho_1 = 0$. Para calcular las otras dos raíces se usará la fórmula general en el polinomio de segundo grado $\rho^2 r^2 - 2\rho r + 1 = 0$. La fórmula general para resolver el polinomio anterior es:

$$\rho_{2,3} = \frac{2r \pm \sqrt{(-2r)^2 - 4r^2}}{2r^2} = \frac{2r}{2r^2} = \frac{1}{r}.$$

Entonces, se tiene una raíz doble $\rho_2 = \frac{1}{r}$ y $\rho_3 = \frac{1}{r}$. La raíz $\rho = 0$ carece de importancia para el análisis de estabilidad. Los módulos de las raíces $\rho_{2,3}$ son:

$$|\rho_{2,3}| = \left| \frac{1}{r} \right| = \frac{1}{|r|} = 1,$$

pues anteriormente se dijo que $|r| = 1$.

La solución perturbada (6.16) es:

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n,$$

donde $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n$ y $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n$, ψ_0 y $\tilde{\phi}_0$ son constantes y $\rho = e^{-i\Omega \Delta t}$.

Para este caso se tienen soluciones de la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{(1,2,3)m}^n &= \psi_0 e^{i\varphi m} \rho_{1,2,3}^n, \\ \tilde{\phi}_{(1,2,3)m}^n &= \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho_{1,2,3}^n,\end{aligned}$$

para las cuales los tres módulos de ρ son:

- $|\rho|_1 = 0$,
- $|\rho|_2 = 1$,
- $|\rho|_3 = 1$.

Según los criterios de estabilidad establecidos en la sección 6.3, si se toman ρ_1 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{1m}^n y $\tilde{\phi}_{1m}^n$, se tiene que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente asintóticamente estable. Si se eligen ρ_2 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{2m}^n y $\tilde{\phi}_{2m}^n$, entonces que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable. Si se escogen ρ_3 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{3m}^n y $\tilde{\phi}_{3m}^n$, también resulta que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable.

Considérese las siguientes soluciones generales:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m^n &= c_1 \tilde{A}_{1m}^n + c_2 \tilde{A}_{2m}^n + c_3 \tilde{A}_{3m}^n, \\ \tilde{\phi}_m^n &= c_4 \tilde{\phi}_{1m}^n + c_5 \tilde{\phi}_{2m}^n + c_6 \tilde{\phi}_{3m}^n,\end{aligned}$$

en donde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 y c_6 son constantes.

El comportamiento de $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max}$ cuando n tiende a infinito es la superposición de los comportamientos de $\|(\tilde{A}_{1m}^n + i\tilde{\phi}_{1m}^n)\|_{\max}$, $\|(\tilde{A}_{2m}^n + i\tilde{\phi}_{2m}^n)\|_{\max}$ y $\|(\tilde{A}_{3m}^n + i\tilde{\phi}_{3m}^n)\|_{\max}$ cuando n tiende a infinito. Entonces:

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} \rightarrow K \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

en donde $K = \sqrt{\psi_0^2 + \tilde{\phi}_0^2}$.

Para este caso se tiene que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable.

6.6 Análisis de estabilidad para los casos $r = i$ y $-i$.

Para realizar este análisis de estabilidad hay que retroceder al final de la sección 6.1, en la que se calculó la relación de dispersión del esquema Crank-Nicolson linealizado, la cual es la ecuación (6.12):

$$i(r-1) = (r+1)B,$$

donde $B = \left(\mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2\right)$, y $|r| = 1$. Recuérdese que en páginas anteriores fue considerado $\delta = 0$, lo que implica que $B = -\frac{\sigma \Delta t}{2} A^2$, es decir, B es distinto de cero (ver ecuación (6.17)). Este

supuesto es relevante, pues bajo estas condiciones se calculó la relación de dispersión del sistema linealizado (6.37) en la sección 6.2 de este capítulo.

El hecho de que $|r| = 1$ permite suponer, entre otros casos, que $r = 1, 1, -1i$ y $-i$, con lo que se pueden obtener los siguientes resultados:

- Si $r = 1$, entonces la relación de dispersión (6.12) es:

$$i(1 - 1) = (r + 1)B,$$

dado que $B \neq 0$, de la ecuación anterior resulta que $r = -1$, lo cual es una contradicción pues al inicio se supuso que $r = 1$. Por lo tanto no se puede considerar caso $r = 1$ para realizar un análisis de estabilidad.

- Si $r = -1$, entonces la relación de dispersión (6.12) es:

$$i(r - 1) = (-1 + 1)B,$$

dado que $B \neq 0$ de la ecuación anterior resulta que $r = 1$, esto es una contradicción pues en este punto se considera que $r = -1$. Por lo tanto tampoco es posible considerar el caso $r = -1$ para realizar un análisis de estabilidad.

- Si $r = i$ entonces la relación de dispersión (6.12) es:

$$\begin{aligned} i(i - 1) &= (i + 1)B, \\ i^2 - i &= (i + 1)B, \\ -(1 + i) &= (i + 1)B, \end{aligned}$$

de lo anterior se concluye que $B = -1$. Entonces, si $r = i$ implica que $B = -1$.

- Si $r = -i$, la relación de dispersión (6.12) es:

$$\begin{aligned} i(-i - 1) &= (-i + 1)B, \\ -i^2 - i &= (-i + 1)B, \\ (1 - i) &= (-i + 1)B, \end{aligned}$$

por lo tanto $B = 1$. Entonces, si $r = -i$, implica que $B = 1$.

De los cuatro puntos anteriores sólo pueden considerarse dos valores para r ; $r = i$ con $B = -1$, y $r = -i$ con $B = 1$.

Se tiene que la relación de dispersión del sistema linealizado es la ecuación (6.40)

$$\begin{aligned} \rho^3(r^2(D^2 + 1)) + \rho^2[2r(D^2 - 1) + 3DBr(1 + r)] + \\ \rho(1 + D^2 + DB(1 + r)(3 - r)) - BD(1 + r) = 0, \end{aligned}$$

para la cual se satisfacen que $D = \mu \sin^2(\varphi/2) + B$ y $B = -\frac{\sigma \Delta t}{2} A^2$.

Supóngase que $\varphi = 2n\pi$ con $n \in (-\infty, \infty)$, es decir $\sin(\varphi/2) = 0$, lo cual implica $D = B$. Considerando lo anterior, la relación de dispersión del sistema linealizado (6.40) queda:

$$\rho^3 r^2 (B^2 + 1) + \rho^2 [2r(B^2 - 1) + 3B^2 r(1 + r)] + \rho(1 + B^2 + B^2(1 + r)(3 - r)) - B^2(1 + r) = 0. \quad (6.42)$$

Con esta nueva versión para la relación de dispersión del sistema linealizado (6.42) se hará el análisis de estabilidad para los casos $r = i$ y $r = -i$.

6.6.1 Análisis de estabilidad para $r = i$.

Recuérdese que si $r = i$, entonces $B = -1$. Obsérvese que si $B = -1$ se está trabajando con el caso enfocante $\sigma = 1$. Con $r = i$ y $B = -1$ el polinomio (6.42) queda:

$$\rho^3 (i)^2 (1 + 1) + \rho^2 [2i(1 - 1) + 3i(1 + i)] + \rho(1 + 1 + (1 + i)(3 - i)) - 1(1 + i) = 0.$$

Simplificando el polinomio anterior resulta:

$$-2\rho^3 + 3\rho^2(i - 1) + 2\rho(3 + i) - (1 + i) = 0. \quad (6.43)$$

El polinomio (6.43) es la relación de dispersión del sistema linealizado para el caso enfocante $D = B$, $r = i$ y $B = -1$.

Para el polinomio (6.43) se realizó el cálculo de las raíces y el módulo de cada una de ellas utilizando el software “*Wolfram Mathematica 7 for Students*”, dando como resultado las siguientes raíces para ρ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.774933 + 0.697304i, \text{ en donde } |\rho_1| = 1.04248, \\ \rho_2 &= -2.51979 + 0.718686i, \text{ en donde } |\rho_2| = 2.62027, \\ \rho_3 &= 0.244853 + 0.084010i, \text{ en donde } |\rho_3| = 0.25886. \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, la solución perturbada (6.16) es:

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n,$$

en donde $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n$ y $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n$, ψ_0 y $\tilde{\phi}_0$ son constantes y $\rho = e^{-i\Omega\Delta t}$.

Para este caso se tienen soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(1,2,3)m}^n &= \psi_0 e^{i\varphi m} \rho_{1,2,3}^n, \\ \tilde{\phi}_{(1,2,3)m}^n &= \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho_{1,2,3}^n, \end{aligned}$$

para las cuales los tres valores de ρ y sus módulos son:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.774933 + 0.697304i, \text{ en donde } |\rho_1| = 1.04248, \\ \rho_2 &= -2.51979 + 0.718686i, \text{ en donde } |\rho_2| = 2.62027, \\ \rho_3 &= 0.244853 + 0.084010i, \text{ en donde } |\rho_3| = 0.25886. \end{aligned}$$

```

Raices p.nb *

N[Solve[-2 p^3 + 3 p^2 (i - 1) + 2 p (3 + i) - (1 + i) == 0, p]]

{{p -> 0.774933 + 0.697304 i}, {p -> -2.51979 + 0.718686 i}, {p -> 0.244853 + 0.0840106 i}}

Abs[0.7749333770675464 + 0.6973038546933833 i]

1.04248

Abs[-2.5197866089392162 + 0.7186855759722561 i]

2.62027

Abs[0.2448532318716699 + 0.08401056933436069 i]

0.258865

```

Figura 6.2. Raíces de ρ y sus módulos.

De acuerdo a lo establecido en la sección (6.3), si se eligen ρ_1 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{1m}^n y $\tilde{\phi}_{1m}^n$, resulta que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente inestable. Si se eligen ρ_2 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{2m}^n y $\tilde{\phi}_{2m}^n$, también se tiene que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente inestable. Por otro lado, si se toman ρ_3 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{3m}^n y $\tilde{\phi}_{3m}^n$ resulta que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente asintóticamente estable.

Considérense las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m^n &= c_1 \tilde{A}_{1m}^n + c_2 \tilde{A}_{2m}^n + c_3 \tilde{A}_{3m}^n, \\ \tilde{\phi}_m^n &= c_4 \tilde{\phi}_{1m}^n + c_5 \tilde{\phi}_{2m}^n + c_6 \tilde{\phi}_{3m}^n,\end{aligned}$$

en donde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 y c_6 son constantes.

El comportamiento de $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max}$ cuando n tiende a infinito es la superposición de los comportamientos de $\|(\tilde{A}_{1m}^n + i\tilde{\phi}_{1m}^n)\|_{\max}$, $\|(\tilde{A}_{2m}^n + i\tilde{\phi}_{2m}^n)\|_{\max}$ y $\|(\tilde{A}_{3m}^n + i\tilde{\phi}_{3m}^n)\|_{\max}$ cuando n tiende a infinito. Entonces:

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, para este caso, la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente inestable.

6.6.2 Análisis de estabilidad para $r = -i$.

A continuación se realizará el análisis de estabilidad para el caso $r = -i$, entonces $B = 1$. Obsérvese que si $B = 1$ se está trabajando con el caso desenfocante $\sigma = -1$. Con $r = -i$ y $B = 1$ el polinomio (6.42) es:

$$\rho^3(-i)^2(1+1) + \rho^2[-2i(1-1) - 3i(1-i)] + \rho(1+1 + (1-i)(3+i)) - (1-i) = 0.$$

Simplificando el polinomio anterior resulta:


$$-2\rho^3 - 3\rho^2(i+1) + 2\rho(3-i) - (1-i) = 0. \quad (6.44)$$

El polinomio (6.44) es la relación de dispersión del sistema linealizado para el caso enfocante $D = B$, $r = -i$ y $B = 1$.

Para el polinomio (6.44) se realizó el cálculo de las raíces y el módulo de cada una de ellas utilizando el software “*Wolfram Mathematica 7 for Students*”, dando como resultado las siguientes raíces para ρ :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.774933 - 0.697304i, \text{ en donde } |\rho_1| = 1.04248, \\ \rho_2 &= -2.51979 - 0.718686i, \text{ en donde } |\rho_2| = 2.62027, \\ \rho_3 &= 0.244853 - 0.084010i, \text{ en donde } |\rho_3| = 0.25886.\end{aligned}$$

Nótese que los módulos de $\rho_{1,2,3}$ son los mismos que para el caso $r = i$ y $B = -1$, por lo tan-

 Raíces p.nb *

```
N[Solve[-2 p^3 - 3 p^2 (I + 1) + 2 p (3 - I) - (1 - I) == 0, p]]

{{p -> 0.774933 - 0.697304 i}, {p -> -2.51979 - 0.718686 i}, {p -> 0.244853 - 0.0840106 i}}

Abs[0.7749333770675464 - 0.6973038546933831 i]
1.04248

Abs[-2.5197866089392162 - 0.7186855759722559 i]
2.62027

Abs[0.24485323187166985 - 0.08401056933436057 i]
0.258865
```

Figura 6.3. Raíces de ρ y sus módulos.

to el análisis de estabilidad de las soluciones es totalmente análogo. Entonces, la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente inestable.

6.7 Relación de dispersión del sistema linealizado con $B = 0$

En la sección 6.1 se calculó la relación de dispersión del esquema LCN (6.10), la cual es:

$$i(r - 1) = (r + 1)B,$$

en donde B (6.11) es:

$$B = \mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2.$$

Para realizar el análisis de estabilidad de la solución $\bar{u}_m^n = A e^{i\delta m} r^n$ (6.6), se propuso una solución perturbada para LCN de la forma:

$$u_m^n = (\bar{u}_m^n + U_m^n) Z_m^n.$$

La solución u_m^n es una solución de la forma \bar{u}_m^n , pero con pequeñas perturbaciones introducidas en la amplitud y la fase.

Sustituyendo la solución perturbada u_m^n en el esquema LCN (6.5) se obtuvo la relación de dispersión (6.37) para el esquema LCN linealizado alrededor de la solución \bar{u}_m^n . Para calcular esta relación de dispersión se elige $\delta = 0$, por analogía a los capítulos anteriores en los cuales se comenzaba el análisis de estabilidad de soluciones con los casos $k = 0$, en el capítulo 4, y $\cos \delta = 1$ en el capítulo 5. Al tomar $\delta = 0$ en este capítulo el se obtuvieron los siguientes casos en los que se realizó el análisis de estabilidad: $\psi_0 = 0$, $\tilde{\phi}_0 = 0$, $D = 0$, $r = i$ y $r = -1$.

En esta sección se buscará calcular otra relación de dispersión para el esquema LCN linealizado, análoga a la relación de dispersión (6.37), pero ahora tomando $B = 0$ y $\delta \neq 2\pi n$, con $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior con la finalidad de encontrar nuevos casos para el análisis de estabilidad de las soluciones de la forma \bar{u}_m^n para el esquema LCN.

Se tiene que el esquema de Crank-Nicolson linealizado (6.4) es:

$$i \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2(\Delta x)^2} \right] - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{3|u_m^n|^2}{2} - \frac{|u_m^{n-1}|^2}{2} \right) (u_m^{n+1} + u_m^n).$$

La solución perturbada (6.16):

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n.$$

Se sustituye la solución perturbada (6.16) en la ecuación (6.5). Este procedimiento se realizó en la sección 6.2 de este capítulo, dando como resultado la expresión (6.25):

$$\begin{aligned} & i[(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} - (\epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n] = -\frac{\mu}{4} \left[(\epsilon \tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_{m+1}^{n+1}) \bar{u}_{m+1}^{n+1} - \right. \\ & 2(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_{m-1}^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1}) \bar{u}_{m-1}^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_{m+1}^n + i\epsilon \tilde{\phi}_{m+1}^n) \bar{u}_{m+1}^n \\ & \left. - 2(\epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n + (\epsilon \tilde{A}_{m-1}^n + i\epsilon \tilde{\phi}_{m-1}^n) \bar{u}_{m-1}^n \right] - \frac{\sigma \Delta t}{4} \left[2(3\epsilon \tilde{A}_m^n |\bar{u}_m^n|^2 - \epsilon \tilde{A}_m^{n-1} \right. \\ & \left. |\bar{u}_m^{n-1}|^2) (\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^n) + (3|\bar{u}_m^n|^2 - |\bar{u}_m^{n-1}|^2) [(\epsilon \tilde{A}_m^{n+1} + i\epsilon \tilde{\phi}_m^{n+1}) \bar{u}_m^{n+1} + (\epsilon \tilde{A}_m^n + \right. \\ & \left. i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n \right]. \end{aligned}$$

Con $B = 0$ en la relación de dispersión (6.12), se tiene que $r = 1$. Con $r = 1$ se modifica la solución \bar{u}_m^n , la cual queda de la siguiente manera:

$$\bar{u}_m^n = A e^{i\delta m} r^n = A e^{i\delta m}. \quad (6.45)$$

Para la solución (6.45) se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{u}_m^{n+1} &= \bar{u}_m^n, \\ \bar{u}_{m+1}^n &= e^{i\delta} \bar{u}_m^n. \end{aligned}$$

Se sustituyen las propiedades de (6.45) en la expresión (6.25), de este modo se obtendrán ecuaciones para \tilde{A}_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$, con lo cual posteriormente se podrá analizar la evolución de estas perturbaciones,

$$\begin{aligned} i[\epsilon(\tilde{A}_m^{n+1} + i\tilde{\phi}_m^{n+1} - \tilde{A}_m^n - i\tilde{\phi}_m^n)\bar{u}_m^n] = & -\frac{\mu}{4} \left[\epsilon(\tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\tilde{\phi}_{m+1}^{n+1})e^{i\delta} - 2\epsilon(\tilde{A}_m^{n+1} + i\tilde{\phi}_m^{n+1}) + \epsilon(\tilde{A}_{m-1}^{n+1} + \right. \\ & i\tilde{\phi}_{m-1}^{n+1})e^{-i\delta} + \epsilon(\tilde{A}_{m+1}^n + i\tilde{\phi}_{m+1}^n)e^{i\delta} - 2\epsilon(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n) + \epsilon(\tilde{A}_{m-1}^n + i\tilde{\phi}_{m-1}^n)e^{-i\delta} \left. \right] \bar{u}_m^n - \frac{\sigma\Delta t}{4} \left[2\epsilon(3\tilde{A}_m^n \right. \\ & \left. - \tilde{A}_m^{n-1})A^2(2) + \epsilon(3A^2 - A^2)(\tilde{A}_m^{n+1} + i\tilde{\phi}_m^{n+1} + \tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n) \right] \bar{u}_m^n. \end{aligned}$$

Dado que el factor \bar{u}_m^n se encuentra en ambos lados de la igualdad, se puede factorizar y eliminar de la expresión anterior. Además, por la identidad de Euler $e^{i\delta}$ se puede expresar como $\cos \delta + i \sin \delta$, con lo cual la expresión anterior quedaría como sigue:

$$\begin{aligned} i[\epsilon(\tilde{A}_m^{n+1} + i\tilde{\phi}_m^{n+1} - \tilde{A}_m^n - i\tilde{\phi}_m^n)] = & -\frac{\mu}{4} \left[\epsilon(\tilde{A}_{m+1}^{n+1} + i\tilde{\phi}_{m+1}^{n+1})(\cos \delta + i \sin \delta) - 2\epsilon(\tilde{A}_m^{n+1} + i\tilde{\phi}_m^{n+1}) + \right. \\ & \epsilon(\tilde{A}_{m-1}^{n+1} + i\tilde{\phi}_{m-1}^{n+1})(\cos \delta - i \sin \delta) + \epsilon(\tilde{A}_{m+1}^n + i\tilde{\phi}_{m+1}^n)(\cos \delta + i \sin \delta) - 2\epsilon(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n) + \epsilon(\tilde{A}_{m-1}^n + \\ & \left. i\tilde{\phi}_{m-1}^n)(\cos \delta - i \sin \delta) \right] - \frac{\sigma\Delta t}{4} \left[4\epsilon(3\tilde{A}_m^n - \tilde{A}_m^{n-1})A^2 + 2A^2\epsilon(\tilde{A}_m^{n+1} + i\tilde{\phi}_m^{n+1} + \tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n) \right]. \end{aligned}$$

Se separa la expresión anterior en parte real y parte imaginaria, para posteriormente poder con ellas construir un sistema de ecuaciones. La parte imaginaria es:

$$\begin{aligned} i\epsilon[\tilde{A}_m^{n+1} - \tilde{A}_m^n] = & -\frac{i\mu\epsilon}{4} \left[(\tilde{A}_{m+1}^{n+1} \sin \delta + \tilde{\phi}_{m+1}^{n+1} \cos \delta) - 2\tilde{\phi}_m^{n+1} + (-\tilde{A}_{m-1}^{n+1} \sin \delta + \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1} \cos \delta) + \right. \\ & \left. (\tilde{A}_{m+1}^n \sin \delta + \tilde{\phi}_{m+1}^n \cos \delta) - 2\tilde{\phi}_m^n + (-\tilde{A}_{m-1}^n \sin \delta + \tilde{\phi}_{m-1}^n \cos \delta) \right] - \quad (6.46) \\ & \frac{\sigma\Delta t i}{4} A^2 \epsilon \left[2(\tilde{\phi}_m^{n+1} + \tilde{\phi}_m^n) \right]. \end{aligned}$$

La parte real es:

$$\begin{aligned} -\epsilon[\tilde{\phi}_m^{n+1} - \tilde{\phi}_m^n] = & -\frac{\mu\epsilon}{4} \left[(\tilde{A}_{m+1}^{n+1} \cos \delta - \tilde{\phi}_{m+1}^{n+1} \sin \delta) - 2\tilde{A}_m^{n+1} + (\tilde{A}_{m-1}^{n+1} \cos \delta + \tilde{\phi}_{m-1}^{n+1} \sin \delta) + \right. \\ & \left. (\tilde{A}_{m+1}^n \cos \delta - \tilde{\phi}_{m+1}^n \sin \delta) - 2\tilde{A}_m^n + (\tilde{A}_{m-1}^n \cos \delta + \tilde{\phi}_{m-1}^n \sin \delta) \right] - \quad (6.47) \\ & \frac{\sigma\Delta t}{4} A^2 \epsilon \left[4(3\tilde{A}_m^n - \tilde{A}_m^{n-1}) + 2(\tilde{A}_m^{n+1} + \tilde{A}_m^n) \right]. \end{aligned}$$

Supóngase que las soluciones (6.28) y (6.29), definidas anteriormente, satisfacen las ecuaciones (6.46) y (6.47). Las soluciones (6.28) y (6.29) son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m^n &= \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n, \\ \tilde{\phi}_m^n &= \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n, \end{aligned}$$

para las cuales ψ_0 y $\tilde{\phi}_0$ son constantes reales, $\varphi = \kappa\Delta x$ y $\rho = e^{-i\Omega\Delta t}$, en donde κ es real y Ω puede ser real o imaginaria. Las soluciones (6.28) y (6.29) tienen las siguientes propiedades:

$$\tilde{A}_m^{n+1} = \rho \tilde{A}_m^n,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_m^{n+1} &= \rho \tilde{\phi}_m^n, \\ \tilde{A}_{m+1}^n &= e^{i\varphi} \tilde{A}_m^n, \\ \tilde{\phi}_{m+1}^n &= e^{i\varphi} \tilde{\phi}_m^n.\end{aligned}$$

Se sustituyen las soluciones (6.28) y (6.29) y sus cuatro propiedades en las ecuaciones (6.46) y (6.47). Sustituyendo las soluciones en (6.46) resulta:

$$\begin{aligned}(\rho - 1)\tilde{A}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[(\rho e^{i\varphi} \tilde{A}_m^n \sin \delta + \rho e^{i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \cos \delta) - 2\rho \tilde{\phi}_m^n + (-\rho e^{-i\varphi} \tilde{A}_m^n \sin \delta + \rho e^{-i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \cos \delta) + \right. \\ &\quad \left. (e^{i\varphi} \tilde{A}_m^n \sin \delta + e^{i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \cos \delta) - 2\tilde{\phi}_m^n + (-e^{-i\varphi} \tilde{A}_m^n \sin \delta + e^{-i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \cos \delta) \right] - \\ &\quad \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2 (\rho + 1) \tilde{\phi}_m^n.\end{aligned}$$

Factorizando los términos \tilde{A}_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$ en la expresión anterior, lo que resulta:

$$\begin{aligned}(\rho - 1)\tilde{A}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[(\tilde{A}_m^n \sin \delta (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) (\rho + 1) + \tilde{\phi}_m^n \cos \delta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) (\rho + 1)) - 2\tilde{\phi}_m^n (\rho + 1) \right] - \\ &\quad \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2 (\rho + 1) \tilde{\phi}_m^n.\end{aligned}\tag{6.48}$$

Sustituyendo las soluciones (6.28) y (6.29) y sus cuatro propiedades en la ecuación (6.47) resulta:

$$\begin{aligned}-(\rho - 1)\tilde{\phi}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[(\rho e^{i\varphi} \tilde{A}_m^n \cos \delta - \rho e^{i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \sin \delta) - 2\rho \tilde{A}_m^n + (\rho e^{-i\varphi} \tilde{A}_m^n \cos \delta + \rho e^{-i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \sin \delta) + \right. \\ &\quad \left. (e^{i\varphi} \tilde{A}_m^n \cos \delta - e^{i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \sin \delta) - 2\tilde{A}_m^n + (e^{-i\varphi} \tilde{A}_m^n \cos \delta + e^{-i\varphi} \tilde{\phi}_m^n \sin \delta) \right] - \\ &\quad \frac{\sigma \Delta t}{4} A^2 \left[4 \left(3 - \frac{1}{\rho} \right) \tilde{A}_m^n + 2(\rho + 1) \tilde{A}_m^n \right].\end{aligned}$$

Igualmente se factorizan los términos \tilde{A}_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}-(\rho - 1)\tilde{\phi}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[(\tilde{A}_m^n \cos \delta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) (\rho + 1) + \tilde{\phi}_m^n \sin \delta (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) (\rho + 1)) - 2\tilde{A}_m^n (\rho + 1) \right] - \\ &\quad \frac{\sigma \Delta t}{4} A^2 \left[4 \left(3 - \frac{1}{\rho} \right) + 2(\rho + 1) \right] \tilde{A}_m^n.\end{aligned}\tag{6.49}$$

También por la identidad de Euler se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación (6.48) resulta:

$$\begin{aligned}(\rho - 1)\tilde{A}_m^n &= -\frac{\mu}{4} \left[\tilde{A}_m^n (\rho + 1) 2i \sin \delta \sin \varphi + \tilde{\phi}_m^n (\rho + 1) 2 \cos \delta \cos \varphi - 2\tilde{\phi}_m^n (\rho + 1) \right] - \\ &\quad \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2 (\rho + 1) \tilde{\phi}_m^n.\end{aligned}\tag{6.50}$$

De igual manera, se sustituyen las igualdades en la ecuación (6.49):

$$-(\rho - 1)\tilde{\phi}_m^n = -\frac{\mu}{4}\left[\tilde{A}_m^n(\rho + 1)2\cos\delta\cos\varphi + \tilde{\phi}_m^n(\rho + 1)2i\sin\delta(-\sin\varphi) - 2\tilde{A}_m^n(\rho + 1)\right] - \frac{\sigma\Delta t}{4}A^2\left[4\left(3 - \frac{1}{\rho}\right) + 2(\rho + 1)\right]\tilde{A}_m^n. \quad (6.51)$$

En la ecuación(6.50) se agrupan los factores \tilde{A}_m^n de el lado izquierdo de la igualdad:

$$\tilde{A}_m^n\left[(\rho - 1) + i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)\sin\delta\sin\varphi\right] = \tilde{\phi}_m^n(\rho + 1)\left[-\frac{\mu}{2}(\cos\delta\cos\varphi - 1) - \frac{\sigma\Delta t}{2}A^2\right]. \quad (6.52)$$

Análogamente en la ecuación (6.51) los factores $\tilde{\phi}_m^n$ se agrupan de el lado izquierdo de la igualdad:

$$\tilde{\phi}_m^n\left[-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)\sin\delta\sin\varphi\right] = \tilde{A}_m^n(\rho + 1)\left[-\frac{\mu}{2}(\cos\delta\cos\varphi - 1) - \frac{\sigma\Delta t}{2}A^2\right] - \sigma\Delta tA^2\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)\tilde{A}_m^n. \quad (6.53)$$

Recuérdese que $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi m} \rho^n$ y $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi m} \rho^n$, al sustituir \tilde{A}_m^n y $\tilde{\phi}_m^n$ en las ecuaciones (6.52) y (6.53) se genera el siguiente par de ecuaciones:

$$\left[(\rho - 1) + i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)\sin\delta\sin\varphi\right]\psi_0 = \left[-\frac{\mu}{2}(\cos\delta\cos\varphi - 1) - \frac{\sigma\Delta t}{2}A^2\right](\rho + 1)\tilde{\phi}_0, \quad (6.54)$$

$$\left[-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)\sin\delta\sin\varphi\right]\tilde{\phi}_0 = \left[-\frac{\mu}{2}(\cos\delta\cos\varphi - 1) - \frac{\sigma\Delta t}{2}A^2\right](\rho + 1)\psi_0 - \sigma\Delta tA^2\left(3 - \frac{1}{\rho}\right)\psi_0. \quad (6.55)$$

Se escriben las ecuaciones (6.54) y (6.55) como un sistema de ecuaciones de forma matricial. Para facilitar la escritura y lectura del sistema, se introducen tres nuevas variables; sea $G = \cos\delta\cos\varphi$, $H = \sin\delta\sin\varphi$ y $J = \frac{\sigma\Delta t}{2}A^2$. El sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} (\rho - 1) + i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H \\ i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \left[-\frac{\mu}{2}(G - 1) - J\right](\rho + 1) \\ \left[\frac{\mu}{2}(G - 1) + J\right](\rho + 1) + 2J\left(3 - \frac{3}{\rho}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix}.$$

Igualando a cero el sistema anterior se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \left(-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H\right) & \left[-\frac{\mu}{2}(G - 1) - J\right](\rho + 1) \\ \left[\frac{\mu}{2}(G - 1) + J\right](\rho + 1) + 2J\left(3 - \frac{1}{\rho}\right) & \left(-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema anterior tiene una solución no trivial cuando se satisface lo siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} \left(-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H \right) & \left[-\frac{\mu}{2}(G - 1) - J \right](\rho + 1) \\ \left[\frac{\mu}{2}(G - 1) + J \right](\rho + 1) + 2J\left(3 - \frac{1}{\rho}\right) & \left(-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H \right) \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, cuando se cumple que:

$$\left(-(\rho - 1) - i\frac{\mu}{2}(\rho + 1)H \right)^2 - \left(\left[-\frac{\mu}{2}(G - 1) - J \right](\rho + 1) \right) \left(\left[\frac{\mu}{2}(G - 1) + J \right](\rho + 1) + 2J\left(3 - \frac{1}{\rho}\right) \right) = 0.$$

Realizando las operaciones en la ecuación anterior y agrupando los términos en potencias de ρ se obtiene:

$$\begin{aligned} & \rho^2 \left(1 + J^2 + i\mu H - \frac{\mu^2}{4}H^2 + \frac{\mu^2}{4}G^2 - \frac{\mu^2}{2}G + \frac{\mu^2}{4} + \mu GJ - \mu J + \right) + \rho \left(-2 - \frac{\mu^2}{2}H^2 + \frac{\mu^2}{2}G^2 - \mu^2 G + \right. \\ & \left. \frac{\mu^2}{2} + 2\mu GJ - 2\mu J + 2J^2 - 3\mu GJ + 3\mu J - 6J^2 \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu GJ - \mu J + 2J^2 \right) + \left(1 - i\mu H - \frac{\mu^2}{4}H^2 + \right. \\ & \left. \frac{\mu^2}{4}G^2 - \frac{\mu^2}{2}G + \frac{\mu^2}{4} + \mu GJ - \mu J + J^2 - 2\mu GJ + 2\mu J - 4J^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

La expresión anterior no tiene estructura de polinomio. Se multiplica la expresión anterior por ρ , para así obtener el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} & \rho^3 \left(1 + J^2 + \mu(iH + J(G - 1)) + \frac{\mu^2}{4}((G - 1)^2 - H^2) \right) + \rho^2 \left(-2(2J^2 + 1) + \mu(J(1 - G)) + \right. \\ & \left. \frac{\mu^2}{2}((G - 1)^2 - H^2) \right) + \rho \left(1 - 3J^2 + \mu(-iH + J(1 - G)) + \frac{\mu^2}{4}((G - 1)^2 - H^2) \right) + \\ & \left(2J^2 + \mu J(G - 1) \right) = 0. \end{aligned} \tag{6.56}$$

En el que $G = \cos \delta \cos \varphi$, $H = \sin \delta \sin \varphi$ y $J = \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2$.

Supóngase que el término independiente del polinomio (6.56) es cero,

$$2J^2 + \mu J(G - 1) = 0, \tag{6.57}$$

$$J(2J + \mu(G - 1)) = 0. \tag{6.58}$$

Es decir, J es cero o $2J + \mu(G - 1)$ es igual a cero. Dado que J es:

$$J = \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2,$$

donde $\sigma = \pm 1$, Δt y A son distintos de cero, entonces J es distinto de cero, por lo cual $2J + \mu(G - 1) = 0$. Anteriormente se definió $G = \cos \delta \cos \varphi$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 2J + \mu(G - 1) &= 0, \\ \mu(G - 1) &= -2J, \\ \mu(\cos \delta \cos \varphi - 1) &= -2\frac{\sigma \Delta t}{2} A^2. \end{aligned}$$

Lo que genera la siguiente expresión:

$$\mu(\cos \delta \cos \varphi - 1) = -\sigma \Delta t A^2. \quad (6.59)$$

Obsérvese que:

$$-2 \leq (\cos \delta \cos \varphi) - 1 \leq 0.$$

Es decir, $\cos \delta \cos \varphi - 1$ es negativo o cero, considérese el caso en que es negativo. Dado que

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2},$$

en donde Δx y Δt son positivos, entonces el lado izquierdo de (6.59) es negativo. Por otra parte, el lado derecho de esa ecuación es $-\sigma \Delta t A^2$, con $\sigma = \pm 1$. Para que se satisfaga la igualdad (6.59) es necesario que $\sigma = 1$, por lo tanto el caso $\sigma = -1$ no puede ser considerado. En conclusión, para el caso enfocante $\sigma = 1$ en el que se satisface (6.59) se tiene:

$$\mu(\cos \delta \cos \varphi - 1) = -\Delta t A^2 = -2J. \quad (6.60)$$

y el término constante del polinomio (6.56) es cero.

Recapitulando, el término independiente del polinomio (6.56) es cero cuando $\sigma = 1$ y se satisface (6.60). Por lo tanto se puede factorizar ρ en todos los términos del polinomio, y queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\rho \left(\rho^2 \left(1 + J^2 + \mu(iH + J(G - 1)) + \frac{\mu^2}{4} ((G - 1)^2 - H^2) \right) + \rho \left(-2(2J^2 + 1) + \mu(J(1 - G)) + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\mu^2}{2} ((G - 1)^2 - H^2) \right) + \left(1 - 3J^2 + \mu(-iH + J(1 - G)) + \frac{\mu^2}{4} ((G - 1)^2 - H^2) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.61)$$

El polinomio (6.61) tiene una raíz $\rho = 0$. Para encontrar las otras dos raíces hay que resolver el siguiente polinomio de segundo grado:

$$\begin{aligned} &\rho^2 \left(1 + J^2 + i\mu H + J\mu(G - 1) + \frac{\mu^2}{4} (G - 1)^2 - \frac{\mu^2}{4} H^2 \right) + \rho \left(-4J^2 - 2 + \mu(J(1 - G)) + \right. \\ &\left. \frac{\mu^2}{2} (G - 1)^2 - \frac{\mu^2}{2} H^2 \right) + \left(1 - 3J^2 - i\mu H + J\mu(1 - G) + \frac{\mu^2}{4} (G - 1)^2 - \frac{\mu^2}{4} H^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Una de las condiciones para que el término independiente de (6.56) sea cero es:

$$\mu(\cos \delta \cos \varphi - 1) = -2J.$$

Sustituyendo esto en el polinomio (6.62) se obtiene:

$$\rho^2 \left(1 + J^2 + i\mu H - 2J^2 + \frac{1}{4}4J^2 - \frac{\mu^2}{4}H^2 \right) + \rho \left(-4J^2 - 2 + 2J^2 + \frac{1}{2}4J^2 - \frac{\mu^2}{2}H^2 \right) + \left(1 - 3J^2 - i\mu H + 2J^2 + \frac{1}{4}4J^2 - \frac{\mu^2}{4}H^2 \right) = 0.$$

El polinomio que resulta es:

$$\rho^2 \left(1 + i\mu H - \frac{\mu^2}{4}H^2 \right) - 2\rho \left(1 + \frac{\mu^2}{2}H^2 \right) + \left(1 - i\mu H - \frac{\mu^2}{4}H^2 \right) = 0. \quad (6.63)$$

Luego, se factorizan los coeficientes del polinomio (6.63) como sigue:

- $\left(1 + i\mu H - \frac{\mu^2}{4}H^2 \right) - 2\rho \left(1 + \frac{\mu^2}{2}H^2 \right) = \left(1 + \frac{i\mu}{2}H \right)^2,$
- $\left(1 + \frac{\mu^2}{2}H^2 \right) = \left(1 + \frac{i\mu}{2}H \right) \left(1 - \frac{i\mu}{2}H \right),$
- $\left(1 - i\mu H - \frac{\mu^2}{4}H^2 \right) - 2\rho \left(1 + \frac{\mu^2}{2}H^2 \right) = \left(1 - \frac{i\mu}{2}H \right)^2.$

Sea $e = 1 + \frac{i\mu}{2}H$, y e' el complejo conjugado de e . Sustituyendo e y e' en el polinomio (6.63) resulta:

$$\rho^2 e^2 - 2\rho e e' + (e')^2 = 0. \quad (6.64)$$

El polinomio (6.64) tiene dos raíces repetidas de la forma:

$$\rho_{1,2} = \frac{1 - \frac{i\mu}{2}H}{1 + \frac{i\mu}{2}H} = \frac{e'}{e}. \quad (6.65)$$

De lo anterior se puede observar que los módulos de ρ_1 y ρ_2 son:

$$|\rho_{1,2}| = 1.$$

La solución perturbada (6.16) es:

$$u_m^n = (1 + \epsilon \tilde{A}_m^n + i\epsilon \tilde{\phi}_m^n) \bar{u}_m^n,$$

para la cual $\tilde{A}_m^n = \psi_0 e^{i\varphi_m} \rho^n$ y $\tilde{\phi}_m^n = \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi_m} \rho^n$, ψ_0 y $\tilde{\phi}_0$ son constantes y $\rho = e^{-i\Omega\Delta t}$.

Para este caso se tienen soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(1,2,3)m}^n &= \psi_0 e^{i\varphi_m} \rho_{1,2,3}^n, \\ \tilde{\phi}_{(1,2,3)m}^n &= \tilde{\phi}_0 e^{i\varphi_m} \rho_{1,2,3}^n. \end{aligned}$$

Los tres módulos de ρ son:

- $|\rho|_1 = 0$

- $|\rho|_2 = 1$
- $|\rho|_3 = 1$

De acuerdo a lo establecido anteriormente en la sección 6.3, si se eligen ρ_1 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{1m}^n y $\tilde{\phi}_{1m}^n$, resulta que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente asintóticamente estable. Si se eligen ρ_2 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{2m}^n y $\tilde{\phi}_{2m}^n$, se tiene que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable. Si se toman ρ_3 y sus correspondientes soluciones \tilde{A}_{3m}^n y $\tilde{\phi}_{3m}^n$, también resulta que la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable.

Considérense las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m^n &= c_1 \tilde{A}_{1m}^n + c_2 \tilde{A}_{2m}^n + c_3 \tilde{A}_{3m}^n, \\ \tilde{\phi}_m^n &= c_4 \tilde{\phi}_{1m}^n + c_5 \tilde{\phi}_{2m}^n + c_6 \tilde{\phi}_{3m}^n,\end{aligned}$$

en donde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 y c_6 son constantes.

El comportamiento de $\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max}$ cuando n tiende a infinito es la superposición de los comportamientos de $\|(\tilde{A}_{1m}^n + i\tilde{\phi}_{1m}^n)\|_{\max}$, $\|(\tilde{A}_{2m}^n + i\tilde{\phi}_{2m}^n)\|_{\max}$ y $\|(\tilde{A}_{3m}^n + i\tilde{\phi}_{3m}^n)\|_{\max}$ cuando n tiende a infinito. Entonces,

$$\|(\tilde{A}_m^n + i\tilde{\phi}_m^n)\|_{\max} \rightarrow K \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

donde $K = \sqrt{\psi_0^2 + \tilde{\phi}_0^2}$.

Por lo tanto, para este caso, la solución \bar{u}_m^n es modulacionalmente estable.

6.8 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se realizó el análisis de estabilidad de las soluciones de tipo onda plana para el esquema Crank-Nicolson linealizado, tomando en cuenta diferentes casos y subcasos. A manera de resumen se presenta la siguiente tabla de resultados.

Perturbación	Casos		Tipo de Onda
Amplitud y Fase	$\delta = 0, B \neq 0$	$\psi_0 = 0$ y $\sigma = \pm 1$	Estable
		$\tilde{\phi}_0 = 0$ y $\sigma = \pm 1$	Estable
		$D = 0$ y $\sigma = 1$	Estable
		$r = i, B = -1$ y $\sigma = 1$	Inestable
		$r = -i, B = 1$ y $\sigma = -1$	Inestable
	$B = 0$	$\mu(\cos \delta \cos \varphi - 1) = -2J$ y $\sigma = 1$	Estable

Tabla 6.1. Análisis de Estabilidad para el esquema CNL.

El análisis de estabilidad de soluciones se realizó perturbando la amplitud y la fase en la solución de tipo onda plana $\bar{u}_m^n = Ae^{i(kx_m - \omega t^n)}$. Para el caso en el cual $\delta = 0$ y $B \neq 0$, $B = \mu \sin^2(\delta/2) - \frac{\sigma \Delta t}{2} A^2$, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Cuando las condiciones iniciales ψ_0 o $\tilde{\phi}_0$ son cero, se tiene que la solución \bar{u}_m^n es estable, sin importar si σ es uno o menos uno.
- Cuando D es igual a cero, necesariamente σ tiene que ser igual a uno; bajo estas condiciones, la solución \bar{u}_m^n es estable.
- Si $r = i, B = -1$ y $\sigma = 1$, entonces la solución \bar{u}_m^n es inestable.
- Si $r = -i, B = 1$ y $\sigma = -1$, se tiene que la solución \bar{u}_m^n es inestable.

En el caso en el cual $B = 0$ se hizo el análisis de estabilidad para un subcaso, en el cual $\mu(\cos \delta \cos \varphi - 1) = -2J$. Bajo estas condiciones se obtuvo que la solución \bar{u}_m^n es estable.

Nótese que de los casos analizados, sólo se encontró inestabilidad modulacional en los que: $r = i, B = -1$ y $\sigma = 1$; $r = -i, B = 1$ y $\sigma = -1$. Los otros casos analizados son estables modulacionalmente. El análisis aquí realizado no contempla el caso en el cual el término independiente del polinomio (6.56) es distinto de cero. La complejidad del dicho polinomio hizo que no fuera posible encontrar sus raíces para el caso mencionado.

Al relacionar la información de este capítulo con los paquetes de ondas, se concluye que una envolvente que contiene soluciones de la forma \bar{u}_m^n se romperá en algún tiempo t positivo cuando alguna de las soluciones presenta un tipo de perturbación en amplitud y fase, y la perturbación entra en los parámetros de inestabilidad modulacional.

Conclusiones Finales

En este trabajo de tesis se abordó el tema de estabilidad e inestabilidad modulacionales de las soluciones de tipo onda plana para las ecuaciones no lineales de Schrödinger continua (NLS) y discreta (DNLS). En este trabajo se buscó encontrar una extensión de lo ya estudiado por otros investigadores, lo cual genera satisfacción al saber que siempre se pueden aportar ideas a futuras generaciones interesadas en temas afines.

La estabilidad modulacional es sólo un tipo de estabilidad de soluciones de EDP. Existen diferentes tipos de estabilidad, y para saber a cuál estabilidad se está refiriendo, se tiene que especificar en qué espacio están definidas dichas soluciones y así elegir una norma apropiada, y con esto ya se puede especificar el tipo de estabilidad con la cual se estará trabajando. La norma que se utilizó en el trabajo de tesis fue la norma del máximo, razón por la cual la estabilidad de esta tesis es modulacional. Finalmente, es importante señalar que si se elige soluciones definidas en otros espacios y sus normas asociadas, es posible definir otros tipos de estabilidad, además, si se tiene una solución estable para alguna norma definida, no necesariamente esta misma solución tiene que ser estable para otra norma. A continuación y modo de conclusión un breve repaso del presente trabajo de tesis.

En los primeros dos capítulos se plantearon los antecedentes y se explicaron conceptos importantes para el resto del trabajo, abordando los temas de transformada de Fourier y ondas dispersivas, así como la relación que existe entre ellos.

En el capítulo 3 se trataron los conceptos de estabilidad e inestabilidad modulacionales, haciendo una analogía entre la estabilidad de los puntos de equilibrio en ecuaciones diferenciales ordinarias, y las soluciones de tipo onda plana para la ecuación NLS. Además, se definió el criterio bajo el cual una solución de tipo onda plana para la ecuación NLS es estable o inestable modulacionalmente. Este criterio también aplica para los casos discretos.

El tema principal de esta tesis se centró en los capítulos 4, 5 y 6, respectivamente. En ellos se realizaron los análisis de estabilidad e inestabilidad modulacionales de las soluciones para las ecuaciones no lineales de Schrödinger continua y discreta; en el caso discreto se trabajó con la *lattice* de Ablowitz-Ladik, la ecuación DNLS y el esquema Crank-Nicolson linealizado.

Al comparar los resultados obtenidos entre los capítulos 4 y 5, se concluyó que aunque en esencia

se trabajó con la misma ecuación, en los casos en los que se presenta estabilidad modulacional en las soluciones para la NLS, no se repite el mismo comportamiento de estabilidad para las soluciones de la ecuación DNLS. Lo anterior se puede observar al contrastar las tablas de resultados que se encuentran al final de cada capítulo.

La observación que se hace en el párrafo anterior es importante porque confirma lo explicado en la referencia [Kivshar & Peyrard], en la cual se menciona que en algunos modelos continuos es importante analizar las versiones discretas que éste llegara a tener, ya que en varios esquemas no lineales discretos pueden manifestarse efectos de inestabilidad modulacional, los cuales a veces no existen en el modelo continuo.

En el capítulo 6 se siguió un procedimiento similar para realizar el análisis de estabilidad que se realizó en los capítulos 4 y 5, debido a las características del esquema Crank-Nicolson. En particular esto se debió a la forma de la relación de dispersión del sistema linealizado alrededor de la solución \bar{u}_m^n , la cual es un polinomio de tercer grado. Lo anterior motivó el uso de otras herramientas para poder estimar los valores de las raíces de dicho polinomio, que son las que indican si la solución \bar{u}_m^n es estable o inestable. El caso en el que no se determinó estabilidad o inestabilidad modulacional puede ser resuelto en una investigación futura.

Es importante destacar que los resultados obtenidos en el capítulo 6 son un aporte a la literatura en el área de estabilidad modulacional para el esquema de Crank-Nicolson linealizado. Al momento de realizar este trabajo de tesis no se encontraron referencias sobre este tema, en las cuales se expusieran resultados similares realizados con el proceso que aquí se expuso. Además, se destaca que las referencias relacionadas al esquema de Crank-Nicolson linealizado son escasas en comparación con las referencias que existen para las ecuaciones NLS continua y discreta, en el área de inestabilidad modulacional.

Finalmente, es importante señalar que se logró el objetivo de presentar un trabajo autocontenido, para el cual se dieron las definiciones de estabilidad e inestabilidad modulacionales, se trabajó con distintas versiones de la ecuación no lineal de Schrödinger, se mostró una variedad de ejemplos, casos y subcasos, y se describieron, en la medida de lo posible, los pasos a seguir para obtener los resultados mostrados.

A

Apéndice

A.1 Análisis

- **Convergencia Uniforme:** Sea $f_k : A \rightarrow N$ una sucesión de funciones con la propiedad de que para cada $\epsilon > 0$ existe un entero L tal que $k \geq L$ implica que $\rho(f_k(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in A$. En donde ρ es la métrica en N . Bajo estas condiciones decimos que f_k converge uniformemente a f en A .

- **Función periódica:** Sea $f(t)$ una función definida para toda t . Se dice que $f(t)$ es una función periódica si existe un $p > 0$ tal que para toda t se satisface,

$$f(t + p) = f(t).$$

- **Función continua a trozos:** Una función $f(t)$ es continua a trozos en un intervalo $a \leq t \leq b$ si $f(t)$ está definida en ese intervalo y es tal que el intervalo puede subdividirse en un número finito de intervalos, en cada uno de los cuales $f(t)$ es continua y tiene límites finitos cuando t tiende desde el interior a cualquiera de los puntos extremos del intervalo de subdivisión.
- **Serie Trigonométrica:** Una serie trigonométrica es una serie de la forma,

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

donde $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots$ son constantes reales y reciben el nombre de coeficientes de la serie. Usando el signo de sumatoria esta serie también puede escribirse de la siguiente forma,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

- **Teorema de Riemman-Lebesgue:** Supongamos que f es una función acotada y Riemman integrable en $[a, b]$. Entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\alpha x) dx = 0,$$

donde α es cualquier constante real mayor que cero.

Referencias

- [Agrawal] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Elsevier (2007)
- [Alfimov] G.L. Alfimov, V.A. Brazhnyi and V.V. Konotop. *On Classification of intrinsic localized modes for the discrete Nonlinear Schrödinger Equation* Elsevier, Physica D 194, páginas 127-150 (2004)
- [Alzate] Héctor Alzate López *Física de las Ondas* Universidad de Antioquia, (2007)
- [Anishchenko] Vadim S. Anishchenko, Tatyana E. Vadivasova, Galina I. Strelkova *Deterministic Nonlinear Systems A Short Course* Springer International Publishing Switzerland (2014), páginas 23-24.
- [Baldock & Bridgeman] G.R. Baldock, T. Bridgeman *The Mathematical Theory of Wave Motion*. Ellis Horwood, 1981.
- [Belmonte] Juan Gabriel Belmonte Beitia *Ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad espacialmente inhomogénea*. PhD. Universidad de Castilla La Mancha, 2008.
- [Cebeci] Tuncer Cebeci, Jian Shao, Fassy Kafyeke and Eric Laurendeau. *Computational Fluid Dynamics for Enginners* Horizons Publishing Inc., (2005)
- [Chang] Quianshun Chang, Erhui Jia and W. Sun. *Difference Schemes for Solving the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation* Journal of Computational Physics 148, páginas 397-415 (1999)
- [Chiang & Alberto] Hsiao-Dong Chiang, Luis F. C. Albeto. *Stability Regions of Nolinear Dynamical Systems: Theory, Estimations and Applications* Cambridge University Press (2015) páginas 389-391.
- [Courant-John] Richard Courant, Fritz Jonh. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol.2* Limusa Noriega Editores (1999)
- [Crawford] Frank S. Crawford *Waves* Education Development Center, Inc, 1965.
- [Fitzpatrick] Richard Fitzpatrick *Oscillations and Waves* Professor of Physics The University of Texas at Austin
- [Flaschka] Herman Flaschka *Principles of Analysis* University of Arizona
- [Hirsch & Smale] Morris W. Hirsch, Stephen Smale. *Ecuaciones diferenciales sistemas dinámicos y álgebra lineal* Alianza Editorial

-
- [Hasegawa & Tomita] Tai A. Hasegawa, A. Tomita. *Observation of Modnlational Instability in Optical Fibers* Physics Review Letters Vol. 56, Num 2, pp 135-38(1986)
- [Kevrekidis] Panayotis G.Kevrekidis *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009)
- [Kivshar] Yuri S. Kivshar *Localized Modes in a Chain with Nonlinear on-site Potential* Physics Letters A, 177, páginas 172-178 num 4, (1993)
- [Kivshar & Peyrard] Yuri S. Kivshar, Michel Peyrard *Modulational Instabilities in the Discrete Lattices* Physics Review A, 177, vol 46, num 4, (1992)
- [Kivshar & Salerno] Yuri S. Kivshar and Mario Salerno *Modulational Instabilities in the Discrete Deformable Nonlinear Schrödinger Equation* Physical Review E, 49, num 4, (1994)
- [Kreyszig] Erwin Kreyszig *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería II*. Limusa Wiley, Inc. (2008), pp 57-79
- [Lafortune] Stéphane Lafortune *Stability properties of light propagating in fiber optics* College of Charleston faculty grant, Summer 2008. Disponible en: <http://lafortunes.people.cofc.edu/>
- [Lieb-Loss] Elliot H. Lieb, Michael Loss *Analysis* Graduate Studies in Mathematics, Second Edition, Vol.14, (2001)
- [Marsden] Jerrold Marsden *Elementary Classical Analysis* W.H. Freeman and Company
- [Miller] Peter Miller *Macroscopic Behavior in the Ablowitz-Ladik Equations* Preprint of an article appearing in Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems NEEDS, World Scientific, (1995)
- [Sandstede] Björn Sandstede *Handbook of Dynamical Systems, VOLUME 2* ELSEVIER SCIENCE B.V, pages 983-990 (2002)
- [Sommerfeld] Arnold Sommerfeld *Pure and Applied Mathematics, VOLUME 1* ACADEMIC PRESS INC., PUBLISHERS
- [Scott] Alwin. Scott *Encyclopedia of Nonlienear Science*. Taylor and Francis Group (2005)
- [Strikwerda] John C. Strikwerda *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia SIAM (2004)
- [Sulem & Sulem] Catherine Sulem, Pierre-Louis Sulem *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-focusing and wave colapse* Springer-Verlang New York, Inc. (1999), pp 6
- [Weinberger] Hans.F. Weinberger. *A first course in Partial Differential Equations with complex variables and transform methods*. Dover Publications, Inc. (1995), pp 298-345
- [Whitham] G.B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley and Sons, (1974), pp 363-390
- [Yuen & Lake] Henry Yuen, Bruce Lake *Instabilities of Waves on Deep Water* Ann. Rev. Fluid Mechanics 1980. 12:303-34
-

-
- [Zakharov] V.E Zakharov and L.A. Ostrovsky *Modulational Instability: The Beginning* Elsevier, Physica D 238, pages 540-548 (2009)
- [Kridnix] kridnix *3.4 Plane Waves* Video de YouTube minuto 8:04, 30-Marzo-2013, <https://www.youtube.com/watch?v=xkG86pwaOH0>
- [Cazanave y Lions] T. Cazenave P. L. Lions. *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*. Communications in Mathematical Physics.
- [Vuslaeb y Perelman] B.S. Vuslaeb, G. S. Perelman *On the Stability of Solitary Waves for Nonlinear Schrödinger Equations*. American Mathematical Society Translations.
- [Bronski, Carr, Deconinck y Kutz] Jared C. Bronski, Lincoln D. Carr, Bernard Deconinck, and J. Nathan Kutz. *Bose-Einstein Condensates in Standing Waves: The Cubic Nonlinear Schrödinger Equation with a Periodic Potential*. Phys. Rev. Lett. 86, 1402.
- [Terrones, McLaughlin, Overman y Pearlstein] Guillermo Terrones, David W. McLaughlin, Edward A. Overman, and Arne J. Pearlstein. *Stability and Bifurcation of Spatially Coherent Solutions of the Damped-Driven NLS Equation*. SIAM J. Appl. Math., 50(3), 791818. (28 pages).
- [Weinstein] Michael I. Weinstein. *Modulational Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations**. SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 16, No. 3, May (1985).
- [Mizumachi y Pelinovsky] Tetsu Mizumachi, Dmitry Pelinovsky. *Backlund transformation and L^2 -stability of NLS solitons*. International Mathematics Research Notices, 2012, vol. 2012, no 9, p. 2034-2067.
- [Kapitula y Sanstade 1] Todd Kapitula and Björn Sandstede. *Edge Bifurcations for Near Integrable Systems via Evans Function Techniques*. SIAM J. Math. Anal, 33(5), 11171143. (27 pages).
- [Kapitula y Sanstade 2] Todd Kapitula and Björn Sandstede. *Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations*. Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 124, Issues 13, 1 December 1998, Pages 58-103.
-