Prácticas para la enseñanza de la matemática en educación media básica con materiales manipulativos

Livier Guzmán Padilla

1989

99

Las siguientes prácticas fueron diseñadas para alcanzar algunos de los objetivos del programa de secundaria, por medio de materiales manipulativos, ya que la abstracción con que tradicionalmente se enseñan las matemáticas es lo que las hace pesadas y en ocasiones tediosas; pues los alumnos muchas veces no tienen idea de lo que representan las expresiones matemáticas.

Con el presente material se pretende que el alumno llegue a conceptos o expresiones después de haber manipulado el material, o bien asocie las expresiones y conceptos con el material que se le presente en cada una de las actividades.

Estas prácticas ya fueron utilizadas en el proyecto: "Curso de actualización para maestros de telesecundaria sin la especialidad de matemáticas", éstas complementadas con las ya existentes en CIMAT (1987) dieron como resultado que hubiera al menos una práctica para cada una de las 24 unidades que conformen el programa de matemáticas de Educación Media Básica.

Las prácticas ordenadas por temas son:

LOGICA Y CONJUNTOS

- Relaciones y funciones
- Conjunción
- Equivalentes

NUMEROS REALES

- Kermesse
- Decimal
- Racionales
- Pitágoras
- Irracionales

ALGEBRA

- Monomios y polinomios

GEOMETRIA

- Simetría central
- Semejanza
- Seno

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

- Eventos

TEMA	Producto cartesiano, relaciones y funciones.
OBJETIVO	El alumno comprenderá la relación existente entre producto cartesiano, relación y función.
MATERIALES	Hoja de actividades
PRERREQUISITO	Que el alumno haya cubierto estos temas
INTRODUCCION	Tú has visto en el presente curso de matemáticas tres temas: producto cartesiano, relaciones y funciones, en la presente actividad veremos que estos tres temas están relacionados entre sí.
DESARROLLO	Para darnos cuenta de la relación existente vamos a observar algunos ejemplos que nos ayudarán a ver de una manera clara la íntima relación que existe entre estos temas.

Analicemos el primer ejemplo:

Tenemos los conjuntos

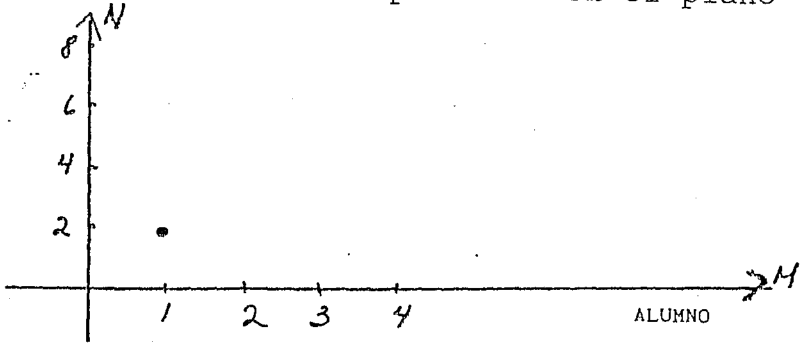
$M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$N = \{ 2, 4, 6, 8, \}$

Efectúemos el producto cartesiano

$$M \times N = \begin{array}{l} \{ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad), \\ \ \ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad), \\ \ \ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad), \\ \ \ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad) \} \end{array}$$

Representemos nuestro producto en el plano



Ahora de ese produto cartesiano elijamos las parejas que cumplen con la relación:

X ES LA MITAD DE Y

De acuerdo a la reprentación que tenemos en el plano sabemos que la primer componente de la pareja es X y la segunda Y.

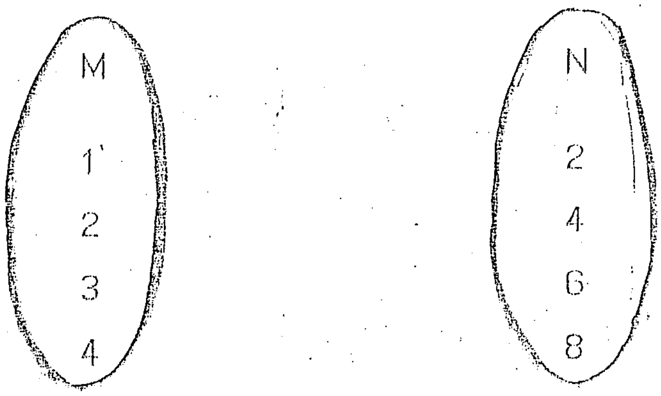
Por tanto las parejas que hacen verdadera la proposición anterior son:

(1, 2), (   ), (   ), (   )

Si lo representamos como conjunto nos quedará:

R = { (1,2)   }

Representemos ahora la relación en este diagrama:



ALUMNO

ALUMNO

Analicemos ahora si esa relación cumple con las condiciones para ser una función, es decir que todos los elementos de M esten relacionados con un único elemento de N.

De acuerdo a lo anterior la relación anterior ¿ es función? ______________________________ .

Analicemos otro ejemplo

Si tenemos los conjuntos:

F = { Bush, Salinas, Ortega }

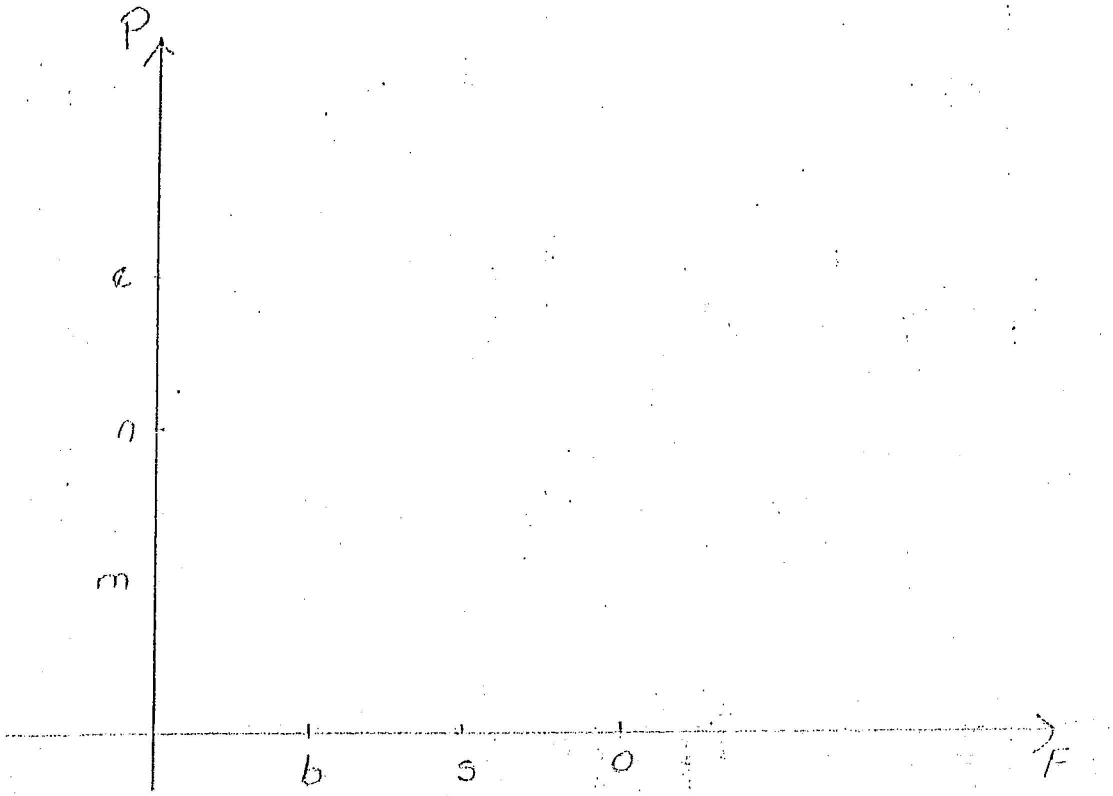
P = { México, Nicaragua, E. U. }

Realicemos el producto cartesiano. Para ello acordaremos simbolizar los elementos de cada conjunto con su letra inicial minúscula.

$$F \times P = \{ (\quad), (\quad), (\quad), (\quad), \\ (\quad), (\quad), (\quad), (\quad), \\ (\quad) \}$$

Representémoslo en el plano cartesiano

ALUMNO

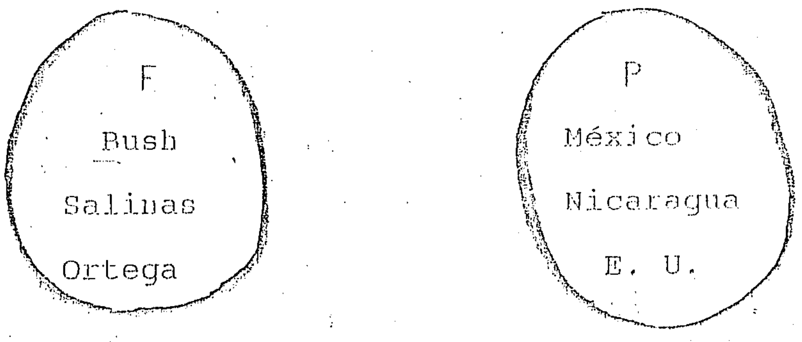


Elijamos ahora las parejas que cúmplen con la relación:

X ES PRESIDENTE DE Y

R = { }

Represéntemos esta relación mediante un diagrama:



¿ Es una función? ____________________

Veamos otro ejemplo

Si tomamos los conjuntos

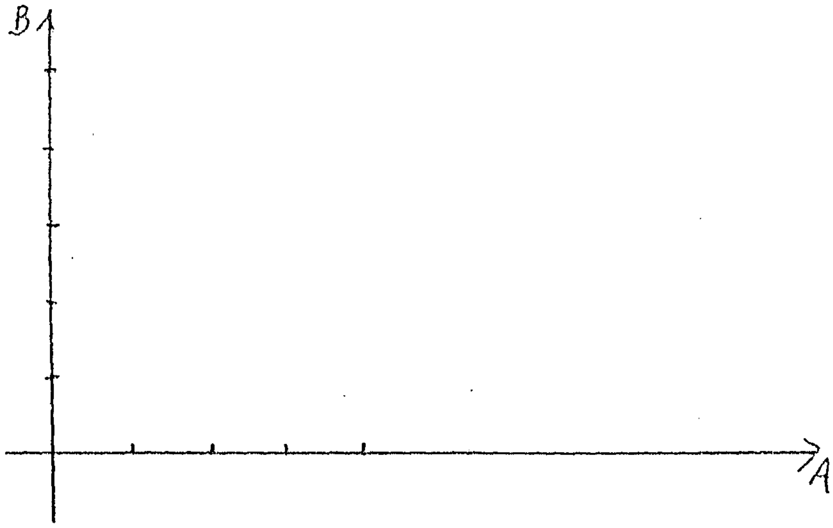
$A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9,\}$

Efectuemos el producto cartesiano

$A \times B = \{ \qquad \}$

Represéntalo en el plano cartesiano



De las parejas que obtuviste en el producto cartesiano di cuáles cumplen con la relación :

$$X + 2 = Y$$

El conjunto relación es:

$R = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \}$

Dibuja la relación en un diagrama:

¿ Es una función esa relación ?____________________

Hagamos un último ejemplo.

Si tenemos los conjuntos:

T = { 15, 32, 12, 18 }

V = { 3, 8, 7 }

Efectúa el producto cartesiano

$$T \times V = \left\{ \begin{array}{l} (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad), \\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad), \\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad),\ (\quad) \end{array} \right\}$$

Represéntalo en la siguiente gráfica:

Escoje las parejas que cumplen con la relación:

X ES MULTIPLO DE Y

Escribe el conjunto relación.

R = {   }

Elabora su diagrama

Analiza el diagrama y dí si es o no función ____________

CONCLUSION:

Como te habrás dado cuenta las tres funciones que analizamos parten en principio de un producto cartesiano, luego todas las parejas que formamos del producto cartesiano algunas forman parte de una relación y si esa relación cumple con las condiciones para ser función pues decimos que ésta es función, si no lo único que tenemos es una relación.

CURSO DE ACTUALIZACION
CONJUNCION
CIMAT SECYR

TEMA — Conjunción de proposiciones

OBJETIVO — El alumno construirá la tabla para calificar conjunciones a partir de ejemplos concretos.

MATERIALES — Hoja de actividades

INTRODUCCION — En el primer curso aprendiste a calificar proposiciones lógicas que tenían un solo enunciado, pero ¿ qué pasará con las proposiciones que no constan de un solo enunciado y donde además no son verdaderos los dos?

DESARROLLO — Vamos a ver algunos ejemplos que nos permitirán calificar al término de la actividad una de las proposiciones compuestas como es la conjunción.

Veamos el primero:

En una escuela secundaria existe el siguiente aviso: Se invita a los alumnos a formar el equipo de basquetbol que reunan los siguientes requisitos:

" SER ALUMNO DE 2^{o} GRADO Y MEDIR AL MENOS 1.65 MTS."

Hay cuatro amigos Juan, Pedro, Luis y Gerardo que quieren ingresar al equipo vamos a examinar los requisitos para ver a quienes admitiran.

Juan cursa 2° y mide 1.60 m
Pedro cursa 3° y mide 1.70 m
Luis cursa 3° y mide 1.62 m
Gerardo cursa 2° y mide 1.68 m

Veamos quien cumple los requisitos, para ello llenemos las siguientes tablas

Escribe en cada casilla el nombre del alumno.

	1.65 m O MAS	MENOS DE 1.65
ALUMNO DE 2°		
NO ALUMNO DE 2°		

Anota falso o verdadero según el caso.

	SER ALUMNO DE 2°	MEDIR AL MENOS 1.65 M
JUAN		
PEDRO		
LUIS		
GERARDO		

¿ De acuerdo a tu tabla quiénes serán admitidos?

Claro que sólo el cuarto alumno de la tabla será admitido pues es el único que cumple con los requisitos.

Veamos otro caso.

Unas personas van a salir de viaje y la única infomación que poseen para abordar el avión es que llegó de Europa y aterrizó entre 11:00 y 12:00 hs.

Al llegar al aeropuerto encuentran 4 aviones con las siguientes características:

El avión **A** llegó de Francia y aterrizó a las 10:30

El avión **B** llegó de Brasil y aterrizó a las 11:00

El avión **C** llegó de España y aterrizó a las 11:30

El avión **D** llegó de E. U. y aterrizó a las 12:00

Completemos las siguientes tablas para ver cual avión abordarán.

Anota las letras de los aviones.

	LLEGO DE EUROPA	NO LLEGO DE EUROPA
ATERRIZO ENTRE 11:00 Y 12:00		
NO ATERRIZO ENTRE 11:00 Y 12:00		

Anota falso o verdadero.

AVION	LLEGO DE EUROPA	ATERRIZO ENTRE 11 Y 12
A		
B		
C		
D		

¿ Ya sabes cuál avión abordara? ______________________

Escribe la letra del avión ______________________

Veamos un último ejemplo.

Una familia quiere comprar una mascota y la condición es quee sea mamífero y carnívoro.

Las cuatro mascotas propuestas son perro. conejo, pez y loro

Completemos la tabla para saber qué mascota van a comprar.

MASCOTA	MAMIFERO	CARNIVORO
PERRO		
CONEJO		
PEZ		
LORO		

De acuerdo a tu análisis ¿cuál mascota comprarán ?

______________________________ .

Si analizamos los tres casos nos podemos dar cuenta de que sólo son aceptados los que cumplen las dos condiciones por lo que nuestra tabla quedaría:

p	q	p y q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

CONCLUSION:
Nos hemos dado cuenta que para que una conjunción sea verdadera es necesario que las dos proposiciones simples lo sean.

TEMA — Proposiciones equivalentes y conjuntos iguales

OBJETIVO — El alumno deducirá que el conjunto solución de cada una de las proposiciones simples que forman una proposición bicondicional es el mismo.

MATERIALES — Hoja de actividades
Tijeras
Plantillas
Pegamento
Cartulina

INTRODUCCION — En el curso de segundo grado aprendiste que el conjunto solución para una conjunción abierta era la intersección de los conjuntos solución de las proposiciones simples, así como para la disyunción es la unión, y en la condicional el conjunto del antecedente siempre está incluído en el conjunto del consecuente.

DESARROLLO — Ahora analicemos la bicondicional

Recorta las figuras que aparecen en la plantilla y pégalas en cartulina.

Si tenemos la proposición

$a \Longleftrightarrow b$: x es cuadrilátero si y sólo si tiene 4 lados

Forma el conjunto solución para la proposición:

a: x es cuadrilátero

b: x tiene cuatro lados

¿Cómo resultaron los conjuntos A y B?_______________________

c $\Longleftrightarrow$ d: x es un cuadrado si y sólo si es un rombo con ángulos congruentes.

Encuentra el conjunto solución para las proposiciones:

c: x es cuadrado

d: x es un rombo con sus ángulos congruentes

¿Cómo son los dos conjuntos? _____________________________

Analicemos otro ejemplo

m $\Longleftrightarrow$ n: x es triángulo equilátero si y sólo si tiene sus tres lados iguales.

Encontremos los conjuntos solución para cada una de las proposiciones simples.

ALUMNO

m: x es triángulo equilátero

n: x tiene sus tres lados iguales.

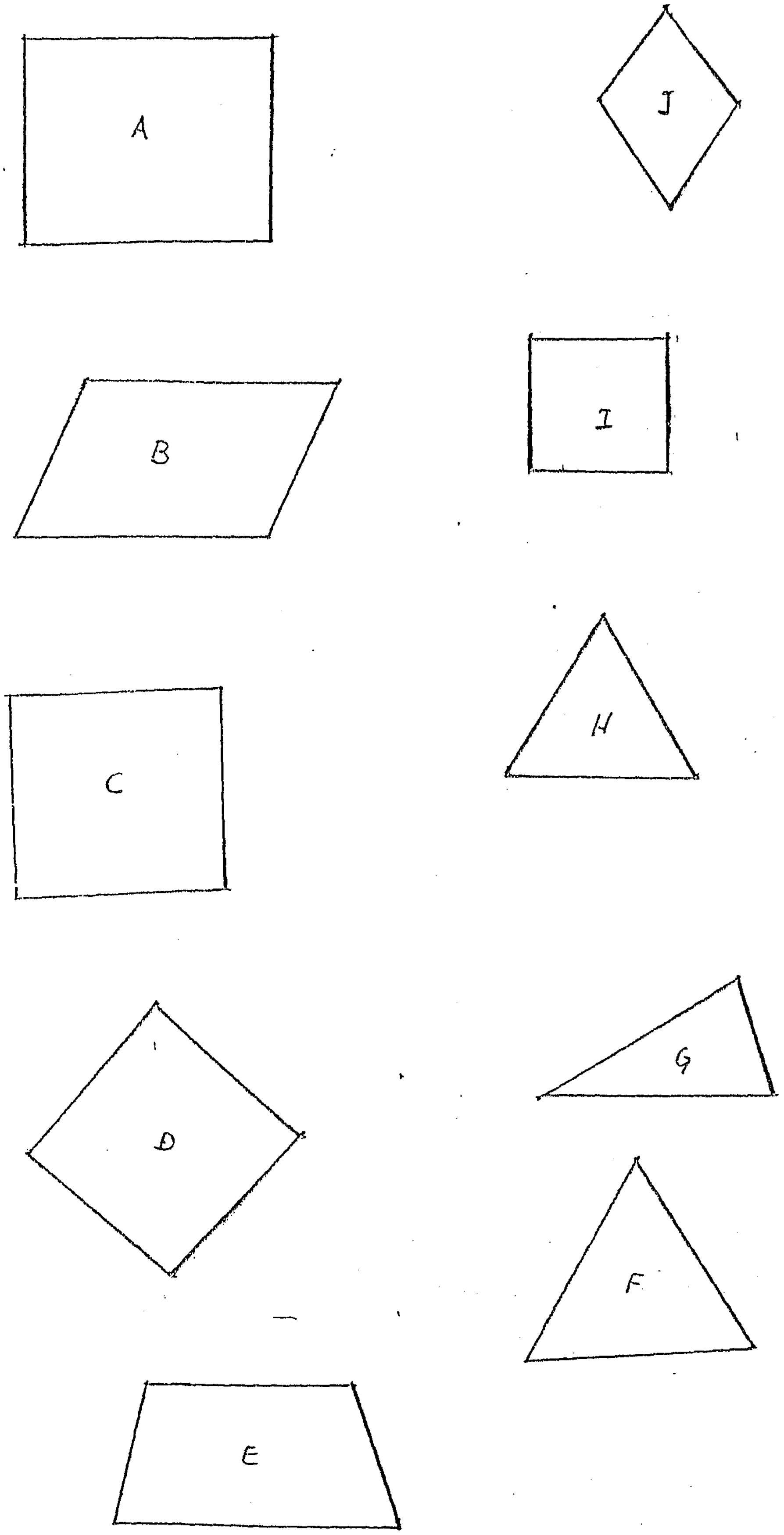
¿ Qué observas en los conjuntos? ______________________________

Si observamos los tres casos nos podemos dar cuenta que los conjuntos para cada una de las proposiciones simples se repiten para las dos que forman la bicondicional.

CONCLUSION:

Hemos aprendido que una bicondicional da como resultado conjuntos iguales.

ALUMNO


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J

TEMA Números Naturales

OBJETIVO El alumno comprenderá el algoritmo de la división.

MATERIALES Tarjetas de cartoncillo de diferentes colores
Hoja de actividades.

INTRODUCCION Tres amigos van a una kermesse. Ninguno sabe cuánto dinero tienen los otros dos

Al llegar a la kermesse, deciden que cada uno va a cambiar su dinero por las tarjetas que venden para adquirir los antojitos que ahí se consumen.

Paco propone a Luis y a Pedro que después de cambiar sus tarjetas las repartan en partes iguales.

Luis y Pedro aceptan con la condición de que se repartan en orden de valores; es decir primero las de mayor valor y luego las que le sigan en orden descendente.

Paco acepta pero dice que también le gustaría poner como condición que en caso de tener que cambiar tarjetas éstas sólo se cambien por las de valor inmediato inferior.

DESARROLLO:

Al llegar a la kermesse los tres amigos cambian su dinero. La manera de cambiarla es:

TARJETAS ROSAS $100.00

TARJETAS VERDES $10.00

TARJETAS AZULES $1.00

Al reunirse nuevamente para repartirse las tarjetas se dan cuenta que tienen:

4 tarjetas rosas de 100

6 tarjetas verdes de 10

2 tarjetas azules de 1

Tomando en cuenta la condición que pusieron Luis y Pedro las primeras tarjetas a repartir serán las ______________________

Entonces deben repartir _________ tarjetas entre tres.

Al repartirlas les toca _________ tarjeta a cada uno y les sobran ____________ rosa de 100.

La tarjeta rosa de 100 únicamente la pueden cambiar por tarjetas ________________.

alumno

Por cada tarjeta rosa de 100 les van a dar ______ verdes de 10.

Completa para saber cuantas tarjetas verdes tienen ahora

1 tarjeta rosa de 100 = ________ tarjetas verdes más 6 tarjetas verdes que ya tenían es igual a _________ tarjetas verdes de 10.

_______ tarjetas verdes de 10 repartidas entre los tres les toca __________ tarjetas verdes de 10 y les sobra _________

Cada tarjeta verde de 10 la pueden cambiar por _________tarjetas azules de 1.

Entonces _____ tarjetas verdes de 10 =____________ tarjetas azules de 1 más 2 tarjetas azules que ya tenían ahora tienen _________ tarjetas azules

_________tarjetas azules de 1 repartidas entre los tres les toca de _____________ y sobran ______________.

En conclusión 4 tarjetas de $100.00 , 6 de $10.00 y 2 de a $1.00 repartidas entre 3 les toca de:

_______ de a 100

_______ de a 10

_______ de a 1 alumno

Por tanto $462.00 repartidos entre 3 es igual a ____________

Representado con símbolos matemáticos tenemos que:

462 : 3 = ____________

Con ayuda de tus tarjetas realiza las siguientes divisiones:

536 : 4 = ______________	861 : 7 = ______________
804 : 6 = ______________	725 : 5 = ______________
298 : 2 = ______________	483 : 3 = ______________
568 : 4 = ______________	625 : 5 = ______________

CONCLUSIONES

Hemos aprendido que para dividir es necesario repartir cada una de las unidades por separado y que además para poder dividir las unidades que me quedan y que ya no se pueden repartir como unidades de ese valor es necesario convertirlas a las unidades de orden inmediato inferior y sumarle las unidades de ese orden luego ya dividirlas y así sucesivamente hasta terminar de dividir todas las unidades.

alumno

TEMA Sistemas de Numeración

OBJETIVO El alumno comprenderá las propiedades de posición y aditivitividad del sistema decimal.

MATERIALES Hoja de actividades
Tijeras

INTRODUCCION Has estudiado los diferentes sistemas de numeración que se han dado a través de los siglos y que cada uno de los pueblos los utilizaba, pero que no se difundían a otros pueblos.

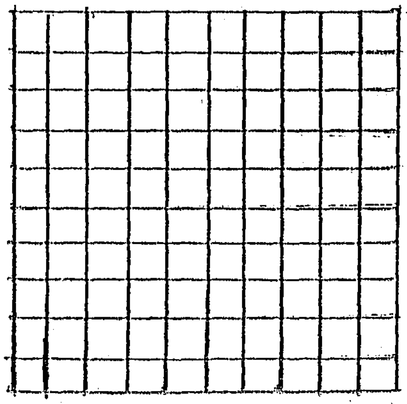
Nosotros nos ocuparemos del sistema decimal que se ha difundido en la mayor parte del mundo, porque se ha visto que es el más práctico de todos los sistemas que existían hasta el momento en que la cultura empezó a hacerse universal.

DESARROLLO:

Tenemos el problema de cinco amigos los cuales tienen tres tipos de figuras y quieren encontrar la manera más sencilla de representar el total de unidades que tienen.

Las figuras que tienen son:

Cuadrados de 100 unidades



Tiras de cuadros de 10 unidades

Unidades sueltas

alumno

Las personas tienen las siguientes figuras:

Raúl tiene 5 cuadros de a 100, 2 tiras de 10 y 8 sueltos

Pedro tiene 3 cuadros de 100 y 8 tiras

Luis tiene 4 cuadros de 100 y 9 sueltos

Héctor tiene 9 tiras y 8 sueltos

Juan tiene 2 cuadros de 100, 5 tiras y 2 sueltos

alumno

Vamos a ayudarlos. Para ello vamos a llenar las tablas que te presentamos a continuación:

CUADRADOS DE 100	TIRAS DE 10	UNIDADES SUELTAS

CUADRADOS DE 100	TIRAS DE 10	UNIDADES SUELTAS

CUADRADOS DE 100	TIRAS DE 10	UNIDADES SUELTAS

CUADRADOS DE 100	TIRAS DE 10	UNIDADES SUELTAS

CUADROS DE 100	TIRAS DE 10	UNIDADES SUELTAS

alumno

Puedes escribir un número que represente el total de unidades de cada uno de los amigos? ____________________

Raúl ____________

Pedro ____________

Luis ____________

Héctor ____________

Juan ____________

¿Con qué identificaste los cuadrados de 100 unidades? ____________________

¿Con qué identificaste las tiras de 10 unidades? ____________________

¿Con qué identificaste las unidades sueltas? ____________

Los cuadros de 100 se identifican con las CENTENAS, las tiras de 10 con las DECENAS y los cuadros sueltos con las UNIDADES.

De esta manera podemos decir que en nuestro sistema de numeración, los números toman diferentes valores de acuerdo con la posición que ocupan y para obtener el valor lo único que debemos de hacer es escribir el número en el valor que corresponde a su posición.

alumno

Por ejemplo el número 367 equivale a la suma de:

$$300 + 60 + 7 = (3x100) + (6x10) + (7x1)$$

CONCLUSION:

Por medio de esta actividad hemos aprendido que el sistema decimal es muy práctico y muy fácil de hacer las conversiones de centenas a decenas de decenas a unidades y así sucesivamente.y cuando alguna de las clases no existe basta con poner un cero que representa la ausencia de valor.

alumno

TEMA : Números racionales

OBJETIVO El alumno comprenderá la propiedad de densidad de los números racionales.

MATERIALES Hoja de actividades

INTRODUCCION Recordemos que los números racionales tienen un número infinito de equivalencias, y que además podemos establecer un orden entre dos racionales que no son equivalentes.

DESARROLLO Siempre que tengamos dos racionales que no son equivalentes podemos establecer un orden entre ellos, por ejemplo entre:

$$\frac{3}{5} \quad y \quad \frac{4}{5}$$

Podemos establecer que :

$$\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

Y existe $\frac{7}{10}$
que cumple con la relación de orden

$$\frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5}$$

Porque:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \quad y \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

Entre $\frac{6}{10}$ y $\frac{7}{10}$ existe $\frac{13}{20}$

que cumple con la relación

$$\frac{6}{10} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10}$$

porque $\frac{6}{10} = \frac{12}{20}$ y $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$

Entre $\frac{12}{20}$ y $\frac{13}{20}$ existe $\frac{25}{40}$

que cumple con la relación

$$\frac{12}{20} < \frac{25}{40} < \frac{13}{20}$$

¿Llegará a suceder que dados dos números racionales no equivalentes no sea posible encontrar otro número entre ellos?

____

Por supuesto que no pues precisamente en esto consiste la propiedad de densidad de los números racionales

Siguiendo el procedimiento anterior encuentra 5 números entre $\frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$

alumno

En conclusión hemos aprendido cómo están formados los números racionales y además hemos comprobado la propiedad de densidad de los números racionales, la cual se generaliza de la manera siguiente:

Dados dos racionales cualesquiera:

$$\frac{a}{c} \quad y \quad \frac{b}{d} \quad \text{no equivalentes}$$

existe $\frac{m}{p}$

Tal que:

$$\frac{a}{c} < \frac{m}{p} < \frac{b}{d}$$

alumno

CURSO DE ACTUALIZACION
PITAGORAS
CIMAT

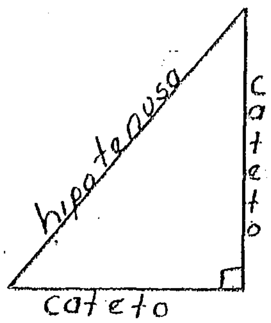
TEMA Introducción a los números irracionales

OBJETIVO Los alumnos comprenderán de dónde se obtuvieron algunos de los números irracionales

MATERIALES Hoja de actividades
Calculadora (OPTATIVO)

INTRODUCCION En la actividad de los números racionales aprendimos que estos números tienen la propiedad de densidad por lo que al representarlos en la recta numérica ocuparán muchos puntos de la misma. Crees que los ocuparán todos? ______________________

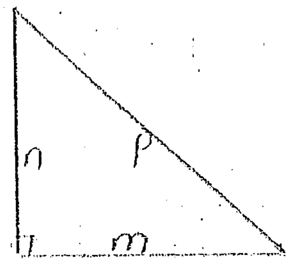
Procedamos a analizar este problema, para lo cual necesitaremos de un teorema muy importante en las matemáticas que se refiere a una propiedad de los triángulos rectángulos. Como recordarás son aquellos triángulos que tienen un ángulo recto, es decir uno de sus ángulos mide 90 grados. Sus lados reciben nombres especiales, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los lados que forman el ángulo recto catetos.



alumno

La propiedad que utilizaremos se llama TEOREMA DE PITAGORAS y cuya demostración se puede ver en FLORES et al Prácticas de 3°de secundaria y que dice:

"En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos "

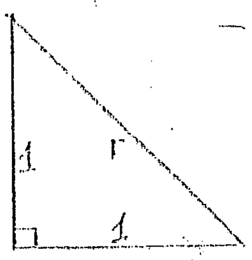


Lo cual representado simbólicamente nos quedará

$$p^2 = m^2 + n^2$$

Por lo que $p = \sqrt{m^2 + n^2}$

¿Cuánto medirá la hipotenusa del siguiente triángulo?



alumno

Para ello nos valdremos de la propiedad que acabamos de conocer. Vayamos por partes:

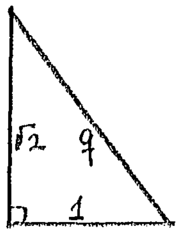
De acuerdo al TEOREMA DE PITÁGORAS la relación que se da es:

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

Por lo tanto :

$$r = \sqrt{1 + 1}$$
$$r = \sqrt{2}$$

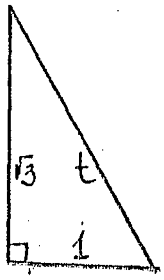
Analicemos otro triángulo



Aplicando lo que ya sabemos. La medida de la hipotenusa es:

$$q^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$
$$q = \sqrt{2 + 1}$$
$$q = \sqrt{3}$$

Hagamos un último triángulo:



alumno

A los números como $\sqrt{2}$ se les conoce como IRRACIONALES.

Sus decimales no son periódicas pues con ayuda de computadoras se han calculado hasta un número muy grande de cifras decimales y nunca se han repetido. Hay una demostración formal pero queda fuera de su alcance y por lo tanto no lo demostraremos.

CONCLUSION

Hemos aprendido que a pesar de que los números racionales forman un conjunto denso existen otros números que completan el conjunto de los números reales que son los números

IRRACIONALES

Como son las raíces cuadradas de 2, 3, 5, 6, 7 etc. así como el número π

alumno

$$t^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$$
$$t = \sqrt{3 + 1}$$
$$t = \sqrt{4}$$
$$t =$$

Si analizamos los tres resultados tenemos :

$$\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{3} \quad y \quad \sqrt{4} = 2$$

Si obtenemos la raíz de 2 el resultado será:

1.4142136.......

Si obtenemos la raíz de 3 el resultado será:

1.7320508......

Los dos anteriores resultados presentan una sucesión de decimales infinitos no periódicos, a diferencia de los racionales que ó son decimales finitos o son decimales infinitos periódicos.

Veamos algunos ejemplos

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333.......$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135...........$$

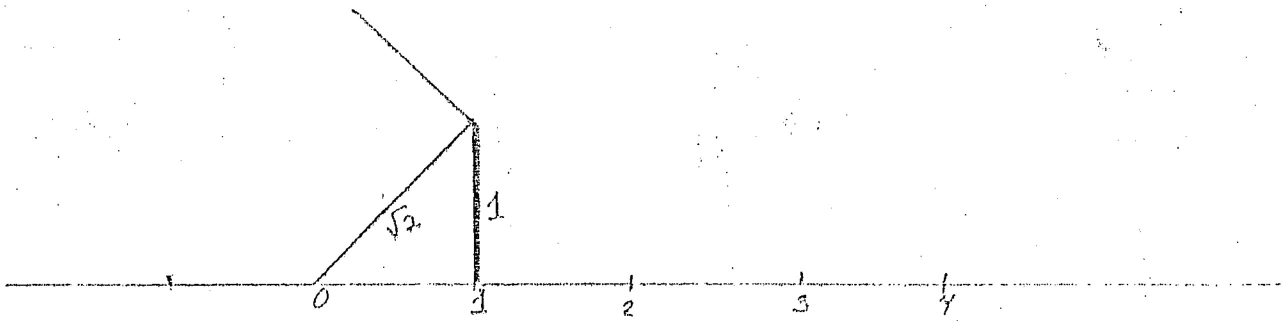
alumno

Escribe su valor ______________________________

Para localizar este valor sobre la recta numérica tomemos con el compás la medida de la hipotenusa y traslademósla a la recta numérica

Hemos encontrado el punto que corresponde a la raíz de 2 en la recta numérica

Ahora sobre el extremo de la hipotenusa cuya medida es $\sqrt{2}$ construyamos otra perpendicular de medida la unidad .



Completemos el triángulo y busquemos cuanto mide ahora la hipotenusa de nuestro triángulo cuyos catetos miden $\sqrt{2}$ y 1

Efectivamente su hipotenusa mide $\sqrt{3}$

Tomemos su medida y localicémoslo en la recta numérica

Sobre el extremo de la hipotenusa de nuestro nuevo triángulo tracemos una nueva perpendicular de medida la unidad.

alumno

TEMA : Números Reales

OBJETIVO El alumno representará los números irracionales en la recta numérica

MATERIALES Hoja de trabajo
Juego de Geometría

REQUISITO Para poder realizar la actividad es necesario que el alumno sepa trazar perpendiculares con escuadras.

DESAROLLLO

Vamos a construir triángulos rectángulos sobre nuestra recta numérica.

Sobre el número 1 vamos a construir una perpendicular a la recta numérica

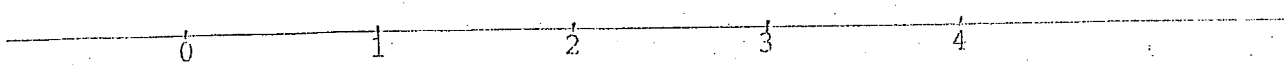
Con el compás tomamos la medida de exactamente una unidad de la recta numérica

Unimos con cero para terminar el triángulo

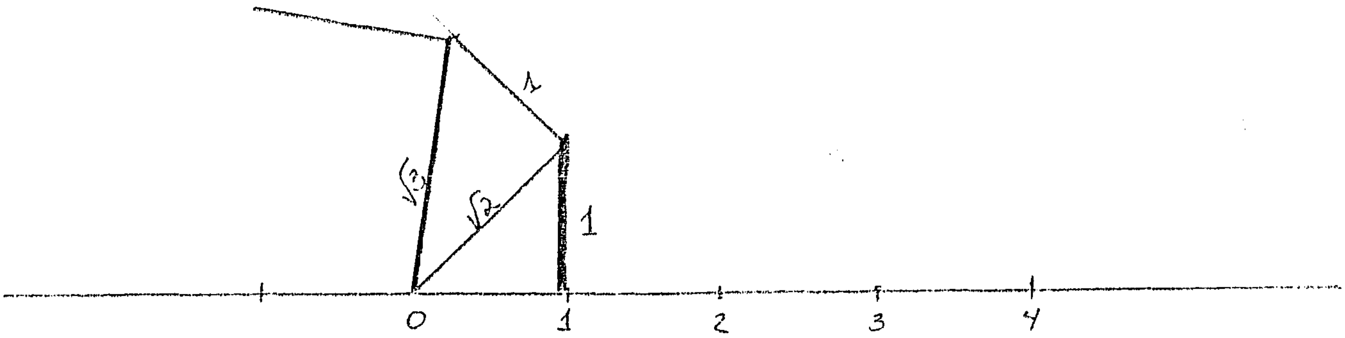
El triángulo que acabamos de trazar es un triángulo rectángulo con las medidas de sus catetos igual a 1

Recuerdas que en la actividad "Introducción a los números iracionales" obtuvimos cuánto valía la hipotenusa de este triángulo._

alumno



alumno



Completemos nuestro triángulo y veamos cuánto mide su hipotenusa.

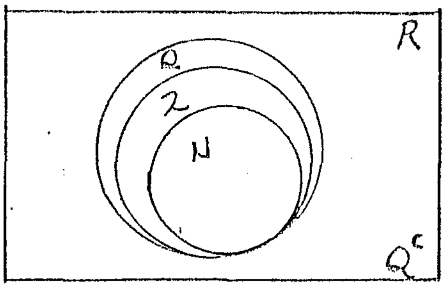
Un triángulo cuyos catetos miden $\sqrt{3}$ y 1 respectivamente tiene una hipotenusa de $\sqrt{4}$ o sea 2

Localicémoslo en la recta numérica y vemos que efectivamente el punto corresponde al 2.

Como te podrás dar cuenta con este mismo procedimiento podemos encontrar los puntos que en la recta corresponden a $\sqrt{5}$, , $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ...

CONCLUSION

Hemos aprendido que a pesar de que los números racionales forman un conjunto denso existen puntos dentro de la recta numérica que no están ocupados por los números racionales sino por los números irracionales por lo que podemos concluir que los números **REALES** presentan la siguiente estructura:



alumno

Procedemos de la siguiente manera, colocamos la suma en forma vertical para que nos queden acomodadas cada una de las clases

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 3 \\ +\ \ 3\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 5 \\ \hline \end{array}$$

Equivale a sumar

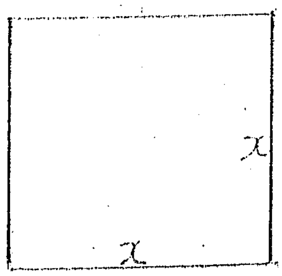
2 centenas + 3 centenas + 2 centenas = 7 centenas

4 decenas + 2 decenas + 1 decena = 7 decenas

3 unidades + 1 unidad + 5 unidades = 9 unidades

Lo mismo sucede cuando trabajamos con polinomios y monomios ya que lo único que necesitamos para sumarlos es que sean términos semejantes. Los términos los identificaremos con sus áreas respectivas:

Las x^2 las identificaremos con los cuadrados cuyo lado. mide x .



alumno

TEMA Monomios y polinomios

OBJETIVO El alumno sumará monomios y polinomios

MATERIALES Hoja de actividades
Cartulinas
Pegamento para papel
Tijeras
Hoja para recortar

Con la siguiente actividad aprenderás a sumar monomios y polinomios.

DESARROLLO Para lograr el objetivo partiremos de la suma de de numeros naturales

Recuerda que para que tú pudieras efectuar una suma de naturales lo que hacías era disponer los sumandos de manera que fueran de la misma clase; es decir sumábamos centenas con centenas, decenas con decenas y unidades con unidades de manera que al final de la suma tú podías decir cuántas centenas, cuántas decenas y cuántas unidades te resultaron.

Veamos un ejemplo, para efectuar la suma:

243 + 321 + 215 = ______________________________

Entonces para poder efectuar suma de polinomios es necesario que sean términos semejantes.

Efectúa con ayuda de nuestras figuras la suma de los siguientes polinomios:

$(3x^2 + 5x + 2) + (2x^2 + x + 3) + (4x^2 + 2x + 4) =$ ____________________

Empecemos por reconocer los términos que deberemos de sumar

Los cuadrados de área x^2 que debemos de sumar son:

$(3 + 2 + 4)\ x^2 =$ ____________________

Los rectángulos de área x que sumaremos son:

$(5 + 1 + 2)\ X =$ ____________________

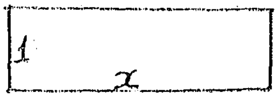
Los cuadrados de área 1 que sumaremos son:

$(2 + 3 + 4)\ 1 =$ ____________________

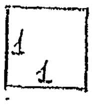
Nuestro resultado final es _____ X^2 + _____ X + _______

alumno

Las x las identificaremos con rectángulos cuya base mide x y su altura 1



Y los términos independientes con cuadrados de lado 1



Pega y recorta las figuras y efectúa las siguientes sumas

$3x^2 + 2x^2 =$ ______________________

$2x + 4x =$ ______________________

$5x + 3x =$ ______________________

$3x^2 + 4x^2 + x^2 =$ ________________

$3x^2 + 5x + 8 =$ ___________________

¿Pudiste efectuar la última suma? _________________________

¿Por qué? ____

No lo podemos hacer porque no son términos semejantes.

alumno

alumno

Si ponemos la suma de polinomios como la suma que acostumbramos a hacer nos quedará :

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x^2 + 5x + 2 \\
+ & 2x^2 + x + 3 \\
 & 4x^2 + 2x + 4 \\
\hline
 & 9x^2 + 8x + 9
\end{array}
$$

¿ Cómo son los dos resultados ?______________________________

Por supuesto que son iguales .

Con ayuda de tus figuras efectúa las siguiente sumas y compruébalas haciendo la operación correspondiente.

$(5x^2 + 3x + 2) + (2x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 6x + 4) =$

$(2x^2 + 7x) + (5x^2 + 8) + (3x + 5) =$

$(5x^2 + 3x + 4) + (x^2 + 6x + 5) =$

$(2x^2 + 6x) + (5x^2 + 8x + 4) + (3x + 2) =$

CONCLUSION:

Hemos aprendido que para sumar polinomios lo único que debemos hacer es tener cuidado de sumar términos semejantes. Cuando ya identificamos los términos semejantes lo que debemos hacer es sumar algebraicamente sus coeficientes.

alumno

Para ello utilícemos la primera hoja que se encuentra al final de la actividad.

Tomemos con el compás la distancia del centro de rotación al punto A y del centro de rotación al punto A'

Las distancias resultaron ____________________

Hagamos lo mismo con los otros puntos y llenemos la tabla que a continuación se te presenta.

AO y OA' son ____________________

BO y OB' son ____________________

CO y OC' son ____________________

Dibujemos con diferentes colores las líneas que unen los puntos homólogos, es decir A con A', B con B' y C con C'.

El centro de rotación equidista de los puntos homólogos. (por construcción)

¿Será el centro de rotación centro de simetría de los vértices de la figura?____________________ .

Efectivamente, el centro de rotación es centro de simetría de cada uno de los puntos de los vértices de la figura 1.

Los ángulos que se forman con los puntos homólogos y el centro de rotación miden ____________________

ALUMNO

CURSO DE ACTUALIZACION
SIMETRIA CENTRAL
SECYR CIMAT

TEMA — Isometrías

OBJETIVO — Recconocerá la simetría central como un caso especial de la rotación (180^0)

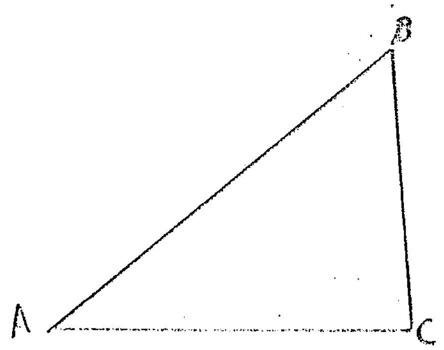
MATERIALES — Juego de Geometría
Hoja de actividades
Colores

PRERREQUISITO — Que el alumno sepa construir rotaciones

INTRODUCCION — Vamos a trabajar con la simetría central función que hace corresponder puntos de un plano con puntos del mismo plano donde los puntos homólogos están a la misma distancia del centro de simetría y además son colineales.

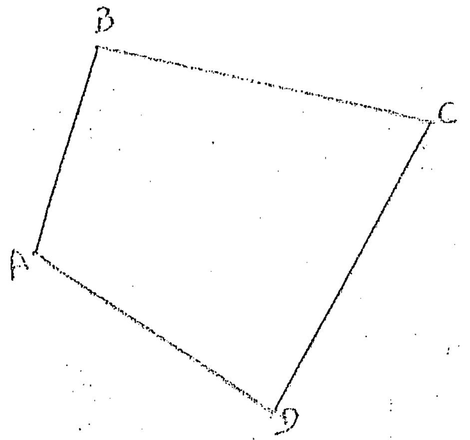
DESARROLLO — Haremos una rotación de 180^0

Realicemos la rotación de la siguiente figura



ALUMNO

Efectúemos una última rotación de 180°



Utilícemos la tercera hoja.

Realiza tus observaciones

¿Pasa lo mismo que en las otras dos ? ______________

Por lo tanto podemos decir que en:

CONCLUSION:

Que efectuar una rotación de 180° equivale a realizar una SIMETRIA CENTRAL.

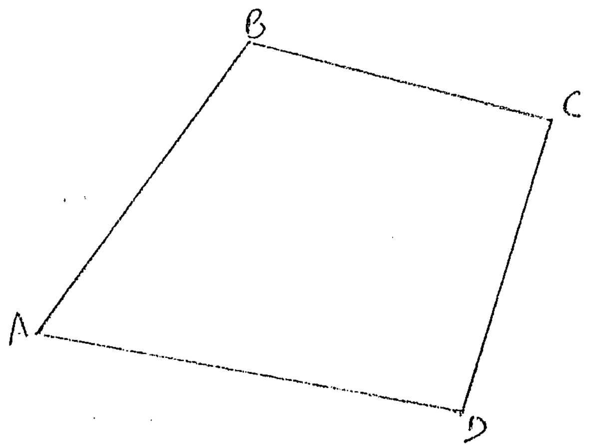
ALUMNO

Los ángulos que miden 180^0 reciben el nombre de ________________________.

¿Crees que sea necesario medir los ángulos de 180? ________________________

No es necesario ya que los ángulos de 180^0 son llanos es decir forman una recta.

Efectúemos otra rotación de $-180°$, es decir rotaremos en sentido contrario



Utilícemos la segunda hoja

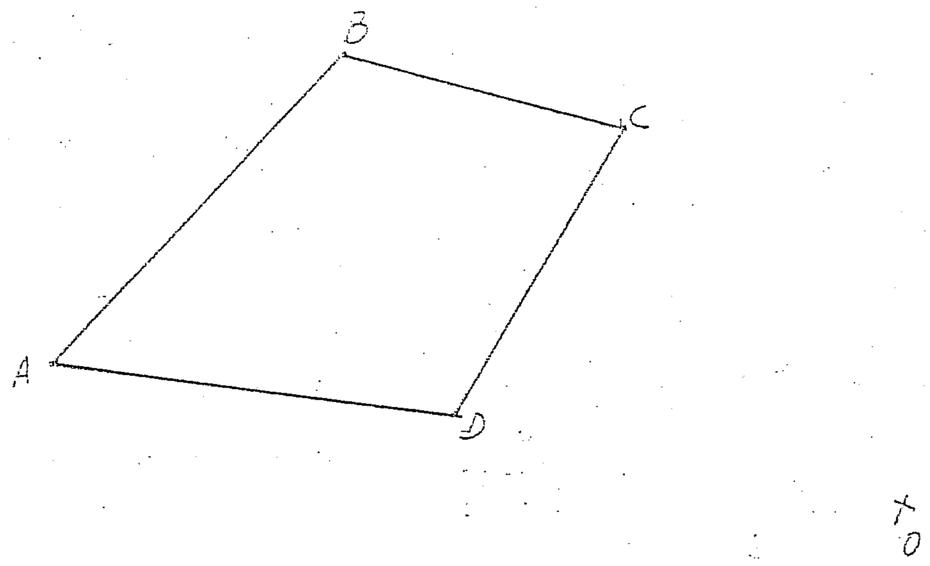
Hágamos las mismas observaciones que en el priméro

¿Pasa lo mismo?________________________

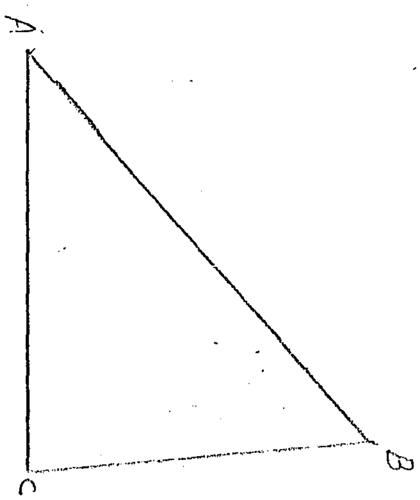
Es decir los ángulos que forman los puntos homólogos y el centro de rotación son llanos y la distancia del centro de rotación a los puntos homólogos es la misma, por tanto el centro de rotación es el centro de simetría.

ALUMNO

$-180°$



x°



180°

TEMA — Semejanza de triángulos

OBJETIVO — El alumno comprobará el caso de semejanza de triángulos dónde basta que dos triángulos tengan dos ángulos congruentes para que los triángulos sean semejantes.

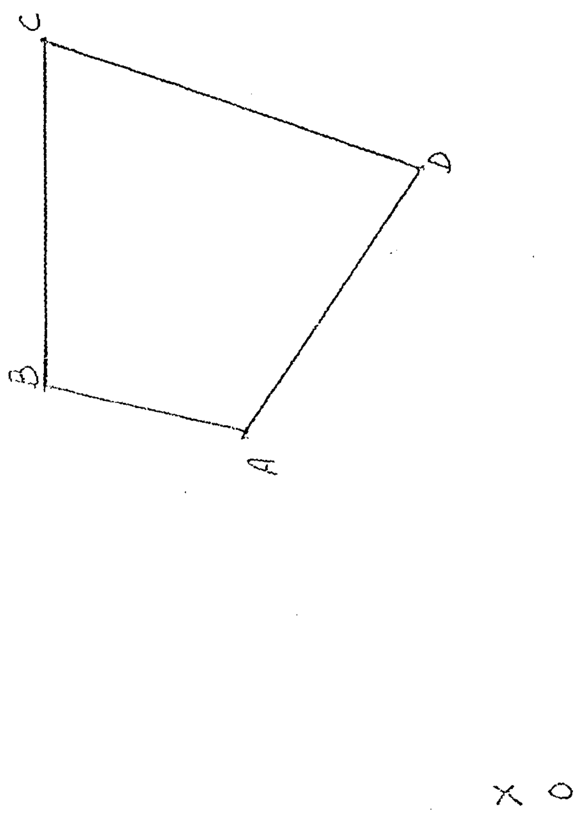
MATERIALES
- Hoja de actividades
- Tijeras
- Pegamento para papel
- Cartulina de color
- Juego de geometría

INTRODUCCION — Recuerdas que en la unidad 4 de tu curso de tercero viste que para demostrar la congruencia de dos triángulos no era necesario demostrar la congruencia de sus tres lados y de sus tres ángulos; sino únicamente tres lados; dos ángulos y el lado al cual son adyacentes o bien dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

DESARROLLO — En esta unidad hemos aprendido que dos figuras son semejantes si tienen ángulos congruentes y lados proporcionales.

Vamos a mostrar que en la semejanza de triángulos ocurre lo mismo que en la congruencia, es decir, que para demostrar que dos triángulos son semejantes no necesitamos demostrar congruencia de sus tres ángulos y proporcionalidad de sus tres lados.

alumno


C
D
B
A
O

Ahora coloca el ángulo N sobre el ángulo C

Observa las rectas AB y MP

¿Serán paralelas? ______________________

Comprúebalo con tus escuadras

Por último coloca el ángulo N sobre el ángulo B y recuerda que:

El < A = < M

El < B = < N

Observa las rectas AC y MP

¿Serán paralelas? ______________________

Comprúebalo con tus escuadras.

En el curso de segundo viste que ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes y si observamos los ángulos A y M observamos que efectivamente son correspondientes y congruentes por lo que ésto nos termina de confirmar que las rectas AC y MP son paralelas.

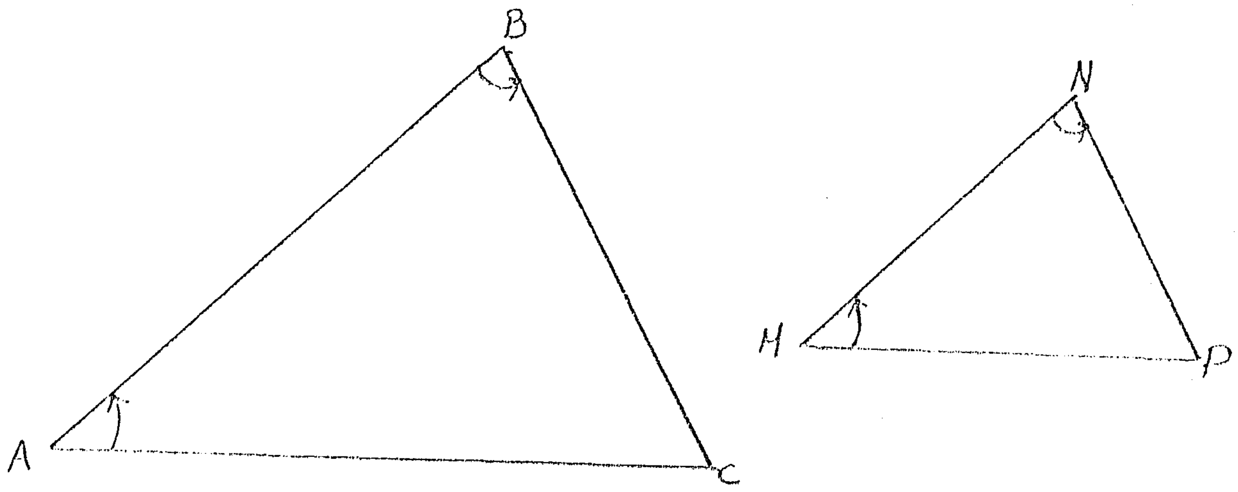
De manera que si AC // MP por el TEOREMA FUNDAMENTAL DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS (Toda paralela trazada al lado de un triángulo forma con los otros dos un triángulo semejante al primero) tenemos que el triángulo ABC es semejante al triángulo MNP.

CONCLUSION:

Hemos aprendido que para demostrar que dos triángulos son semejantes basta demostrar que tiene dos ángulos congruentes.

ALUMNO

Tenemos dos triángulos ABC y MNP



El < A = < M

El < B = < N

Pega los triángulos que aparecen en la plantilla y recórtalos.

Coloca el triángulo MNP sobre el triángulo ABC de manera que el ángulo N coincida con el ángulo A

Observa la posición de las rectas BC y MP

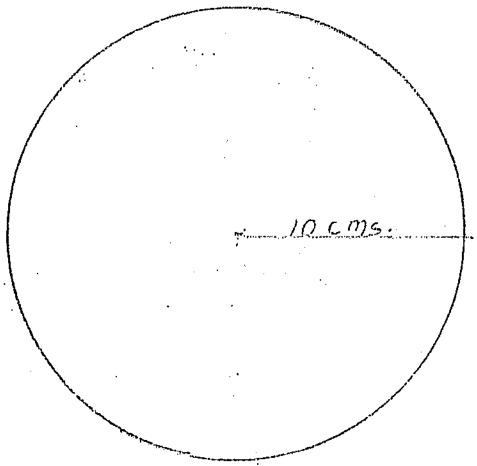
¿ Serán paralelas ?______________________________________

Comprúebalo con tus escuadras.

ALUMNO

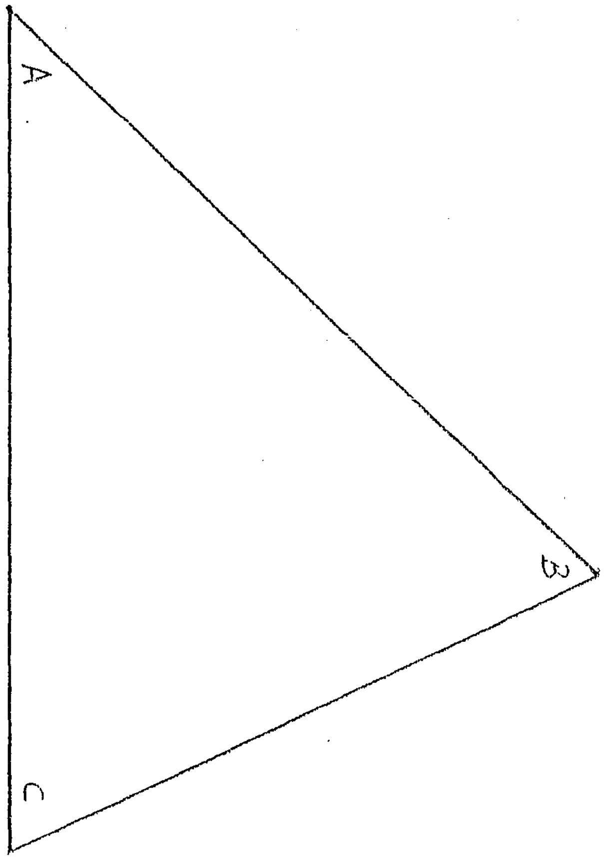
PROGRAMA DE ACTUALIZACION
FUNCION SENO
CIMAT SECYR

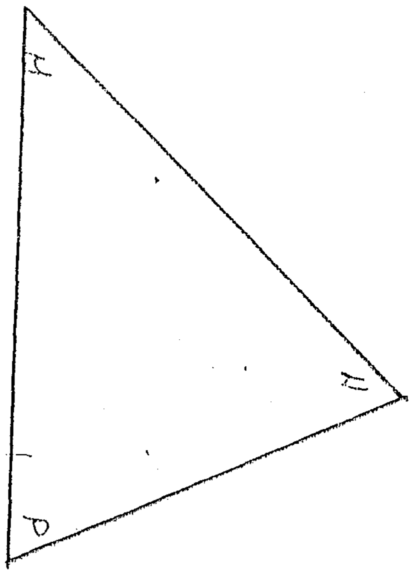
TEMA	Trigonometría
OBJETIVO	Reconocerá la relación de los valores de la función seno en los cuadrantes II, III y IV con los del primer cuadrante, así como el signo correspondiente.
MATERIALES	Hoja de actividades Juego de geometría Hojas de papel milimétrico Colores
PRERREQUISITO	Que el alumno haya manejado la función seno en el primer cuadrante.
DESARROLLO	Dibuja en tu hoja de papel milimétrico una circunferencia de radio 10 cms.



Tomaremos el acuerdo de que el radio equivale a una unidad de medida, es decir los 10 cms son igual a 1 unidad de medida.

actividad alumno.





ALUMNO

Recuerda que la función seno relaciona la medida del ángulo con la función ordenada (valor de Y), mide la longitud de la ordenada por lo tanto:

SENO DE 30^{0}= ______________________

Dibuja ahora en tu circunferencia un ángulo de 45° y encuentra su valor, midiendo la ordenada..

SENO 45^{0}= ______________________

Dibuja un ángulo de 60° y encuentra su valor, midiendo la ordenada.

SENO 60^{0}= ______________________

Si observas estos valores son muy aproximados a los valores que tú ya conocías.

Ahora en tu misma circunferencia marca un ángulo de 150°

SENO 150^{0}= ______________________

Dibuja ahora un ángulo de 135°

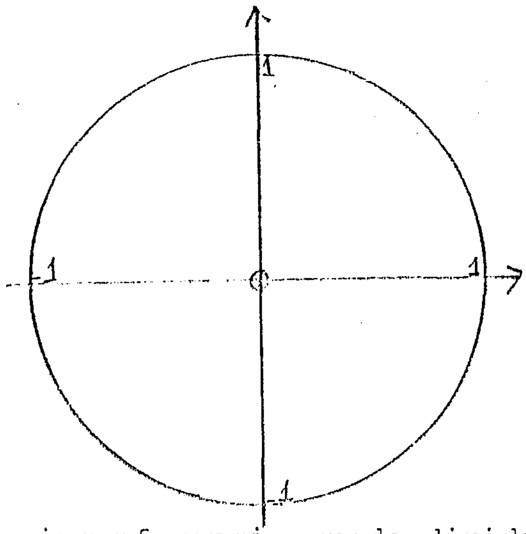
SENO 135^{0}= ______________________

Dibuja un ángulo de 120° y encuentra su valor

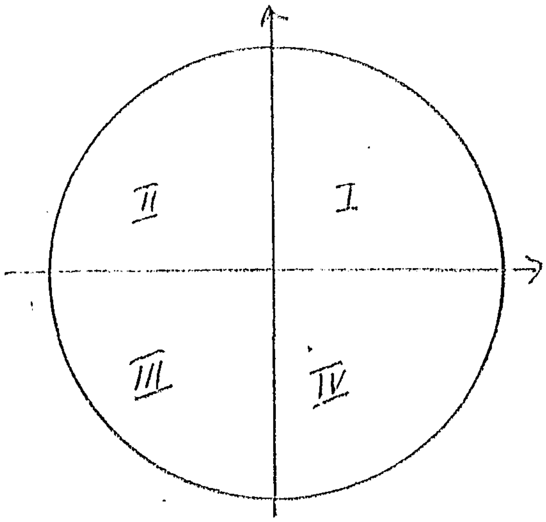
SENO DE 120^{0}= ______________________

¿Qué observas con los valores de la función seno del primer cuadrante y las del segundo cuadrante? ______________________

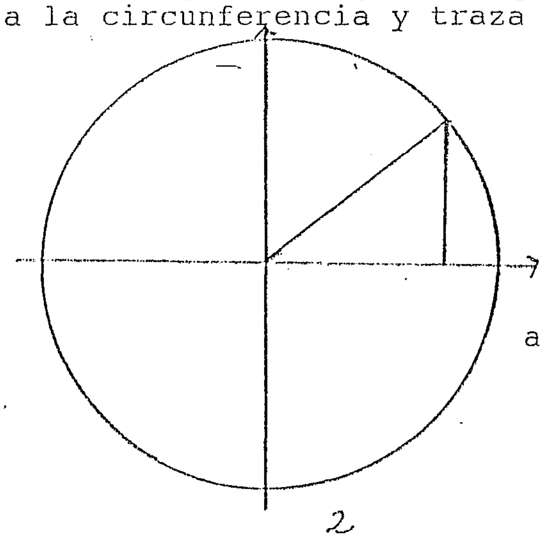
. Marca los ejes cartesianos en tu circunferencia de manera que el centro de la circunferencia y el origen de los ejes coincidan.



Sí observas tu circunferencia queda dividida en cuatro partes llamadas cuadrantes. Enúmeralos como muestra la figura.



Con centro en el origen, dibuja un ángulo de 30° y prolóngalo hasta que corte a la circunferencia y traza su ordenada.



actividad alumno

Completa la siguiente tabla:

SENO 210^0= - SENO ______________

SENO 225^0= - SENO ______________

SENO 240^0= - SENO ______________

Observa que :

$30^\circ = (210^\circ - 180^\circ)$

$45^\circ = (225^\circ - 180^\circ)$

$60^\circ = (240^\circ - 180^\circ)$

Trabájemos ángulos en el cuarto cuadrante

Dibuja un ángulo de 330° y encuentra el valor de la función

SENO 330^0 = ______________

Ahora marca un ángulo de 315°

SENO 315^0 = ______________

Por último dibujemos un ángulo de 300°

SENO 300^0 = ______________

¿Vuelven a parecerse los valores a los del primer cuadrante?______________

actividad alumno

Completa la siguiente tabla:

Seno de 30° = Seno de ______________

Seno de 135°= Seno de ______________

Seno de 60° = Seno de ______________

Si observas:

$30^\circ = (180^\circ - 150^\circ)$

$45^\circ = (180^\circ - 135^\circ)$

$60^\circ = (180^\circ - 120^\circ)$

Dibujemos ahora algunos ángulos en el tercer cuadrante.

Angulo de 210° y encuentra el valor de la función seno, observa que ahora el valor de la ordenada es negativo por tanto:

SENO 210^0=____________________

Dibuja un ángulo de 225° y escribe el valor de la función

SENO 225^0=____________________

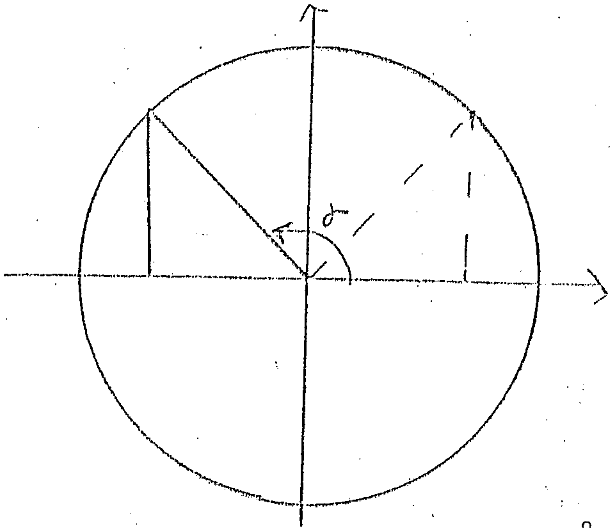
Marca un ángulo de 240° y escribe el valor de la función

SENO 240^0=____________________

¿Se parecen los valores de la función seno del primer cuadrante con los valores encontrados en el tercer cuadrante?______ ____.

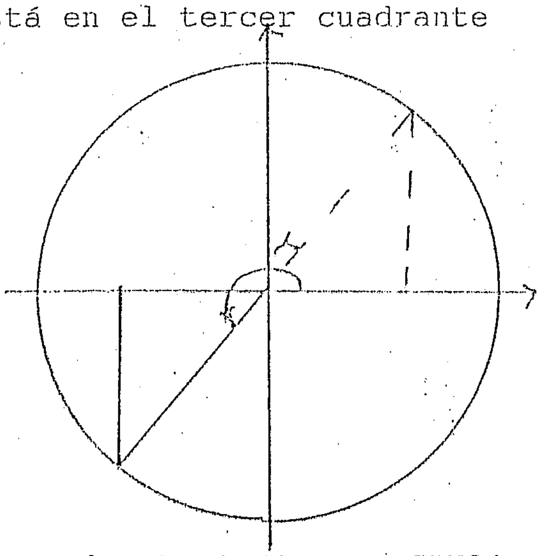
¿En qué son diferentes?____

actividad alumno



II cuadrante SENO α = SENO(180°- α)

Si α está en el tercer cuadrante



III cuadrante SENO α = -SENO(α - 180°)

actividad alumno

SENO 330^{0}= -SENO ____________

SENO 315^{0}= -SENO ____________

SENO 300^{0}= -SENO ____________

Podemos ver que:

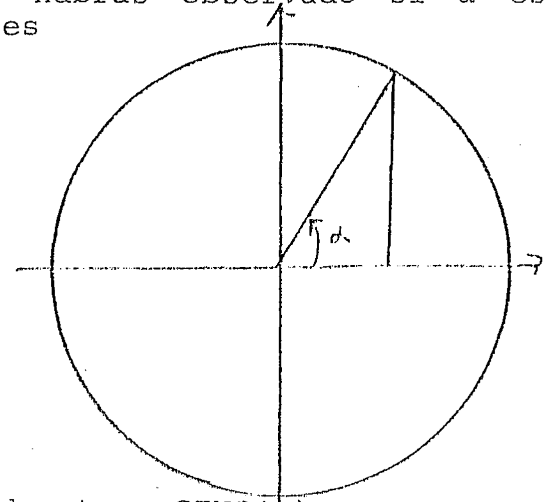
$30° = (360° - 330°)$

$45° = (360° - 315°)$

$60° = (360° - 300°)$

CONCLUSION:

Como habrás observado si α está en el primer cuadrante, el SENO α es



1 cuadrante = SENO(α)

Te habrás dado cuenta que los valores del seno en el primer cuadrante se repiten en el segundo.

actividad alumno

TEMA Eventos compuestos

OBJETIVO El alumno comprenderá cuál es el espacio muestral para eventos compuestos.

MATERIALES Hoja de actividades
Moneda de $100
Moneda de $20
1 dado
Ases de la baraja española

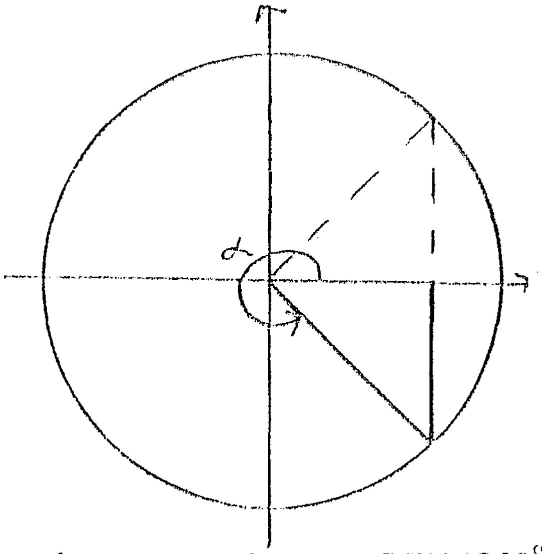
INTRODUCCION Recuerda que cuando estudiaste probabilidad en primero y segundo aprendiste que el espacio muestral de un experimento aleatorio estaba dado por todos los posibles resultados de tu experimento. Por ejemplo si nosotros participando en una rifa y queremos saber cuál es la probabilidad de que nos saquemos la rifa, debemos considerar todos los posibles resultados que se darán al efectuarla. Por ejemplo si son 10 números de la rifa nuestro espacio muestral estaría representado por:

E = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

Si nuestro experimento es lanzar una moneda los posibles resultados son águila o sol por lo tanto:

E = { águila, sol }

Si α está en el cuarto cuadrante



IV cuadrante SENO α = -SENO(360° - α)

actividad alumno

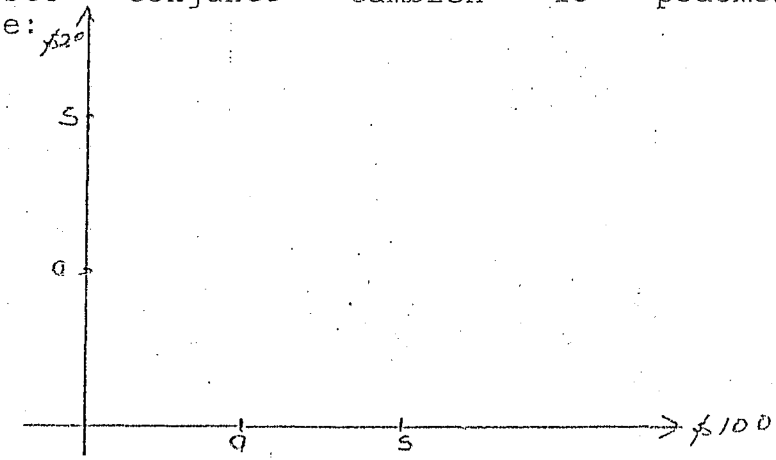
¿ Cuántos resultados diferentes obtuviste?____________

Observa que nuestro conjunto de resultados no está dado por elementos sino por parejas por lo que nuestro espacio muestral está formado por parejas donde se considera un orden ya que no es lo mismo que salga águila en la moneda de \$100 que en la de \$20.

Consideremos como primer elemento de la pareja el resultado en la moneda de \$100, nuestro espacio muestral quedaría:

$$E = \{ (a,s), (a,a), (s,a), (s,s) \}$$

Este conjunto también lo podemos representar gráficamente:



Hagamos otro experimento para ello utilizaremos una moneda y un dado.

¿ Cuál es el espacio muestral para la moneda?
____

¿ Cuál es el espacio muestral para el dado?
____

ALUMNO

Si nuestro experimento es lanzar un dado los posibles resultados son 1,2,3,4,5 y 6 por lo tanto:

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

DESARROLLO

Con la presente actividad encontraremos el espacio muestral de experimentos en los que no intervenga un solo espacio muestral sino dos, por ejemplo lanzar dos monedas, un dado y una moneda ,dos dados, 4 cartas y una moneda, etc.

Realicemos el experimento para ello utilizaremos una moneda de $100 y una de $20 para poderlas distinguir.

Lanza tu moneda y escribe el resultado, águila o sol.

Moneda $100 ____________________ Moneda $20 ________________

Pregunta a algunos de tus compañeros y escribe los resultados que sean diferentes en la siguiente tabla.

Moneda $100	Moneda $20

Escribe todas las parejas representadas en la gráfica anterior:

(1 ,a), (   ), (   ), (   ), (   ), (   ),
(   ), (   ), (   ), (   ), (   ), (   ).

¿ Crees qué ahora si sea el espacio muestral de tu experimento? ______________________________

Ahora si lo es pues ya no es posible encontrar una combinación diferente a las ya dadas.

Por tanto nuestro espacio muestral es:

E = { (   ), (   ), (   ), (   ), (   ),
(   ), (   ), (   ), (   ), (   ), (   ),
(   ) }

Hagamos un último experimento para ello utilizaremos los ases de la baraja y una moneda.

Lanza la moneda y toma sin ver una carta, escribe el resultado______________________________.

Lanza la moneda y el dado al mismo tiempo y escribe la pareja que representa tu resultado.______________________

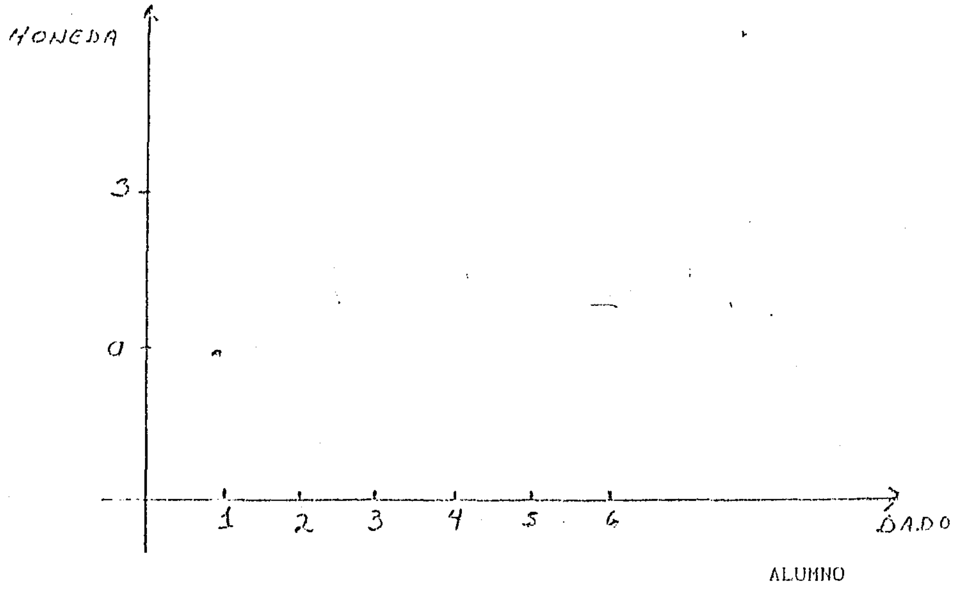
Pregunta a algunos de tus compañeros su resultado y escribe al menos 5 resultados diferentes al que obtuviste.

DADO	MONEDA

¿ Crees qué sean todos los resultados posibles?________

¿ Por qué? ______________________________

Completa la siguiente gráfica



CONCLUSION:

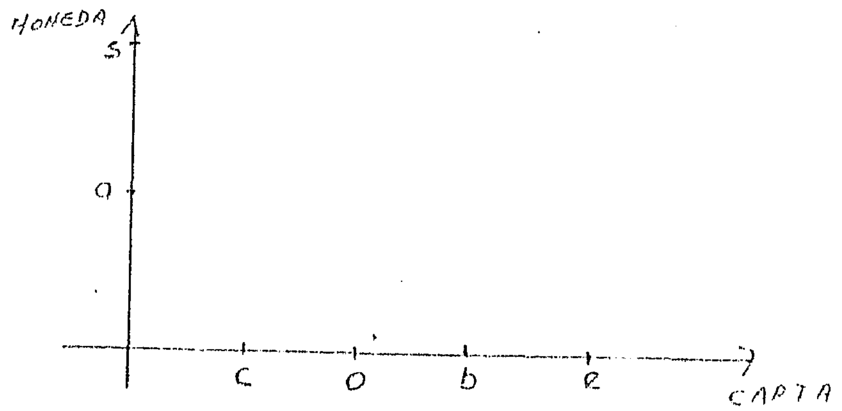
Hemos comprendido que el espacio muestral de eventos compuestos está formado por el producto cartesiano de cada uno de los espacios muestrales si consideraramos eventos simples.

ALUMNO

Pregunta a algunos de tus compañeros sus reultados y escribe al menos 4 diferentes al tuyo.

CARTA	MONEDA

Como estamos trabajando con una moneda y una carta completa la siguiente gráfica:



Por tanto nuestro espacio muestral es:

S = { }

Si observas los tres ejemplos el espacio muestral está formado por todas las parejas ordenadas que se pueden formar con cada uno de los espacios muestra simples y a estas combinaciones les llamamos producto cartesiano.