

PLANES ÓPTIMOS PARA PRUEBAS DE VIDA
ACCELERADA CON ESFUERZOS ESCALONADOS
DESDE UN ENFOQUE BAYESIANO

JULIO CÉSAR ARREDONDO RAZO

Contenido

Prefacio	5
1 Introducción	1
2 Pruebas de Vida Aceleradas (PVA)	3
2.1 Introducción	3
2.2 Tipos de respuesta	4
2.3 Métodos de aceleración	4
2.4 Tipos de esfuerzo	5
2.4.1 Esfuerzo constante	6
2.4.2 Esfuerzo escalonado	7
2.4.3 Esfuerzo progresivo	9
3 Modelo Bajo Esfuerzo Escalonado	11
3.1 Introducción	11
3.2 Relación Vida-Esfuerzo	12
3.2.1 Relación Potencia Inversa	12

3.2.2	Relación de Arrhenius	13
3.3	Modelo de daño acumulado	14
3.3.1	Supuestos	14
3.3.2	Formulación matemática	15
3.4	Daño acumulado para la relación de potencia inversa	17
4	Inferencia Bayesiana y Muestreo Secuencial	21
4.1	Inferencia Bayesiana	21
4.1.1	Muestreo Secuencial	25
5	Planes Óptimos, Modelo Log-lineal Exponencial	27
5.1	Preliminares	28
5.2	Plan óptimo sin censura	30
5.2.1	Prueba óptima simple con tiempo escalonado	30
5.2.2	Cálculo de la varianza de la distribución de $\ln[\theta(x_0)]$	36
6	Planes Óptimos, Modelo Log-lineal Weibull y Conclusiones	49
6.1	Plan óptimo sin censura y con censura	50
6.2	Plan óptimo con censura y sin censura	50
6.2.1	Preliminares	51
6.3	Conclusiones	56
	Referencias	59

Agradecimientos

Agradezco a mis asesores de tesis Dr. Enrique Villa Diharce y Dr. Andrés Christen Gracia por su paciencia y certeza al dirigirme en este trabajo de tesis, por la oportunidad de trabajar con un investigador en el área de Probabilidad y Estadística. A los sinodales Dr. Rogelio Ramos Quiroga y Dra. María Guadalupe Russell Noriega por revisar mi tesis. A la Dra. Eloisa Díaz Francés, coordinadora del posgrado en el área de Probabilidad y Estadística, por su apoyo. Al CONACYT, CONCYTEG y CIMAT por el apoyo para la realización de mi maestría. A todos mis maestros de la Maestría en Probabilidad y Estadística, por aprender y ayudar a formarme como Maestro en Ciencias. A todos mis amigos: Juan (Mondragón), Perú, Mery, Noriki, Rony, Lupita, Simón, Manuel, Agus, Mariano, Jesús, Rubén, Vicente, Martín, Alejandro, Niño, Miky, nuestra secretaria Genoveva y a su esposo Dr. J. Elías Rodríguez Muñoz, al Dr. Armando Domínguez, etc. A toda mi familia, en especial a mi mamá, gracias por todo su APOYO.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad existe una gran competencia para desarrollar productos de alta tecnología en un tiempo específico, mejorando la productividad, la confiabilidad del producto y sobre todo la calidad. Por ello se desarrollan nuevas áreas en ingeniería y diseño de experimentos para productos y mejoramiento del proceso de fabricación. Una de las herramientas utilizadas para poder decir con una certeza razonable la confiabilidad de un determinado producto son las pruebas de vida acelerada, ya que éstas nos permiten adelantar las pruebas de materiales, componentes y sistemas, dando como resultado un conocimiento sobre el tiempo de vida del producto, utilizando modelación estadística.

En la mayoría de estudios de confiabilidad la finalidad es decidir el tiempo de garantía, aunque en la literatura clásica de confiabilidad surgen ambigüedades para su selección: muchas de las veces sólo se señala que el tiempo de garantía debe ser elegido con base a percentiles "bajos" de la distribución del tiempo a la falla. En esta tesis abordamos este problema mediante un diseño óptimo para pruebas de vida acelerada con esfuerzos escalonados, y proponemos una metodología

basada en estadística bayesiana. Los productos más modernos son fabricados para operar sin fallas durante años, décadas o mucho más tiempo, por lo que, muy pocas unidades fallarán en una prueba en condiciones normales de uso; por ejemplo, el diseño y construcción de un satélite de comunicación sólo puede permitir pocos meses para probar sus componentes que se espera que tengan un tiempo de vida de 10 a 15 años. Por tal razón, las pruebas de vida aceleradas (**PVA**) son muy usadas en la industria, para obtener oportunamente información sobre la distribución del tiempo de vida de los productos de interés.

El trabajo de tesis se ha organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presenta una pequeña introducción a las pruebas de vida aceleradas, en la cual se presentan los métodos de aceleración y los diferentes tipos de esfuerzos que se utilizan cuando se realiza una **PVA**.

En el capítulo 3 abordamos las principales relaciones entre la vida y el esfuerzo, y la descripción matemática del modelo de daño acumulado; esta relación es fundamental en la modelación de las pruebas de vida acelerada con esfuerzos escalonados.

En el capítulo 4 vemos elementos de inferencia bayesiana, tratando de que el material sea visto como un autocontenido para el lector.

En el capítulo 5 se hace una pequeña descripción de muestreo secuencial y se desarrollan planes óptimos simples cuando la distribución es exponencial con y sin censura.

Terminamos con el capítulo 6, en el cual se presenta el plan óptimo cuando la distribución del tiempo de vida es Weibull; en primera instancia cuando el parámetro de forma es conocido y después cuando éste es desconocido, finalizando con algunos comentarios sobre los planes óptimos obtenidos.

Capítulo 2

Pruebas de Vida Aceleradas (PVA)

2.1 Introducción

Las pruebas aceleradas se han vuelto cada día más importantes debido a los grandes cambios en la tecnología y la competencia entre mercados, que cada vez es mucho mayor. Desde el punto de vista de la competitividad los fabricantes están forzados a mantener en forma permanente programas de crecimiento de la confiabilidad de más productos en periodos cada día más cortos, con el fin de atraer clientes y además mantener su lealtad, por lo que hay la necesidad creciente en la industria de realizar estudios de la distribución del tiempo de vida de determinados productos. Dentro del campo de la confiabilidad, hay muchas maneras de definir el término aceleración, pero este término generalmente implica ir más rápidamente en el tiempo, de tal manera que la información del tiempo de vida de un determinado producto se obtiene más tempranamente y entonces poder

hacer un estudio del tiempo de vida de los productos en prueba [4, pág. 467]. El presente capítulo esta basado en el trabajo realizado en la Tesis de José del Carmen Jiménez Hernández (2004) [5, Cap. 1]

2.2 Tipos de respuesta

En esta sección trataremos de distinguir entre las pruebas aceleradas en base a lo que podamos observar.

Pruebas de Vida Aceleradas: En estas pruebas observamos el tiempo de vida de componentes que fallan durante el estudio o cotas inferiores del tiempo de vida para los componentes que no fallan durante el tiempo de observación.

Pruebas de Degradación Aceleradas: En estas pruebas nos concentramos en observar alguna característica que se degrada durante el tiempo y que está relacionada con un tipo de falla de la unidad estudiada.

Existe una relación muy estrecha entre los modelos de **PVA** y **PDA**, ya que en algunos casos se usa un análisis de datos de degradación para definir tiempos a la falla, volviéndose los datos de una **PDA**, en datos para una **PVA**. Sin embargo, debido a los diferentes tipos de respuesta, el ajuste de los modelos a los datos y los métodos de análisis difieren.

2.3 Métodos de aceleración

En esta sección presentaremos tres métodos de aceleración, los cuales son los más comunes cuando uno realiza un estudio de confiabilidad.

1. Incrementar la tasa de uso del producto. Por ejemplo, consideramos la confiabilidad de una

tostadora, la cual tiene una vida media de 20 años, asumiendo que en promedio es usada dos veces cada día. Si nosotros utilizamos 365 veces en un día la tostadora, entonces podemos reducir la vida media alrededor de 40 días.

2. Incrementar la tasa de envejecimiento del producto, ya sea incrementando el nivel de las variables experimentales como temperatura, voltaje o humedad, dado que éstas puedan acelerar el proceso de ciertos mecanismos de falla, tal como la degradación de cierto producto o el aumento de corriente en un aislante (eventualmente causando un corto circuito), etc.
3. Incrementar el nivel de variables ambientales en operación-esfuerzo bajo el cual opera la unidad en prueba, ya que una unidad generalmente fallará más rápido en un esfuerzo alto que si se somete a un esfuerzo más bajo.

Las variables tales como la temperatura y el voltaje combinados pueden incrementar la velocidad de una reacción mecánica incrementando el esfuerzo a su resistencia. La interpretación de los datos en una prueba acelerada requiere de modelos que relacionen las variables de aceleración, como las mencionadas anteriormente con el tiempo a la falla. En este sentido, es donde la modelación estadística es aplicada, debido a que con herramientas estadísticas tratamos de modelar este tipo de fenómenos, para poder obtener información del tiempo a la falla de determinados productos.

2.4 Tipos de esfuerzo

Como se citó en la sección anterior, nosotros deseamos que en la aplicación del esfuerzo sea posible relacionar estadísticamente los tiempos a la falla en una prueba con el tiempo de vida en condiciones de operación normal. En esta sección se describen tres formas de esfuerzo, las cuales son las más comunes y usadas por los fabricantes.

2.4.1 Esfuerzo constante

Una **PVA** bajo esfuerzo constante, consiste en someter a una unidad a un nivel de esfuerzo constante durante determinado tiempo. Los modelos para pruebas de vida acelerada bajo esfuerzo constante, han sido desalloradas y verificadas empíricamente para algunos materiales y productos. Existe un gran estudio relacionados con este tipo de pruebas, tanto en la literatura clásica de probabilidad, como en el área de computación. Además, una de las ventajas de este tipo de pruebas es que son más fáciles de aplicar que otras, como las mencionadas más adelante en esta sección.

Una **PVA** bajo esfuerzo constante, consiste en someter a una unidad a un nivel de esfuerzo constante durante determinado tiempo. Los modelos para pruebas de vida acelerada bajo esfuerzo constante, han sido desalloradas y verificadas empíricamente para algunos materiales y productos. Existe un gran estudio relacionados con este tipo de pruebas, tanto en la literatura clásica de probabilidad, como en el área de computación. Además, una de las ventajas de este tipo de pruebas es que son más fáciles de aplicar que otras, como las mencionadas más adelante en esta sección.

La Figura 2.1 representa una **PVA** con esfuerzo constante con tres niveles de esfuerzos denotados por V_1 , V_2 y V_3 (bajo, medio y alto respectivamente). Se pusieron en prueba 5, 4 y 5 unidades en prueba en los niveles bajo, medio y alto respectivamente. De las 5 unidades puestas en prueba en el esfuerzo bajo solamente fallaron 2, en el esfuerzo medio fallaron 3 de las 4 unidades puestas en prueba en este nivel y en el nivel alto todas las unidades fallaron. La vida de cada unidad expresa cómo se mueve a lo largo de la línea horizontal hasta que falla a un cierto tiempo mostrado por X , y una unidad que no ha fallado aún tiene su vida mostrada por \triangleright .

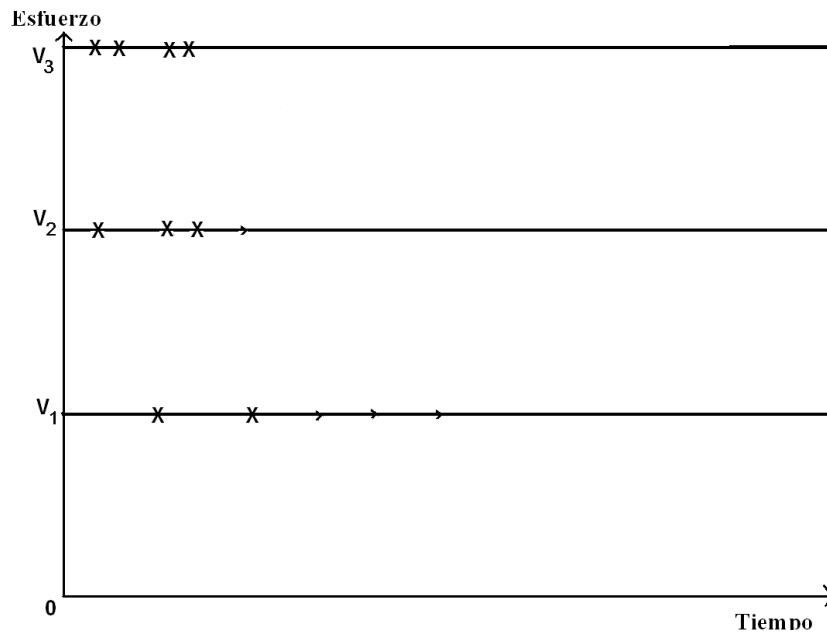


Figura 2.1. Esfuerzo constante (X falla, > no falla)

2.4.2 Esfuerzo escalonado

El trabajo de tesis se basa en este tipo de pruebas, por lo que lo describiremos de una forma más detallada. En una prueba acelerada con esfuerzos escalonados, cada unidad se somete sucesivamente a un esfuerzo de nivel creciente o decreciente, dependiendo del diseño de la prueba. Casi siempre al principio cada unidad se somete a un nivel de esfuerzo constante por un tiempo determinado y si no falla, se somete a otro nivel de esfuerzo más alto por otro determinado tiempo y así sucesivamente, es decir, el esfuerzo aplicado a cada unidad aumenta paso a paso hasta que la unidad falla o se censura. El tiempo en el cual permanecen en prueba los productos en cada nivel de esfuerzo debe proporcionar la mejor inferencia de los parámetros o funciones de este, que caracterizan la distribución del tiempo de vida de los productos estudiados; este es el principal objetivo del presente trabajo.

Como lo mencionamos en la introducción de este trabajo de tesis, en muchas ocasiones no se tiene información sobre el tiempo de vida de determinados productos, ya que con los avances de la tecnología de hoy en día, existen productos que tienen un periodo de vida demasiado grande. Una de las principales ventajas de pruebas bajo esfuerzo escalonado es que las fallas se presentan rápidamente, ya que los niveles de esfuerzo se incrementan sucesivamente. Desde el punto de vista estadístico esto nos permite realizar una mejor modelación del tiempo de vida del producto en estudio.

La Figura 2.2 representa una **PVA** bajo esfuerzo escalonado con tres niveles de esfuerzos denotados por V_1 , V_2 y V_3 (bajo, medio y alto respectivamente); se ponen en prueba 8 unidades en el esfuerzo bajo, fallando en tal esfuerzo solamente 2 unidades; las unidades que no fallaron se cambian al segundo esfuerzo y fallan 4 de las 6 unidades restantes y por último estas 2 unidades que no han fallado se ponen en prueba en el esfuerzo alto, las cuales fallan.

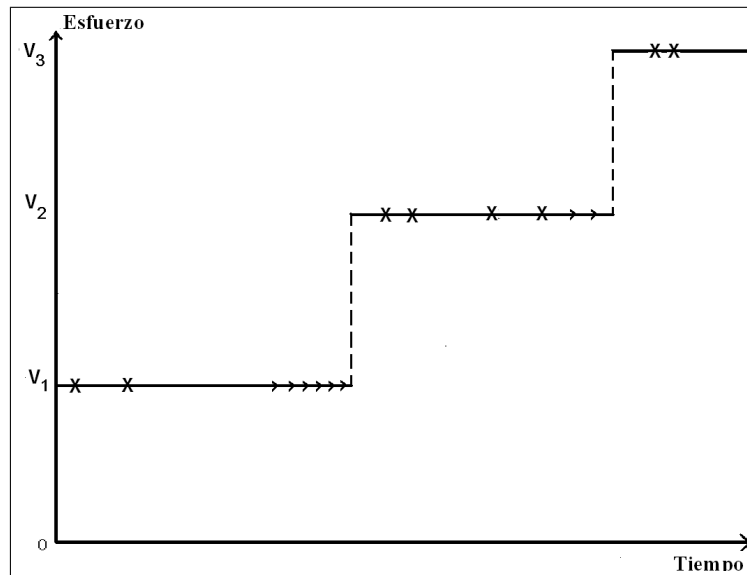


Figura 2.2. Esfuerzo escalonado (X falla, > no falla)

2.4.3 Esfuerzo progresivo

En una prueba de vida acelerada con esfuerzos progresivos, cada unidad experimenta un nivel de esfuerzo que se incrementa continuamente a lo largo del tiempo.

Pruebas aceleradas bajo esfuerzo constante y pruebas aceleradas bajo esfuerzo escalonado son más utilizadas que las pruebas aceleradas bajo esfuerzo progresivo, ya que en ocasiones es difícil controlar exactamente el esfuerzo progresivo aplicado.

Capítulo 3

Modelo Bajo Esfuerzo Escalonado

En el presente capítulo desarrollaremos el modelo de daño acumulado para una **PVA** bajo esfuerzos escalonados (**PVAEE**). En la sección 3.1 daremos una introducción de los componentes de un modelo para una prueba de vida acelerada, siguiendo la sección 3.2 donde se describen algunas relaciones que existen entre la vida y el esfuerzo. En la sección 3.3 formulamos el modelo bajo esfuerzo escalonado y finalizaremos este capítulo con la sección 3.4 en la cual se describe el modelo Potencia-Weibull y Arrhenius-Weibull, los cuales son de los modelos más utilizados en **PVA**.

3.1 Introducción

La mayoría de **PVA** para un modelo estadístico tienen los siguientes dos componentes:

1. Una distribución paramétrica para el tiempo de vida de una población de unidades a determinados niveles experimentales de una o más variables de esfuerzo. Es posible evitar esta suposición para algunas aplicaciones, pero algunos modelos paramétricos (Weibull, Lognormal,

Exponencial) proporcionan muchas ventajas prácticas para un gran número de aplicaciones.

2. Una relación entre uno o más parámetros de la distribución del tiempo de falla y las variables de aceleración u otras variables experimentales. Tal relación modela el efecto que las variables como temperatura o voltaje tendrán en la distribución del tiempo de falla.

3.2 Relación Vida-Esfuerzo

Como lo mencionamos, en la sección anterior en las **PVA** existe una relación entre la vida de una población y el esfuerzo. En esta sección presentaremos dos de las relaciones más comunes para **PVA** bajo esfuerzo constante [3, Cap. 2], [4, Cap. 18].

3.2.1 Relación Potencia Inversa

Supongamos que la variable de aceleración V es positiva, la relación de potencia inversa entre la vida nominal ϑ de un producto y el esfuerzo V es

$$\vartheta(V) = \frac{A}{V^\gamma}, \quad (3.1)$$

donde A y γ son parámetros característicos del producto, de la geometría y fabricación del espécimen, del método de prueba etc. El parámetro γ es llamado la potencia o exponente.

Si la vida de cierto producto se modela mediante una distribución Weibull, Lognormal o Exponencial y se combina con la relación descrita, al modelo se le llama modelo **Potencia-Weibull**, **Potencia-Lognormal** o **Potencia-Exponencial**, respectivamente.

3.2.2 Relación de Arrhenius

Supongamos que la variable de aceleración es la temperatura (T), la relación de Arrhenius entre el cuantil de la distribución de cierto producto es la siguiente

$$\vartheta(T) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (3.2)$$

donde

$\vartheta(T)$ es el cuantil de la distribución.

E es la energía de activación, generalmente en electrón-volts.

k es la constante de Boltzmann, 8.617×10^{-5} electrón-volts por $^{\circ}\text{C}$.

T es la temperatura absoluta en grados Kelvin.

A es una constante característica del producto, del método de aceleración y otros factores.

Ahora, si se modela la vida de cierto producto mediante una distribución Weibull, Lognormal o Exponencial y se combina con la relación Arrhenius, al modelo se le llama modelo **Arrhenius-Weibull**, **Arrhenius-Lognormal** o **Arrhenius-Exponencial**, respectivamente [4, Cap. 18]

[3, págs. 79-84].

Estos modelos, describen la vida de una unidad como función del esfuerzo constante. Un supuesto que se hace en la versión simple, en estos modelos de vida acelerada, es que el **parámetro de forma** de la distribución (Weibull, Lognormal o Exponencial) que modela el tiempo de vida de determinado producto no varía con el esfuerzo.

Ejemplo 1 *Supongamos que la vida de cierto material se modela mediante una distribución Weibull (β, η) , en la cual la vida característica es una función potencia inversa del esfuerzo, entonces por lo que hemos mencionado, tenemos un modelo **Potencia-Weibull**, es decir,*

1. Para cualquier esfuerzo V positivo, la vida del producto tiene una distribución Weibull.
2. El parámetro de forma β es constante e independiente del esfuerzo V .
3. El parámetro de escala η es una función potencia inversa del esfuerzo V , es decir,

$$\eta(V) = \left(\frac{V_0}{V} \right)^p, \quad (3.3)$$

donde los parámetros V_0 , p y β son característicos del producto y del método de prueba utilizada, por lo que la fracción de unidades que fallan al tiempo t bajo esfuerzo constante V es

$$F(t, V) = 1 - \exp \left[- \left\{ t \left(\frac{V_0}{V} \right)^p \right\}^\beta \right], \quad t > 0, \quad (3.4)$$

y el cuantil ρ al nivel de esfuerzo V es

$$t_\rho(V) = \eta(V) [-\ln(1 - \rho)]^{1/\beta}. \quad (3.5)$$

3.3 Modelo de daño acumulado

El modelo de daño acumulado para un modo de falla nos permite relacionar la distribución bajo esfuerzo escalonado y la distribución bajo esfuerzo constante, el cual, se describe a continuación.

3.3.1 Supuestos

Supongamos que el modelo para el modo de falla de la vida restante de unidades sólo depende de la fracción de fallas que se han acumulado hasta ese momento y del esfuerzo actual, es decir, tienen la propiedad de Markov, esto es, las unidades que no han fallado a un esfuerzo más bajo lo harán

de acuerdo a la distribución acumulada para el esfuerzo, pero empezando en la fracción de fallas acumulada previamente, sin afectar el cambio de esfuerzo sobre la vida de las unidades.

3.3.2 Formulación matemática

La formulación matemática de lo comentado sobre el modelo de daño acumulado se describe a continuación.

Para cada esfuerzo escalonado, hay una distribución $F(\cdot)$ al tiempo t de fallas en la prueba, por lo que si, el escalón i lo sometemos al esfuerzo V_i , empezando al tiempo t_{i-1} hasta el tiempo t_i con $t_0 = 0$, entonces la función de distribución acumulada para unidades a esfuerzo constante V_i es $F_i(t)$, esto es:

Paso 1. La fracción acumulada de unidades que fallan en el escalón 1 es

$$F(t) = F_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Paso 2. Para el escalón 2 empieza a un tiempo equivalente e_1 , el cual produce la misma fracción de fallas acumuladas de la población, es decir,

$$F_2(e_1) = F_1(t_1).$$

Por lo que la fracción de fallas en el segundo esfuerzo al tiempo total t es

$$F(t) = F_2[(t - t_1) + e_1], \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Paso i. En general, al escalón i empieza al tiempo e_{i-1} dado por

$$F_i(e_{i-1}) = F_{i-1}(t_{i-1} - t_{i-2} + e_{i-2})$$

por lo que

$$F(t) = F_i [(t - t_{i-1}) + e_{i-1}], \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Entonces $F(t)$, para un esfuerzo escalonado, consiste de segmentos de las distribuciones acumuladas $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, etc, como se muestra en la Figura 3.1.

En la Figura 3.1 se describen 4 pasos del modelo de daño acumulado para cuatro niveles de esfuerzo (V_1 , V_2 , V_3 y V_4). En la Figura 3.2 se presentan las diferentes distribuciones cuando se tiene una **PVA** con estos 4 niveles de esfuerzo con el modelo de daño acumulado y en la Figura 3.3 tenemos la función de distribución del modelo de daño acumulado con estos cuatro esfuerzos.

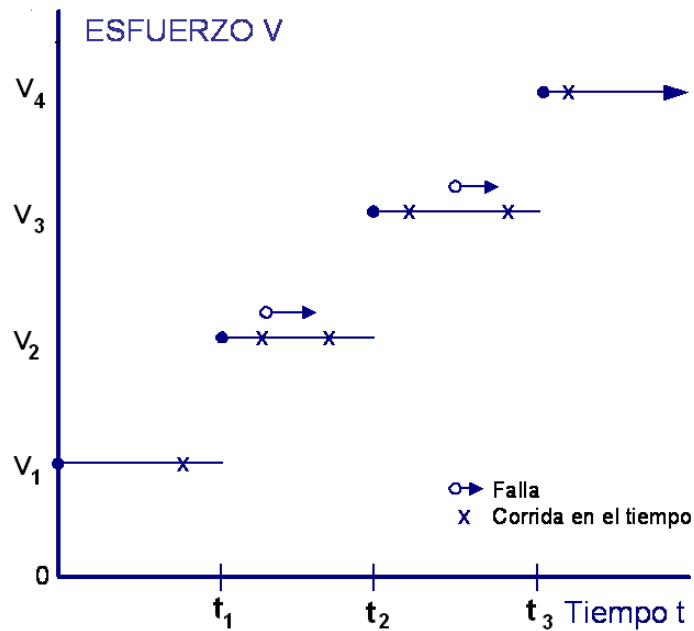


Figura 3.1. Modelo de daño acumulado

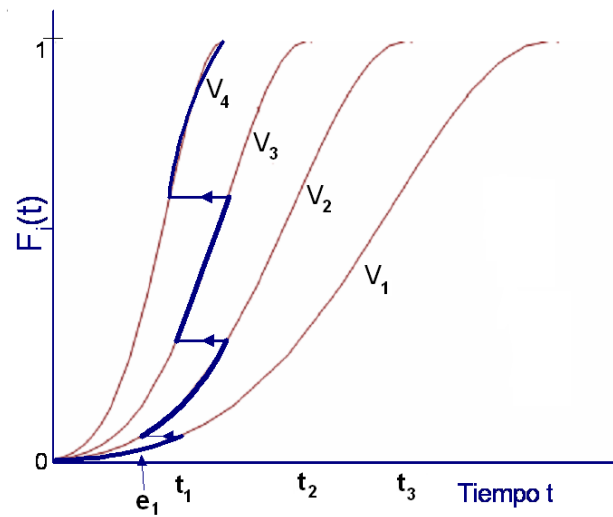


Figura 3.2. Funciones de distribución cuando se tiene una **PVA** con 4 esfuerzos escalonados.

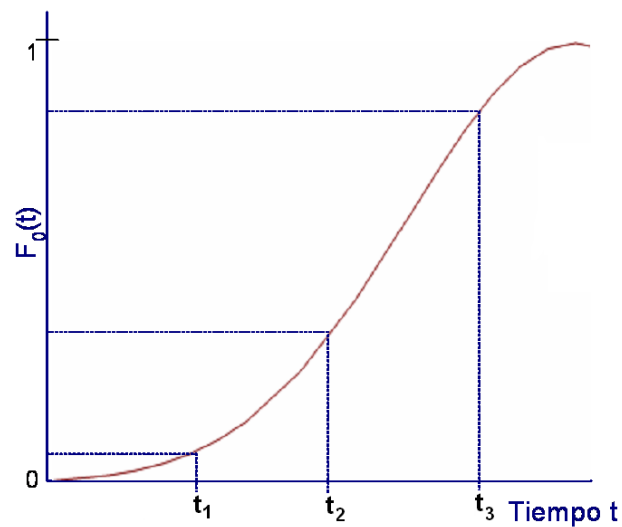


Figura 3.3. Función de distribución para una **PVAEE**.

3.4 Daño acumulado para la relación de potencia inversa

El modelo de daño acumulado para la relación de potencia inversa puede ser expresado en una forma simple y equivalente para $F(t)$ en un modo de falla. Para el modelo, la fracción de fallas

después de cualquier esfuerzo escalonado es independiente del orden de los escalones como sigue. Supongase que el escalón i está al nivel de esfuerzo V_i con la correspondiente vida característica $\eta_i = (V_0/V_i)^p$ para el tiempo $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$. Entonces se puede demostrar que la fracción de fallas al tiempo $t_I = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_I$ después del paso I es

$$F(t) = 1 - \exp \left[-\{\varepsilon(t)\}^\delta \right]; \quad (3.6)$$

Aquí el daño acumulado $\varepsilon(t)$ para el modo de falla es

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta_1}{\eta_1} + \frac{\Delta_2}{\eta_2} + \dots + \frac{\Delta_{I-1}}{\eta_{I-1}} + \frac{t - t_{I-1}}{\eta_I}, \quad t_{I-1} \leq t \leq t_I \quad (3.7)$$

Δ_I puede ser sólo una fracción del tiempo planeado al paso I . Sin embargo, los valores de $F(t)$ y $\varepsilon(t)$ son los mismos a pesar del orden del paso I , cada uno con su correspondiente tiempo Δ_i al nivel de esfuerzo V_i . (3.6) es una forma simple y equivalente del modelo de daño acumulado. De cualquier forma, para algunos modos de fallas, productos y materiales, el comportamiento de las fallas depende del orden del escalón, llamado efecto secuencial; (3.7) no tiene tal efecto.

Los resultados (3.6) y (3.7) se pueden extender a cualquier modelo donde la distribución de tiempo de vida es $F(t, V)$ para un modo de falla que depende de un esfuerzo constante V a través de un parámetro de escala $\theta(V)$, es decir,

$$F(t, V) = G \left[\frac{t}{\theta(V)} \right];$$

aquí $G[\cdot]$ es la función de distribución acumulada con el parámetro de escala igual a 1. Los modelos simples **Lineal-Lognormal**, **Lineal-Weibull** y **Lineal-Exponencial** tienen esta propiedad. El parámetro de escala de la distribución Lognormal es la mediana y en la distribución Exponencial el parámetro de escala es la media. En otras distribuciones los parámetros son constantes y no son estudiados aquí. Entonces $F(t, V) = G(\varepsilon)$ donde $\varepsilon = [\Delta_1/\theta(V_1)] + [\Delta_2/\theta(V_2)] + \dots + [\Delta_I/\theta(V_I)]$. Por ejemplo para el modelo **Potencia-Weibull** descrito antes,

$$\varepsilon = \left[\frac{t_1 - 0}{(V_0/V_1)^p} \right] + \left[\frac{t_2 - t_1}{(V_0/V_2)^p} \right] + \dots + \left[\frac{t - t_{I-1}}{(V_0/V_I)^p} \right], \quad t_{I-1} \leq t \leq t_I.$$

Y similarmente tenemos que el modelo de daño acumulado para la relación de Arrhenius se puede expresar en una forma simple y equivalente para $F(t)$ para un modo de falla. Para este modelo, la fracción de fallas después de cualquier esfuerzo escalonado es independiente del orden de los escalones como sigue. Supóngase que el escalón i está al nivel de esfuerzo T_i con la correspondiente vida característica $\eta_i(T) = A \exp(\frac{E_a}{k_B T_i})$ para el tiempo $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$. Entonces se puede demostrar que la fracción de fallas al tiempo $t_I = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_I$ después del paso I es

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \{ \varepsilon(t) \}^\delta \right];$$

aquí el daño acumulado $\varepsilon(t)$ para el modo de falla es:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\Delta_1}{\eta_1} + \frac{\Delta_2}{\eta_2} + \dots + \frac{\Delta_{I-1}}{\eta_{I-1}} + \frac{t - t_{I-1}}{\eta_I}, \quad t_{I-1} \leq t \leq t_I \\ &= \left[\frac{t_1 - 0}{A \exp(\frac{E_a}{k_B T_1})} \right] + \left[\frac{t_2 - t_1}{A \exp(\frac{E_a}{k_B T_2})} \right] + \dots + \left[\frac{t - t_{I-1}}{A \exp(\frac{E_a}{k_B T_i})} \right], \quad t_{I-1} \leq t \leq t_I. \end{aligned}$$

Δ_I puede ser sólo una fracción del tiempo planeado al paso I . Sin embargo, los valores de $F(t)$ y $\varepsilon(t)$ son los mismos a pesar del orden del paso I , cada uno con su correspondiente tiempo Δ_i al nivel del esfuerzo T_i .

Capítulo 4

Inferencia Bayesiana y Muestreo Secuencial

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales de la inferencia Bayesiana y algunos conceptos generales sobre la verosimilitud. No es objetivo del capítulo presentar una versión exhaustiva, sino sólo elementos generales que permitan que el trabajo sea autocontenido. Para profundizar en este tema el lector puede consultar Bernardo y Smith (1994) [1] y Morris H. DeGroot [2].

4.1 Inferencia Bayesiana

La inferencia bayesiana está basada en especificar un modelo de probabilidad $f(x | \theta)$ para los datos observados, X , dado un vector de parámetros θ del valor desconocido. Generándose así la función de verosimilitud, $L(\theta | X)$, que es la distribución conjunta condicional de X para un valor dado del parámetro θ . Entonces tenemos que θ es una variable aleatoria, que tiene una distribución a priori

o inicial denotada por $\pi(\theta)$. Es precisamente a través de $\pi(\theta)$ como el investigador incorpora formalmente el conocimiento inicial que tiene sobre el fenómeno bajo estudio. De esta manera las inferencias respecto a θ se basan en la distribución a posteriori o posterior, la cual es obtenida por el teorema de Bayes:

Si H denota una hipótesis y X los datos, entonces el teorema de Bayes, en su forma más simple nos dice lo siguiente:

$$P(H | X) = \frac{P(X | H)P(H)}{P(X)}, \quad (4.1)$$

donde $P(H)$ es una afirmación probabilística de certidumbre acerca de H antes de obtener los datos X , y $P(H | X)$ se convierte en una afirmación probabilística de creencia acerca de H después de haber obtenido los datos. Habiendo especificado $P(H)$ y $P(X | H)$, el teorema de Bayes nos proporciona una solución al problema sobre qué tanto se aprende de los datos.

Teorema *La distribución posterior $\pi(\theta | X)$ es la distribución condicional de θ dados los datos, y está dada por*

$$\pi(\theta | X) = \frac{L(X | \theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(X | \theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (4.2)$$

donde Θ es el espacio paramétrico de θ .

Este teorema es una aplicación del teorema de Bayes; observando este resultado vemos que $\pi(\theta | X)$ es proporcional a la verosimilitud multiplicada por la distribución apriori,

$$\pi(\theta | X) \propto L(X | \theta)\pi(\theta) \quad (4.3)$$

de aquí que el denominador de (4.2), que es la distribución conjunta marginal de los datos,

$$h(X) = \int_{\Theta} L(X | \theta)\pi(\theta)d\theta, \quad (4.4)$$

recibe el nombre de verosimilitud integrada. En la mayoría de los modelos y aplicaciones la verosimilitud integrada no tiene una forma analítica cerrada, por lo tanto $\pi(\theta | X)$ tampoco la

tiene. Esto genera una gran cantidad de literatura que plantean diferentes alternativas para estimar $h(X)$, lo cual nos permite calcular la distribución posterior.

Dada la función de distribución a priori y la función de verosimilitud, entonces se especifica la función de distribución posterior utilizando (4.2). La simulación puede ser usada para generar una muestra de la función de distribución posterior. Entonces esta muestra puede ser utilizada para aproximar la función de distribución posterior. Usando un tamaño de muestra lo suficientemente "grande" obtendremos una buena aproximación y el tamaño de muestra está limitado por el equipo de cómputo y del tiempo de la prueba. El procedimiento es general y fácil de aplicar, requiriendo solo las expresiones de la verosimilitud y de algún método de simulación para la generación de valores del parámetro desconocido con función de distribución a priori. La simulación de la muestra con función de distribución posterior se realiza por medio del algoritmo llamado Metrópolis-Hastings, el cual es un caso particular del método Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Para mayor información ver referencia [9].

Algoritmo Sea $Y \sim f_Y(y)$ y $V \sim f_V(v)$, donde f_Y y f_V tienen un soporte común. Para generar $Y \sim f_Y$; seguimos los siguientes pasos:

0. Generar $V \sim f_V$. Sea $Z_0 = V$.

Para $i = 1, 2, \dots$:

1. Generar $U_i \sim \text{Uni}(0, 1)$, $V_i \sim f_V$ y calcule

$$\rho_i = \min \left\{ \frac{f_Y(V_i) f_V(Z_{i-1})}{f_V(V_i) f_Y(Z_{i-1})}, 1 \right\}.$$

2. Sea

$$Z_i = \begin{cases} V_i & \text{si } U_i \leq \rho_i \\ Z_{i-1} & \text{si } U_i > \rho_i \end{cases}$$

Entonces, cuando $i \rightarrow \infty$, Z_i converge a Y en distribución.

Veamos porque solo se requiere la expresión de la verosimilitud y un método de generación para

el parámetro desconocido con función de distribución la apriori, para generar una muestra de la distribución posterior. Si f_Y es la función de densidad posterior $\pi(\theta | X)$ y f_V es la función de densidad apriori $\pi(\theta)$, entonces:

$$\rho_i = \min \left\{ \frac{\pi_{\theta|X}(\theta_i)}{\pi_{\theta}(\theta_i)} \frac{\pi_{\theta}(Z_{i-1})}{\pi_{\theta|X}(Z_{i-1})}, 1 \right\} = \min \left\{ \frac{\frac{L(X\theta_i | X)\pi_{\theta}(\theta_i)}{h(X)}}{\pi_{\theta}(\theta_i)} \frac{\pi_{\theta}(Z_{i-1})}{\frac{L(Z_{i-1} | X)\pi_{\theta}(Z_{i-1})}{h(X)}}, 1 \right\},$$

$$\rho_i = \min \left\{ \frac{L(\theta_i | X)\pi(\theta_i)}{\pi_{\theta}(\theta_i)} \frac{\pi_{\theta}(Z_{i-1})}{L(Z_{i-1} | X)\pi(Z_{i-1})}, 1 \right\} = \min \left\{ \frac{L(\theta_i | X)}{L(Z_{i-1} | X)}, 1 \right\}.$$

Es decir, el algoritmo nos dice que si evaluamos la verosimilitud en los valores generados del parámetro desconocido cuya función de distribución es la apriori y nos quedamos con aquellos valores más verosimil, estos valores así generados tendrán como función de distribución a la distribución posterior.

Como lo habíamos mencionado, en estadística bayesiana las inferencias respecto a θ están basadas en $\pi(\theta | X)$, por lo que podemos decir que $\pi(\theta | X)$ es la contribución de los datos a través de $L(X | \theta)$ y del aporte de la información o conocimiento apriori cuantificado por $\pi(\theta)$.

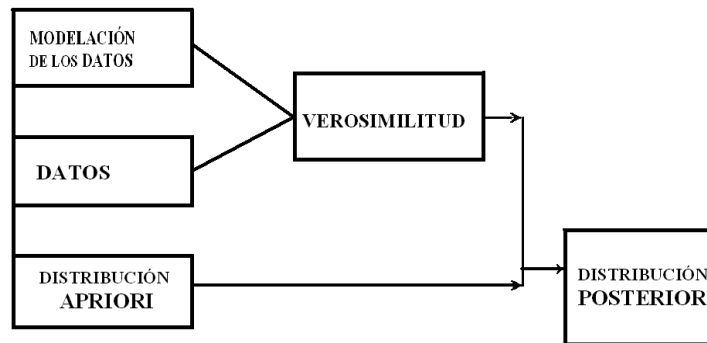


Figura 4.1. Método bayesiano para realizar inferencia o predicciones.

4.1.1 Muestreo Secuencial

En estadística bayesiana existe una teoría para muestreo secuencial óptimo [2, Cap.12, Cap.13, Cap.14], en esta sección no es objetivo presentar de una forma exhaustiva esta área de teoría de decisiones, sino simplemente definir un muestreo secuencial.

Supongamos que x_1, x_2, \dots, x_n ($0 < n < \infty$) son observaciones de alguna distribución $f(\bullet | \theta)$, donde θ es un parámetro desconocido. Después de cada observación x_n , podemos evaluar la información que obtenemos acerca del parámetro desconocido θ de la información proporcionada de las observaciones x_1, x_2, \dots, x_n y entonces uno puede decidir si terminamos el proceso o tomamos otra observación x_{n+1} . Una muestra así obtenida es llamada una muestra secuencial. Este tipo de muestreo es utilizado en los siguientes dos capítulos para desarrollar planes óptimos para el modelo Log-lineal Exponencial y el modelo Log-lineal Weibull.

Capítulo 5

Planes Óptimos, Modelo Log-lineal Exponencial

En el presente capítulo se determina el tiempo óptimo que las unidades estudiadas deben permanecer en una prueba de vida acelerada con esfuerzo escalonado (**PVAEE**) usando sólo dos esfuerzos. En la primera sección del capítulo se dan las preliminares para obtener las pruebas óptimas en las secciones subsecuentes, en la sección 5.2 se presentan una prueba óptima simple bajo el modelo Log-lineal Exponencial y se muestra un ejemplo ilustrativo; y terminamos con la sección 5.3 en la cual daremos planes óptimos para el modelo Log-lineal Exponencial teniendo pequeñas modificaciones a la prueba presentada en la sección 5.2.

Notación:

n – Tamaño total de la muestra.

n_j – Número de unidades que fallarán al esfuerzo x_j , $j = 1, 2$.

τ – Longitud del tiempo al esfuerzo bajo para una prueba con tiempo escalonado.

τ^*, τ_1^* – Tiempos de prueba óptimos a los niveles x_1 y x_2 en una prueba con tiempo escalonado sin censura cuando se inicia con x_1 y x_2 , respectivamente.

β_0, β_1 – Parámetros de la función loglineal entre el esfuerzo y la vida media.

$\theta_0, \theta_1, \theta_2$ – Vida media a los esfuerzos de diseño bajo, medio y alto respectivamente.

x_0, x_1, x_2 – Esfuerzos transformados, de diseño, bajo y alto respectivamente.

5.1 Preliminares

Supongamos que tenemos una prueba de vida acelerada bajo esfuerzos escalonados con solamente dos esfuerzos, por lo que se emplearán dos pasos del modelo de daño acumulado y que la distribución del tiempo a la falla se distribuye exponencial (θ) para cada esfuerzo constante, donde la media θ (o la media característica) es una función log-lineal del esfuerzo x (posiblemente transformado), esto es,

$$\ln[\theta(x)] = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \theta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x) \quad (5.1)$$

Donde β_0 y β_1 son parámetros desconocidos que dependen de la naturaleza del problema y del método de prueba. Ahora, si x es el logaritmo natural del voltaje, entonces (5.1) es la relación de potencia inversa y si en cambio x es el recíproco de la temperatura absoluta, entonces (5.1) es la relación Arrhenius.

Por lo anterior, la fracción de unidades que fallan al tiempo t bajo esfuerzo constante x es

$$F(t, x) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}\right). \quad (5.2)$$

De acuerdo con el modelo de daño acumulado, supongamos que al escalón 1 el esfuerzo tiene el nivel x_1 hasta un tiempo $\tau \in \mathbb{R}^+$, sea $F(t)$ la función de distribución acumulada del tiempo a la

falla al tiempo t por unidades a esfuerzos constantes x_1 y x_2 , esfuerzos bajo y alto respectivamente.

Entonces, la fracción de fallas acumuladas de unidades en el escalón 1 es

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (5.3)$$

donde $\theta_1(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1)$.

Con el modelo de daño acumulado descrito anteriormente la fracción de fallas acumuladas en el escalón 2 al tiempo t es

$$F(t) = F_2(t - \tau + e), \quad t > \tau \quad (5.4)$$

donde e es tal que

$$F_2(e) = F_1(\tau), \quad (5.5)$$

por lo que para el escalón 2, tenemos que

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp\left(-\frac{\left[t - \tau + \tau \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)\right]}{\theta_2}\right) \quad t > \tau. \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{[t - \tau]\theta_1}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}\right) \quad t > \tau. \end{aligned}$$

Suposiciones básicas. Para los planes óptimos que describiremos en este capítulo, haremos los siguientes supuestos.

1. Una prueba sólo usa dos escalones, a los esfuerzos x_1 y x_2 (prueba simple).
2. Los esfuerzos x_1 y x_2 están dados y x_1 es menor que x_2 .
3. El esfuerzo de diseño especificado x_0 está por debajo de x_1 .

Regularmente x_1 se elige tan bajo como sea práctico y que la prueba finalice en un tiempo deseado (usualmente en un tiempo relativamente corto) y x_2 se elige tan alto como sea posible, restringido a la ecuación 5.1.

Criterio de Optimización. Un plan óptimo debe proporcionar una **mejor información de la distribución posterior de** $\ln[\theta(x_0)] = \beta_0 + \beta_1 x_0$, es decir, con la información apriori de los parámetros desconocidos y los datos observados a través de la verosimilitud, decidiremos el tiempo $\tau^* \in \mathbb{R}^+$, el cual nos proporciona una mejor información de la distribución $\ln[\theta(x_0)] = \beta_0 + \beta_1 x_0$. Una manera de cuantificar que tanta información tenemos sobre alguna variable aleatoria es por medio de su varianza, si el plan óptimo nos da una mejor información de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)] = \beta_0 + \beta_1 x_0$, entonces $\tau^* \in \mathbb{R}^+$ será el tiempo que minimice la varianza de la distribución posterior $\ln[\theta(x_0)] = \beta_0 + \beta_1 x_0$. El plan óptimo se describe a continuación.

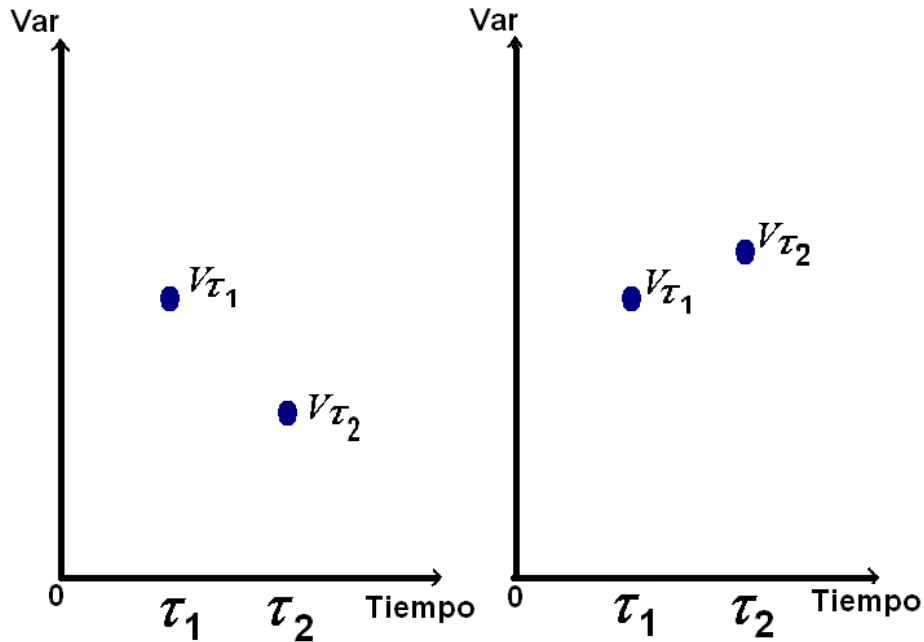
5.2 Plan óptimo sin censura

5.2.1 Prueba óptima simple con tiempo escalonado

Planteamiento de la prueba. Supongamos que se tienen n unidades al inicio de la prueba, es decir, al nivel x_1 que han trabajado hasta un tiempo τ , y que durante este primer escalón observamos que ocurren n_1 fallas. En el escalón 2, al nivel x_2 , sabemos que ocurrirán $n_2 = n - n_1$, pero en este último escalón no sabemos en qué tiempos específicos ocurren las fallas del producto. Denotemos por $t_i < t_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$, los tiempos de falla que ocurren en la prueba en el primer escalón. Se desea determinar el tiempo óptimo τ^* en que las unidades deben permanecer en el esfuerzo x_1 .

Sea $0 < \tau_1 < \tau_2$ y supongamos que tomamos la decisión de cambiar las unidades que no han fallado al tiempo τ_1 del primer esfuerzo al segundo escalón, con la información apriori de los parámetros del modelo y la información proporcionada por medio de la verosimilitud, podemos estimar la varianza de $\ln[\theta(x_0)]$, la cual denotamos por V_{τ_1} ; lo mismo hacemos también para el tiempo τ_2 , es decir, cambiamos las unidades que no han fallado en el primer escalón al segundo

esfuerzo y calculamos V_{τ_2} la varianza de $\ln[\theta(x_0)]$ cuando sea observado fallas en el primer escalón durante un tiempo τ_2 . Entonces siguiendo nuestro criterio de optimización cambiaremos al tiempo τ_2 al segundo esfuerzo si $V_{\tau_2} < V_{\tau_1}$ y cambiaremos las unidades que no hayan fallado al segundo esfuerzo después de observar las unidades un tiempo τ_1 si $V_{\tau_1} < V_{\tau_2}$.



Como lo mencionamos en la introducción de este trabajo de tesis, existe la necesidad de realizar estudios de confiabilidad en un número creciente y en tiempos sistemáticamente reducidos; entonces podríamos pensar que si decidimos cambiar a un tiempo τ relativamente corto las unidades que no han fallado en el primer esfuerzo al segundo escalón, en el cual fallarán más tempranamente tendríamos mayor información sobre la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$, sin embargo como comenta Nelson(1990) [3] "el tiempo total en prueba determina la precisión - no el número de fallas". Ahora si observamos por un tiempo más largo la prueba en el primer escalón y ya no tenemos más información sobre la variable de interés entonces estamos perdiendo tiempo valioso en nuestra

prueba. Entonces lo ideal sería elegir un tiempo τ relativamente corto, en que las unidades esten en prueba en el primer esfuerzo y obtener la mayor información sobre la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$, esto precisamente lo lograremos siguiendo un muestreo secuencial y el criterio de optimización descrito en la sección anterior.

Al inicio de este capítulo mencionamos que β_0 y β_1 son parámetros desconocidos que muchas de las veces los expertos (ingenieros, electricistas, etc.) tienen información relevante sobre estos parámetros de interés y además dichos parámetros cumplen con determinados requisitos los cuales mencionaremos más adelante. Cuando iniciamos el experimento no se cuenta con información probabilística para hacer inferencia sobre la distribución $\ln[\theta(x_0)]$, más que el modelo descrito y la información apriori sobre β_0 y β_1 .

Sin embargo, cuando observamos la prueba un determinado tiempo τ , tenemos ya más información sobre la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$, debido a que la función de distribución de la variable aleatoria $\ln \ln[\theta(x_0)]$ es proporcional a la verosimilitud y a la distribución apriori, ahora podemos entonces estimar la varianza de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$ por medio del algoritmo dado en el capítulo anterior y sería lógico que la varianza de $\ln[\theta(x_0)]$ fuera más pequeña al transcurrir el tiempo en que las unidades permanecen en prueba. Es imposible realizar una estimación de la varianza para cada $\tau \in \mathbb{R}^+$, por lo que haremos una aproximación, es decir, nuestro espacio de decisión es un subconjunto de los números reales positivos \mathbb{R}^+ , el cual se describe a continuación.

Si ponemos todas nuestras unidades n en el primer nivel x_1 , y cuando ocurre la primera falla registramos entonces el tiempo de falla t_1 , por lo que $n_1 = 1$ y $n_2 = n - 1$. Con esta información podemos estimar $var_{\tau_{j_1}} \{\ln[\theta(x_0)]\}$ para algún τ_{j_1} con $t_1 \leq \tau_{j_1} < t_2$ y $j_1 = 1, 2, \dots, m_1$, donde m_1 es un número fijo dado. Ahora supongamos que ya ocurrieron 2 fallas en el primer esfuerzo t_1 y t_2 respectivamente, por lo tanto, $n_1 = 2$ y $n_2 = n - 2$, siguiendo el mismo procedimiento calculamos

$var_{\tau_{j_2}} \{\ln [\theta(x_0)]\}$ para τ_{j_2} con $t_2 \leq \tau_{j_2} < t_3$ y $j_2 = 1, 2, \dots, m_2$, donde m_2 es un número fijo dado, y así sucesivamente; seguimos este procedimiento hasta tomar una decisión de paro. Es decir, tomamos la decisión de cambiar las unidades que no han fallado en el primer esfuerzo al segundo esfuerzo de acuerdo con el modelo de daño acumulado.

Entonces por lo descrito en el planteamiento del problema y nuestro criterio de optimización, tenemos que observaremos 2 fallas en el primer esfuerzo x_1 , sí y sólo si

$$\min_{j_1=1,2,\dots,m_1} var_{\tau_{j_1}} \{\ln [\theta(x_0)]\} > var_{\tau_{j_2}} \{\ln [\theta(x_0)]\} \text{ para } \tau_{j_2} = t_2.$$

Es decir, no se espera reducir más la varianza de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ con más tiempo en el primer esfuerzo. Y así sucesivamente, esto es, observaremos $k + 1$ fallas en el primer esfuerzo, sí y sólo sí

$$\min_{j_k=1,2,\dots,m_k} var_{\tau_{j_k}} \{\ln [\theta(x_0)]\} > var_{\tau_{j_{k+1}}} \{\ln [\theta(x_0)]\} \text{ para } \tau_{j_{k+1}} = t_{k+1}.$$

Por lo tanto, cuando en algún tiempo τ , para $t_k \leq \tau < t_{k+1}$

$$var_{\tau} \{\ln [\theta(x_0)]\} > var_{t_{k+1}} \{\ln [\theta(x_0)]\},$$

observaremos $k + 1$ fallas en el primer esfuerzo. Ahora si para un tiempo τ , con $t_k \leq \tau < t_{k+1}$, tengamos que

$$var_{\tau} \{\ln [\theta(x_0)]\} \leq var_{t_{k+1}} \{\ln [\theta(x_0)]\},$$

observaremos solamente k fallas en el primer escalón y nuestro tiempo óptimo τ^* será

$$\min_{\tau_{j_k}=1,2,3,4,\dots,m_k} var_{\tau_{j_k}} \{\ln [\theta(x_0)]\} . \quad (5.6)$$

Para decidir nuestro tiempo óptimo τ^* , se requiere la estimación de la varianza de la variable $\ln(\theta(x_0))$ para cualquier tiempo $\tau \in \mathbb{R}^+$ y para realizar esta estimación, según el algoritmo dado

en el capítulo anterior, es necesario el cálculo de la función de verosimilitud y de la generación de valores de las variables aleatorias β_0 y β_1 .

Función de Verosimilitud

A continuación presentamos la función de verosimilitud $L(\bullet | X)$, la cual esta dada por

$$L(\beta_0, \beta_1, \tau, n, n_1, t_i | X) = \left(\prod_{i=1}^{n_1} f_1(t_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} (1 - F_2(\tau)) \right) P_{n_1} \quad \text{para } t_{n_1} \leq \tau < t_{n_1+1}, \quad (5.7)$$

donde P_{n_1} es la probabilidad de que sucedan cero fallas del tiempo t_{n_1} al tiempo τ . Ahora nosotros estamos interesados en la distribución de las n_2 restantes en el intervalo de tiempo de t_{n_1} al tiempo τ , pero es fácil verificar que

$$n_2 | n_1, \tau, \beta_0, \beta_1 \sim Bin(n - n_1, F_1(\tau) - F_1(t_{n_1})),$$

por lo que

$$P_{n_1} = \binom{n_2}{0} (F_1(\tau) - F_1(t_{n_1}))^0 (1 - (F_1(\tau) - F_1(t_{n_1})))^{n_2-0} = (1 - [(F_1(\tau) - F_1(t_{n_1}))])^{n_2}.$$

Por lo tanto

$$L(\beta_0, \beta_1, \tau, n, n_1, t_i | X) = \left(\prod_{i=1}^{n_1} \left(\frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x_1} \right) \exp \left(-\frac{t_i}{\beta_0 + \beta_1 x_1} \right) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} \exp \left(-\frac{\tau}{\beta_0 + \beta_1 x_1} \right) \right) (1 - (F_1(\tau) - F_1(t_{n_1})))^{n_2},$$

para $t_{n_1} \leq \tau < t_{n_1+1}$.

Ahora como nuestros parámetros desconocidos son β_0 y β_1 , si deseamos hacer inferencia de la varianza de la distribución de $\ln[\theta(x_0)]$ según el procedimiento mencionado en esta sección, como fue mencionado en el Capítulo 4 la información que se tiene sobre estos parámetros la podemos introducir mediante una distribución apriori para los parámetros de interés β_0 y β_1 , en esta sección presentaremos la información que se tiene acerca de nuestros parámetros de interés de acuerdo a las características del modelo mencionado anteriormente en este capítulo.

Apriori para β_1^*

Sea $\beta_1^* = -\beta_1$, entonces por las suposiciones hechas en la sección anterior sabemos que $\theta(x_1) \geq \theta(x_2)$ con $x_2 > x_1$, es decir,

$$\begin{aligned} \exp(\beta_0 - \beta_1^* x_1) &\geq \exp(\beta_0 - \beta_1^* x_2) \\ \exp(-\beta_1^* x_1) &\geq \exp(-\beta_1^* x_2) \\ \frac{\exp(-\beta_1^* x_1)}{\exp(-\beta_1^* x_2)} &\geq 1 \\ \exp(-\beta_1^* (x_1 - x_2)) &\geq 1, \text{ por lo tanto } \beta_1^* \geq 0. \end{aligned}$$

Y de acuerdo a (5.1), tenemos que

$$\beta_1^* = \frac{\ln(\theta_1) - \ln(\theta_2)}{x_2 - x_1} \quad (5.8)$$

De esta observación tenemos que el parámetro β_1^* tiene como dominio los reales positivos y hay una relación mediante la ecuación (5.8), entre θ_1 , θ_2 , x_1 , x_2 y β_1^* . Ahora, como se trata de una prueba de vida acelerada con esfuerzos escalonados, uno esperaría que β_1^* tome valores relativamente mayores que un cierto número $\mu > 0$, dependiendo de la información con la que se cuente. Como x_1 y x_2 son dados en el modelo, esto quiere decir que $\beta_1^* \propto \ln(\frac{\theta_1}{\theta_2})$.

Apriori para β_0

Sabemos que $\theta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x) > 0$ para todo $x \geq 0$, entonces se puede demostrar que $\beta_0 \in \mathbb{R}$, por lo tanto el dominio del parámetro β_0 es todo \mathbb{R} y β_0 se puede expresar en términos de θ_1 , θ_2 , x_1, x_2 como

$$\beta_0 = \frac{x_2 \ln(\theta_1) - x_1 \ln(\theta_2)}{x_2 - x_1}$$

Lo mencionado en esta sección nos dice cuál es el dominio de β_0 y β_1 y la relación que tienen estos parámetros con θ_1 , θ_2 , x_1, x_2 por lo que, tanto las distribuciones apriori para β_0 y β_1 deberán

contar con esta información y la información adicional que sea proporcionada por los expertos en el trabajo con los determinados productos de interés.

5.2.2 Cálculo de la varianza de la distribución de $\ln [\theta(x_0)]$

Una manera de calcular la varianza de cualquier distribución es por medio de simulación de datos de tal distribución. En este problema nosotros estamos interesados en calcular la varianza de la distribución posterior $\ln [\theta(x_0)]$, de acuerdo con la información que se tenga hasta el momento. En el planteamiento del problema de acuerdo a la ecuación (5.6) debemos encontrar la varianza de la distribución posterior de $\ln [\theta(x_0)]$ para cada tiempo de inspección τ . Para realizar esto, generamos valores de la distribución posterior de β_0 y β_1 siguiendo el algoritmo dado en el Capítulo 4 y por el teorema de transformación (ver [8]) podemos calcular la varianza de la distribución de $\ln [\theta(x_0)]$ dada la información hasta ese momento. Es decir, estamos calculando la varianza de la distribución posterior de $\ln [\theta(x_0)]$ para cada tiempo de inspección τ .

Entonces estamos preparados para encontrar el tiempo óptimo τ^* en que deben permanecer todas las unidades en prueba en el primer esfuerzo usando un modelo Log-lineal Exponencial. El siguiente ejemplo nos ilustra como podemos encontrar el tiempo óptimo (τ^*) cuando tenemos un modelo potencia-exponencial y la relación dada en (5.6).

Ejemplo 1 *Nelson (ver [3]) reporta una prueba de vida acelerada con 76 unidades para el desgaste de cierto aislante a esfuerzo constante y acelerando el tiempo a la falla del aislante incrementando el voltaje. Los tiempos de falla en minutos a diferentes niveles de esfuerzo constante se presentan en la Tabla 1.*

Tabla 1: Tiempo de falla del aislante a esfuerzo constante

26 kv	28 kv	30 kv	32 kv	34 kv	36 kv	38 kv
5.79 min	68.85 min	7.74 min	0.27 min	.019 min	0.35 min	0.09 min
1579.52 min	108.29 min	17.05 min	0.4 min	0.78 min	0.59 min	0.39 min
2323.7 min	110.29 min	20.46 min	0.69 min	0.96 min	0.96 min	0.47 min
	426.07 min	21.02 min	0.79 min	1.31 min	0.99 min	0.73 min
	1067.6 min	22.66 min	2.75 min	2.78 min	1.69 min	0.74 min
		43.4 min	3.91 min	3.16 min	1.97 min	1.13 min
		47.30 min	9.88 min	4.15 min	2.07 min	1.40 min
		139.07 min	13.95 min	4.67 min	2.58 min	2.38 min
		144.12 min	15.93 min	4.85 min	2.71 min	
		175.88 min	27.80 min	6.50 min	2.90 min	
		194.9 min	53.24 min	7.35 min	3.67 min	
			82.85 min	8.01 min	3.99 min	
			89.29 min	8.27 min	5.35 min	
			100.58 min	12.06 min	13.77 min	
			215.1 min	31.75 min	25.5 min	
				32.52 min		
				33.91 min		
				36.71 min		
				72.89 min		

Como se tienen los tiempos a la falla presentados en la Tabla 1 podemos encontrar los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros β_0 y β_1 , los cuales son $\hat{\beta}_0 = 64.92$ y $\hat{\beta}_1 = 17.70$ y una varianza asintótica de 1.6552 y 20.2423 para $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_0$ respectivamente. Por lo mencionado anteriormente, desearíamos que la distribución posterior $\ln(\theta(x_0))$ se centrará en $11.89 \approx 64.92 - 17.70 \cdot \ln(20)$ independientemente de la información apriori con la que se cuente antes de realizar la prueba. En la vida real no sucede esto y la información sobre las variables de interés será proporcionada por los expertos en este tipo de pruebas.

Ahora supongamos que se tiene una prueba de vida acelerada con esfuerzo escalonado (**PVAEE**) usando sólo dos esfuerzos, donde los esfuerzos usados fueron de $V_1 = 26$ kV y $V_2 = 38$ kV, bajo y alto respectivamente, con un esfuerzo de diseño de $V_0 = 20$ kV. Siguiendo un modelo potencia-exponencial, calculemos el tiempo óptimo (τ^*) en el cuál se debe cambiar las unidades que no han

fallado en el primer esfuerzo (esfuerzo bajo) al segundo esfuerzo.

En este ejemplo ya tenemos los tiempos a la falla (Tabla 1), por lo que, asumiendo un modelo Log-lineal Exponencial usando los estimadores de máxima verosimilitud podemos transformar todos los tiempos a la falla del esfuerzo alto (38 kV) a su correspondiente tiempo a la falla del esfuerzo bajo (26 kV) y viceversa, entonces los tiempos a la falla de las 76 unidades al esfuerzo bajo los tenemos en la siguiente tabla:

Tabla 2: Tiempos de falla del aislante a tiempo constante de 26 kv

1-15 fallas	16-30 fallas	31-45 fallas	46-60 fallas	61-75 fallas	falla 76
5.79 min	214.66 min	536.31 min	920.29 min	2100.7 min	8487.2 min
10.653 min	255.61 min	538.85 min	924.23 min	2214.3 min	
15.783 min	257.59 min	546.4 min	933.73 min	2323.7 min	
21.923 min	264.64 min	550.43 min	954.23 min	2453.7 min	
27.225 min	285.28 min	559.62 min	1096.9 min	3269 min	
31.171 min	304.65 min	595.5 min	1156.8 min	3523.1 min	
74.368 min	314.17 min	603.2 min	1164.6 min	3663.5 min	
90 min	320.77 min	611.47 min	1266.2 min	3752.3 min	
97.445 min	322.26 min	625.16 min	1391.5 min	3912.7 min	
108.51 min	364.62 min	628.55 min	1578.5 min	3963.5 min	
110.77 min	388.36 min	656.9 min	1581.8 min	3968.6 min	
111.07 min	389.84 min	750 min	1697.8 min	4235.8 min	
151.15 min	402.03 min	818.74 min	1750.9 min	4369.8 min	
154.28 min	409.45 min	848.08 min	1814.4 min	8092.2 min	
187.23 min	478.85 min	859.99 min	1966.6 min	8410.4 min	

Los esfuerzos transformados están dados por

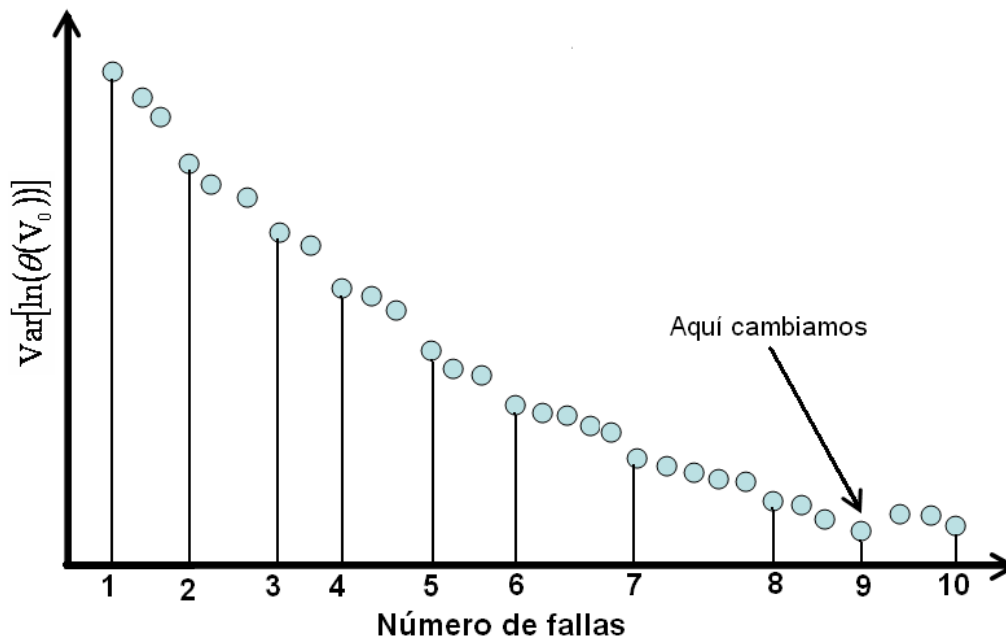
$$x_j = \ln(V_j), \quad j = 0, 1, 2.$$

Por lo que,

$$x_0 = 2.99, \quad x_1 = 3.25 \quad y \quad x_2 = 3.63.$$

Para fines de este ejemplo, supongamos que la información que se nos fue proporcionada antes de empezar la prueba y la experiencia de los expertos en la prueba, supongamos que $\beta_1 \sim N(17.70, 1.286545)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 4.499144)$, entonces siguiendo el procedimiento descrito en este capítulo obtenemos que el tiempo óptimo es $\tau^* = 97.445$ min exactamente cuando suceden 9 fallas en el esfuerzo bajo.

En la siguiente figura graficamos las varianzas esperadas de la distribución, para algunos tiempos de inspección después de ir observando el tiempo de falla de las unidades en el primer esfuerzo.



Como podemos ver en la figura anterior, cuando decidimos cambiar al segundo esfuerzo es cuando ya se ve una convergencia en la varianza de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$, es decir, nos pasamos al siguiente esfuerzo cuando no obtenemos más información de la distribución $\ln[\theta(x_0)]$ cuando todas las unidades están en prueba en el primer esfuerzo. Después de haber encontrado el tiempo óptimo (τ^*) en el que todas las unidades trabajan en el primer esfuerzo, las unidades que no han fallado se ponen en prueba en el segundo esfuerzo y en este último esfuerzo observamos las

fallas de todas las unidades, es decir, tenemos toda la información posible hablando estadísticamente del problema presentado aquí, por lo que podemos decir con menos incertidumbre cuál es el comportamiento de la distribución $\ln[\theta(x_0)]$. Para ver lo comentado hasta este momento podemos simular valores de la distribución $\ln[\theta(x_0)]$ antes de observar los datos, es decir, generamos valores de la distribución a priori $\ln[\theta(x_0)]$, para ver la forma de tal distribución y siguiendo el algoritmo podemos generar valores de la distribución posterior $\ln[\theta(x_0)]$ después de observar los datos. Con 70,000 simulaciones se ve una convergencia, ya que los resultados son prácticamente los mismos. Con estas simulaciones tenemos la siguiente figura, en la cual se muestra el histograma de la distribución a priori $\ln[\theta(x_0)]$ en el lado izquierdo de la figura y en el lado derecho presentamos el histograma de la distribución posterior $\ln[\theta(x_0)]$.

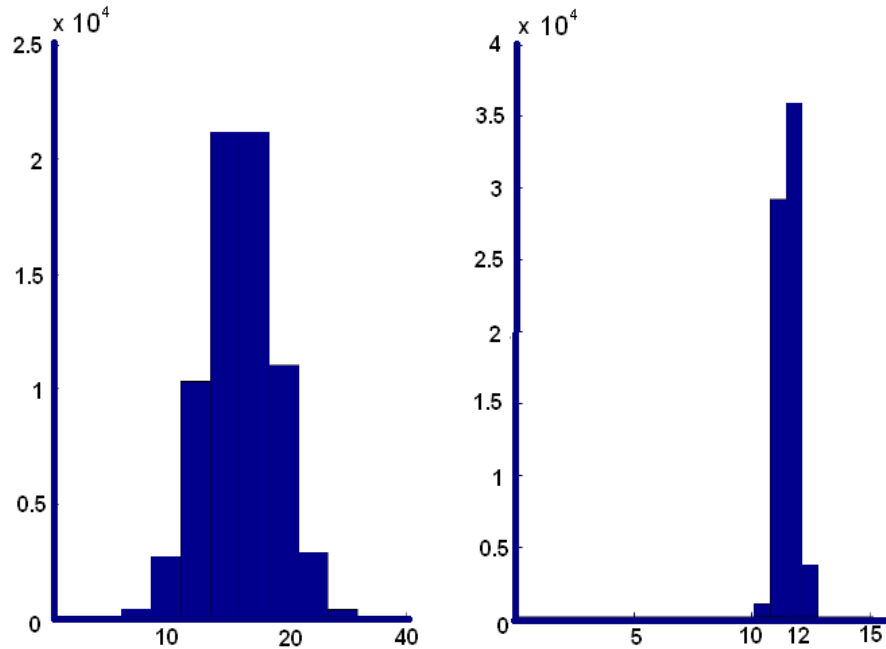


Figura 5.3: En el lado izquierdo de la figura se muestra el histograma de la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$ antes de realizar el experimento donde $\beta_1 \sim N(17.70, 1.28)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 4.49)$, y en el lado derecho presentamos el histograma de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$.

En la práctica, en ocasiones la información sobre los parámetros desconocidos no es buena y en algunos otros casos se cuenta con información aun más detallada de las variables del modelo, por lo que, resolveremos este ejemplo teniendo distintas informaciones sobre dichos parámetros, pero sabiendo de ante mano los estimadores de máxima verosimilitud del modelo.

- Supongamos que $\beta_1 \sim N(17.70, 6)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 20)$, entonces tenemos que el tiempo óptimo es $\tau^* = 10.653$ min., exactamente cuando suceden 2 fallas en el esfuerzo bajo y los histogramas de la distribución a priori $\ln[\theta(x_0)]$ y de la distribución posterior $\ln[\theta(x_0)]$ los presentamos en la siguiente figura.

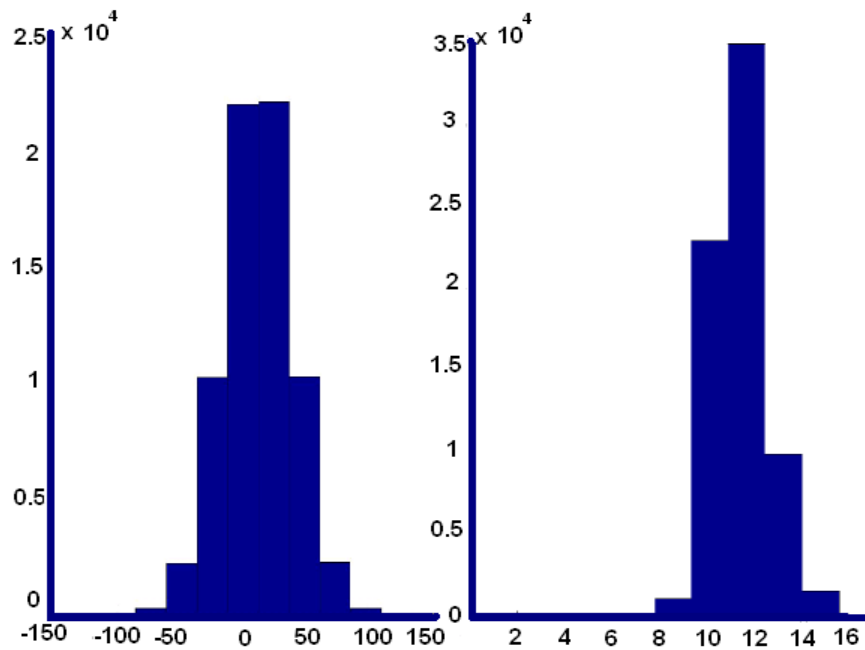


Figura 5.4: En el lado izquierdo de la figura se muestra el histograma de la variable $\ln[\theta(x_0)]$ antes de realizar el experimento donde $\beta_1 \sim N(17.70, 6)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 20)$ y en el lado derecho presentamos el histograma de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$.

Aunque nuestra información previa sobre los parámetros del modelo es vaga, vemos que el plan

óptimo nos produce resultados satisfactorios, ya que como vemos en el último histograma de la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$ se concentra sobre 11.89 y una variabilidad pequeña al compararla con la variabilidad del primer histograma de la variable apriori $\ln[\theta(x_0)]$.

2. Si en cambio tenemos mucha información sobre nuestros parámetros desconocidos, digamos que $\beta_1 \sim N(17.70, 0.5)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 1)$, entonces el tiempo óptimo es $\tau^* = 314.17$ min., exactamente cuando suceden 22 fallas en el esfuerzo bajo y los histogramas de la distribución apriori $\ln[\theta(x_0)]$ y de la distribución posterior $\ln[\theta(x_0)]$ son presentados a continuación en la siguiente figura.

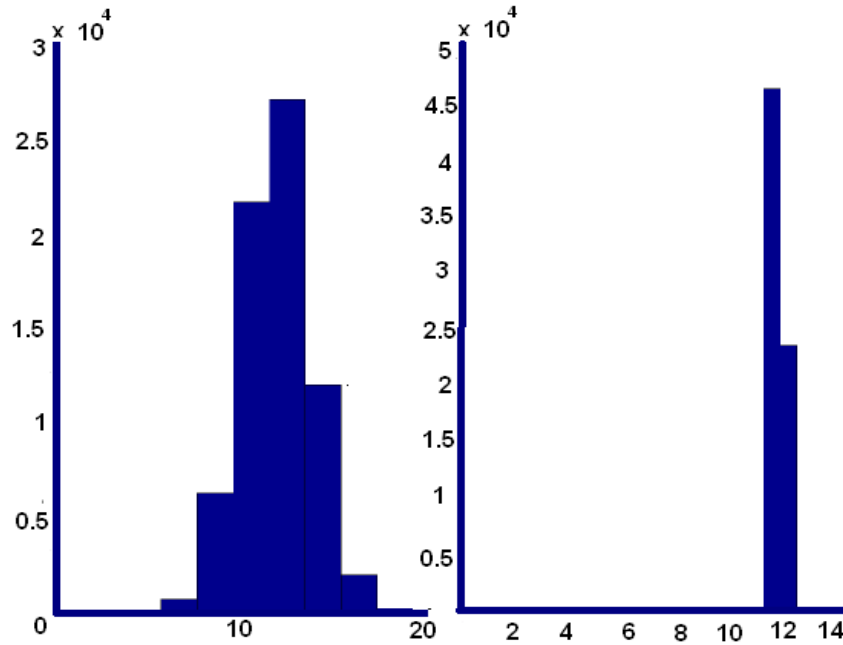


Figura 5.5: En el lado izquierdo de la figura se muestra el histograma de la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$ antes de realizar el experimento donde $\beta_1 \sim N(17.70, 0.5)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 1)$, y en el lado derecho presentamos el histograma de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$.

3. En ocasiones nuestra información acerca de los parámetros desconocidos no puede ser la

verdadera, es decir, podemos tener información errónea de los parámetros desconocidos, como por ejemplo que $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(80, 3)$, entonces el tiempo óptimo es $\tau^* = 10.653$ min. Los histogramas de las ditribuciones apriori y posterior de $\ln[\theta(x_0)]$ son mostrados a continuación.

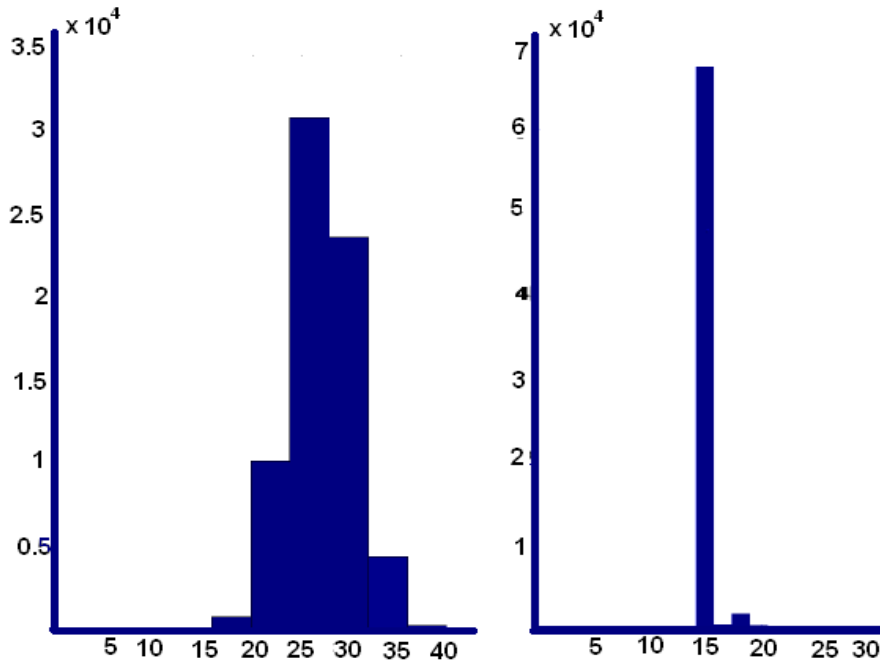


Figura 5.6: En el lado izquierdo de la figura se muestra el histograma de la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$ antes de realizar el experimento donde $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(80, 1)$, y en el lado derecho presentamos el histograma de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$.

En el histograma observamos que valores alrededor de 11.89 son muy poco verosímiles, por lo que es poco probable que la distribución de la variable posterior de $\ln[\theta(x_0)]$ se concentrara alrededor de 11.89, ahora examinando este histograma lo idóneo sería que la variable posterior de $\ln[\theta(x_0)]$ se concentrara lo más cerca posible de la realidad (11.89) dada la información apriori, es decir, nos gustaría que la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$ se concentrara alrededor de 15. Ahora nos

preguntamos que pasa si nuestra información es errónea de los parámetros desconocidos, pero en este caso si es verosímil valores de 11.89, será que el plan óptimo nos proporcione resultados acorde a la realidad, veamos.

4. Supongamos que $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(80, 9)$, es decir, la información de los parámetros del modelo es errónea, al igual que en el caso anterior tenemos un tiempo óptimo de $\tau^* = 10.653$ min. A continuación presentamos los histogramas de las distribuciones apriori y posterior de las variables aleatorias $\ln[\theta(x_0)]$ en la Figura 5.7.

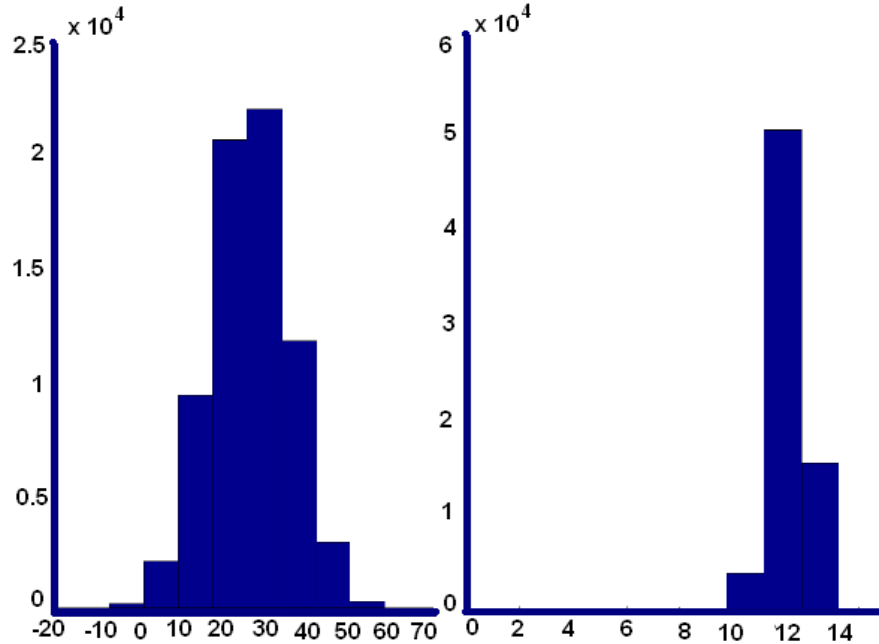


Figura 5.7: En el lado izquierdo de la figura se muestra el histograma de la variable aleatoria $\ln[\theta(x_0)]$ antes de realizar el experimento donde $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(80, 9)$, y en el lado derecho presentamos el histograma de la distribución posterior de $\ln[\theta(x_0)]$.

Y como vemos en estas gráficas, el plan óptimo obtenido nos proporciona un resultado acorde a la realidad, a pesar que la información apriori no es del todo buena.

Podemos dar algunas conclusiones acerca del tiempo óptimo (τ^*) en el cual las unidades deben permanecer en prueba en el esfuerzo bajo, dependiendo de la información que se tenga acerca de los parámetros β_0 y β_1 .

1.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 1.286545)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 4.499144)$, $\tau^* = 97.445$ min. cuando suceden 9 fallas
(esfuerzo bajo).
2.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 6)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 20)$, $\tau^* = 10.653$ min. cuando suceden 2 fallas (esfuerzo bajo).
3.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, .5)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, 1)$, $\tau^* = 314.17$ min. cuando suceden 22 fallas (esfuerzo bajo).
4.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(64.92, .5)$, $\tau^* = 255.61$ min. cuando suceden 17 fallas (esfuerzo bajo).

Entonces podemos concluir que mientras más información tengamos sobre los parámetros de interés es necesario obtener información en el esfuerzo bajo, es decir, durar más tiempo en este componente, y nuestro parámetro de interés va a tener muy poca varianza; ahora cuando tengamos información sobre los parámetros de interés, pero tengamos más variabilidad sobre los parámetros, entonces lo que nos dice es que obtengamos información en el primer esfuerzo, pero nos cambiemos más tempranamente al segundo esfuerzo para tener más información de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$.

1.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(60, 10)$, $\tau^* = 74.368$ min. cuando suceden 7 fallas (esfuerzo bajo).
2.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(60, 20)$, $\tau^* = 77.4952$ min. (en el esfuerzo bajo).
3.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(80, 3)$, $\tau^* = 10.653$ min. cuando suceden 2 fallas (esfuerzo bajo).
4.- Si $\beta_1 \sim N(17.70, 1)$ y $\beta_0 \sim N(80, 9)$, $\tau^* = 10.653$ min. cuando suceden 2 fallas (esfuerzo bajo).

Podemos decir que cuando no tenemos gran información sobre β_0 y mucha información sobre el parámetro β_1 (1 y 2) entonces solamente tendríamos que observar 7 fallas en el primer esfuerzo

y cuando tenemos una información errónea sobre el parámetro β_0 (3) y una información bastante detallada sobre el parámetro β_1 , entonces observaríamos 2 fallas en el primer esfuerzo, es decir, necesitamos más información en el segundo esfuerzo y no es necesario mantenerse en el primer esfuerzo tanto tiempo.

En pocas palabras podemos concluir que cuando la información apriori sobre los parámetros del modelo es vaga o errónea el plan óptimo nos dice que nos cambiemos al segundo esfuerzo en un tiempo relativamente corto y cuando la información acerca de los parámetros del modelo es más detallada, el plan óptimo nos dirá que observemos por un tiempo más largo las unidades en el primer esfuerzo, pero en ambos casos el plan óptimo proporciona información sobre la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ acorde a la realidad como lo vimos en el ejemplo presentado en este capítulo.

Comparación

En la literatura clásica de probabilidad existen planes óptimos para el modelo Log-lineal Exponencial, con las mismas hipótesis del modelo presentado. Este plan óptimo proporciona una "mejor" estimación de cierta cantidad de interés, es decir, minimiza la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud de la vida media a un nivel de esfuerzo de diseño especificado, donde el tiempo óptimo τ^* tiene la siguiente expresión

$$\tau^* = \theta_1 \ln \left(\frac{1 + 2 \left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} \right)}{\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}} \right),$$

y la varianza óptima al nivel de diseño ($Var [\ln \hat{\theta}_0(x_0)]$) es

$$Var [\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{1 + 2 \left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} \right)}{n}$$

Ahora observemos que el tiempo óptimo τ^* esta dado en términos de los parámetros desconocidos, ésto es típico de estos planes óptimos, tales planes son llamados localmente óptimos, por lo que, este plan óptimo es adecuado en la medida en que se tenga una buena aproximación de los verdaderos valores de los parámetros del modelo, los cuales se pueden obtener a partir de información previa o de un estudio anterior. Si se tiene una información errónea de los parámetros del modelo, entonces el plan óptimo utilizando este enfoque de probabilidad nos arroja resultados equivocados, en cambio si sedá un plan óptimo que desarrollamos en este trabajo de tesis los resultados son mas cercanos a la realidad ya que se utiliza conjuntamente la información previa y la información que nos da el ir observando los tiempos de falla del experimento (función de verosimilitud).

Si obtenemos el tiempo óptimo para el ejemplo presentado en este capítulo utilizando este enfoque es $\tau^* = 1707$ minutos y la varianza óptima es 0.075. Este plan óptimo nos dice que el tiempo que deben permanecer todas las unidades en prueba en el priemer esfuerzo es mucho mayor al que se proporciona utilizando un enfoque bayesiano. Como lo habiamos mencionado a lo largo de este trabajo de tesis, las pruebas de vida acelerada con esfuerzos escalonados se utilizan para obtener más tempranamente información sobre una cantidad de interés y como vemos el plan óptimo utilizando un enfoque clásico en ocasiones puede ser no práctico, ya que aunque tengamos una pressición de la cantidad que nos interesa tardariamos demasiado tiempo en obtenerla.

Capítulo 6

Planes Óptimos, Modelo Log-lineal Weibull y Conclusiones

Por la relación existente entre la distribución Exponencial y la distribución Weibull, una extensión que podemos hacer del plan óptimo presentado en el anterior capítulo, es encontrar planes óptimos cuando consideremos pruebas de vida aceleradas con esfuerzos escalonados usando solamente dos niveles de esfuerzos y la distribución Weibull y el modelo de daño acumulado. En la sección 6.1 se presenta el caso sin censura en el segundo esfuerzo y con el parámetro de forma conocido y en la sección 6.2 presentamos el caso con y sin censura en el segundo esfuerzo, pero con el parámetro de forma desconocido y terminamos con las conclusiones acerca del material presentado en este trabajo de tesis con la sección 6.3.

6.1 Plan óptimo sin censura y con censura

En esta sección sólo se presenta la prueba óptima simple con tiempo escalonado, con y sin censura en el segundo nivel de esfuerzo y con el parámetro de forma conocido ($\delta \neq 1$).

Dado que $\delta \neq 1$ es conocido, usaremos la relación que existe entre la distribución exponencial y la distribución Weibull, la cual nos dice que si T_i es una observación aleatoria de una distribución Weibull con parámetro de escala η_j al nivel de esfuerzo x_j y parámetro de forma δ conocido, entonces $Y = T_i^\delta$ es una observación aleatoria de una distribución exponencial con media $\theta_j = \eta_j^\delta$. Siendo así, se usará este hecho para reparametrizar el modelo Weibull, así se tiene que, $T_i^\delta \sim \exp(\theta_j = \eta_j^\delta)$, por lo tanto con esto y los resultados del capítulo anterior tenemos que para encontrar el τ^* óptimo se sigue el mismo procedimiento presentado en el capítulo pasado.

6.2 Plan óptimo con censura y sin censura

En la presente sección obtendremos el plan óptimo para el modelo log-lineal Weibull con tiempo escalonado, con y sin tiempo de censura en el segundo esfuerzo y parámetro de forma desconocido.

Notación

n - Tamaño total de la muestra.

T - Tiempo de censura en el segundo esfuerzo.

n_j - Número de unidades que fallarán al esfuerzo x_j , $j = 1, 2$.

x_0, x_1, x_2 - Esfuerzos transformados, de diseño bajo, medio y alto respectivamente.

β_0, β_1 - Parámetros de la función log-lineal entre el esfuerzo y la vida característica η .

β - Parámetro de forma de la distribución Weibull.

τ - Longitud del tiempo al esfuerzo bajo.

τ^* -Tiempo de prueba óptimo al nivel x_1 .

6.2.1 Preliminares

Al igual que en el capítulo anterior consideraremos dos pasos del modelo de daño acumulado con la distribución del tiempo a la falla Weibull (η, β) , donde el parámetro de escala η es una función log-lineal de un esfuerzo x (posiblemente transformado) y parámetro de forma β desconocido, es decir,

$$\mu(x) = \ln(\eta(x)) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \eta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x),$$

donde los parámetros β_0 , β_1 y β son parámetros desconocidos que dependen de las características del producto y del método de prueba.

Suposiciones básicas.

1. Sólo se usan dos niveles de esfuerzo x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$), los cuales están dados.
2. Para cualquier nivel de esfuerzo, la distribución del tiempo a la falla es Weibull con parámetro de escala $\eta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$ y el parámetro de forma β constante e independiente del esfuerzo, es decir, los log-tiempos a la falla siguen una distribución de valores extremos (VE) para mínimos con parámetro de localización $\mu(x) = \ln(\eta(x)) = \beta_0 + \beta_1 x$ y parámetro de escala $\sigma = \frac{1}{\beta}$.
3. El modelo de daño acumulado es válido.

Criterio de optimización. Un plan óptimo debe proporcionar una **mejor información de la distribución posterior del cuantil ρ** a un nivel de diseño especificado x_0 , es decir, determinaremos el tiempo $\tau^* \in \mathbb{R}^+$ que minimice la varianza de la distribución posterior del cuantil ρ .

Planteamiento de la prueba.

Supóngase que se tienen n unidades en prueba al inicio del experimento y trabajan hasta un tiempo τ a un nivel de esfuerzo bajo (x_1), si la unidad no ha fallado se cambia al esfuerzo alto (x_2) y la prueba continua hasta que todas las unidades fallan o hasta un tiempo de censura especificado. Denotemos por $t_i < t_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, los tiempos de falla que ocurren en la prueba en primer escalón.

El cuantil ρ de la distribución a un valor del esfuerzo de diseño x_0 es

$$t_\rho = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \sigma \ln[-\ln(1 - \rho)].$$

Observemos que cuando $\rho = 0.632$, entonces $t_\rho = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \sigma \ln[-\ln(1 - 0.632)] = \beta_0 + \beta_1 x_0$, es decir, es el parámetro de localización de la distribución de valores extremos y si $\sigma = 1$, entonces estamos en el problema presentado en el capítulo anterior. Otra cosa que podemos concluir es que t_ρ es la ecuación de una recta, sólo que ahora depende de tres parámetros desconocidos y por lo tanto, para la obtención del plan óptimo para este caso es necesario contar con información de los tres parámetros desconocidos.

La función de verosimilitud está dada por

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma, \tau, n, n_1, t_i | X) = \prod_{i=1}^{n_1} f_1(t_i) \left(\prod_{j=1}^{n_2} (1 - F_2(\ln(\tau))) \right) P_{n_1},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(t_i) &= \left(\frac{1}{\sigma t_i} \right) \exp \left[\frac{\ln(t_i) - (\beta_0 + \beta_1 x_1)}{\sigma} - \exp \left(\frac{\ln(t_i) - (\beta_0 + \beta_1 x_1)}{\sigma} \right) \right], \\ F_2(\ln(\tau)) &= \left(\exp \left[- \exp \left(\frac{\ln(\tau) - (\beta_0 + \beta_1 x_1)}{\sigma} \right) \right] \right) \text{ y} \\ P_{n_1} &= \exp \left[- \exp \left(\frac{\ln(t_{n_1}) - (\beta_0 + \beta_1 x_1)}{\sigma} \right) \right] - \exp \left[- \exp \left(\frac{\ln(\tau) - (\beta_0 + \beta_1 x_1)}{\sigma} \right) \right]. \end{aligned}$$

Para encontrar el tiempo óptimo τ^* seguiremos el mismo procedimiento presentado en el capítulo anterior, para eso es necesario contar con una a priori para cada parámetro desconocido y

la verosimilitud aquí presentada. La información es proporcionada por personas con un amplio conocimiento sobre este tipo de pruebas o por información de pruebas similares. A continuación presentamos un ejemplo.

Ejemplo 2 *Continuando con el ejemplo 1, pero ahora supongamos que se sigue un modelo potencia-Weibull, se desea determinar el tiempo óptimo (τ^*) en el cual se deben cambiar las unidades que no han fallado en el primer esfuerzo (esfuerzo bajo) al segundo esfuerzo, cuando se está interesado en el cuantil $\rho = 0.632$.*

Con la información con que se cuenta, se dieron las siguientes distribuciones para los parámetros desconocidos, $\beta_1 \sim N(17.7293, 1)$, $\beta_0 \sim N(64.8462, 3)$ y $\beta \sim N(0.7766, 0.1)$, entonces tenemos que el tiempo óptimo es $\tau^* = 269.896$ min. Observamos 22 fallas en el esfuerzo bajo y los histogramas de la distribución a priori $\ln(\theta(x_0))$ y de la distribución posterior $\ln(\theta(x_0))$ son.

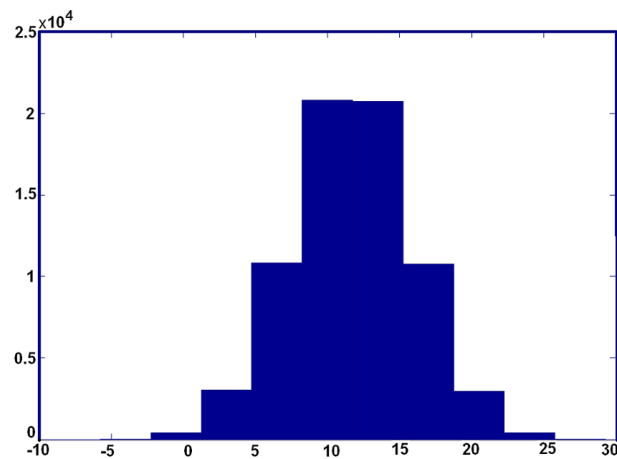


Figura 6.1: Histograma de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ antes de realizar el experimento donde

$$\beta_1 \sim N(17.7293, 1), \beta_0 \sim N(64.8462, 3) \text{ y } \beta \sim N(0.7766, 0.1) .$$

y

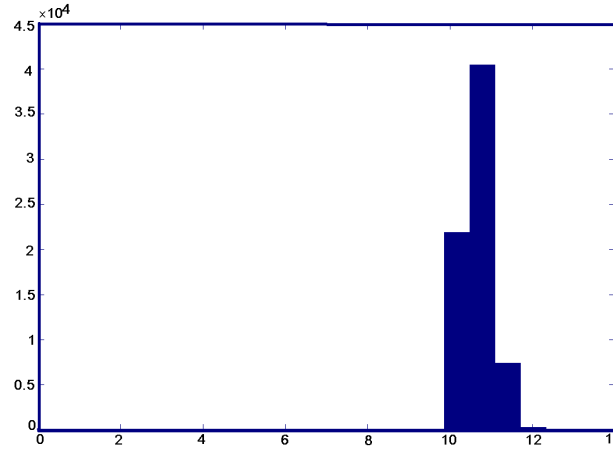


Figura 6.2: Histograma de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ adespues de encontrar el tiempo óptimo

es τ^* con $\beta_1 \sim N(17.7293, 1)$, $\beta_0 \sim N(64.8462, 3)$ y $\beta \sim N(0.7766, 0.1)$.

respectivamente. Ahora, si $\beta_1 \sim N(17.7293, 1)$, $\beta_0 \sim N(64.8462, 3)$ y $\beta \sim N(0.7766, 0.2)$, entonces tenemos que el tiempo óptimo es $\tau^* = 109.664$ min. Observamos 10 fallas en el esfuerzo bajo y los histogramas de la distribución apriori $\ln(\theta(x_0))$ y de la distribución posterior $\ln(\theta(x_0))$ son

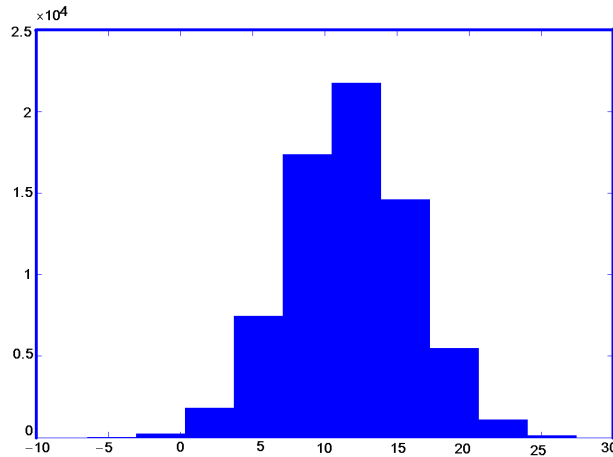


Figura 6.3: Histograma de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ antes de realizar el experimento donde

$\beta_1 \sim N(17.7293, 1)$, $\beta_0 \sim N(64.8462, 3)$ y $\beta \sim N(0.7766, 0.2)$.

y

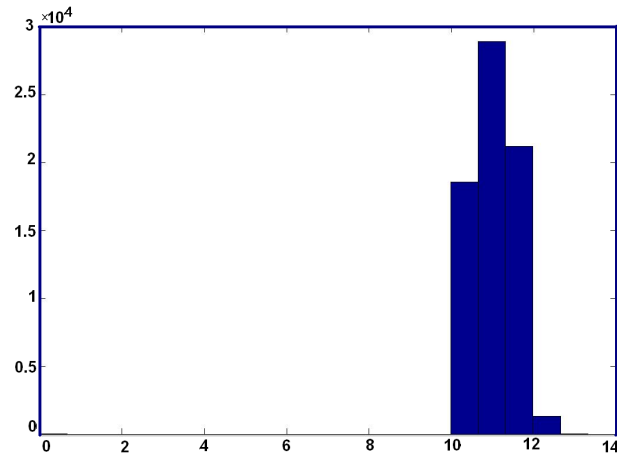


Figura 6.4: Histograma de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ después de encontrar el tiempo óptimo es

$$\tau^* \text{ con } \beta_1 \sim N(17.7293, 1), \beta_0 \sim N(64.8462, 3) \text{ y } \beta \sim N(0.7766, 0.2).$$

Y por último si $\beta_1 \sim N(17.7293, 1)$, $\beta_0 \sim N(64.8462, 10)$ y $\beta \sim N(0.7766, 0.1)$, entonces tenemos que el tiempo óptimo es $\tau^* = 109.664$ min. Observamos 10 fallas en el esfuerzo bajo y los histogramas de la distribución a priori $\ln(\theta(x_0))$ y de la distribución posterior $\ln(\theta(x_0))$ son

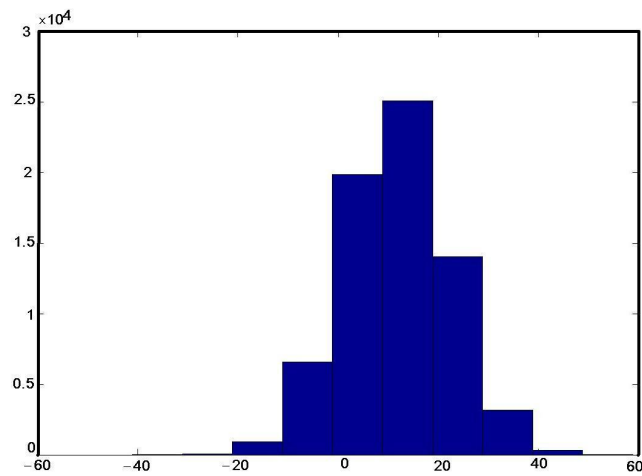


Figura 6.5: Histograma de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ antes de realizar el experimento donde

$$\beta_1 \sim N(17.7293, 1), \beta_0 \sim N(64.8462, 10) \text{ y } \beta \sim N(0.7766, 0.1) .$$

y

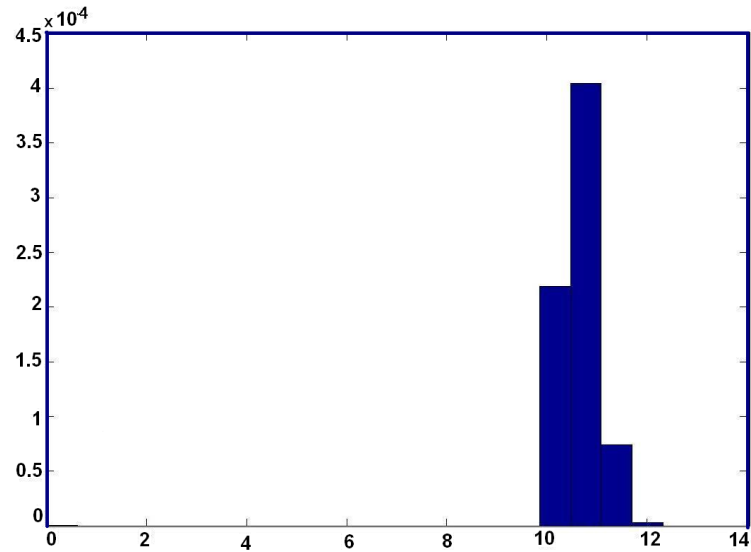


Figura 6.6: Histograma de la variable aleatoria $\ln(\theta(x_0))$ después de encontrar el tiempo óptimo es

$$\tau^* \text{ con } \beta_1 \sim N(17.7293, 1), \beta_0 \sim N(64.8462, 10) \text{ y } \beta \sim N(0.7766, 0.1).$$

respectivamente.

6.3 Conclusiones

En el trabajo que presentamos, hacemos ver la importancia que juega hoy en día las pruebas aceleradas en el área de la industria. Realizamos una revisión de los modelos de vida acelerada y del daño acumulado, los cuales son necesarios para modelar el tiempo de vida de las unidades que se someten a una prueba de vida acelerada con esfuerzos escalonados.

Hemos estudiado planes óptimos para el modelo log-lineal exponencial y planes óptimos para una prueba de vida acelerada para el modelo log-lineal Weibull desarrollados por medio de estadística bayesina. Los planes óptimos aquí estudiados nos dicen cuál es momento idóneo en el que las unidades que no han fallado en el primer (segundo) esfuerzo al que se someten al comienzo del

experimento pasan al otro esfuerzo, considerando la información con la que se cuenta antes de realizar la prueba y la información proporcionada al observar por un tiempo τ las unidades en prueba. Como lo mencionamos, existen otros planes óptimos para estos modelos desde un enfoque clásico, en los cuales solamente se utiliza la información previa o a priori para determinar el tiempo óptimo τ^* , y que en ocasiones sus resultados son inadecuados o poco prácticos.

Como consecuencia de este trabajo de tesis podemos plantear algunas extensiones y estudios futuros como por ejemplo:

1. Decidir además del tiempo óptimo τ^* , también el valor óptimo del nivel de esfuerzo bajo x_1 .
2. Desarrollar planes óptimos para más de dos niveles de esfuerzo, para el modelo Log-lineal Weibull y Log-lineal Lognormal.
3. Desarrollar planes óptimos cuando el número de esfuerzos es mayor que dos. Esta generalización es sencilla ya que podemos ir determinando los tiempos óptimos en cada esfuerzo utilizando el método aquí presentado pensando como si se tubieran solamente dos esfuerzos.

Referencias

- [1] J.M. BERNARDO, A.F.M. SMITH (1994), *BAYESIAN THEORY*, Chichester:John Wiley & Sons Ltd.
- [2] Morris H. DeGroot (1970), *OPTIMAL STATISTICAL DECISIONS*, New York:McGraw-Hill.
- [3] Wayne Nelson (1990), *ACCELERATED TESTING: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, New York: John Wiley & Sons.
- [4] William Q. Meeker, and Luis A. Escobar (1998), *STATISTICAL METHODS FOR RELIABILITY DATA*, New York: John Wiley & Sons Inc.
- [5] Humberto Gutiérrez Pulido (2003), *CONTRIBUCIONES DEL ENFOQUE BAYESIANO EN CONFIABILIDAD (Tesis)*, México: *Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT)*.
- [6] José del Carmen Jiménez Hernández (2004), *PLANES ÓPTIMOS PARA PRUEBAS DE VIDA ACELERADA CON ESFUERZO ESCALONADO*, México: *Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT)*.
- [7] George Casella, Roger L. Berger (2002). *Statistical Inference (Second Edition)*.
- [8] Sidney I Resnick (2001). *A Probability Path (Second Edition)*.
- [9] Christian P. Robert, George Casella (1999). *Monte Carlo statistical methods*.