

**Estabilidad Numérica para  
Ecuaciones Diferenciales Estocásticas**

*Diego Bricio Hernández*

Tech. Rept. I-92-3 (CIMAT/PE)

116

Recibido: 22 de Junio, 1992    Aprobado: 22 de Julio, 1992

# ESTABILIDAD NUMERICA PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS\*

DIEGO BRICIO HERNANDEZ  
CIMAT, Apdo. 402  
36000 Guanajuato, Gto. (México)

## Resumen

Se estudian los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo de Ito, en especial los de Runge-Kutta. El interés principal es el de investigar la *estabilidad numérica* de dichos métodos, para lo cual se comienza por definir dicho concepto. La primera versión es una extensión obvia de la A-estabilidad (respecto a una ecuación de prueba *lineal*) al caso estocástico, pero resulta ser demasiado restrictiva: la A-estabilidad de un método es independiente de la discretización del término de difusión. Por ello se desarrolla un concepto de estabilidad numérica más sofisticado, basado en una ecuación de prueba *no lineal*. Se define el concepto de *región de estabilidad* en forma probabilística, y se presentan los aspectos computacionales requeridos para el cálculo de dichas regiones.

*Clasificación Temática de la AMS (1980):* 65L20 (principal), 60H10, 34F05, 65L07, 93E15

*Palabras clave:* Estabilidad numérica, métodos Runge-Kutta, métodos implícitos, ecuaciones diferenciales estocásticas, estabilidad estocástica.

---

\*Este artículo recoge parte del trabajo conjunto realizado con Renato Spigler, de la Universidad de Padua (Italia), durante el año académico 1990-1991. Véase la Bibliografía.

Reconocimiento. El trabajo de DBH en Padua fué apoyado parcialmente por el Consiglio Nazionale delle Ricerche y el Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica de Italia. Se agradece la amable invitación a incluirlo en las Memorias del Segundo Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos y Primer Encuentro México-Chile de Análisis Estocástico y Física Matemática.

## 1 Soluciones numéricas.

Se construye una solución numérica del problema con valores iniciales

$$dx = b(t, x) dt + \sum_{k=1}^p \sigma^k(t, x) dW^k, \quad t_0 \leq t \leq T; x_{t_0} = x_0 \quad (1)$$

especificando, para cada entero positivo  $n$ ,

- una partición  $\tau^{(n)}$  de  $[t_0, T]$ , digamos  $t_0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_{k_n}^{(n)} = T$ , donde  $k_n$  crece en forma monótona con  $n$ , a la cual corresponden incrementos  $\Delta t_i^{(n)} := t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}, i = 0, 1, \dots, k_n - 1$ , y norma  $\|\tau^{(n)}\| := \max_{0 \leq i < k_n} \Delta t_i^{(n)}$ ;
- una sucesión finita  $\{x_0 =: x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$  de vectores  $d$ -dimensionales, con  $x_i^{(n)}$  independiente de los incrementos futuros  $W_k(t_{i+1}) - W_k(t_i), i = 0, 1, \dots, k_n - 1$  de los procesos de Wiener  $W_k, k = 1, \dots, p$ , y donde  $x_i^{(n)}$  "aproxima"  $x(t_i^{(n)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, k_n$  en algún sentido;
- un método de interpolación que transforme la sucesión finita de vectores aleatorios  $\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$  en el proceso estocástico  $x^{(n)} := \{x^{(n)}(t), t_0 \leq t \leq T\}$  con trayectorias continuas.

Con frecuencia se construyen particiones uniformes,  $t_{i+1}^{(n)} = t_i^{(n)} + \Delta t^{(n)}, i = 0, 1, \dots, k_n - 1$ , aunque de variarse el tamaño de paso —quizá en forma aleatoria, véase [2]— se podrían quizá obtener mejores resultados (a un costo computacional mayor, es claro).

En una aplicación típica, la sucesión finita  $\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$  se genera reemplazando la ecuación diferencial estocástica (EDE) en (1) por su versión

integral, aplicada a un subintervalo genérico  $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$ , a saber

$$x(t_{i+1}^{(n)}) - x(t_i^{(n)}) = \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} f(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^p \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} \sigma^k(s, x(s)) dW_k(s)$$

A continuación, se usan reglas de integración numérica para aproximar cada una de las  $p + 1$  integrales sobre  $[t_i, t_{i+1}]$  en términos de los valores de  $x(t)$  para  $t \in \tau^{(n)}$ . Toda una familia de reglas de integración numérica tiene la estructura

$$\int_a^b \varphi(s) ds = \left\{ \sum_{j=1}^m b_j \varphi(a + c_j h) \right\} h + \text{error}, \quad (2)$$

donde  $h := b - a$  y

$$c_1 \leq \dots \leq c_m, \quad (3)$$

$$b_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m b_j = 1 \quad (4)$$

Fórmulas como (2) se han utilizado para discretizar las integrales estocásticas en (1) p.ej. en [10], [13] and [14]. Si se elige la fórmula (2) con pesos  $b_j \equiv b_j^k, j = 1, \dots, m$ , se obtiene

$$\int_a^b \sigma^k(s, x(s)) dW_k(s) = \left\{ \sum_{j=1}^m b_j^k \sigma^k(a + c_j h, x(a + c_j h)) \right\} \Delta W_k + \text{error}, \quad (5)$$

donde  $\Delta W_k := W_k(b) - W_k(a)$ , para  $k = 1, \dots, p$ .

Se obtiene un ejemplo sencillo de lo anterior cuando se elige la regla de integración numérica

$$\int_a^b \varphi(s) ds = \varphi(a)(b - a) + \text{error} \quad (6)$$

para aproximar cada una de las integrales, con lo que resulta el *método de Euler*

$$x_{i+1}^{(n)} = x_i^{(n)} + f(t_i^{(n)}, x_i^{(n)}) \Delta t_i^{(n)} + \sum_{k=1}^p \sigma^k(t_i^{(n)}, x_i^{(n)}) \Delta W_{k,i}^{(n)}, \quad (7)$$

donde

$$\Delta W_{k,i}^{(n)} := W_k(t_{i+1}^{(n)}) - W_k(t_i^{(n)}) \quad (8)$$

Si se eligen las reglas de integración numérica de otra manera se obtendrá un algoritmo distinto para la generación de  $\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$ . Por supuesto, tanto la convergencia como la estabilidad dependen de la elección de regla de integración numérica. Por lo que respecta a la interpolación de los resultados, quizá la mejor elección sea una simple *interpolación lineal por segmentos*, por su sencillez y porque el proceso obtenido  $x^{(n)}(t)$  tiene ya trayectorias continuas.

## 2 Métodos Runge-Kutta para EDE's.

Como es bien sabido, la familia de *Runge-Kutta* (RK) resulta de hacer una elección combinada de reglas de integración numérica sobre cada subintervalo  $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$  [3]. Se requieren  $p+1$  métodos RK: uno para el coeficiente de deriva  $f$  y el otro para cada uno de los términos con ruido.

Sean  $x_a$  and  $x_b$  aproximaciones a  $x(a)$  y  $x(b)$ , respectivamente, para un subintervalo dado  $[a, b]$  en una partición de  $[t_0, T]$ . Para discretizar la EDE (1), usemos  $p+1$  reglas de integración como (2), obteniendo

$$x_b - x_a = \left\{ \sum_{j=1}^m b_j^0 f(t_j, x^j) \right\} \Delta t + \sum_{k=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^m b_j^k \sigma^k(t_j, x^j) \right\} \Delta W_k \quad (9)$$

donde  $\Delta t := b - a$ ,  $t_j := a + c_j \Delta t$ , y  $x^j$  es una aproximación a  $x(t_j)$ .

La familia de métodos Runge-Kutta estocásticos (RKE) resulta de acoplar (9) con algoritmos semejantes que den los valores intermedios  $x^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . En efecto, de

$$x^j = x_a + \int_a^{t_j} f(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^p \int_a^{t_j} \sigma^k(s, x(s)) dW_k(s). \quad (10)$$

se obtiene

$$x^j = x_a + \left\{ \sum_{l=1}^m a_{jl}^0 f(t_l, x^l) \right\} \Delta t + \sum_{k=1}^p \left\{ \sum_{l=1}^m a_{jl}^k \sigma^k(t_l, x^l) \right\} \Delta W_k, \quad j = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Si se aplica el método RKE general (9)–(11) a los casos: a)  $d = 1, f \equiv 1, \sigma^k \equiv 0, k = 1, \dots, p$  and b)  $d = 1, f \equiv 0, \sigma^k = 1, \sigma^l \equiv 0, l \neq k$ , se obtienen las condiciones

$$\sum_{j=1}^m b_j^k = 1, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (12)$$

Por otro lado, en el caso a) obtenemos también  $\sum_{l=1}^m a_{jl}^0 = c_j, 1 \leq j \leq m$ . Definamos  $c_j^k := \sum_{l=1}^m a_{jl}^k, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$ , con  $c_j^0 := c_j$ , para obtener las condiciones

$$\sum_{l=1}^m a_{jl}^k = c_j^k, \quad 1 \leq j \leq m, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (13)$$

que deben satisfacer los coeficientes de (9)–(11). A veces se elige  $c_j^k = c_j, k = 1, \dots, p$  (véase [13] y (7), así como los ejemplos dados en las siguientes secciones), pero no hay ninguna ventaja real en hacerlo aparte de la mayor sencillez en la implementación computacional del correspondiente método RKE.

Definanse los vectores  $b_k, c_k \in \mathbb{R}^m$ , junto con la matriz  $A_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  como  $A_k := (a_{jl}^k)_{j,l=1}^m, b_k := (b_1^k, \dots, b_m^k)^T, c_k := (c_1^k, \dots, c_m^k)^T$ , para  $k = 0, 1, \dots, p$ . Entonces, los  $p + 1$  métodos RK en (9) y (11) se pueden denotar mediante el conjunto ordenado de “tablas de Butcher”

$$\frac{c_k \mid A_k}{1 \mid b_k^T}, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad (14)$$

mientras que las condiciones adicionales (12) y (13) se escriben en forma abreviada

$$b_k^T \mathbf{1} = 1, \quad A_k \mathbf{1} = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad (15)$$

donde  $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T$ . Cada una de las  $p + 1$  matrices en bloque en (14) se llama una *componente* del método, y corresponde a un método RK para EDO's determinísticas. La componente 0 se conoce como *determinística*, en tanto que las restantes  $p$  se llamarán *estocásticas*. Así pues, la discretización de EDE's como (1) requiere  $p + 1$  métodos RK –quizá distintos, uno para la integral determinística y uno para cada integral estocástica. Un método RK para EDO's es *explícito* si su matriz de coeficientes  $A$  es estrictamente triangular inferior; en caso contrario, se dice que es *implícito*. La importancia de esta distinción es que en el caso implícito hay que resolver un sistema de

ecuaciones en cada subintervalo, con el consiguiente recargo computacional. Podemos resumir lo anterior en la siguiente

**Definición 2.1** El conjunto ordenado de métodos RK en (14)–(15) se llama un *método de Runge–Kutta estocástico (RKE) con  $m$  etapas intermedias*. Se dice que es *explícito* si todos sus componentes lo son; en caso contrario se conoce como *implícito*.

Una colección muy importante de ejemplos de método RKE es la *familia generalizada de Heun*, dada por

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1 & 1-\mu & \mu \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\beta & \beta \\ \hline 1 & 1-\lambda & \lambda \end{array} \quad (16)$$

donde  $\beta, \lambda, \gamma, \mu \in [0, 1]$ .

Se puede usar el *error uniforme en media cuadrática*,

$$R_n := \sup_{t_0 \leq t \leq T} E \|x^{(n)}(t) - x(t)\|^2$$

para cuantificar la calidad de un método de aproximación como los que apenas hemos descrito (no necesariamente RKE).

**Definición 2.2** Un algoritmo numérico para la solución de (1) *converge uniformemente en media cuadrática* si  $R_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para cualquier elección de coeficientes  $f$  y  $\sigma$  y condición inicial  $x_0$  que garanticen existencia y unicidad de la solución. Se dice que el algoritmo tiene *orden global de convergencia  $\nu^1$*  si  $R_n = O(h^{2\nu})$  cuando  $h \rightarrow 0$ , donde  $\|\tau^{(n)}\| \leq h$ ,  $n \geq 1$ .

En los trabajos [8] y [9] hemos estudiado la convergencia de los métodos RKE generales (explícitos e implícitos). Ahí se demuestra el siguiente resultado, aplicable a métodos RKE en dimensión 1 ( $p = d = 1$ ):

<sup>1</sup>Observe que este concepto de *orden de convergencia* difiere del de otros autores, p.ej. [13]: éste es el de Rümelin dividido por 2. Más aún, este error es *global*, mientras que otros autores consideran el error en un paso únicamente.

**Teorema 2.1** *Supongamos que  $f, \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tienen derivadas acotadas hasta orden 2. Entonces, la solución numérica de (1) obtenida mediante el método RKE (14), (15) converge uniformemente en media cuadrática a la solución  $\{y(t), t_0 \leq t \leq T\}$  de*

$$\begin{aligned} dy &= \left[ f(t, y) + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, y) \sigma(t, y) \right] dt \\ &+ \sigma(t, y) dW, \quad y(t_0) = x(t_0), \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 1, \\ b_1^T c_1 & \text{si nó.} \end{cases} \quad (18)$$

El orden de convergencia no puede ser mayor que 1, y esta cota óptima la realiza la familia generalizada de Heun (16).

### 3 A-estabilidad estocástica.

Es natural comenzar el estudio de la estabilidad numérica a partir del concepto clásico de *A-estabilidad*, introducido originalmente en [4]. Se requiere que los modos que decaen exponencialmente en la solución de la ecuación diferencial estén bien aproximados en la solución numérica, por lo que

$$\dot{z} = qz, \quad q, \operatorname{Re}(q) < 0 \quad (19)$$

(con  $z(t) \in \mathbb{C}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ ) es la ecuación de prueba que resulta natural elegir en el caso determinístico [5]. Aplicado a (19), un método RK como

$$\frac{c}{1} \mid \frac{A}{b^T} \quad (20)$$

conduce a la ecuación en diferencias

$$z_{i+1} = R(qh)z_i, \quad (21)$$

cuyo *factor de crecimiento*  $R(\cdot)$  está dado por  $R(z) := 1 + zb^T(I - zA)^{-1}c$ . Se dice que el método RK (20) es *A-estable* si  $R$  transforma el semiplano izquierdo de  $\mathbb{C}$  en el disco unitario abierto.



La ecuación de prueba más sencilla que generaliza (19) al caso estocástico es

$$dz = qzdt + \sum_{k=1}^p \sigma^k dW_k, \quad \text{Re}(q) < 0. \quad (22)$$

Tal ecuación se obtiene linealizando la EDE autónoma<sup>2</sup>

$$dx = f(x)dt + \sum_{k=1}^p \sigma^k dW_k$$

alrededor de un estado de equilibrio del sistema *no perturbado*, digamos  $\bar{x}$  con  $f(\bar{x}) = 0$ . De nuevo, requeriremos que se preserven los modos que decaen exponencialmente a pesar de la discretización.

Supondremos en lo que sigue que  $q := -\alpha + i\omega$  ( $\alpha > 0$ ), y  $\sigma^k := \sqrt{2}(\rho_k + i\tau_k)$ ,  $k = 1, \dots, p$  son constantes complejas,  $z := x + iy$ , y  $W_k := \frac{1}{\sqrt{2}}(U_k + iV_k)$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Aquí  $x$  e  $y$  son procesos estocásticos reales, en tanto que todos los procesos de Wiener  $U_k$  y  $V_k$  son independientes. Usando la representación matricial  $2 \times 2$  de los números complejos, la EDE compleja (22) se puede expresar en forma matricial real, a saber

$$d\zeta = Q\zeta dt + \sum_{k=1}^p \Sigma^k dB_k, \quad (23)$$

donde

$$Q := \begin{pmatrix} -\alpha & -\omega \\ \omega & -\alpha \end{pmatrix} \quad \Sigma^k := \begin{pmatrix} \rho_k & -\tau_k \\ \tau_k & \rho_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, p$$

y  $\zeta := (x, y)^T$ ,  $B := (U, V)^T$ . Supongamos que  $\zeta(0)$  es Gaussiano, independiente de los procesos de Wiener  $W_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Entonces  $\zeta$  es un proceso Gaussiano bidimensional dado por

$$\zeta(t) = e^{tQ}\zeta(0) + \sum_{k=1}^p \int_0^t e^{(t-s)Q} \Sigma^k dB_k(s), \quad t \geq 0.$$

Su media  $m(t) := E\zeta(t)$  y su matriz de covarianza

$$K(t) := E(\zeta(t) - m(t))(\zeta(t) - m(t))^T$$

<sup>2</sup>que a su vez se obtiene corrompiendo el sistema dinámico autónomo  $\dot{x} = f(x)$  con  $p$  fuentes independientes de ruido blanco Gaussiano aditivo.

están dadas por

$$m(t) = e^{tQ} E\zeta(0)$$

y

$$K(t) = e^{tQ} \text{Cov}(\zeta(0)) e^{tQ^T} + \sum_{k=1}^p \int_0^t e^{(t-s)Q} \Sigma^k (\Sigma^k)^T e^{(t-s)Q^T} ds,$$

respectivamente, como resulta de las propiedades elementales de la integral de Wiener [12]. Más aún,  $K$  satisface el problema con valores iniciales asociado a la ecuación diferencial de Lyapunoff

$$\dot{K} = QK + KQ^T + \sum_{k=1}^p \Sigma^k (\Sigma^k)^T, \quad K(0) = \text{Cov}(\zeta(0)), \quad (24)$$

como se verifica directamente. Obsérvese que, puesto que  $\alpha > 0$ , la ecuación diferencial (24) tiene una única solución de equilibrio  $\bar{K}$ , la cual satisface la ecuación algebraica de Liapunoff

$$Q\bar{K} + \bar{K}Q^T + \sum_{k=1}^p \Sigma^k (\Sigma^k)^T = 0. \quad (25)$$

Un cálculo simple muestra que la matriz de covarianza en estado estacionario asociado con la ecuación (23) es  $\bar{K} = \nu I$ , donde

$$\nu := \frac{\sum_{k=1}^p |\sigma^k|^2}{2\alpha}, \quad (26)$$

cociente que representa una relación de *fluctuación-disipación* [7]. En forma análoga, la estabilidad de  $Q$  (es decir, el hecho de que  $\alpha > 0$ ) implica que  $m(t) \rightarrow 0$  y  $K(t) \rightarrow \bar{K}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Así pues, la ecuación de prueba (22) tiene una única solución de equilibrio, misma que es un proceso estacionario Gaussiano  $z$  con media cero y varianza  $\bar{K}$ . Más aún, cualquier otra solución de la ecuación diferencial de Lyapunoff decae exponencialmente a ésta.

Si se aplica el método RKE (14)-(15) a (22), se obtiene que

$$z_{i+1} = R_0(qh)z_i + \sum_{k=1}^p R_k(qh)\sigma^k \Delta W_k, \quad (27)$$

donde

$$R_k(z) := 1 + z c_k b_0^T (I - z A_0)^{-1} \mathbf{1}, \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (28)$$

( $c_0 := 0$ ). La solución de (27) con la condición inicial  $z(0)$  está dada por

$$z_i = R_0(qh)^i z(0) + \sum_{k=1}^p \sigma^k R_k(qh) \sum_{j=0}^{i-1} R_0(qh)^{i-j-1} \Delta W_{k,j}. \quad (29)$$

Finalmente, un cálculo elemental muestra que

$$Ez_i = R_0(qh)^i Ez(0),$$

$$\text{Cov}(z_i) = R_0(qh)^{2i} \text{Cov}(z(0)) + h \sum_{k=1}^p \frac{R_k(qh)^2 (\sigma^k)^2}{1 - R_0(qh)^2} (1 - R_0(qh)^{2i}),$$

por lo que existe una distribución límite de la solución de la ecuación en diferencias (27) si y sólo si  $|R_0(qh)| < 1$ . Una tal distribución es Gaussiana, con media cero y varianza  $h \sum_{k=1}^p \frac{R_k(qh)^2 (\sigma^k)^2}{1 - R_0(qh)^2}$ .

**Definición 3.3** Se dice que el algoritmo RKE (14)–(15) es *A-estable* si  $R_0$  manda en el disco abierto unitario a todo complejo  $z$  con  $\text{Re}(z) < 0$ .

En términos de este concepto, los desarrollos precedentes se pueden resumir en el siguiente enunciado:

**Teorema 3.2** *El método RKE (14)–(15) es A-estable si y sólo si lo es su componente determinístico.*

Así pues, la discretización del término de deriva controla la estabilidad numérica. Esto es así sólo porque el término de difusión de la ecuación de prueba (22) no depende de  $z$ . El concepto de A-estabilidad es muy sencillo y fácil de aplicar, pero ya se ve que es muy restringido, por lo que convendría substituirlo por otro más idóneo en la próxima sección. Véase [8] para una exploración más detallada del concepto de A-estabilidad numérica en el caso estocástico.

## 4 Estabilidad numérica no lineal.

Consideremos la ecuación (1) en su forma de Stratonovich,

$$dx = f(t, x) dt + \sum_{k=1}^p \sigma^k(t, x) \circ dW^k, \quad t_0 \leq t \leq T; x_{t_0} = x_0 \quad (30)$$

donde

$$f := b - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \sigma^k}{\partial x} \cdot \sigma^k. \quad (31)$$

Supongamos que los coeficientes  $b, \sigma^1, \dots, \sigma^p$  son continuamente diferenciables y que el problema (30) tiene solución única. Supongamos que los campos vectoriales  $\sigma^1(t, \cdot), \dots, \sigma^p(t, \cdot)$  conmutan en el sentido de las álgebras de Lie, es decir

$$[\sigma^k, \sigma^l] := \frac{\partial \sigma^k}{\partial x} \sigma^l - \frac{\partial \sigma^l}{\partial x} \sigma^k \equiv 0 \quad (32)$$

Seguindo a [16], la ecuación (30) se puede considerar en forma *trayectorial* —y lo haremos así— al menos fuera de un evento excepcional  $N$  con  $P(N) = 0$ .

Sea  $\bar{x}$  una solución particular,  $x$  una segunda solución de (30) con  $x(0) \neq \bar{x}(0)$ . Sea  $\omega_0 \in \Omega - N$ ,  $\xi(t) := \bar{x}(t, \omega_0)$  y escribamos  $z(t) \equiv z(t, \omega) := x(t, \omega) - \xi(t)$ . Por la hipótesis de diferenciabilidad,

$$\begin{aligned} f(t, \xi(t) + z(t)) &= f(t, \xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t)) z(t) + \epsilon(t) \\ \sigma^k(t, \xi(t) + z(t)) &= \sigma^k(\xi(t)) + \frac{\partial \sigma^k}{\partial x}(t, \xi(t)) z(t) + \eta(t), \end{aligned}$$

donde los procesos estocásticos  $\epsilon$  y  $\eta$  son “pequeños” siempre que  $z$  sea “pequeño”. Entonces,

$$\begin{aligned} z(t) - z(0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(s)) z(s) ds + \sum_{k=1}^p \int_0^t \frac{\partial \sigma^k}{\partial x}(\xi(s)) z(s) \circ dW(s) \\ &+ \int_0^t \epsilon(s) ds + \int_0^t \eta(s) \circ dW(s). \end{aligned}$$

Definamos

$$q(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t)), \quad c(t) := \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, \xi(t)) \quad (33)$$

y entonces

$$dz = q(t)z dt + c(t)z \circ dW + \epsilon dt + \eta \circ dW. \quad (34)$$

Despreciando los términos pequeños en (34), obtenemos la EDE

$$dz = q(t)z dt + c(t)z \circ dW, \quad (35)$$

que describe las "perturbaciones" a partir de la trayectoria  $\xi$ . Nótese que los coeficientes  $q(t)$  y  $c(t)$  son determinísticos, pues hemos fijado una trayectoria del proceso  $\bar{x}$ .

Se obtiene un caso especial cuando los coeficientes  $q$  y  $c^1, \dots, c^p$  son matrices  $d \times d$  constantes, a saber

$$dz = qzdt + \sum_{k=1}^p c^k z \circ dW_k, \quad (36)$$

Por otro lado, la dinámica de un sistema de este tipo está gobernada por los valores propios de sus matrices coeficientes, que bien pueden ser complejos. De hecho, podemos pensar que  $q, c^1, \dots, c^p$  son escalares, *valores estimados* de dichos valores propios, caso en el que  $z, W_1, \dots, W_p$  serán necesariamente escalares y complejos. Nos restringiremos a este caso escalar complejo.

Es claro que la ecuación escalar compleja (36) es la EDE más sencilla que quisiéramos tratar bien mediante un método numérico, digamos el método RKE (14). Por lo tanto, la tomaremos como *ecuación de prueba* —alternativa a (22)— para investigar la estabilidad de un método numérico para la integración de EDE's.

En contraste con (22), que representa un sistema lineal, esta nueva ecuación de prueba representa un sistema *no lineal*, ya que el término estocástico contiene productos de la función incógnita por el ruido blanco. Más precisamente: la ecuación (22) es lineal con ruido blanco como término forzante y la correspondencia  $W \mapsto z$  es afín; en cambio, la ecuación (36) es lineal homogénea en  $z$ , pero la dependencia correspondencia  $W \mapsto z$  no es ni siquiera afín.

Para especificar (36) en modo tal que se garantice que sus soluciones decaigan, procederemos como sigue: Sean  $\alpha, \omega, Q, U_k, V_k$  como en la sección 3 y sean  $c^k := \sqrt{2}(\rho_k + \tau_k i) \neq 0$ , ( $1 \leq k \leq p$ ). Entonces, la EDE (36) es equivalente al sistema vectorial real

$$d\zeta = Q\zeta dt + \sum_{k=1}^p (C^k \zeta \circ dU_k + D^k \zeta \circ dV_k), \quad (37)$$

donde  $\zeta := (\text{Re } \zeta, \text{Im } \zeta)^T$ , y

$$C^k := \begin{pmatrix} \rho_k & -\tau_k \\ \tau_k & \rho_k \end{pmatrix}, \quad D^k := \begin{pmatrix} -\tau_k & -\rho_k \\ \rho_k & -\tau_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (38)$$

Nótese que las matrices en (38) conmutan entre sí, por lo que los campos vectoriales que multiplican a los diferentes  $dU_k$  y  $dV_k$  en (37) conmutan en el sentido de (32).

Además, la ecuación (37) muestra que *resolver la EDE de Stratonovich (36) mediante un método RKE equivale a discretizar la correspondiente EDE de Ito*  $dz = qz dt + \sum_{k=1}^p c^k z dW_k$ , *sin ninguna corrección adicional*. En efecto, dado que  $(C^k)^2 + (D^k)^2 = 0$ ,  $k = 1, \dots, p$ , el término de corrección prescrito en (31) se anula. Por lo tanto, (37) es equivalente a la EDE vectorial de Ito con los mismos coeficientes de difusión y de deriva. Además, sigue del Teorema 2.1 que el término de deriva se debe corregir antes de que se aplique un método RKE. Sin embargo, la corrección consiste en substraer  $\lambda \sum \left\{ (C^k)^2 + (D^k)^2 \right\} \zeta$  del coeficiente de deriva  $Q\zeta$ , por lo que la ecuación permanece inalterada.

Por lo tanto, podemos concentrarnos en las propiedades de estabilidad de la EDE bidimensional de Ito que se obtiene al reemplazar  $odU_k$  y  $odV_k$  en (36) con  $dU_k$  and  $dV_k$ , respectivamente.

Nótese que  $z(t) \equiv 0$  siempre es una solución de (36), y es asintóticamente estable en media cuadrática si  $P(t) := E(z(t)z(t)^T) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  —véase [1]— para cualquier solución  $z$  que no se anule idénticamente. En efecto, un cálculo directo basado en la fórmula diferencial de Ito prueba que  $P$  satisface el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned} \dot{P} &= QP + PQ^T + \sum_{k=1}^p (C^k PC^{kT} + D^k PD^{kT}), \\ P(0) &= E(z(0)z(0)^T). \end{aligned} \quad (39)$$

Este es un sistema lineal con coeficientes constantes, con una única solución de equilibrio dada por  $P(t) \equiv 0$  para valores adecuados de sus parámetros. Sea  $\nu$  la relación fluctuación-disipación de (26), con  $c_k$  en lugar de  $\sigma^k$ .

**Teorema 4.3** *La solución de equilibrio de la versión de Ito de (36) es asintóticamente estable en media cuadrática si  $Re(q) < -|Im(q)|$ ,  $0 < \nu < 1$ .*

Véase [9] para la demostración de este resultado.

Si se aplica un método RKE a la ecuación de prueba (36) —o a su versión de Ito— resulta una ecuación en diferencias, cuya solución puede reflejar el

comportamiento de la correspondiente solución de (36). Resulta natural definir *estabilidad numérica* como sigue:

**Definición 4.4** Un método numérico se llamará *estable* si, al discretizar la ecuación de prueba (36) con soluciones no cero que decaen, la solución de la ecuación en diferencias resultante también decae a cero.

## 5 Regiones de estabilidad.

Igual que para las EDO's, para las EDE's se pueden diseñar técnicas numéricas adaptativas que controlen el tamaño del paso de integración para evitar la acumulación de errores de redondeo. Tales técnicas usan como base los requisitos de convergencia, además de las *regiones de estabilidad* con objeto de limitar la elección del paso. Veamos cómo se puede introducir el concepto de región de estabilidad correspondiente a la definición 4.4.

Una aplicación directa del método RKE (14) a la forma de Ito de la ecuación (36) conduce a la versión discretizada

$$z_{j+1} = S(qh, c^1 \Delta W_{1,j}, \dots, c^p \Delta W_{p,j}) z_j, \quad (40)$$

donde  $\Delta W_{k,j} := W_k(t_{j+1}) - W_k(t_j)$ ,  $k = 1, \dots, p$  y

$$S(z) := 1 + \left( \sum_{k=0}^p z_k b_k \right)^T \left( I - \sum_{k=0}^p z_k A_k \right)^{-1} \mathbf{1} \quad (41)$$

está definido para todos los vectores  $z := (z_0, z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$  para los cuales  $I - \sum_{k=0}^p z_k A_k$  es invertible.

NOTA: a) Los factores de crecimiento

$$S_j := S(qh, c^1 \Delta W_{1,j}, \dots, c^p \Delta W_{p,j})$$

son variables aleatorias complejas que dependen de todas las componentes del método RKE bajo consideración. b) Si  $A_1 = \dots = A_p$ ,  $b_1 = \dots = b_p$ , entonces el factor de crecimiento se simplifica, dando lugar a

$$S(z) = R(z_0 + z_1 \pm \dots + z_p), \quad z \in \mathbb{C}^{p+1}. \quad (42)$$

La solución de (40) correspondiente a una dada condición inicial  $z_0$  es

$$z_j = \left( \prod_{l=0}^{j-1} S_l \right) z_0, \quad (43)$$

y una condición suficiente para la estabilidad (es decir,  $z_j \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ ) es que  $|S_j| < 1 - \epsilon$ ,  $j = 0, 1, \dots$  para  $\epsilon > 0$  dado. De acuerdo con lo anterior, el método es estable si la imagen de  $S$  es un subconjunto compacto del disco abierto unitario en  $\mathbb{C}$ , sólo que este requisito es demasiado restrictivo. En particular, para (14) con  $A_1 = \dots = A_p$ ,  $b_1 = \dots = b_p$ , de la ecuación (42) se sigue en este caso que el método RKE correspondiente es estable en este sentido si y sólo si  $R$  transforma *todo el plano complejo* en un subconjunto compacto del disco unitario. Así pues, ningún método RKE con  $R$  invertible es estable. En particular, los métodos RKE cuyo factor de crecimiento es una transformación lineal fraccional no singular son necesariamente inestables. Por ejemplo, el método RKE (16) con  $\mu = \beta = \lambda = \gamma$  no será estable para ningún  $\gamma \in [0, 1]$ . En efecto, su factor de crecimiento es  $R(z) = \frac{1+(1-\gamma)z}{1-\gamma z}$ , que claramente es no singular.

Conviene relajar algo los requisitos de estabilidad para evitar los inconvenientes arriba señalados. Podemos hacerlo mientras explotamos el carácter estocástico del factor de crecimiento, buscando definir regiones de estabilidad para el método RKE (14) que reflejen la naturaleza probabilística del problema. Para ello, nótese que cada  $c^k \Delta W_k$  es una variable aleatoria Gaussiana, con media cero y varianza  $|c^k|^2 h$ , con  $h := \Delta t$ . Entonces, la probabilidad de que  $|S_j| < 1 - \epsilon$  se puede evaluar mediante

$$P \left( \left| S \left( qh, \sqrt{h}c^1 Z_1, \dots, \sqrt{h}c^p Z_p \right) \right| < 1 - \epsilon \right),$$

donde cada  $Z_k$  es una variable aleatoria compleja Gaussiana con media 0 y varianza 1 *cualquiera*. En particular, podemos tomar  $Z_k = \exp^{-i \arg(c^k)} (X_k + iY_k) / \sqrt{2}$ , donde tanto  $X_k$  como  $Y_k$  son independientes y  $N(0, 1)$ . Si definimos  $z := qh$ ,  $\nu_k = (\rho_k^2 + \tau_k^2) / \beta$ ,  $k = 1, \dots, p$ , resulta que  $|C^k| \sqrt{h} = \sqrt{2\nu_k |\operatorname{Re} z|}$ . Por lo tanto, la probabilidad de interés es

$$P \left( \left| S \left( z; \sqrt{2\nu_k |\operatorname{Re} z|} (X_k + iY_k), k = 1, \dots, p \right) \right| < 1 \right) \quad (44)$$

donde  $X_k, Y_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  son Gaussianas estándar e independientes.



Por el Teorema 4.3, hay estabilidad si  $\operatorname{Re} z < -|\operatorname{Im} z|$ ,  $0 < \nu < 1$ . En la práctica, nos interesará caracterizar las regiones del plano complejo  $z$  para las cuales la probabilidad en (44) es cercana a 1 (para cualquier elección razonable de relación fluctuación-disipación  $\nu$ ). Sea  $\epsilon > 0$  dado de antemano. Definamos, para cada valor de  $\nu \in [0, 1]$ , el conjunto  $G_{\epsilon, \nu}$  formado por todos los números complejos  $z$  que satisfacen las condiciones a)  $\operatorname{Re} z < -|\operatorname{Im} z|$ , b) la probabilidad en (44) pasa de  $1 - \epsilon$ . El conjunto bidimensional  $G_{\epsilon, \nu}$  se llama la *región de estabilidad con riesgo  $\epsilon$  correspondiente a  $\nu$*  para el algoritmo RKE (14).

Suponga que la relación de fluctuación a disipación sea  $\nu$ . Si se elige  $h$  de tal manera que  $qh \in G_{\epsilon, \nu}$ , se asegura que la condición de estabilidad

$$\left| S \left( z; \sqrt{2\nu_k |\operatorname{Re} z|} (X_k + iY_k), k = 1, \dots, p \right) \right| < 1$$

se cumpla en por lo menos  $100(1 - \epsilon)\%$  de los casos. Veamos a continuación un algoritmo de simulación para el cálculo de dichas regiones de estabilidad<sup>3</sup> como función de los parámetros que caracterizan el método RKE en cuestión, digamos del vector  $\theta \in \Theta$ .

El procedimiento para la simulación tiene cuatro parámetros (denotados por  $N$ ,  $R$ ,  $m$  y  $n$ ) además de  $\theta$ , de los cuales  $N$ ,  $m$  y  $n$  son enteros positivos.  $R$  es la distancia máxima a partir del origen que define la parte de la cuña  $\operatorname{Re} z < -\operatorname{Im} z$  que se va a explorar; se genera una malla  $\Gamma$  dentro de este sector de la manera siguiente: divídanse los intervalos  $0 \leq r \leq R$  y  $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$  en  $m$  y  $n$  subintervalos de igual longitud, determinando así los puntos  $r_0 < r_1 < \dots < r_m$  y  $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$ , respectivamente.  $\Gamma$  consta de todos los puntos  $r_j (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .  $N$  es el número de conjuntos de  $2p$  números Gaussianos estándar independientes que se van a generar en cada punto  $z \in \Gamma$ , generados por ejemplo según el *método polar* [6].

Para cada  $\theta \in \Theta$  y para cada elección de  $\epsilon > 0$  y  $\nu \in (0, 1)$ , se estima la probabilidad (44) mediante la frecuencia relativa  $p$ , que a su vez se calcula en el modo siguiente:

<sup>3</sup>Aún en los ejemplos sencillos, el cálculo analítico es prohibitivo.

```

/* Procedimiento: estimación p */
póngase contador:= 0;
para k = 1,...,N{
    génense 2p números gaussianos estándar
    e independientes,  $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ ;
    póngase  $\sigma := S(z; \sqrt{2\nu_k |\operatorname{Re} z|} (x_k + iy_k), k = 1, \dots, p)$ ;
    si  $|\sigma| < 1$ , súmele 1 a contador;
}
hágase  $p := \text{contador}/N$ ;

```

Ya especificado este cálculo, el procedimiento de simulación se puede expresar como sigue:

```

/* Procedimiento: cálculo de la región de estabilidad */
Elíjanse  $\theta, \epsilon, \nu$ ;
para cada  $z \in \Gamma$ {
    estímesese  $p$ ;
    decídase:  $z \in \Gamma$  si y sólo si  $p > 1 - \epsilon$ .
}

```

En [9] se reportan cálculos hechos para  $N = 1000$ ,  $m = 10$ ,  $n = 5$ ,  $R = 10$  sobre el método RKE óptimo -en cuanto a orden de convergencia- (16), con  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \gamma \in [0, 1] \equiv \Theta$ , es decir

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\gamma & \gamma \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad (45)$$

Este algoritmo RKE corresponde a la discretización

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= \left[ \frac{1}{2} f(t_i, x_i) + \frac{1}{2} f(t_{i+1}, x_{i+1}^p) \right] \Delta t_i + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \sigma(t_i, x_i) + \frac{1}{2} \sigma(t_{i+1}, x_{i+1}^p) \right] \Delta W_i \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} x_{i+1}^p - x_i &= [(1-\gamma)f(t_i, x_i) + \gamma f(t_{i+1}, x_{i+1}^p)] \Delta t_i + \\ &+ [(1-\gamma)\sigma(t_i, x_i) + \gamma \sigma(t_{i+1}, x_{i+1}^p)] \Delta W_i, \end{aligned} \quad (47)$$

cuyo superíndice  $p$  está por "predictor".

## Bibliografía

- [1] L. Arnold, *Stochastic differential equations*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [2] K. Bitcheler, *Stochastic integration and  $L_p$ -theory of martingales*, Ann. Prob. 9,49-89(1981).
- [3] Butcher, J. C., *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [4] G. Dahlquist, *A special stability problem for linear multistep methods*, BIT, 3,27-43(1963).
- [5] K. Dekker and J. G. Verwer, *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*, North Holland, Amsterdam, 1984.
- [6] Devroye, L., *Nonuniform random variate generation*, Springer Verlag, New York, 1986.
- [7] Hernández, D. B., *Fluctuación y Disipación*, Ciencia, 42 (1991), 327-338.
- [8] D. B. Hernandez and R. Spigler, *A-stability of Runge-Kutta methods for systems with additive noise*, aceptado para su publicación en BIT, 1992.
- [9] D. B. Hernandez and R. Spigler, *Convergence and stability of Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise*, sometido para su publicación.
- [10] Klauder, J. R. and W. P. Petersen, *Numerical Integration of Multiplicative noise SDE's*, SIAM J. Numer. Anal. 22, 1153-1166 (1985)
- [11] P.E. Kloeden and E. Platen, *A survey of numerical methods for stochastic differential equations*, J. Stoch. Hydrology and Hydraulics, 3, 155-178 (1989).
- [12] Nelson, E., *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1967.

- [13] W. Rümelin, *Numerical treatment of stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal, 19,604-613(1982).
- [14] J. M. Sancho, M. San Miguel, S. L. Katz and J. D. Gunton, *Analytical and numerical studies of multiplicative noise*, Phys. Rev. A 26,1589-1609(1982).
- [15] Schenzle, A. and H. Brand, *Multiplicative stochastic processes in statistical physics*, Phys. Rev., A20, 1628-1647 (1979)
- [16] H. Sussmann, *On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations*, Ann. Prob. 6,19-41(1978).

#### Abstract

This paper deals with the numerical stability of methods for the solution of stochastic differential equations of the Ito type, with special emphasis on the Runge-Kutta family. The simplest approach to stochastic numerical stability involves a direct extension of the well known concept of *A-stability*, which is defined with respect to a *linear* stochastic differential test equation. However, this stability concept presents serious disadvantages, e.g. a numerical method is stable regardless of how the stochastic term in the equation is discretized. This is clearly unsatisfactory, and calls for a more refined analysis. Thus, a *nonlinear* test equation is introduced, and numerical stability of a method is defined in terms of it. Stability regions are then defined probabilistically, and a simulation algorithm is presented for their computation.