TALLER DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

Alfinio Flores Peñafiel

77

1988

Preparado para el Primer Simposio Internacional en Educación Matemática, CCH, UNAM.

Taller de resolución de problemas

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en Matemáticas

Contenido

Taller de resolución de problemas

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, Gto.

Control de lectura de: Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, 1979.

1) Enuncia las cuatro fases para resolver un problema.

2) Da un ejemplo donde quede clara la importancia de **entender el problema**

3) ¿Qué sugerencias se pueden hacer al alumno para ayudarlo a comprender el problema? (Al menos 4)

4) ¿Cómo subdivide Polya esta primera fase **entender el problema**? ¿Cuál es el propósito de cada etapa?

5) Para cada una de las siguientes sugerencias da un ejemplo de un problema para el cual la sugerencia ayude a entenderlo:
a) ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?
b) dibujar una figura relacionada
c) introducir una notación adecuada

6) ¿Qué sugerencias se pueden hacer para ayudar al alumno a **concebir un plan**? (Al menos 3)

7) Para cada inciso da un ejemplo de un problema que pueda ser resuelto pensando en un problema relacionado
a) con un problema más accesible
b) un problema más general
c) un problema más particular
d) un problema análogo
e) resolviendo parte del problema
f) quitando una parte de la condición

8) ¿Cuál es el aspecto más importante de la fase **ejecución del plan**?

9) Enuncia al menos tres preguntas con las cuales el alumno puede aprovechar mejor la **visión retrospectiva**.
10) Da un ejemplo para cada una de ellas.

Control de lectura de Wilson, Patricia. ¿Qué es resolver un problema?

1) ¿Cuál es el papel del maestro en la solución de problemas?

2) ¿De qué manera puede el maestro orientar?

3) ¿Qué tipo de preguntas debe hacer el maestro?

4) ¿Cómo puede estimular a los alumnos?

5) ¿Cómo puede servir de modelo?

6) ¿Qué es un problema? Da un ejemplo de un problema.

7) ¿Por qué es importante resolver problemas?

PROBLEMAS 1

. Resuelve los siguientes problemas haciendo explícitas las cuatro fases sugeridas por Polya para resolver un problema.

1. En un tetraedro (que no necesariamente es regular), dos aristas opuestas tienen la misma longitud **a** y son perpendiculares entre sí. A su vez son perpendiculares a una línea de longitud **b** que une sus puntos medios. Expresa el volumen del tetraedro en términos de **a** y **b** y prueba tu respuesta.

2. Considera las siguientes cuatro proposiciones, que no necesariamente son ciertas.
   1. Si un polígono inscrito en un círculo es equilátero entonces también es equiangular.
   2. Si un polígono inscrito en un círculo es equiangular, entonces también es equilátero.
   3. Si un polígono circunscrito alrededor de un círculo es equilátero, entonces también es equiangular.
   4. Si un polígono circunscrito alrededor de un círculo es equiangular, entonces también es equilátero.

A) Dí cuales de las cuatro proposiciones son ciertas y cuáles son falsas, dando una prueba de tu afirmación en cada caso.
B) Si en vez de polígonos generales, sólo consideramos cuadriláteros, cuáles de las cuatro proposiciones son ciertas y cuáles son falsas? ¿Y si consideramos solo pentágonos?
Al responder a B), puedes enunciar conjeturas, pero prueba tanto como puedas y separa claramente lo que está demostrado de lo que no está.

3. Para enumerar las páginas de un libro grueso el impresor usó 1890 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

4. Determina $\mathbf{m}$ de modo que la ecuación en x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

tenga cuatro raíces reales en progresión aritmética.

5. Sean α, β, γ los ángulos de un triángulo. Demuestra que

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 4\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2),$$

$$\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2\beta + \operatorname{sen}2\gamma = 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$$

y $$\operatorname{sen}4\alpha + \operatorname{sen}4\beta + \operatorname{sen}4\gamma = -4\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}2\beta\operatorname{sen}2\gamma.$$

6. Considera la tabla:

$$1 = 1$$
$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$$

Adivina la regla general sugerida por estos ejemplos, exprésala en una notación matemática adecuada, y pruébala.

7. Una primera esfera tiene el radio r_1. Alrededor de esta esfera circunscribe un tetraedro regular. Alrededor de este tetaedro circunscribe una segunda esfera de radio r_2. Alrededor de esta segunda esfera circunscribe un cubo. Alrededor del cubo circunscribe una tercera esfera de radio r_3. Encuentra las razones $r_1 : r_2 : r_3$.

Problemas 1 -7 tomados de Polya G.; Kilpatrick, J. The Stanford Mathematics Problem Book. Teachers College Press, 1974. p. 5-7.

8. Sean a, b, c, d números racionales y x un número irracional tales que $cx + d \neq 0$. Prueba que $(ax + b) / (cx + d)$ es irracional si y sólo si $ad \neq bc$.

9. Desigualdad de Chebishev. Sean $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ números reales. Prueba que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

y que la igualdad se obtiene si y sólo si ya sea $a_1 = a_n$ ó $b_1 = b_n$.
[Sugerencia: Primero prueba que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_j - a_k)(b_j - b_k).]$$

10. a) Si x, y son números reales, entonces $2xy \leq x^2 + y^2$, $4xy \leq (x + y)^2$. Una condición necesaria y suficiente para la igualdad es que $x = y$.
b) Si $a > 0$, $b > 0$ y $a + b = 1$, entonces $(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2 \geq 25/2$ ¿Cuándo vale la igualdad ?

Problemas 8 -10 tomados de Stromberg, K. An Introduction to Classical Real Analysis. Wadsworth, 1981. p. 35.

1. Dadas tres líneas rectas (infinitas), construye un círculo que toque a la dos primeras y tenga su centro en la tercera línea.

2. Dadas dos líneas rectas infinitas que se intersectan y un segmento de longitud **r**, contstruye un círculo de radio **r** que toque a las dos rectas.

3. Construye un círculo, dado un punto sobre él, una línea tangente a él, y su radio.

4. Tres faros son visibles desde un barco; sus posiciones en el mapa son conocidas y los ángulos entre los rayos de luz que provienen de ellos han sido medidos. Encuentra la posición del barco en el mapa.

5. Dentro de un círculo dado, describe tres círculos iguales de modo que cada uno toque a los otros dos y también al primer círculo.

6. Dentro de un triángulo dado, encuentra un punto desde el cual los tres lados se ven bajo el mismo ángulo.

7. Trisecta el área de un triángulo dado. Esto es, debes localizar un punto X dentro del triángulo ΔABC de modo que los triángulos ΔXBC, ΔXAB, y ΔXAB tengan la misma área.
[Retén sólo una parte de la condición, abandona la otra parte. Si sólo se supone que las áreas de dos de estos triángulos deben de ser iguales, ¿cuál es el lugar geométrico de X? La respuesta a esta pregunta te puede conducir a la solución, pero hay también otros caminos.]

Problemas tomados de los ejemplos y comentarios al capítulo 1 de Mathematical Discovery de G. Polya.

PROBLEMAS 3

Notación. Al tratar con un triángulo, es conveniente usar la siguiente notación:

A	B	C	vértices
a	b	c	lados
α	β	γ	ángulos
h_a	h_b	h_c	alturas
m_a	m_b	m_c	medianas
d_α	d_β	d_γ	bisectrices de los ángulos
	R		radio del círculo circunscrito
	r		radio del círculo inscrito

Se entiende que al lado a está opuesto al ángulo, cuyo vértice se el punto A que es el extremo común de las tres líneas h_a, m_a, d_α. De acuerdo con la costumbre, a denota al lado (un segmento de recta), como a la longitud de la recta; el lector debe inferir del contexto cuál es el significado que debe ser. La misma ambigüedad es inherente en los símbolos b, c, h_a, . . . d_γ, R, r. Usaremos esta notación aunque es cuestionable.

El problema "Triángulo de a, b, c" significa desde luego, "construye un triángulo dados a, b, c". Observa que tal vez no hay solución (la figura que satisface la condición propuesta puede no existir) si los datos se escogen de manera inconvemiente; por ejemplo, no existe un triángulo con los lados dados a, b, c,, si a > b + c. Experimenta primero con datos para los cuales la figura requerida pueda existir.

1 Triángulo de a, b, m_a.

2 Triángulo de a, h_a, m_a.

3 Triángulo de a, h_a, α.

4 Triángulo de a, m_a, α.

5 Triángulo de a, α, r.
[Retén sólo una parte de la condición, abandona la otra parte no tomes en cuenta r, pero mantén a y α; ¿cuál es el lugar geométrico del centro del círculo inscrito?]

6 Triángulo de a, h_b, c.

7 Triángulo de a, h_b, d_γ.

8 Triángulo de a, h_b, h_c.

9 Triángulo de h_a, h_b, β.

10 Triángulo de h_a, β, γ.

11 Triángulo de h_a, d_α, α.

12 Construye un paralelogramo dados uno de sus lados y dos diagonales.

13 Construye un trapezoide dados sus cuatro lados a, b, c, d; a y c deben ser paralelos.

14 Construye un cuadrilátero dados sus cuatro lados a, b, c, d, y el ángulo ϵ formado por los lados opuestos a y c. [Esta es una generalización del problema 13 donde $\epsilon = 0$.]

15 Triángulo de a, b + c, α.
[Asegurate de usar todos los datos en la figura. ¿Cuál es el lugar correcto para b + c ?]

16 Triángulo de a, b + c, $\beta - \gamma$.

17 Triángulo de a + b + c, h_a, α.
[Simetría: a y c (no dados) juegan papeles intercambiables.]

Problemas tomados de los ejemplos y comentarios al capítulo 1 de Mathematical Discovery de G. Polya.

PROBLEMAS 4

1) Considera la siguiente tabla:

$1 = 0 + 1$
$2 + 3 + 4 = 1 + 8$
$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$
$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$

Averigua la ley sugerida por estos ejemplos, exprésala con una notación matemática adecuada y demuéstrala.

2) Observa los valores de las sumas sucesivas:

$1,\ 1 + 3,\ 1 + 3 + 5,\ 1 + 3 + 5 + 7, \ldots$

3) Observa los valores de las sumas consecutivas:

$1,\ 1 + 8,\ 1 + 8 + 27,\ 1 + 8 + 27 + 64, \ldots$

¿Hay aquí una regla sencilla?

Problemas tomados de Matemáticas y razonamiento plausible cap 1.

Práctica de cómo enseñar a resolver problemas

1) Variación del problema
Existen ciertos procedimientos particularmente útiles para variar el problema, como por ejemplo, el referirse a la **definición, descomponer y recomponer el problema**, introducir **elementos auxiliares**, utilizar medios como la **generalización,** la **particularización** y el empleo de la **analogía**.
Ilustra cómo se pueden utilizar cinco de estos procedimientos para concebir un plan para resolver un problema. (Puedes ilustrar con cinco problemas diferentes)

2) Escoge un "problema por demostrar". Guía a los alumnos para utilizar las siguientes preguntas y sugerencias para resolverlo (demostrarlo):
¿Cuál es hipótesis? ¿Cuál es la conclusión?
Distingue las diversas partes de la hipótesis.
Encuentra la relación entre la hipótesis y la conclusión.
Mira bien la conclusión, Trata de pensar en algún teorema que sea familiar y que tenga la misma conclusión o una similar.
Conserva sólo una parte de la hipótesis, descarta la otra parte; ¿sigue siendo válida la conclusión ?
¿Podrías deducir de la hipótesis algún elemento útil?; ¿podrías pensar en otra hipótesis de la cual pudieras deducir facilmente la conclusión?; ¿podrías cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionados entre sí?
¿Has empleado la hipótesis completa?

3) En un problema ilustra de la manera más completa posible las cuatro etapas sugeridas porl Polya para resolverlo.
(1 Comprender el problema. 2 Concebir un plan. 3 Ejecución del plan. 4 examinar la solución obtenida)

REFERENCIAS Y LECTURAS ADICIONALES

Curcio, F. R. Teaching and learning: a problem solving focus. National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

Krulik, S. Problem solving inf school mathematics. 1980 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

National Council of Supervisors of Mathematics. Position paper on basic skills. Arithmetic Teacher, 25 (octubre 1977), 18-22.

National Council of Teachers of Mathematics. An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980's. National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

Pólya, G. How to solve it. Princeton University Press, 1945. (Traduccion al español: Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, 1975.)

Pólya, G. Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1 Induction and analogy in mathematics. Vol. 2 Patterns of plausible inference. Princeton University Press, 1954. (Traducción al español: Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos, 1966)

Pólya, G. Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving. Wiley, 1981.

Pólya, G.; Szegö, G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 1, 2. Springer Verlag, 1925. (Traducción al inglés Problems and theorems in analysis 1, 2. Springer, 1972, 1976)

Schoenfeld, A. H. Problem solving in the mathematics curriculum. Mathematical Association of America, 1983.

Schoenfeld, A. H. Mathematical problem solving. Academic Press, 1985.

Stromberg, K. An Introduction to Classical Real Analysis. Wadsworth, 1981

Wertheimer, Max. Productive thinking. University of Chicago Press, 1982.

Wilson, Patricia. ¿Qué es resolver un problema?

Práctica de procedimientos heurísticos

(problemas tomados de Larson, Loren C. <u>Problem-solving through problems</u>. Springer, 1983)

1) Busca un patrón
2) Dibuja una figura
3) Formula un problema equivalente
4) Modifica el problema
5) Escoge notación efectiva
6) Aprovecha la simetría
7) Divide en casos
8) Trabaja hacia atrás
9) Arguye por contradicción
10) Persigue la paridad
11) Considera casos extremos
12) Generaliza

1) Busca un patrón

Para empezar a analizar un problema podemos adquirir un sentido del problema convenciéndonos de la plausibilidad del resultado. Esto se puede hacer examinando los casos particulares más inmediatos. Cuando se efectúa esta exploración de manera sistemática, pueden surgir patrones que sugieran ideas para atacar el problema.

1.1 ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar con un conjunto de n elementos?

Solución 1. Examinemos qué pasa cuando el conjunto tiene 0, 1, 2, 3, elementos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

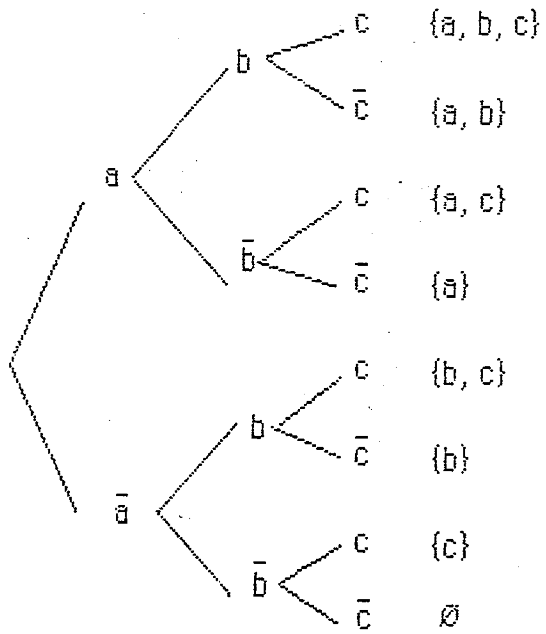
n	elementos de S	subconjuntos de S	número de subconjuntos de S
0	ninguno	$\emptyset$	1
1	x_1	$\emptyset, \{x_1\}$	2
2	x_1, x_2	$\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\} \{x_1\ x_2\}$	4
3	x_1, x_2, x_3	$\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\},$ $\{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}$	8

Nuestro propósito al construir la tabla no es sólo verificar el resultado, sino también buscar patrones que puedan sugerir cómo proceder en el caso general. Así que tratamos de ser lo más sistemático posible. En este caso, nota que para $n = 3$, listamos primero los subconjuntos de $\{x_1, x_2, x_3\}$, y luego en la segunda línea, cada uno de éstos subconjuntos aumentado con el elemento x_3. Esta es la clave que nos permite pasar a valores mayores de n. Por ejemplo, para $n = 4$, los subconjuntos de $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ son los 8 subconjuntos de (mostrados en la tabla) junto con 8 subconjuntos que se obtienen al añadir x_4 a cada uno de estos subconjuntos. Estos 16 subconjuntos constituyen todos los posibles subconjuntos. De este modo, un conjunto con 4 elementos tiene 2^4

subconjuntos. Una prueba sencilla por inducción matemática se puede hacer basada en esta idea.

Solución 2. Otra forma de presentar la idea de la solución anterior es la siguiente. Para cada n, denota por A_n el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos. Sea S un conjunto con n + 1 elementos y sea x uno de sus elementos. Hay una correspondencia biyectiva entre los subconjuntos de S que no contienen a x y aquellos subconjuntos que lo contienen (al subconjunto T que no contiene x se le asocia el conjunto $T \cup \{x\}$) Por lo tanto el número de suconjuntos de un conjunto con n + 1 elementos es el doble que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, por lo tanto $A_{n+1} = 2 A_n$.
Combinando esta fórmula recursiva con el hecho que $A_0 = 1$ implica que
$A_n = 2^n$.

Solución 3. Otra forma sistemática de contar los subconjuntos se puede realizar construyendo un árbol. Se muestra el árbol para el caso n = 3 con
S = {a, b, c}



Cada rama del árbol corresponde a un subconjunto distinto de S. La barra sobre el elemento indica que no está incluído en el subconjunto correspondiente. El árbol se construye en tres etapas, correspondientes a cada elemento de S. Cada elemento de S conduce a dos posibilidades, o está incluído en el subconjunto o no está, y estas dos opciones están representadas por dos ramas. Conforme se considera cada elemento, el número de ramas se duplica. Así para un conjunto con tres elementos el árbol tiene 2 × 2 × 2 = 8 ramas. Para un conjunto con n elementos el número de ramas es 2^n.

Solución 4. Enumeremos los subconjuntos de acuerdo con su cardinalidad. Por ejemplo para S = {a, b, c} los sucónjuntos son:

Número de elementos		Número de subconjuntos
0	$\emptyset$	1
1	{a}, {b}, {c}, {d}	4
2	{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c} {b, d}, {c, d}	6
3	{a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}	4
4	{a, b, c, d}	1

Nota que para el renglón con k elementos el número de subconjuntos es

$$\binom{n}{k}$$

Entonces el número de subconjuntos de S es

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Y por el teorema del binomio

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

de donde se tiene el resultado.

Solución 5. Otra forma sistemática de contar los subconjuntos puede ser sugerida por la siguiente tabla:

Subconjunto	Tripleta	Número binario	Número decimal
$\emptyset$	(0, 0, 0)	0	0
$\{x_3\}$	(0, 0, 1)	1	1
$\{x_2\}$	(0, 1, 0)	10	2
$\{x_2, x_3\}$	(0, 1, 1)	11	3
$\{x_1\}$	(1, 0, 0)	100	4
$\{x_1, x_3\}$	(1, 0, 1)	101	5
$\{x_1, x_2\}$	(1, 1, 0)	110	6
$\{x_1, x_2, x_3\}$	(1, 1, 1)	111	7

Para entender el patrón en esta tabla, nota que la tripleta en cada caso está dada por la función característica de cada subconjunto. Específicamente, si A es un subconjunto de S se define la función característica C_A de A como

$$C_A(x_i) = 1 \text{ si } x_i \text{ está en A}$$
$$C_A(x_i) = 1 \text{ si } x_i \text{ no está en A}$$

De esta forma podemos asociar a cada subconjunto de A con una n-ada de 0 y 1. Igualmente a cada n-ada le corresponde un único subconjunto de S. De modo que el número de subconjuntos de S es igual al número de n-adas de 0 y 1. Este último conjunto está obviamente en correspondencia biyectiva con los números binarios no negativos menores que 2^n. De modo que a cada entero no negativo menor que 2^n le corresponde exactamente un subconjunto y conversamente. Por tanto el número de suconjuntos de S es 2^n.

Problema.

1.8 Prueba que se puede hacer una lista de todos los subconjuntos de un conjunto S de modo que:

i) el conjunto vacío es el primero en la lista

ii) cada suconjunto aparece exactamente una vez, y

iii) cada subconjunto en la lista se obtiene ya sea añadiendo un elemento al subconjunto precedente o eliminando un elemento del conjunto precedente.

3) Formula un problema equivalente

La recomendación de esta sección es tratar de reformular el problema en una forma equivalente pero más sencilla. Hay que usar la imaginación y la creatividad. Algunas técnicas comunes de reformulación involucran manipulación algebraica o trigonométrica, sustitución o cambio de variable, uso de correspondencias uno a uno, y reinterpretación en términos del lenguaje de otra materia (álgebra, geometría, análisis, combinatoria etc.)

3.1 Encuentra una fórmula general para la n-ésima derivada de $f(x) = 1/(1 - x^2)$.

Solución. Un paso común al trabajar con funciones racionales es escribir la función como la suma de fracciones parciales. En este caso,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

y en esta forma es fácil ver que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

3.2 Encuentra todas las soluciones de $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Solución. Esta ecuación puede ser resuelta dividiendo entre x, luego sustituyendo $y = x + 1/x$, y luego aplicando la fórmula cuadrática. Así tenemos

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

$$\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + (1-2) = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0,$$

$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $y_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$, $y_1 = (-1 - \sqrt{5})/2$.

Queda por determinar x resolviendo las dos ecuaciones

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \qquad y \qquad x + \frac{1}{x} = y_2$$

las cuales son equivalentes a $x^2 - y_1x + 1 = 0$, y a $x^2 - y_2x + 1 = 0$.

Las cuatro raíces que se obtienen al resolver éstas son

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Otra forma de atacar este problema es multiplicar la ecuación por $x - 1$. Como $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$, un problema equivalente es encontrar todas las x (diferentes de 1) que satisfacen $x^5 = 1$.
Las cinco raíces de la unidad están dadas por

$x_1 = \cos\frac{2}{5}\pi + i\,\sin\frac{2}{5}\pi$

$x_2 = \cos\frac{4}{5}\pi + i\,\sin\frac{4}{5}\pi$

$x_3 = \cos\frac{6}{5}\pi + i\,\sin\frac{6}{5}\pi$

$x_4 = \cos\frac{8}{5}\pi + i\,\sin\frac{8}{5}\pi$

$x_5 = 1$

Como subproducto de haber resuelto el problema de dos formas diferentes vemos que

$$\cos\frac{2}{5}\pi + i\,\sin\frac{2}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Al igualar las partes reales e imaginarias nos da

$$\cos 72^o = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 72^o = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

3.4 Prueba que si m y n son enteros positivos y $0 \leq k \leq n$, entonces

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Solución. Con frecuencia las series finitas, especialmente aquellas en las que aparecen coeficientes binomiales se pueden sumar de manera combinatoria. Transforma el problema sobre la serie en un problema de contar de la siguiente manera. Sea $S = A \cup B$, donde A es un conjunto de n elementos, y B es un conjunto ajeno a A con m elementos. Vamos a contar de dos formas diferentes el número de subconjuntos con k elementos de S. Por una parte, el número es

$$\binom{m+n}{k}.$$

Por otra parte, el número de subconjuntos de S con k elementos, exactamente i de los cuales están en A (y k-i en B) es

$$\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Se sigue que

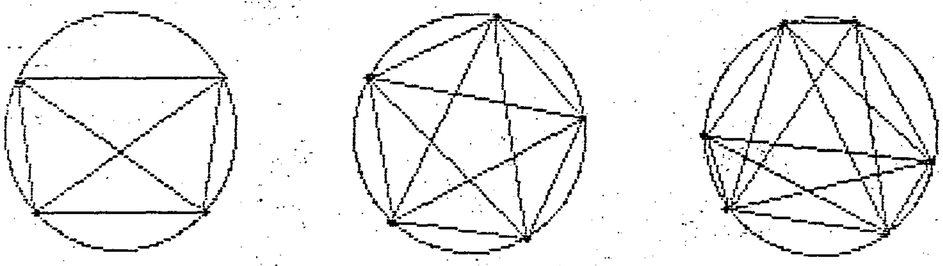
$$\binom{m+n}{k} = \text{No. de subconjuntos de } S \text{ con } k \text{ elementos}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (\text{No. de subconjuntos con } k \text{ elementos de } S \text{ con } i \text{ elementos de } A)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Los problemas de conteo se pueden simplificar frecuentemente identificando por medio de una biyección los elementos de un conjunto con los de otro conjunto cuyos elementos pueden ser contados más fácilmente. Los siguientes tres problemas ilustrarán esta idea.

3.5 En un círculo se escogen n puntos y se trazan las cuerdas que los unen por pares. Suponiendo que las cuerdas no son concurrentes por tercias (excepto en los extremos) ¿cuántos puntos de intersección hay dentro del círculo?



1 5 15

Solución. Se muestran los casos para $n = 4, 5, 6$ en la figura. Nota que cada punto de intersección interior determina y es determinado por cuatro de los n puntos dados sobre el círculo (estos cuatro puntos producirán dos cuerdas que se intersectan en el interior del círculo). El número de puntos de intersección es

$$\binom{n}{4}.$$

3.6 Dado un entero positivon, encuentra el número de cuádruplas de enteros (a, b, c, d) tales que $0 \le a \le b \le c \le d \le n$.

Solución. La idea clave es notar que hay una biyección entre las cuádruplas de nuestro conjunto y los subconjuntos de cuatro objetos tomados de $\{0, 1, \ldots, n+3\}$.

Específicamente identifica a (a,b,c,d), $0 \le a \le b \le c \le d \le n$, con el subconjunto $\{a, b + 1, c + 2, d + 3\}$. Así el número es

$$\binom{n+4}{4}$$

3.7 El número 5 se puede expresar como la suma de 3 números naturales, tomando el orden en cuenta, de 6 formas diferentes:

$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 = 1 + 2 + 2 = 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 2 + 1.$

Sean m y n números naturales tales que $m \le n$. ¿De cuántas formas se puede escribir n como una suma de m números naturales, tomando el orden en cuenta?

Solución. Escribe n como la suma de n unos:

$n = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$

El número que buscamos es el número de formas de escoger $m - 1$ signos $+$ de los $n - 1$, esto es,

$$\binom{n-1}{m-1}.$$

Problemas

3.8 Demuestra que $x^7 - 2x^5 + 10x^2 - 1$ no tiene ninguna raíz mayor que 1. (Sugerencia: como generalmente es más fácil demostrar que un polinomio no tiene raíces positivas, considera el problema equivalente que se obtiene sustituyendo $x = y + 1$.)

3.9 El número 3 se puede expresar como la suma de uno o más enteros positivos, tomando el orden en cuenta, de cuatro maneras diferentes, como 3, 1+ 2, 2 + 1, y 1 + 1 + 1. Demuestra que un número positivo n se puede expresar de 2^{n-1} formas como la suma de uno o más enteros positivos.

3.10 En cuántas formas se puede expresar 10 como la suma de 5 enteros no negativos, tomando el orden en cuenta? (Sugerencia: encuentra un problema equivalente en el que la frase "5 enteros no negativos" se reemplace por "5 enteros positivos".)

3.11 ¿Para cuáles valores de a tiene el sistema de ecuaciones

$$x^2 = y^2$$
$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

exactamente cero, una, dos, tres y cuatro soluciones? (Sugerencia: traduce el problema a un problema equivalente de geometría.)

3.12 Sean n objetos acomodados en fila. Un subconjunto de estos objetos se llama salteado, si no hay dos de sus elementos que sean consecutivos. Demuestra que el número de subconjuntos salteados con k elementos es

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

(Sugerencia: adopta una idea similar a la usada en 3.6).

3.14 Encuentra el área de un triángulo de dos maneras diferentes para probar que si h_1, h_2, h_3 son las alturas de un triángulo, y r es el radio del círculo inscrito, entonces $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 = 1/r$.

3.15 Prueba que para r, n enteros tales que $0 < r \leq n$,

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Especialización, generalización, analogía: problemas

Problemas tomados del capítulo Generalización, Especialización, Analogía del libro de Pólya Mathematics and plausible thinking Vol. 1 : Induction and analogy in mathematics. Princeton University Press.

Caso extremo especial
6. Construye una tangente común a dos círculos dados. ¿Hay un caso especial extremo más accesible?

7. Un caso especial conductor
El área de un polígono es A. El plano que lo contiene forma con otro plano un ángulo α. El polígono se proyecta ortogonalmente sobre el segundo plano. Encuentra el área de la proyección.

8. El ángulo en el centro de un círculo es el doble del ángulo en la circunferencia que subtiende el mismo arco.
Si el ángulo en el centro está dado, el ángulo en la circunferencia no esta determinado puede tener varias posiciones.
En la demostración usual, ¿cuál es la posición especial conductora?

Un caso análogo
12. Si dos lineas rectas en el espacio son cortadas por tres planos paralelos, los segmentos correspondientes son proporcionales. ¿Hay un teorema análogo más sencillo?

13. Las cuatro diagonales de un paralelepipedo tienen un punto en común que es el punto medio de cada uno. ¿Hay un teorema análogo más sencillo?

14. La suma de cualesquiera dos ángulos de cara frontales de un ángulo triédrico es mayor que el tercer ángulo frontal. ¿Hay un teorema análogo más sencillo?

15. Considera un tetraedro como el sólido que es análogo a un triángulo. Lista los conceptos de geometría sólida que son análogos a los siguientes conceptos de geometría plana: paralelogramo, rectángulos, cuadrados, bisectriz de un ángulo.
Enuncia un teorema de geometría sólida que sea análogo al siguiente teorema de geometría plana: las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se intersectan en un punto que es el centro del circulo inscrito en el triángulo.

16. Considera una pirámide como el sólido que es análogo a un triángulo. Lista los sólidos que son análogos a las siguientes figuras planas: paralelogramo, rectángulo, círculo. Enuncia un teorema de geometría sólida que sea análogo al
siguiente teorema de geometría plana: el área de un círculo es igual al área de un triángulo cuya base tiene la misma longitud que el perímetro del círculo y cuya altura es el radio.

17. Inventa un teorema de geometría que sea análogo al siguiente teorema de geometría plana: la altura de un triángulo isóseles pasa a través del punto medio de la base. ¿Qué figura sólida consideras análoga a un triángulo isóseles?

Práctica de pensamiento heurístico 2

La importancia de la geometría en la resolución de problemas

Construir o describir figuras geométricas con regla y compás tiene un lugar tradicional en la enseñanza de la geometría plana. La importancia de estas construcciones está bien justificada: son muy adecuadas para familiarizar al principiante con las figuras geométricas, y son eminentemente apropiadas para darle a conocer las ideas para resolver problemas. Es por esta última razón por la que vamos a discutir construcciones geométricas.

Veamos algunos casos de pensamiento heurístico y de cómo ejemplos tomados de la geometría sirven para ilustrar la estrategia general.

El patrón de dos lugares geométricos (loci) (adaptado de Pólya: Mathematical discovery, cap. 4)

Consideremos el siguiente problema: Construye un triángulo dados sus tres lados.

Analicemos este problema.

En todo problema debe haber una incógnita, si todo es conocido, no hay nada que buscar, nada que hacer. En nuestro problema la incógnita (lo que estamos buscando) es una figura geométrica, un triángulo.

En todo problema debe haber algo conocido, algo dado (llamamos a las partes dadas los datos), si nada está dado, entonces no hay nada por lo que pudiéramos reconocer la cosa requerida. En nuestro problema las datos son tres segmentos lineales.

Finalmente en cada problema debe haber una condición que especifique cómo la incógnita está relacionada con los datos. En nuestro problema la condición especifica que los tres segmentos dados deben ser los lados del triángulo.

Ustedes desde luego conocen la solución del problema. Sean a, b, y c las longitudes de los segmentos dados. Trazamos el segmento a con puntos extremos B y C. Dibujamos dos círculos, uno con centro C y radio b, otro con centro B y radio c. Sea A uno de sus dos puntos de intersección. Entoces ABC es el triángulo deseado.

De un ejemplo a un patrón.

Veamos la solución anterior y busquemos características que puedan servir al resolver problemas semejantes.

Al trazar el segmento a, hemos encontrado dos vértices, B, y C, y sólo nos falta por determinar un vértice. De hecho al trazar ese segmento hemos transformado el problema propuesto en otro problema, equivalente a, pero diferente del problema original. En este nuevo problema

la incógnita es un punto (el tercer vértice del triángulo requerido);

los datos son dos puntos (B y C) y dos longitudes (b y c);

la condición requiere que el punto deseado esté a una distancia b del punto dado C, y a una distancia c del punto dado B.

Esta condición consiste de dos partes, una concerniente a b y C, la otra con c y B. Mantén sólo una parte de la condición, abandona la otra; ¿en cuánto queda determinada la incógnita entonces, cómo puede variar? Un punto del plano que esté a la distancia b del punto C no está completamente determinado, ni queda completamente libre: está restringido a un lugar [locus]; debe pertenecer pero puede noverse a lo largo de la periferia del círculo con centro C y radio b. El punto desconocido debe pertenecer a dos tales lugares y se encuentra como su intersección.

Percibimos aquí un patrón, el patrón de los dos lugares, que podemos imitar con alguna probabilidad de èxito al resolver problemas de construcción geomètrica:

Primero, reduce el problema a la construcción de un punto.

Luego divide la condición en dos partes de modo que cada parte de un lugar para el punto desconocido; cada lugar debe ser ya sea una línea recta o un círculo.

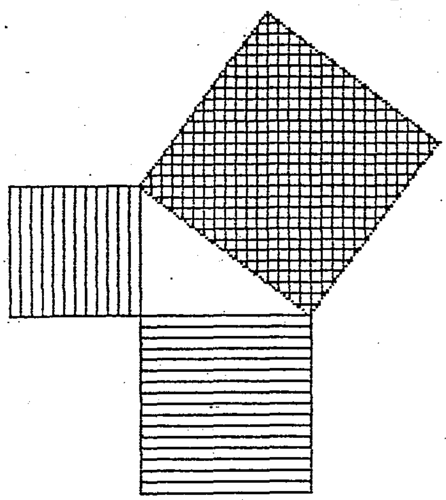
Generalización, Especialización y Analogía. (Tomado de Pólya: Mathematics and plausible reasoning cap. 2)

Generalización, Especialización y Analogía ocurren frecuentemente al resolver problemas de geometría. Tomemos por ejemplo la demostración del propio Euclides del teorema más conocido de la geometría elemental, el teorema de Pitágoras.

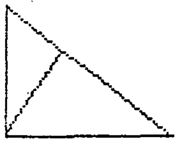
1) Consideremos un triángulo rectángulo con lados a, b, y c de los cuales c es la hipotenusa. Queremos probar que

(A) $c^2 = a^2 + b^2$.

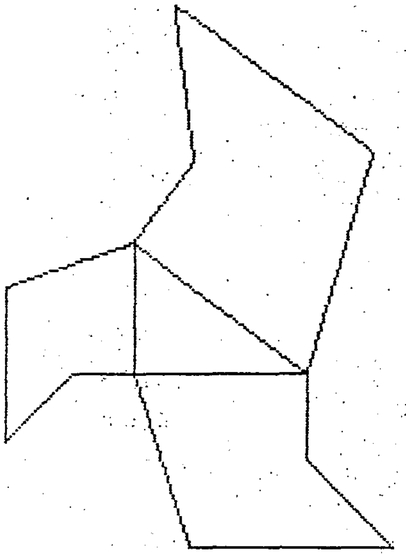
Como lo sugiere el propio enunciado, construimos los cuadrados sobre los tres lados de nuestro triángulo rectángulo. (figura 1)



2) Podemos descubrir la siguiente demostración observando la analogía de la figura que acabamos de hacer con la también conocida figura 2. El mismo triángulo rectángulo es dividido en dos al trazar la altura sobre la hipotenusa.



3) Tal vez no sea inmediato percibir la analogía entre las dos figuras. La analogía puede hacerse explícita por medio de una generalización común de la fugura 1 y de la figura 2, la cual está expresada en la figura 3. En esta figura encontramos otra vez el mismo triángulo rectángulo, sobre sus lados hay dibujadas figuras que son semejantes entre sí pero que de otro modo son arbitrarias.



4) El área del cuadrado de la hipotenusa es c^2 . El área de la figura irregular sobre la hipotenusa es kc^2, donde el factor k es la razón entre las dos áreas. Se sigue de la semejanza de los tres polígonos construidos sobre los tres lados que las áreas son iguales a ka^2, kb^2, kc^2. Ahora, si la ecuación (A) es cierta entonces la siguiente es también es cierta:

(B) $kc^2 = ka^2 + kb^2$

La ecuación (B) constituye una generalización del teorema original de Pitágoras: si se construyen tres polígonos semejantes sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, el área del descrito sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los otros dos.

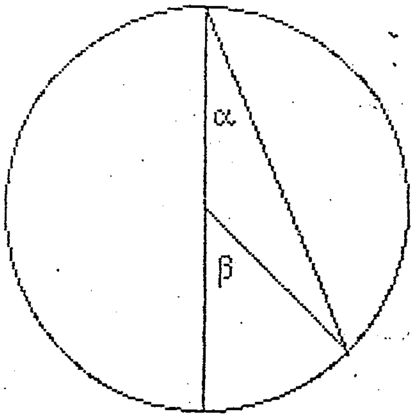
Es instructivo que la generalización es equivalente al caso especial del cual partimos:

5) El teorema general expresado en (B) es equivalente no sólo al caso especial

(A), sino a cualquier otro caso especial. Por tanto si un caso especial resultara obvio, el caso general quedaría demostrado.
Ahora, tratando de especializar de manera útil, buscamos un caso especial adecuado. El caso especial descrito en la figura 2 es un tal caso. De hecho, el triángulo rectángulo sobre la hipotenusa es semejante a los triángulos construidos sobre los otros dos lados, como es bien sabido y fácil de ver. Y obviamente el área del triángulo completo es igual a la suma de sus partes. De esta manera queda probado el teorema de Pitágoras.
El razonamiento anterior es eminentemente instructivo. Un caso es instructivo si podemos aprender de él algo aplicable a otros casos, y es más instructivo entre más amplio sea el rango de aplicaciones posibles. Del ejemplo anterior podemos aprender el uso de las operaciones mentales fundamentales como la generalización, la especialización y la percepción de analogías. Tal vez no haya descubrimiento ya sea en matemáticas elementales o avanzadas que se pueda hacer sin estas operaciones, especialmente sin analogía.
El ejemplo anterior muestra cómo podemos ascender por generalización de un caso especial, como el representado en la figura 1, a un caso más general como el representado en la figura 3, y re-descender por especialización a un caso análogo, como el de la figura 2. Esto muestra el caso, tan sorprendente para el principiante que el caso general puede ser lógicamente equivalente a un caso especial. Nuestro ejemplo muestra, de manera ingenua y sugestiva, cómo la generalización la especialización y la analogía se combinan de manera natural en el esfuerzo para obtener la solución deseada. Observa que se requiere sólo un mínimo de conocimiento preliminar para entender completamente el razonamiento anterior.

Superposición (adaptado de Pólya: Mathematical discovery, cap. 4)
¿Lo has visto antes?
(1) Seguramente conocen la demostración del siguiente teorema de geometría: El ángulo α en el centro de un círculo es el doble del ángulo β inscrito en la circunferencia que subtiende el mismo arco." La demostración procede en dos pasos.
(2) Hay una situación especial más accesible: si uno de los lados del ángulo inscrito en la circunferencia es un diámetro, el ángulo es obviamente la suma de los dos ángulos de un triángulo isósceles, estos dos son iguales, y uno es el ángulo inscrito β . Esto prueba la ecuación deseada, para la situación especial.

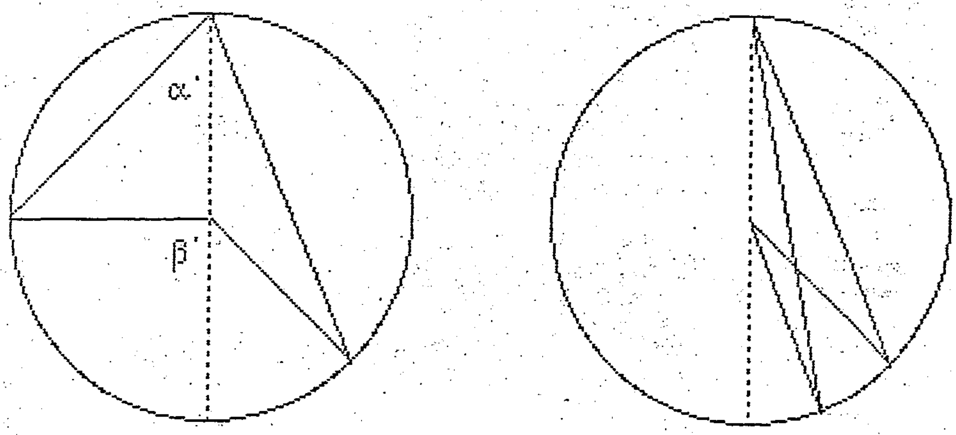
$$\alpha = 2\beta$$



(3) Ahora ya no tenemos la situación especial, podemos sin embargo trazar un diámetro (la línea punteada) a través del vértice del ángulo inscrito, y entonces la situación particular aparece dos veces en la figura. Describamos esta situación con las dos ecuaciones

$$\alpha' = 2\beta' \qquad \alpha'' = 2\beta''$$

Estas dos ecuaciones son ciertas por las consideraciones del párrafo (2). Los ángulos y con los que trata el teorema pueden ser expresados como suma o como diferencia, según tengamos uno u otro de los casos representados en la figura:



$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \beta = \beta' + \beta'' \qquad \text{o} \qquad \alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta''$$

Sumando o restando las dos ecuaciones ya establecidas obtenemos

$$\alpha' + \alpha'' = 2(\beta' + \beta''), \quad \alpha' - \alpha'' = 2(\beta' - \beta'')$$

respectivamente, lo que prueba el teorema deseado en forma general.

(4) La solución muestra el siguiente patrón en el que el resultado se obtiene en dos pasos.

Primero, tuvimos suerte de ver un caso particularmente accesible, un situación especial, y dimos una solución bien adaptada pero restringida a esta situación especial. Luego, combinando casos particulares a los que se aplica la solución restringida, obtenemos la solución completa y sin restricciones, aplicable al caso general.

Introduzcamos dos términos que subrayan ciertas características de este patrón. El primer paso trata con un caso particular que no es solamente especialmente accesible, sino especialemente útil, podemos de manera apropiada llamarlo el caso particular conductor: indica el camino a la solución general. El segundo paso combina los casos particulares. Sumamos y restamos las ecuaciones que tratan los caso particulares para obtener la prueba en general. Llamaremos a este tipo de operación algebraica superposición. Podemos utilizar los términos introducidos para bosquejar un patrón: Empezando con una situación especial conductora obtenemos la solución general por superposición de casos particulares.

Extendiendo el alcance (adaptado de Pólya: Mathematical dicovery cap. 6)

El lugar para un objeto general.

Detrás de varios problemas podemos percibir una situación general. La incógnita de un problema es x. La condición del problema se separa en n cláusulas que podemos expresar por un sistema de condiciones:

$c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$

Aquellos objetos x que satisfacen la primera cláusula, expresada por la primera condición forma un cierto conjunto que llamaremos el primer lugar [locus]. Los objetos que satisfacen la segunda condición forman el segundo lugar, . . . , los objetos que satisfacien la última cláusula forman el n-ésimo lugar. El objeto x que resuelve el problema propuesto debe satisfacer la condición completa, es decir todas las cláusulas de la condición, y por tanto debe pertenecer a todos los lugares. Por otra parte, cualquier objeto x que pertenezca simultáneamente a todos los n lugares satisface las n cláusulas y de este modo la condición completa y es por tanto una solución del problema resuelto. En breve, la intersección de los n lugares constituye el conjunto de soluciones, esto es, el conjunto de todos los objetos que satisfacen la condición del problema propuesto.

Esto sugiere una amplia generalización del patrón de los dos lugares, un esquema que puede funcionar en una variedad inagotable de casos, puede resolver casi cualquier problema: primero, divide la condición en cláusulas apropiadas, luego forma los lugares correspondientes a las diferentes cláusulas, finalmente encuentra la solución tomando la intersección de los lugares.

Evaluación de la capacidad para resolver problemas

Resolver problemas es una actividad sumamente compleja. Involucra recordar hechos, el uso de una variedad de destrezas y procedimientos, la habilidad de evaluar el pensamiento de uno mismo y evaluar el progreso al resolver un problema, y muchas otras capacidades. El éxito para resolver problemas depende mucho del interés del alumno, su motivación, la confianza en sí mismo. La solución de problemas involucra la coordinación de conocimientos, experiencias previas, intuición, actitudes, creencias y varias habilidades.

Metas de la enseñanza de resolver problemas.

1 Desarrollar las habilidades de pensamiento de los alumnos

- 1.1 Entender/formular la pregunta en un problema
- 1.2 Entender las condiciones y variables en el problema
- 1.3 Seleccionar o encontrar los datos necesarios para resolver el problema
- 1.4 Formular subproblemas y seleccionar estrategias de solución apropiadas
- 1.5 Implementar correctamente la estrategia de solución y resolver subproblemas
- 1.6 Dar una respuesta en términos de los datos del problema.
- 1.7 Evaluar la razonabilidad de la respuesta.

2. Desarrollar la habilidad de los estudiantes para escoger y usar estrategias para resolver problemas.

- Adivina, verifica, revisa.
- Haz un dibujo
- Actúa [act out] el problema
- Usa objetos
- Escoge una operación
- Resuelve un problema más sencillo
- Haz una tabla
- Busca un patrón
- Haz una lista organizada
- Escribe una ecuación
- Trabaja hacia atrás

3. Desarrollar actitudes y creencias útiles acerca de la resolución de problemas

4. Desarrollar las habilidades de los estudiantes para usar conocimiento relacionados

5. Desarrollar la habilidad de los alumnos para regular [monitor] y evaluar su pensamiento y progreso al resolver problemas.

6. Desarrollar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas en situaciones de aprendizaje cooperativos.

7. Desarrollar habilidades de los alumnos para encontrar respuestas correctas a diferentes tipos de problemas.

Colecciones de problemas

Alfaro, J.; Bosch, C.; Bravo, A.; Illanes, A.; Páez, J.; Ramírez, A. I. Problemas para la 2a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 1988. [bachillerato]

Artino, R. A.; Gaglione, A. M.; Shell, N. The contest problem book 4. Mathematical Association of America, 1982. [bachillerato]

Alexanderson, G. L.; Klosinski, L. F.; Larson, L. L. The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and solutions, 1965-1984. Mathematical Association of America, 1985. [licenciatura]

Bosch, C.; Illanes, A.; Páez, J.; Ramírez, A. I. Problemas para la 1a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 1987. [bachillerato]

Charosh, M. Mathematical challenges. National Council of Teachers of Mathematics, 1965. [secundaria y bachillerato]

Dörrie, H. 100 great problems of elementary mathematics. Dover, 1965. [licenciatura]

Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M. The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and solutions, 1938-1964. Mathematical Association of America, 1980. [licenciatura]

Greitzer, Samuel L. International Mathematical Olympiads 1959-1977. Mathematical Association of America, 1978. [bachillerato]

Hill, T. J. Mathematical challenges II plus six. National Council of Teachers of Mathematics, 1974. [secundaria y bachillerato]

Hungarian problem book 1, 2. Mathematical Association of America, 197?. [bachillerato]

Klambauer, Gabriel. Problems and propositions in analysis. Dekker, 1979. [licenciatura]

Klamkin, M. S. International Mathematical Olympiads 1979-1985. Mathematical Association of America, 1986.

Larson, Loren C. Problem-solving through problems. Springer, 1983. [licenciatura]

Polya G.; Kilpatrick, J. The Stanford Mathematics Problem Book. Teachers College Press, 1974. [bachillerato]

Pólya, G.; Szegö, G. Problems and theorems in analysis 1, 2. Springer, 1972, 1976. [licenciatura]

Saint Mary's College. Mathematics contest problems. Creative Publications, 1972. [secundaria y bachillerato]

Salkind, C. T.; Earl, J. M. The contest problem book 3 vols. Mathematical Association of America, 1973. [bachillerato]

Steinhaus, H. One hundred problems in elementary mathematics. Dover, 1979.