72

EL MEOLLO DE LAS MATEMATICAS

72

Alfinio Flores Peñafiel
1988

Preparado para el Primer Simposio Internacional en Educación Matemática, CCH, UNAM.

El meollo de las matemáticas

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en Matemáticas

Contenido

La importancia de los problemas en la actividad matemática	1
Enseñanza de las matemáticas: importancia de aprender a resolver problemas	2
Cómo aprender a resolver problemas en matemáticas	3
Conclusión	9
Referencias	10

EL MEOLLO DE LAS MATEMATICAS

La importancia de los problemas en la actividad matemática

¿De qué consiste **realmente** la matemática? Uno podría responder varias cosas: axiomas, teoremas, definiciones, demostraciones, teorías, fórmulas, métodos. Desde luego la matemática no podría existir sin estos componentes, todos son esenciales. ¿Se imagina alguien lo que sería la matemática sin axiomas (como el quinto postulado de Euclides sobre paralelas)? ¿O sin teoremas (como el teorema fundamental del cálculo)? ¿Sin demostraciones (como la prueba de Gödel)? ¿Sin conceptos (como función y relación)? ¿Sin definiciones (como la definición de dimensión)? ¿Sin teorías (como teoría de la medida)? ¿Sin fórmulas (como la fórmula integral de Cauchy)? ¿Sin métodos (como el método de aproximaciones sucesivas)? Desde luego que no. Halmos (1980) menciona todos estos ingredientes, sin embargo afirma que ninguno de ellos es el meollo de las matemáticas, que la principal razón de ser del matemático es resolver problemas, y que por lo tanto, de lo que **realmente** consiste la matemática es de problemas y soluciones.

La importancia de los problemas en la investigación matemática queda evidente en el tremendo impacto que tuvo en el desarrollo de las matemáticas en el presente siglo la lista de problemas que presentó Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 (Hilbert, 1901). Esta lista de 23 problemas ha mantenido ocupada a la comunidad matemática durante buena parte de este siglo y ha dado origen a numerosas teorías (ver por ejemplo el libro <u>Mathematical developments arising from Hilbert Problems</u>, 1975).

Quién mejor que el propio Hilbert para resaltar la importacia de los problemas para un matemático creativo:

> Cada época tiene sus propios problemas, que la siguiente época resuelve o hace a un lado como infructuosos, y los reemplaza por nuevos problemas.
> [. . .] Mientras una ciencia tiene suficientes problemas, tiene vitalidad; falta de problemas significa muerte o fin del desarrollo propio. Como cada actividad humana persigue un fin, así necesita la investigación matemática problemas. A través de la solución de problemas se templa la fuerza del investigador; él encuentra nuevos métodos y perspectivas, gana un horizonte más amplio y libre.
> Es difícil y frecuentemente imposible juzgar correctamente de antemano el valor de un problema; porque finalmente lo que decide es la ganancia que la ciencia debe al problema. De cualquier modo nos podemos preguntar si hay algunas cualidades que caracterizan a un buen problema. Claridad y fácil de comprender. [. . .] Difícil para que

nos atraiga, pero no imposible para que no se burle de nuestro esfuerzo. [. . .] Cuando no podemos conseguir la respuesta a un problema, se debe frecuentemente a que no hemos reconocido el punto de vista general, del cual el problema dado es sólo un eslabón de una cadena de problemas relacionados. Después de encontrar este punto de vista, no sólo se vuelve más accesible el problema que estamos considerando, sino que adquirimos al mismo tiempo un método que que se aplica a problemas relacionados. [. . .] Este camino para encontrar métodos generales es el más seguro y viable, ya que si alguien busca un método sin tener un problema en mente, su búsqueda resulta vana la mayoría de las veces.

Herman Weyl (1946) también resalta la importancia de los problemas:

> Tan importantes como son los conceptos y las proposiciones generales con los que nos ha dotado la moderna industriosa pasión por axiomatizar y generalizar, . . ., sin embargo estoy convencido que los problemas especiales en toda su complejidad constituyen el tronco y meollo de las matemáticas, y dominar sus dificultades requiere en total la labor más ardua.

Los problemas son también parte esencial en la formación de los matemáticos. La extraordinaria longevidad del libro de problemas de Pólya y Szegö (1925) es debida al papel fundamental que ha desempeñado en la formación de numerosos matemáticos esta colección de problemas. Los problemas tienen un papel importante en todos los niveles de la enseñanza de las matemáticas. Es mediante los problemas que los alumnos aprenden a entender, a aplicar y a apreciar el material del curso. El maestro juzga el desempeño del alumno por la solución de problemas. Resolver problemas es la espina dorsal en la formación de matemáticos en licenciatura.

Una de las secciones más populares y antigua de la revista matemática más leída en el mundo, American Mathematical Monthly, es sin duda la sección de problemas. Pólya (1973) señala que plantear y resolver problemas es una de las mejores formas de mantener activos y actualizados a profesores de matemáticas universitarios que no realizan investigación (la gran mayoría).

Además los problemas contribuyen en mucho a mantener una cultura matemática en una sociedad. Países que cuentan con una gran tradición en concursos y olimpiadas de matemáticas, como Hungría y Polonia, han dado al mundo matemáticos de primera línea. Gleason, Greenwood y Kelley (1980) señalan el impacto sustancial que han tenido las competencias Putnam en el campo de las matemáticas en los Estados Unidos y Canadá. El reto proporcionado por estas competencias ha conducido a muchos universitarios con talento a involucrarse seriamente con las matemáticas y esto ha sido uno de los factores que han contribuido a la notable expansión de las matemáticas en los últimos 40 años.

No es de extrañar, dada la importancia que tienen los problemas en la actividad matemática, que en los últimos años este aspecto haya sido resaltado en la enseñanza de las matemáticas.

Enseñanza de las matemáticas: importancia de aprender a resolver problemas

Con respecto a la enseñanza de las matemáticas, los problemas ocupan hoy un lugar central. La organización profesional de profesores de matemáticas más importante, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), le da un lugar privilegiado a la solución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. NCTM (1980) en sus recomendaciones sobre las matemáticas escolares para esta década, destaca la importancia de la solución de problemas. De las ocho recomendaciones que hace, la primera es:

> **La solución de problemas debe ser el foco de las matemáticas escolares en los 1980s.**
> El desarrollo de la habilidad de resolver problemas debe dirigir los esfuerzos de las personas que trabajan en educación matemática en la próxima década.

La asociación de supervisores de matemáticas (National Council of Supervisors of Mathematics, 1977) enumera diez áreas de habilidades básicas, la primera es:

> **Solución de problemas**
> Aprender a resolver problemas es la principal razón para estudiar matemáticas. Resolver problemas es el proceso de aplicar el conocimiento previamente adquirido a situaciones nuevas y desconocidas. [. . .] Las estrategias para resolver problemas involucran plantear preguntas, analizar situaciones, traducir resultados, dibujar diagramas, y utilizar ensayo y error. [. . .] Deben ser capaces de determinar cuáles hechos son relevantes. No deben tener miedo de llegar a conclusiones tentativas y deben estar dispuestos a someter a estas conclusiones a escrutinio.

Cómo aprender a resolver problemas en matemáticas: Teorías para la enseñanza de problemas en matemáticas

El año de 1945 marca un hito en la enseñanza de la resolución de problemas. En ese año aparece el libro de Pólya sobre cómo resolver problemas. En él se describen cuatro fases para resolver problemas:
1. Comprensión del problema
2. Concepción de un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Visión retrospectiva.

Estas cuatro fases las desglosa el mismo Pólya. Para cada una sugiere una serie de preguntas que el estudiante se puede hacer, o de aspectos que debe considerar para lograr avanzar en la resolución del problema.

1. COMPRENSION DEL PROBLEMA
Familiarizarse con el problema
Trabajar para una mejor comprensión.
    enunciado del problema
    propósito del problema
Aislar las partes del problema
    partes principales del problema
    aclarar detalles.
¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son los datos?
Introducir una notación adecuada
¿Qué condiciones relacionan las variables?
¿Son suficientes las condiciones?

2. CONCEPCION DE UN PLAN:
En busca de una idea útil.
¿Conoces algún problema relacionado?
Mira la incógnita. Piensa en un problema que tenga la misma incógnita o una similar.
¿Puedes enunciar el problema en forma diferente?
Si no puedes resolver el problema, trata de resolver primero algún otro problema relacionado con él.
¿Has empleado todos los datos?
¿Has usado todas las condiciones?

3. EJECUCION DEL PLAN.
Verifica cada paso.
¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?
¿Puedes demostrar que es correcto?

4. VISION RETROSPECTIVA:
¿Puedes verificar el resultado?
¿Puedes verificar el razonamiento?
¿Puedes obtener el resultado de un modo diferente?
¿Puedes verlo de golpe?
¿Puedes utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?

A pesar de que los matemáticos reconocen que las recomendaciones que da Pólya para resolver problemas son actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, la enseñanza utilizando los cuatro pasos de Pólya no ha tenido el éxito esperado. La razón se debe a que los matemáticos reconocen en las categorías de Pólya estrategias que son comunes a muchos problemas, pero que para el alumno que se inicia en la resolución de problemas parecen estrategias muy distintas. Es decir, los matemáticos reconocen en la estrategia abstracta de Pólya muchas de las estrategias particulares que ellos utilizan.

Además de que hay que desglosar las estrategias heurísticas de Pólya para el no iniciado, la habilidad para resolver problemas se ve afectada por factores tales como los recursos matemáticos con los que cuenta el alumno, el control que tenga de las estrategias utilizadas y su sistema personal de creencias.

Schoenfeld (1985) describe con más detalle estos cuatro aspectos: recursos, heurística, control, creencias.

Los **recursos** son los conocimientos matemáticos que posee el individuo y que pueden ser utilizados en el problema. Incluye intuiciones y conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos algorítmicos, procedimientos "rutinarios" no algorítmicos, comprensión (conocimiento proposicional) acerca de las reglas para trabajar en el dominio.

Para comprender por qué un intento para resolver un problemas se desarrolla en la forma en que lo hace es necesario conocer las herramientas con las que cuenta el sujeto. Estas son todos los hechos, procedimientos, y habilidades, en suma, el conocimiento matemático que el individuo puede traer para resolover el problema. Esto caracteriza el espacio de búsqueda inicial del que resuelve el problema. Es necesario comprender que al discutir el desempeño humano para resolver problemas estamos hablando de una epistemología genética individual, y no de una epistemología matemática abstracta. Es lo que el individuo sabe, cree o sospecha que es cierto. Es la forma en que la información está almacenada, organizada y cómo se llega a ella.
Los recursos se pueden agrupar en las siguientes categorías amplias:
La primera clase son los hechos relevantes conocidos por el individuo, indicando el grado con el que es conocido. Sabe con certeza, piensa que es probable, piensa que es posible, no tiene ninguna idea. En algunos casos el conocimiento relevante es esencial para una solución. Otros conocimientos pueden ser esenciales también pero de una manera no tan obvia. Tal es el caso de comprensiones amplias (llamadas conocimiento proposicional) con respecto a la argumentación geométrica.
La segunda clase de recursos consisten de los procedimientos algorítmicos conocidos por el individuo. Los procedimientos algorítmicos incluyen todas las construcciones estándares, manipulaciones algebraicas, diferenciación

etc.

Otra clase de recursos cualitativamente diferentes de los procedimientos algorítmicos mencionados consiste en lo que podríamos llamar procedimientos rutinarios. Para resolver tales problemas uno obtiene una fórmula para la cantidad deseada como función de una o más variables y luego aplica las técnicas relevantes (por ejemplo de cálculo). El que resuelve el problema tiene una buena proporción de discreción acerca de la elección de las variables y acerca de los medios de obtener la fórmula, esto es, la solución no es algorítmica pero el bosquejo del procedimiento está prescrito y es bien conocido.

Una clase final de recursos consiste en lo que se podrían llamar capacidades relevantes. La clase de capacidades relevantes es muy amplia.

Un aspecto vital de los hechos, procedimientos y capacidades que forman el inventario de recursos del individuo es que no necesariamente son correctos. Si el propósito es explicar la conducta de las personas conforme resuelven problemas, debemos conocer lo que asumen como cierto, aún cuando no lo sea.

Un inventario de los recursos proporciona un lista de las herramientas y técnicas que el individuo podría usar en una situación determinada, si este conocimiento fuera solicitado.

En la solución rutinaria de problemas hay muchas situaciones en las que uno simplemente sabe cuál es la acción correcta que hay que hacer, o donde la información apropiada simplemente viene a la mente. Tal acceso casi automático al conocimiento apropiado se considera una cuestión de recursos. Schoenfeld reserva el término control para discusiones de toma activa de decisiones, como se verá más adelante.

Pensamiento **heurístico** son las estrategias y técnicas para avanzar en problemas desconocidos y no usuales; reglas prácticas para la solución efectiva de los problemas, incluyendo

dibujar figuras, introducir una notación adecuada,
aprovechar problemas relacionados, explotar analogías, trabajar con problemas auxiliares,
reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema; generalizar, especializar, variar el problema,
trabajar hacia atrás,
los procedimientos de prueba y verificación como reducción al absurdo y demostración indirecta.

De acuerdo con Schoenfeld, una estrategia heurística típica, tal como las maneja Pólya, está definida de manera muy amplia, demasiado amplia para que la descripción pueda servir como una guía útil al principiante para la implementación de la estrategia.

Por ejemplo, consideremos la siguiente:

Estrategia E: Para entender mejor un problema desconocido puedes ejemplificar el problema considerando varios **casos especiales**.

Todos los siguientes problemas pueden ser atacados utilizando esta estrategia:

Problema 1. Determina una fórmula para la suma de la serie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

Problema 2. Sean P(x) y Q(x) polinomios cuyos coeficientes son los mismos pero en orden contrario:

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$,

$Q(x) = a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$

¿Cuál es la relación entre las raíces de P(x) y las raíces de Q(x)? Prueba tu respuesta.

Problema 3. Sean a_0 y a_1 dos números reales dados. Define la sucesión $\{a_n\}$ de la siguiente manera.

$a_n = (a_{n-2} + a_{n-1})/2$ para $n \geq 2$.

Prueba que el límite de la sucesión $\{a_n\}$ existe y determina su valor.

Problema 4. Se colocan dos cuadrados, cada uno de lado a, de modo que un vértice de uno de los cuadrados esté en el centro del otro. Describe en términos del lado a el rango posible de áreas representadas por la intersección de los dos cuadrados.

Problema 5. De todos los triángulos de perímetro fijo P, ¿cuál tiene la mayor área? Justifica tu respuesta.

Sin embargo, si revisamos el uso específico que se hace de la **Estrategia E** en los problemas 1 a 5, encontramos que la descripción general de esta estrategia, como está dada arriba, representa en realidad las siguientes estrategias:

Estrategia E_1: Si hay un parámetro entero n en el enunciado de un problema, puede ser apropiado calcular los casos especiales cuando n = 1, 2, 3, 4 (tal vez algunos más). Uno puede ver un patrón que sugiera una respuesta, la cual puede ser verificada por inducción. Los cálculos mismos pueden sugerir el mecanismo inductivo.

Estrategia E_2: Se puede ganar comprensión acerca de cuestiones de raíces de expresiones algebraicas complicadas escogiendo como casos especiales aquellas expresiones cuyas raíces son fáciles de obtener (por ejemplo polinomios fácilmente factorizables con raíces enteras)

Estrategia E_3: En cálculos iterados o recursiones, sustituir los valores particulares 1 y/o 0 (a menos que ocasionen pérdida de generalidad) pueden permitir observar patrones. Tales casos especiales opueden permitir observar regularidades que podrían perderse en una selva de símbolos.

Estrategia E_4: Al tratar con figuras geométricas, uno debe examinar primero el caso especial que sea el menos complicado. Considera polígonos regulares, por ejemplo; o triángulos isósceles o rectángulos o equiláteros en vez de triángulos generales.

Estrategia E_{5a}: Para argumento geométricos se pueden escoger valores convenientes para calcular sin pérdida de generalidad. Tales casos especiales hacen los cálculos subsecuentes más sencillos.

Estrategia E_{5b}: Calcular valores sobre un rango de casos puede sugerir la naturaleza de un extremo, el cual conjeturado de esta forma puede ser justificado de varias formas. Los casos especiales de objetos simétricos son frecuentemente candidatos primordiales para ser examinados.

Se puede ver la dificultad que tendría alguien con poca experiencia resolviendo problemas si se le diera como ayuda la sugerencia de usar la estrategia E al tener que resolver los problemas 1 a 5. Derivar las acciones sugeridas en las estrategias E_1 a E_{5b} del enunciado de la estratergia E es una tarea muy difícil para el principiante. Descomponer las estrategias generales como E en estrategias más específicas es el primer paso para enseñar a los alumnos a usarlas. El siguiente paso es proporcionar instrucción en cada una de las estrategias más específicas.

Control son decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias.
Planeación
Regulación y evaluación
Toma de decisiones
Actos metacognitivos conscientes
Esta categoría de conducta trata con la forma en la que los induviduos usan la

información potencialmente a su disposición. Se enfoca en decisiones mayores de qué hacer en un problema, decisiones que por sí mismas pueden hacer que un intento por resolver un problema sea un éxito o un fracaso. Las conductas de interés incluyen hacer planes, seleccionar metas y submetas, regular y evaluar soluciones conforme se desarrollan, revisar o abandonar los planes cuando la evaluación indica que tales acciones se deben tomar. Son decisiones ejecutivas en el sentido en que se utiliza en inteligencia artificial, decisiones gerenciales como el término se usa en los negocios, o decisiones estratégicas (como opuesto o tácticas) como se usa por los militares. El término metacognición ha sido utilizada en la literatura sicológica en la discusión de fenómenos relacionados.

La característica definitiva de las acciones a nivel de control es que tienen consecuencias globales para la evolución de una solución. Son decisiones acerca de qué camino tomar (lo cual también determina cuáles no tomar). Son decisiones acerca de abandonar direcciones, lo que abre nuevas posibilidades, pero lo hacen con el riesgo de truncar esfuerzos que pudieron haber llevado al éxito. Son decisiones que involucran la selección y uso de los recursos, incluyendo el tiempo, que están a disposición del que resuelve el problema.

Sistema de **creencias** es la visión del mundo que tenga el individuo de las matemáticas, el conjunto de determinantes (no necesariamente conscientes) de la conducta de un individuo, acerca de sí mismo, acerca del ambiente, acerca del tema, acerca de las matemáticas.

Los sistemas de creencias son la perspectiva con la cual uno se aproxima a las matemáticas y a las tareas matemáticas. Las creencias de uno acerca de las matemáticas pueden determinar cómo escoge uno apoximarse a un problema, cuáles técnicas serán usadas o evitadas, qué tanto tiempo o qué tan duro trabaja uno en el problema etc. Las creencias establecen el marco dentro del cual operan los recursos, el pensamiento heurístico y el control.

Conclusión

A casi una década de la exhortación de NCTM de que la solución de problemas debe ser el foco de la enseñanza de las matemáticas, no obstante la aparición de numerosos libros en cuyos títulos aparece la palabra problema, la enseñanza de cómo resolver problemas no ha llegado a ser una parte integral de la enseñanza de las matemáticas. Los maestros que entusiastamente tratan de seguir las indicaciones de Pólya, al reconocer en ellas actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, encuentran que resulta mucho más difícil hacer que los alumnos aprendan a utilizar el pensamiento heurístico. Las investigaciones realizadas en los últimos años nos indican que el problema de aprender a resover problemas es bastante más complicado de lo que se había pensado. Por una parte las categorías de Pólya de pensamiento heurístico resultan demasiado abstractas y generales para el no iniciado. Por otro lado aparecen aspectos tales como los recursos, el control y el sistema de creencias que afectan el desempeño del alumno al resolver un problema y cuya interrelación empieza apenas a ser estudiada y entendida.

Referencias

Curcio, F. R. Teaching and learning: a problem solving focus. National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M. The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and solutions, 1938-1964. Mathematical Association of America, 1980.

Halmos, P. R. The heart of mathematics. American Mathematical Monthly, 87 (1980) 519-524. (también en Halmos. P. R. Selecta expository writing. Springer, 1983, p. 209-214)

Hilbert, D. Mathematische Probleme. Archiv für Mathematik und Physik 1, (1901), p 44-63, 213-237. (También en Hilbert., D. Gesammelte Abhandlungen, Band 3. Springer, 1970, p. 290-329.)

Mathematical developments arising from Hilbert Problems, 2 vols. American Mathematical Society, 1976. (contiene una traducción de la conferencia de Hilbert al inglés)

National Council of Supervisors of Mathematics. Position paper on basic skills. Arithmetic Teacher, 25 (octubre 1977), 18-22.

National Council of Teachers of Mathematics. An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980's. National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

Pólya, G. A letter by Professor Pólya. American Mathematical Monthly, 80, (1973) 73-4. (también en George Pólya: Collected Papers vol 4, MIT, 1984, p. 593-594)

Pólya, G. How to solve it. Princeton University Press, 1945. (Traduccion al español: Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, 1975.)

Pólya, G. Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1 Induction and analogy in mathematics. Vol. 2 Patterns of plausible inference. Princeton University Press, 1954. (Traducción al español: Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos, 1966)

Pólya, G. Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving. Wiley, 1981.

Pólya, G.; Szegö, G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 1, 2. Springer Verlag, 1925. (Traducción al inglés Problems and theorems in analysis 1, 2. Springer, 1972, 1976)

Schoenfeld, A. H. Problem solving in the mathematics curriculum. Mathematical Association of America, 1983.

Schoenfeld, A. H. Mathematical problem solving. Academic Press, 1985.

Weyl, Hermann. The classical groups 2a edición. Princeton University Press, 1946.