DEMOSTRACION, CONJUNTO Y FUNCION

64

(UN BOSQUEJO)

RICARDO BERLANGA ZUBIAGA

64

1988

Contenido.

DEMOSTRACION, CONJUNTO Y FUNCION.

(UN BOSQUEJO)

Demostración

"Para comenzar, queremos desarrollar un vocabulário preciso y al mismo tiempo adecuado para el análisis de los problemas y conceptos del conocimiento sistemático. Tenemos que usar lenguaje ambiguo para crear un lenguaje preciso. Esto no es tan chiflado como parece. Las reglas del ajedrez, por ejemplo, son mucho más precisas que aquéllas de la grámatica castellana, y sin embargo utilizamos oraciones en castellano gobernadas por reglas imprecisas para plantear las reglas del ajedrez." (PATRICK SUPPES)

Los siguientes son conceptos fundamentales en Lógica Matemática:

1) **Variable**: Es un <u>símbolo</u> que representa un miembro no especificado de una <u>colección</u> definida de objetos.

2) **Proposición**: Es una oración que necesariamente es verdadera o falsa. Algunas proposiciones son atómicas y quedan sin analizar, otras son compuestas y analizadas a través de las tablas de verdad (ver (6)).

3) **Predicado**: Es una expresión acerca de las propiedades y relaciones entre los individuos de una colectividad. Generalmente un predicado contiene variables (comparar "Para toda x, si x es hombre entonces x es mortal" con "Sócrates es hombre"). Un predicado puede o puede no tener un valor de verdad (ejs. "Todos los hombres son mortales" es un predicado verdadero, pero el predicado "$x + y = 4$" no es ni verdadero ni falso). Toda proposición es un predicado, verdadero o falso, del cual nos interesa esencialmente el hecho que tiene un valor de verdad.

4) **Conectivos Lógicos**:

Si A y B son predicados entonces:

$\sim A$	- la negación de A
$A \wedge B$	- A y B (conjunción)
$A \vee B$	- A ó B (disjunción)
$A \Rightarrow B$	- A implica B (implicación)
$A \equiv B$	- A si y sólo si B (equivalencia)

son predicados.

5) **Cuantificación**:

Si A es un predicado donde posiblemente ocurre la variable x, entonces denotaremos, en ocasiones, a A por $A(x)$. Además

$(\forall x)\ A(x)$ - cuantificación universal de A

$(\exists x)\ A(x)$ - cuantificación existencial de A

son predicados.

Una ocurrencia de una variable x en un predicado $A(x)$ es acotada o libre si, respectivamente, tal ocurrencia está cuantificada o no. La variable x puede tener simultáneamente ocurrencias libres y acotadas en $A(x)$.
(Ej. $((\forall x)\ A(x)) \wedge B(x)$.)

¿Es un predicado sin variables libres necesariamente falso o verdadero? Respuesta. En un contexto determinado, sí. (Ej. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 4)$ es verdadero en los enteros pero falso en los naturales.)

Un predicado con variables libres se puede llamar una condición o marco proposicional en tales variables. (Ej. x es hermano de y.)

Una condición en una variable se llama propiedad. (Ej. $(\exists y)\ (x^2 + y^2 = 1)$.)

6) **Tablas de Verdad**:

Si P y Q son proposiciones entonces el valor de verdad de $\sim P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \equiv Q$ está determinado por la siguiente tabla:

P	Q	~P	P∧Q	P∨Q	P⇒Q	P≡Q
V	V	F	V	V	V	V
V	F		F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F		F	F	V	V

Moraleja: La verdad o falsedad de una proposición compuesta sólo depende del valor de verdad de sus átomos. Esto es un ejemplo de cómo tan solo una fracción de la "lógica humana" es la que el matemático usa y de manera formalizada.

La noción mas importante asociada al concepto de tabla de verdad es la de <u>tautología</u>, es decir, una proposición cuya tabla de verdad tiene como resultado sólo el valor V.

Ejemplo: Las tautologías

$$(\sim P \Rightarrow Q) \equiv P \vee Q$$
$$\sim (P \Rightarrow \sim Q) \equiv P \wedge Q$$
$$\sim\{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [\sim(Q \Rightarrow P)]\} \equiv (P \equiv Q)$$

nos dicen que los conectivos " $\Rightarrow$ " y " $\sim$" son suficientes. (¿para qué?)

7) La Implicación:

El conectivo lógico más importante es el de la implicación.

Si A y B son predicados $A \Rightarrow B$ siempre es un predicado: NO TIENE POR QUE HABER RELACION DE CAUSALIDAD ENTRE EL ANTECEDENTE (A) Y EL CONSECUENTE (B).

Ejemplo: La afirmación: "Si Napoleón no hubiera sido un mal estudiante en el CIMAT, entonces no habría sido derrotado en Waterloo"; es falsa (tal vez) en el lenguaje habitual pero verdadera en el lenguaje formalizado (si es que de veras se puede formalizar).

Tal vez es inútil y ciertamente complejo tratar de sistematizar la noción de dependencia o causalidad entre dos premisas.

Las siguientes son maneras distintas de decir lo mismo:

P implica Q	P es condición suficiente para Q
Q es implicado por P	Para Q es suficiente que P
Si P, entonces Q	Q es condición necesaria para P
P sólo si Q	Para P es necesario que Q
Solamente si Q es P	Q, si P

8) **Axiomas de la Lógica**:

a) Axioma de especificación:

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(s)$$

Donde $A(s)$ es el resultado de sustituir las ocurrencias libres de x en A por s. El símbolo s puede significar o bien una variable o bien una constante (como Sócrates, el número 4 ó la variable y).

Este proceso de sustitución no siempre es válido, pero en particular lo es cuando s no ocurre en A, cuando s es x, o cuando s es constante. Enunciar el axioma de especificación con toda generalidad involucra una definición técnica (la de "término libre para una variable en una fórmula") que en este contexto sólo complicaría las cosas innecesariamente.

b) $[(\forall x)\ (A \Rightarrow B(x))] \Rightarrow [A \Rightarrow (\forall x)B(x)]$ donde x no ocurre libre en A.

c) $(\exists x)\ A(x) \equiv (\sim(\forall x) \sim A(x))$

9) **Instancias Tautológicas:**

Una instancia tautológica es el resultado obtenido de una tautología al sustituir predicados por letras proposicionales, todas las ocurrencias de la misma letra deben ser remplazadas por el mismo predicado. (Ej. De $P \vee \sim P$ obtener "ser o no ser")

10) **Reglas de Inferencia**:

Sorprendentemente sólo dos reglas de inferencia son necesarias para el desarrollo de la lógica formal. Estas son el Modus Ponendo Ponens y la regla de generalización.

a) El Modus (Ponendo) Ponens es la regla fundamental de inferencia. Si el juego (el gran juego de la lógica y las matemáticas) consiste en obtener conclusiones válidas de premisas válidas, entonces el Modus Ponens es LA REGLA DEL JUEGO.

Dice así:
Sean P y Q predicados
Supongamos que P es válido y que $P \Rightarrow Q$ también lo es.
Entonces Q es válido.

Esto se puede expresar diciendo que Q es consecuencia directa de P y $(P \Rightarrow Q)$ en virtud de Modus Ponens o bien, que Q se sigue de P y de $(P \Rightarrow Q)$.

b) La Regla de generalización dice que $(\forall x)A$ se sigue de A. En otras palabras, si A es válida entonces podemos siempre acotar las variables libres de A con cuantificadores universales.

11) **Teoría**: Una <u>teoría</u> denotada por $\mathbf{S}$ consta de los siguientes elementos:

a) La lógica hasta aquí planteada.
b) Los símbolos propios de la teoría (por ejemplo el símbolo de pertenencia $\in$ en la teoría de conjuntos).
c) Los predicados de $\mathbf{S}$: Estos se construyen igual que los predicados de la lógica, pero ahora con la posibilidad de incluir a los simbolos de $\mathbf{S}$ ($(\forall x)\ (x \in X \Rightarrow \{x\} \subset X)$ es un predicado de la teoría de conjuntos, pero no de la lógica).
d) Los axiomas propios de la teoría.

12) **Prueba y Deducción en una Teoría $\mathbf{S}$.**

Sean $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ y B predicados de $\mathbf{S}$. Una <u>deducción</u> de B a partir de las <u>hipótesis</u> o <u>premisas</u> $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ es una secuencia de predicados de $\mathbf{S}$, digamos

1) P_1	justificación $_1$
2) P_2	justificación $_2$
3) P_3	justificación $_3$
.	
.	
.	
n) P_n	justificación $_n$

donde $P_n = B$ y tal que cada P_i $(1 \leq i \leq n)$ es:

a) Un axioma lógico,
b) Un axioma de $\mathbb{S}$,
c) Una instancia tautológica,
d) Una consecuencia directa de predicados anteriores en virtud de las reglas de inferencia,

ó

e) Una hipótesis.

Estas son las únicas razones o justificaciones posibles para escribir un predicado como parte de una deducción. Es conveniente escribir la justificación pertinente a la derecha de cada línea.

En este caso diremos que B es una consecuencia de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y usaremos la abreviación $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$.

Si B es deducible sin hipótesis, entonces decimos que B es un **teorema** de $\mathbb{S}$ y usaremos la abreviación $\vdash B$.

Es fácil ver que $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ implica $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ (¿demostración?).

Por otro lado un resultado de la lógica (parte del llamado **Teorema de la Deducción**) dice que $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ es un teorema de $\mathbb{S}$ si es posible encontrar una deducción de B a partir de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de tal modo que no se use la regla de generalización teniendo como variable cuantificada a una variable libre de alguna de las hipótesis.

En argumentos matemáticos, frecuentemente uno prueba una afirmación B bajo la suposición de otras premisas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y entonces se concluye que se tiene el teorema: "Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces B". La discusión anterior justifica este procedimiento.

Ejemplos: $(\forall x)(x \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{M}), s \in \mathcal{H} \vdash s \in \mathcal{M}$

(donde $x \in \mathcal{H}$ se puede leer como "x es hombre", $x \in \mathcal{M}$ se puede leer como "x es mortal" y s como "Sócrates")

Deducción:

i) $(\forall x)\,(x \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{M})$	premisa
ii) $(\forall x)\,(x \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{M}) \Rightarrow (s \in \mathcal{H} \Rightarrow s \in \mathcal{M})$	Ax. de Esp.
iii) $s \in \mathcal{H} \Rightarrow s \in \mathcal{M}$	MP (i), (ii)
iv) $s \in \mathcal{H}$	premisa
v) $s \in \mathcal{M}$	MP (iv), (iii)

Por lo tanto, por el teorema de la deducción, tenemos también que

$$\vdash ((\forall x)\,(x \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{M}) \wedge s \in \mathcal{H}) \Rightarrow s \in \mathcal{M}$$

Si $\vdash B$ y $B \vdash C$ entonces es fácil ver (¿cómo?) que $\vdash C$. Este hecho formaliza la invaluable herramienta matemática de probar nuevos teoremas usando los ya conocidos. En otras palabras, este sencillo resultado de la lógica es el que valida la expresión

"El Edificio de las Matemáticas"

13) **Algunos Métodos de Demostración.**

Algunos métodos frecuentes de razonamiento en matemáticas se pueden encapsular, gracias a Modus Ponens, como implicaciones tautológicas. Otros métodos también pueden quedar expresados, debido a la primera ley de sentencias bicondicionales (ver fórmula (23) abajo), como equivalencias tautológicas:

1) Modus tollendo tollens	$(\sim B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim A$
2) Modus tollendo ponens	$(\sim A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow B$
3) Ley de simplificación	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
4) Ley de adición	$A \Rightarrow (A \vee B)$
5) Ley de adjunción	$A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B)$
6) Silogismo hipotético	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
7) Ley de importación	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
8) Ley de exportación	$((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
9) Leyes del absurdo	$(A \Rightarrow (B \wedge \sim B)) \Rightarrow \sim A$
	$(A \Rightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow \sim A)$
10) Demostración por casos	$((A \Rightarrow B) \wedge (\sim A \Rightarrow B)) \equiv B$
11) Dilema constructivo	$((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \vee C)) \Rightarrow (B \vee D)$
12) Dilema destructivo	$((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (\sim B \vee \sim D)) \Rightarrow (\sim A \vee \sim C)$

13) Leyes conmutativas $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$

14) Ley de la contraposición $(A \Rightarrow B) \equiv (\sim B \Rightarrow \sim A)$

15) Leyes asociativas $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$

$(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$

$((A \Rightarrow B) \vee C) \equiv (A \Rightarrow (B \vee C))$

16) Leyes distributivas $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

$(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \equiv ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$(A \Rightarrow (B \wedge C)) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$

$(A \Rightarrow (B \vee C)) \equiv ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))$

17) Leyes no distributivas $((A \wedge B) \Rightarrow C) \equiv ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$

$((A \vee B) \Rightarrow C) \equiv ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$

$(A \wedge (B \Rightarrow C)) \equiv ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C))$

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \equiv ((\sim A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$

18) Ley de la doble negación $A \equiv \sim\sim A$

19) Leyes de De Morgan $\sim(A \wedge B) \equiv (\sim A \vee \sim B)$

$\sim(A \vee B) \equiv (\sim A \wedge \sim B)$

20) Negación de la implicación $\sim(A \Rightarrow B) \equiv (A \wedge \sim B)$

21) Negación de la bicondicional $\sim(A \equiv B) \equiv ((A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim A))$

$\sim(A \equiv B) \equiv ((A \vee B) \wedge (\sim A \vee \sim B))$

22) Implicación material $(A \Rightarrow B) \equiv (\sim A \vee B)$

23) Leyes de sentencias bicondicionales $(A \equiv B) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

$(A \equiv B) \equiv ((A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B))$

Fórmulas universalmente válidas involucrando cuantificadores son:

24) $(\forall x)\, A(x) \equiv \sim(\exists x) \sim A(x)$

25) $(\forall x)\, (\forall y)\, A(x, y) \equiv (\forall y)\, (\forall x)\, A(x, y)$

26) $(\exists x)\, (\exists y)\, A(x, y) \equiv (\exists y)\, (\exists x)\, A(x, y)$

27) $(\exists x)\, (\forall y)\, A(x, y) \Rightarrow (\forall y)\, (\exists x)\, A(x, y)$

28) $(\forall x)\, (A(x) \wedge B(x)) \equiv ((\forall x)\, A(x) \wedge (\forall x)\, B(x))$

29) $(\exists x)\, (A(x) \vee B(x)) \equiv ((\exists x)\, A(x) \vee (\exists x)\, B(x))$

30) $(\forall x)\, (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\exists x)\, A(x) \Rightarrow (\exists x)\, B(x))$

31) $(\exists x)\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow ((\exists x)\, A(x) \wedge (\exists x)\, B(x))$

32) $((\forall x)\, A(x) \vee (\forall x)\, B(x)) \Rightarrow (\forall x)\, (A(x) \vee B(x))$

Nota: Todos los conversos ($Q \Rightarrow P$ es el converso de $P \Rightarrow Q$) de las fórmulas anteriores que son implicaciones, son falsos (excepto 7 y 8).

Si x no es libre en A entonces los siguientes fórmulas son universalmente válidas:

33) $(\forall x)\,(A \vee B(x)) \equiv (A \vee (\forall x)\,B(x))$
34) $(\exists x)\,(A \vee B(x)) \equiv (A \vee (\exists x)\,B(x))$
35) $(\forall x)\,(A \wedge B(x)) \equiv (A \wedge (\forall x)\,B(x))$
36) $(\exists x)\,(A \wedge B(x)) \equiv (A \wedge (\exists x)\,B(x))$
37) $(\forall x)\,(A \Rightarrow B(x)) \equiv (A \Rightarrow (\forall x)\,B(x))$
38) $(\exists x)\,(A \Rightarrow B(x)) \equiv (A \Rightarrow (\exists x)\,B(x))$
39) $(\forall x)\,(B(x) \Rightarrow A) \equiv ((\exists x)\,B(x) \Rightarrow A)$
40) $(\exists x)\,(B(x) \Rightarrow A) \equiv ((\forall x)\,B(x) \Rightarrow A)$

Nota: Es muy importante enfatizar que las fórmulas 24 a 40 anteriores deben ser deducidas en el sentido del párrafo (12). Tan solo daremos dos ejemplos:

Ejemplo 1. $\vdash (\forall x)(\forall y)\,A \Rightarrow (\forall y)(\forall x)\,A$

i)	$(\forall x)(\forall y)\,A$	Hip.
ii)	$(\forall x)(\forall y)\,A \Rightarrow (\forall y)A$	Ax. de Esp.
iii)	$(\forall y)\,A$	MP (i), (ii)
iv)	$(\forall y)\,A \Rightarrow A$	Ax. de Esp.
v)	A	MP (iii), (iv)
vi)	$(\forall x)\,A$	Gen (v)
vii)	$(\forall y)(\forall x)\,A$	Gen (vi)

Ejemplo 2. $\vdash (A \wedge (\forall x)\,B(x)) \Rightarrow (\forall x)\,(A \wedge B(x))$
si x no ocurre libre en A.

i)	$A \wedge (\forall x)\,B(x)$	Hip.
ii)	$(A \wedge (\forall x)\,B(x)) \Rightarrow A$	Taut. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
iii)	A	MP (i), (ii)
iv)	$(A \wedge (\forall x)\,B(x)) \Rightarrow (\forall x)\,B(x)$	Taut. $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$
v)	$(\forall x)\,B(x)$	MP (i), (iv)
vi)	$(\forall x)\,B(x) \Rightarrow B(x)$	Ax. de Esp.
vii)	$B(x)$	MP (v), (vi)
viii)	$A \Rightarrow (B(x) \Rightarrow (A \wedge B(x)))$	Taut. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$
ix)	$B(x) \Rightarrow (A \wedge B(x))$	MP (iii), (viii)
x)	$A \wedge B(x)$	MP (vii), (ix)
xi)	$(\forall x)\,(A \wedge B(x))$	Gen (x)

Por el teorema de la deducción el ejemplo queda concluído porque si bien en la prueba se aplicó generalización a $(A \wedge B(x))$, x no es libre en la hipótesis $(A \wedge (\forall x)\ B(x))$. De hecho el resultado es falso si x ocurre libre en A (¿por qué?)

Quizás sea interesante proponer en este momento el siguiente ejercicio no trivial: Por una <u>deducción proposicional</u> de un predicado B entenderemos una secuencia de predicados $P_1, P_2, \ldots, P_n$ donde $P_n = B$ y tal que cada P_i $(1 \leq i \leq n)$ es:

a) Un <u>axioma proposicional</u>, es decir, un predicado de alguna de las siguientes formas:

i) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
ii) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
iii) $(\sim B \Rightarrow \sim A) \Rightarrow ((\sim B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$
iv) $(A \wedge B) \equiv \sim (A \Rightarrow \sim B)$
v) $(A \vee B) \equiv (\sim A \Rightarrow B)$
vi) $(A \equiv B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
vii) $(A \equiv B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
viii) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \equiv B))$

b) Una consecuencia directa de predicados anteriores en virtud de Modus Ponens.

Demostrar que las instancias tautológicas son exactamente el conjunto de fórmulas deducibles proposicionalmente.

La Regla de Elección.

Es muy común el argumentar del siguiente modo. Supongamos que hemos probado una afirmación de la forma $(\exists x)\ A(x)$. Entonces decimos, sea b un objeto tal que $A(b)$. En seguida continuamos la prueba y finalmente arribamos a una afirmación que no involucra al elemento elegido b.

No formularemos las condiciones técnicas para la validez de la regla de elección, pero a continuación daremos dos ejemplos.

Ejemplo 1.

$$(\exists x)\,(B(x) \Rightarrow C(x)),\ (\forall x)\,B(x) \vdash (\exists x)\,C(x)$$

i)	$(\exists x)\,(B(x) \Rightarrow C(x))$	Hip.
ii)	$(\forall x)\,B(x)$	Hip.
iii)	$B(b) \Rightarrow C(b)$ para alguna b	REGLA DE ELECCION (i)
iv)	$(\forall x)\,B(x) \Rightarrow B(b)$	Ax. de Esp.
v)	$B(b)$	MP (ii), (iv)
vi)	$C(b)$	MP (v), (iii)
vii)	$C(b) \Rightarrow (\exists x)\,C(x)$	¿por qué? (se requieren varios pasos)
viii)	$(\exists x)\,C(x)$	MP (vi), (vii)

Ejemplo 2.

$$(\forall x)\,(\exists y)\,A(x, y) \vdash (\exists y)\,(\forall x)A(x, y) \qquad \textbf{(que es falso)}$$

i)	$(\forall x)\,(\exists y)\,A(x, y)$	Hip.
ii)	$(\forall x)(\exists y)\,A(x, y) \Rightarrow (\exists y)A(x, y)$	Ax. de Esp.
iii)	$(\exists y)A(x, y)$	MP (i), (ii)
iv)	$A(x, b)$ para alguna b	REGLA DE ELECCION (iii)
v)	$(\forall x)\,A(x, b)$	Gen (iv)
vi)	$(\forall x)\,A(x, b) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\,A(x, y)$	¿por qué? (igual que en el ejemplo anterior)
vii)	$(\exists y)\,(\forall x)\ A(x, y)$	MP (v), (vi)

El problema fue en (v). No tenemos derecho a usar generalización pues la b escogida, intuitivamente, depende de x. Al cuantificar $A(x, b)$ universalmente estamos ignorando este hecho. Si $A(x, y)$ se interpreta como $x < y$ con x y y números naturales, entonces es cierto que dado x existe b con $x < b$ pero es falso decir que existe b mayor que todo natural. Y esto es lo que afirma (vii).

Una última observación: La formalización de la lógica indiscutiblemente incorpora trivialidades que son formalmente válidas (ME GUSTAN LAS PAPAS FRITAS ENTONCES 2 + 2 = 4) al mismo tiempo que excluye, entre otras cosas, mucho del pensamiento artístico y literario.

Esto quizá sea el precio de la universalidad y objetividad del álgebra simbólica del cálculo de predicados y las teorías formales.

Conjunto.

"Un conjunto se forma al agrupar objetos individuales dentro de una totalidad. Un conjunto es una pluralidad pensada como unidad. Si estas u otras afirmaciones similares fueran establecidas como definiciones, entonces pudiera objetarse con buena razón que definen **idem per idem** (algo en términos de ese mismo algo) o aún **obscurum per obscurius** (lo obscuro por lo más obscuro). Sin embargo, podemos considerarlas como expositorias, como referencias a un concepto primitivo, familiar a todos nosotros, cuya resolución en conceptos más fundamentales posiblemente no sea competente ni necesario" (FELIX HAUSDORFF).

Recordemos que para definir una teoría formal basta con indicar los símbolos de la teoría y sus axiomas específicos. En la axiomatización **ZF** de la teoría de conjuntos dada por Zermelo (1908) y Fraenkel (1922) sólo es necesario introducir dos símbolos primitivos:

$$\in \qquad \text{(pertenencia)}$$

$$= \qquad \text{(igualdad)}$$

Así, las afirmaciones (predicados) elementales en **ZF** son sólo los de igualdad ($a = W$) y pertenencia ($x \in X$).

Semánticamente todas las variables en **ZF** representan conjuntos (aunque nos sea difícil aceptar que el número 3 o un punto del plano sean conjuntos, claro, siempre que nos basemos en **ZF** para construir la geometría y los sistemas numéricos).

Los axiomas de **ZF** son:

1) **Axioma de Extensionalidad:**

$$(\forall x)\,(\forall y)\,((\forall z)\,(z\in x \equiv z\in y)\, \equiv\, x = y)$$

Dos conjuntos son iguales si y sólamente si tienen los mismos elementos.

Definición: $(\forall x)\,(\forall y)\,(x \subset y\, \equiv\, (\forall z)\,(z\in x \Rightarrow z\in y))$

Un conjunto está contenido en otro si todo elemento del primero es elemento del segundo.

Teorema: $$(\forall x)\ (\forall y)\ (x = y \equiv (x \subset y \ \wedge\ y \subset x))$$

Dos conjuntos son iguales cuando se incluyen mutuamente.

Nota: El símbolo de contención "$\subset$" no es primitivo en **ZF**, es sólo una abreviación cómoda.

2) **Axioma del Conjunto Vacío:**

$$(\exists x)\ (\forall y)(\sim y \in x)$$

Existe un conjunto sin elementos.

En lo sucesivo denotaremos la negación de "$y \in x$" por "$y \notin x$"

Teorema: (La unicidad del vacío)

$$(\forall a)(\forall b)\ [((\forall y)\ (y \notin a) \wedge (\forall y)\ (y \notin b)) \Rightarrow a = b]$$

Dos conjuntos sin elementos deben ser el mismo.

Por el teorema de la deducción, el axioma de extensionalidad y algunos otros detalles (¿cuáles?) basta con establecer

$$(\forall y)\ (y \notin a), (\forall y)\ (y \notin b) \vdash (\forall z)\ (z \in a \equiv z \in b)$$

Prueba.

i) $(\forall y)(y \notin a)$ Hip.
ii) $(\forall y)(y \notin b)$ Hip.

iii) $(\forall y)(y \notin a) \Rightarrow (z \notin a)$ Ax. de Esp.
iv) $z \notin a$ MP (i), (iii)
v) $(\forall y)(y \notin b) \Rightarrow z \notin b$ Ax. de Esp.
vi) $z \notin b$ MP (ii), (v)
vii) $z \notin a \Rightarrow [z \notin b \Rightarrow (z \in a \equiv z \in b)]$ Taut. $\sim A \Rightarrow (\sim B \Rightarrow (A \equiv B))$
viii) $z \notin b \Rightarrow (z \in a \equiv z \in b)$ MP (iv), (vii)
ix) $z \in a \equiv z \in b$ MP (vi), (viii)
x) $(\forall z)(z \in a \equiv z \in b)$ Gen. (ix)

Ej. Compárese lo anterior con el siguiente enunciado y demostración:

Teorema: Sólamente existe uno y sólo un conjunto sin elementos.

Prueba. El axioma (2) nos garantiza que efectivamente existen conjuntos sin elementos. Sean ahora A y B conjuntos de estos. Para que A y B fueran distintos tendría que existir, por el axioma de extensionalidad un elemento en alguno de ellos que no fuera elemento del otro. Pero esto es imposible.

¿Se puede formalizar este argumento? ¿Es el resultado de tal formalización distinto a la prueba formal dada antes? Si es así, ¿Se puede dar una versión informal de la prueba formal anterior?

Definición. $(\forall x)(x = \emptyset \equiv (\forall y)(y \notin x))$.

En palabras, denotaremos por $\emptyset$ al único conjunto dado por el axioma (2).

Moraleja: Cuando podemos establecer la existencia y unicidad de algo, entonces tenemos derecho a bautizar a ese algo.

3) **Axioma de Parejas Desordenadas.**

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \equiv (w = x \vee w = y))$$

Si x y y son conjuntos entonces la <u>pareja</u> (<u>desordenada</u>) $\{x, y\}$ es un conjunto.

Acabamos de introducir el símbolo $\{x, y\}$ sin anunciarlo y pasando por alto una condición indispensable de unicidad (¿cuál?).
Sin embargo todos los autores cometen este tipo de abuso (y peores) pues suponen que sus lectores son gente crítica que sabrá llenar los pequeños (y grandes) huecos de una exposición.

4) **Axioma de la Unión.**

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(\forall z)\,(z \in y \equiv (\exists t)\,(z \in t \wedge t \in x))$$

Si x es un conjunto de conjuntos, entonces la unión de sus miembros es un conjunto.

Ejercicio. Demostrar que para cada conjunto x, el conjunto y dado por el axioma de la unión es único.

Ejemplo: Si $x = \{\{a, b, c,\}, \{a, c, d, e\}\}$ entonces la unión de x es $y = \{a\, b, c, d, e\}$.

Definición. Sean A y B conjuntos, entonces por el axioma (3), $\{A, B\}$ es un conjunto. Denotaremos por $A \cup B$ al conjunto que resulta de la aplicación del axioma (4) al conjunto $\{A, B\}$. Es decir

$$(\forall z)\,(z \in A \cup B \equiv (z \in A \vee z \in B))$$

(¿Por qué?)

5) **Axioma de Infinito**

$$(\exists x)\,(\emptyset \in x \;\wedge\; (\forall y)(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

Existe un conjunto x que contiene al conjunto vacío y tal que si $y \in x$ entonces $y \cup \{y\}$ también pertenece a x. La distinción entre un elemento y y el conjunto $\{y\}$ es básica. Este axioma garantiza la existencia de (una variedad de) conjuntos infinitos (¿Por qué?). ¿No tiene un sabor inductivo la condición del axioma del infinito? De hecho John Von Neumann dio una construcción de los números naturales a partir de este axioma.

6) **Axioma de Especificación.**

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\ (z \in y \equiv (z \in x \wedge P(z)))$$

donde $P(z)$ es una propiedad en **ZF**.

Si x es un conjunto, entonces existe el subconjunto de aquellos elementos de x que satisfacen la propiedad P.

Nótese que esto no es un axioma, sino toda una familia de axiomas. Un axioma por cada propiedad.

Definición. Dado x y una propiedad P, denotaremos al (único) conjunto cuya existencia está garantizada por el axioma de especificación por

$$\{z \in x \mid P(z)\}$$

Definición.
$x \cap y = \{z \in x \mid z \in y\}$ (intersección)
$x \setminus y = \{z \in x \mid z \notin y\}$ (complemento relativo)

Dada una propiedad P, no tenemos derecho a construir al conjunto $\{z \mid P(z)\}$, es decir, $(\exists y)(\forall z)\ (z \in y \equiv P(z))$ no es un axioma. De hecho admitir esto lleva a contradicciones.

Ejemplo: (La paradoja de Russell). Sea $P(z)$ la propiedad $z \notin z$ y supongamos que existe el conjunto $y = \{z \mid z \notin z\}$. Por lo tanto y es el conjunto de todos los elementos tales que no se pertenecen a sí mismos. En particular, y se pertenece si y sólo si y no se pertenece que es una contradicción de la forma $A \equiv \sim A$. (Ejercicio: Escribir la prueba formalizada de esto.)

Una versión coloquial de la misma paradoja es la siguiente:
En un pueblo hay un barbero que rasura a aquellos y sólo a aquellos hombres que no se rasuran a sí mismos. Entonces: ¿Quién rasura al barbero? Respuesta: El barbero se rasura si y sólo si el barbero no se rasura a sí mismo.

Moraleja (P. Halmos): Es imposible, especialmente en matemáticas, obtener algo de nada. Para especificar un conjunto, no es suficiente el pronunciar algunas palabras mágicas; es necesario también tener a la mano un conjunto a cuyos elementos las palabras mágicas se apliquen.

7) **Axioma del Conjunto Potencia.**

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(\forall z)\,(z \in y \equiv z \subset x)$$

Dado un conjunto, existe el conjunto de todos sus subconjuntos. Este axioma es esencial en la construcción de la aritmética transfinita de G. Cantor.

Definición. El conjunto de todos los subconjuntos de una colección x es el conjunto <u>potencia</u> de x y lo denotaremos por 2^x.

ZF además de constar de otros dos axiomas (elección y regularidad) poseé una versión mas general del axioma de especificación (el axioma de reemplazamiento). Sin embargo la lista aquí dada es más que suficiente por el momento.

Función

Al final del siglo XVIII era transparente que ni la metafísica de Leibniz ni el dogmatismo empírico de Newton permitirían una justificación completa de los métodos del nuevo cálculo.

La primera noción sujeta a escrutinio fue la de continuidad y, a través de ésta, la noción de correspondencia funcional. Nada era mas ambiguo en tiempos de Euler que la expresión *functio continua*. Esto era porque en la práctica, geómetras desde los tiempos de Newton y Leibniz habían trabajado sólo con expresiones analíticas explícitas. Para ellos el dominio del analísis estaba claramente definido y sus operaciones justificadas por la manera en que eran llevadas a cabo. Pero ya no era posible seguir manteniendo esta visión pragmática.

La confrontación se hizo inevitable desde el momento en que Fourier, en 1807, mostró (estudiando cuerdas vibrantes y conducción de calor) que funciones muy generales, y entre ellas ciertas funciones discontinuas, admitían una representación en series trigonométricas convergentes.

Esto introdujo una nueva y profunda problemática en el análisis: Si el desarrollo en series trigonométricas permite la representación de una clase más general de funciones entonces, ¿Es posible caracterizar tal colección de funciones y sus propiedades?

Atacar la pregunta necesariamente implicaría una definición de correspondencia funcional independiente de cualquier tipo de expresión analítica. Fue Dirichlet el que finalmente la dejó por escrito en 1837. Cabe notar que ya en 1821 Cauchy había dado la definición rigurosa de continuidad. Esta separación conceptual de la intuición geométrica dio frutos importantísimos. Particularmente espectacular es el momento en que Weierstrass da, en 1861, un ejemplo de función continua sin derivada en ningún punto.

Este descubrimiento no sólo reveló por completo la autonomía de los métodos del análisis con respecto a la geometría, sino que también mostró hasta qué punto el nuevo espíritu de rigor daba lugar al riesgo de una nueva crisis: Si la intuición geométrica ya no podía garantizar la imposibilidad de un absurdo, ¿dónde, entonces, se debería encontrar un criterio suficiente de consistencia? De aquí, la teoría de conjuntos iría a sugir de una cadena de artículos debida a Cantor que comenzó, en 1870, con el tema de series trigonométricas y culminó, 27 años mas tarde, con el tema de la aritmética transfinita. (c.f. JEAN T. DESANTI)

1) Parejas Ordenadas

"¿Qué significa colocar los elementos de un conjunto A en algún orden? Supongamos, por ejemplo, que el conjunto A es la cuarteta {a, b, c, d} de elementos distintos, y supongamos que queremos considerar sus elementos en el orden

$$c \quad b \quad d \quad a$$

Aún sin una definición precisa de que significa esto, podemos hacer algo inteligente. Podemos, a saber, considerar para cada lugar particular en el ordenamiento, un conjunto con todos los elementos que ocurren en y antes de ese lugar, obteniendo de esta manera los conjuntos

$$\{c\} \quad \{c, b\} \quad \{c, b, d\} \quad \{c, b, d, a\}$$

Podemos proseguir y considerar al conjunto

$$C = \{\{a, b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{c\}\}$$

Para enfatizar que el concepto intuitivo y probablemente confuso de orden ha tenido éxito en producir algo sólido y simple, a saber, un conjunto C, llano y sin ornamentos, los elementos de C, y sus elementos, están presentados arriba de una manera revuelta. (El lector lexicográficamente inclinado quizás pueda ver un método en la manera de revolver).

Continuemos con la pretensión, por un momento, de que no sabemos qué significa orden. Supongamos que en una mirada casual al párrafo anterior todo lo que pudimos retener es al conjunto C. ¿Podríamos usarlo para recapturar el orden que le dio origen? La respuesta fácilmente se ve que es afirmativa: Examinemos los elementos de C para encontrar uno que esté incluido en todos los demás; como {c} tiene la propiedad (y ningún otro) entonces sabemos que c debe haber sido el primer elemento. Busquemos al siguiente menor elemento de C, esto es, aquel que está incluido en todos los restantes después que {c} ha sido removido; como {b, c} cumple con el requisito (y ningún otro) entonces sabemos que b debe haber sido el segundo elemento.

Procediendo así (sólo dos pasos más se necesitan) pasamos del conjunto C al ordenamiento dado al conjunto A.

La moraleja es ésta: Pudiéramos no saber con precisión qué significa ordenar los elementos de un conjunto A, pero para cada orden podemos asociar un conjunto C de subconjuntos de A de tal manera que el orden dado se recupera unívocamente de C. (Aquí hay un ejercicio no trivial: Encontrar una caracterización intrínseca de aquellos conjuntos de subconjuntos de A que corresponden a un orden de A. Como "orden" no tiene significado oficial aún, todo el problema es oficialmente un sinsentido.)

El pasaje de un orden en A a un conjunto C, y de regreso, fue ilustrado para una cuarteta; para una pareja todo se vuelve al menos dos veces más sencillo. Si $A = \{a, b\}$ y si, en el orden deseado, a va primero, entonces $C = \{\{a\}, \{a, b\}\}$; si, de otro modo, b va primero, entonces $C = \{\{b\}, \{a, b\}\}$" (PAUL HALMOS)

Definición. La pareja ordenada de a y b, con primera coordenada a y segunda coordenada b es el conjunto (a, b) definido por:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Teorema: (Teorema fundamental de las parejas ordenadas)

Si (a, b) y (x, y) son parejas ordenadas entonces $(a, b) = (x, y)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.

Definición. Sean A y B conjuntos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto definido por:

$$A \times B = \{x \in 2^{2^{A \cup B}} \mid (\exists a)(\exists b)\ (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b))\}$$
$$(A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \text{ informalmente})$$

2) **Relaciones.**

Sean A y B conjuntos. Una relación R entre dos conjuntos A y B es simplemente un subconjunto de $A \times B$ (i.e. $R \subset A \times B$).
Si $(x, y) \in R$ en general escribimos xRy (x está relacionada con y).

Ejercicio. ¿Puede el lector desarrollar una discusión entre el concepto intuitivo de relación y la noción conjuntista de ésta? (Tal vez en el espíritu de Halmos).

3) **Funciones.**

Este no es ya el momento para discusiones preliminares largas y heurísticas así que procederemos directamente con las definiciones, aún bajo el riesgo de cimbrar o preocupar a algunos.

Sean X y Y conjuntos. Una función de X en Y es una relación f en $X \times Y$ tal que para cada x en X existe un único élemento y en Y con $(x, y) \in f$. Más explícitamente, f es una función de X en Y si

1) $f \subset X \times Y$
2) $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \wedge (x, y) \in f))$ (existencia)
3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (((x, y) \in f \wedge (x,z) \in f) \Rightarrow y = z)$ (unicidad)

Escribiremos $y = f(x)$ én vez de $(x, y) \in f$ ó $x\,f\,y$.

El símbolo $f : X \to Y$ es una abreviación de "f es una función de X en Y".

X es el dominio de f y Y el codominio.

Si X es un subconjunto de Y, la función f definida por $f(x) = x$ para cada x en X se llama la función inclusión (mapeo inclusión, inclusión, encaje o inyección) de X en Y. La frase "la función f definida por ...." es muy común.

Su intención es implicar, por supuesto, que existe una única función que satisface la condición dada. En el caso especial que tenemos a la mano esto es obvio: estamos invitados a considerar el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) en $X \times Y$ para los cuales $x = y$.

Siguiendo la práctica matemática tradicional, usualmente describiremos una función estipulando su valor y para cada argumento x (en el espíritu del siglo XVIII).

El mapeo inclusión de X en X se llama el mapeo identidad en X (en el lenguaje de relaciones, el mapeo identidad es lo mismo que la relación de igualdad en X) y se denota por Id_X.

Si f es una función de X en Y y A es un subconjunto de X entonces la restricción de f a A es la función $f|A: A \to Y$ definida por:

$$(f|A)(a) = f(a) \text{ para cada } a \in A$$

Imágenes: Si $A \subset X$ entonces definimos la imagen de A bajo f como el conjunto

$$f(A) = \{y \in Y \mid (\exists x)(x \in A \wedge f(x) = y)\}$$

La notación es mala pero no catastrófica. Lo que está mal es que si sucede que A es simultáneamente un elemento de X y un subconjunto de X, (situación rara pero no imposible (ver el axioma de infinito)) entonces el símbolo f(A) es ambiguo.
En fin, siguiendo las costumbres matemáticas normales, usaremos esta mala notación, confiando en que el contexto evite toda confusión.

Si $B \subset Y$ entonces definimos la imagen inversa de B bajo f como el conjunto.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

(Ej. Sea f: Reales x Reales → Reales definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces $f^{-1}([1, 2])$ es un anillo.)

Inyecciones, Suprayecciones y Biyecciones: Una función $f: X \to Y$ es inyectiva si mapea elementos distintos de X en elementos distintos de Y. Formalmente:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)((x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Afirmación: f es inyectiva si y sólo si para cada y en Y se tiene que $f^{-1}(\{y\})$ es el vacío o un conjunto de un solo elemento en X.

Una función $f: X \to Y$ es <u>suprayectiva</u> (sobre) si $f(X) = Y$, esto es, si para toda y en Y existe al menos una $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Formalmente:

$$(\forall y)\ (y \in Y \Rightarrow (\exists x)\ (x \in X \ \wedge f(x) = y))$$

Una función $f: X \to Y$ es <u>biyectiva</u> si es inyectiva y suprayectiva, esto es, si para toda $y \in Y$ existe un única $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

<u>Composición</u>: Sea $f : X \to Y_1$ y $g: Y \to Z$ con $Y_1 \subset Y$ entonces la composición de f seguida de g es la función $g \circ f: X \to Z$ definida por

$$(g \circ f)\ (x) = g(f(x)) \ \text{ para cada } \ x \in X$$

Ejercicio: Describir a $g \circ f$ como conjunto de parejas ordenadas.

Obsérvese que la composición $g \circ f$ sólo tiene sentido si el dominio de g contiene al contradominio de X.

Teorema. Sean $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ y $h: Z \to W$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Es decir la composición de funciones es asociativa cuando está definida.

<u>Inversión</u>: Sea $f : X \to Y$ biyectiva entonces

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid f(x) = y\}$$

es una función de Y en X. Además $f \circ f^{-1} = Id_Y$ y $f^{-1} \circ f = Id_X$.

Nota: Sea f una función de X en Y y sea y un elemento de Y. Entonces $f^{-1}(y)$ tiene sentido cuando f es biyectiva, y denota al único elemento de X tal que $f(x) = y$ (en particular $f^{-1}(y) \in X$) pero $f^{-1}(\{y\})$ siempre tiene sentido y denota al subconjunto de las x en X tales que $f(x) = y$ (en particular $f^{-1}(\{y\}) \subset X$).

Afirmación: $f: X \to Y$ es biyectiva si y solamente si $f^{-1}(\{y\})$ es un solo elemento de X para cada $y \in Y$. Más aún, $\{f^{-1}(y)\} = f^{-1}(\{y\})$ para toda $y \in Y$.

Ejemplo: (Estructura de Grupo)

Sea $S(x)$ el conjunto de todas las funciones biyectivas de X en X. Entonces la composición entre elementos de $S(x)$ siempre está definida y es asociativa; $Id_X \in S(x)$ y $f \circ Id_X = Id_X \circ f = f$ para toda $f \in S(x)$; finalmente, para toda $f \in S(x)$ existe g (a saber, $g = f^{-1}$) tal que $f \circ g = g \circ f = Id_X$.

En general, un conjunto G con una operación $\circ$: $G \times G \to G$ y un elemento $Id \in G$, tal que las propiedades del ejemplo se satisfacen, se conoce en matemáticas como un grupo.

Ejercicio: Demostrar que si X es finito y tiene n elementos, entonces $S(x)$ tiene $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ elementos.

Aquí termina entonces el planteamiento general del juego:

Tenemos una definición de demostración y tenemos una teoría formal (El Paraíso de Cantor). El proposito en los años venideros es el de trabajar sobre las estructuras cimentadas en estos principios, entender sus construcciones y definiciones, sus teoremas y aplicaciones. También tendrá sentido para algunos escudriñar más profundamente los fundamentos de las matemáticas.

Agradecimientos: A Alfinio Flores por creer en la posible relevancia de estas notas. Y a Elizabeth Esparza por transcribir mis jeroglíficos en un texto legible.

Bibliografía: (Oldies but goldies)

[1] Paul J. Cohen y Reuben Hersh: Non-Cantorian Set Theory en: M. Kline (Editor): Mathematics in the Modern World. Freeman (1968) 213-220.

De aquí tomé la axiomatización de la teoría de conjuntos y el estilo "tabular" de la presentación.

[2] Jean T. Desanti: From Cauchy to Riemann, or the Birth of the Theory of Real Functions en: F. LeLionnais (Editor): Great Currents of Mathematical Thought. Dover (1971, original 1962) 181-190.

De aquí traduje, de forma muy liberal, algunos párrafos que son los que sirven de introducción a la sección de **Función** en estas notas. Cabe enfatizar que para bien o para mal alteré algunas afirmaciones de Desanti.

[3] Paul R. Halmos: Naive Set Theory. Van Nostrand Reinhold (1960).

De aquí salió la discusión de parejas ordenadas y en general la substancia de la sección de **Función**. Sin embargo, esparcidas en la sección de **Conjunto**, también hay algunas afirmaciones de Halmos. En particular, el hábito de dar moralejas lo tomé de él.

[4] Felix Hausdorff: Set Theory. Chelsea (1962, original 1937).

Un clásico.

[5] Stephen Cole Kleene: Mathematical Logic. John Wiley & Sons, Inc. (1968).

De aquí realmente sólo tomé la idea de que todos los conectivos son importantes. En general el énfasis tiende a ser sobre la negación y la implicación. De tal modo que los demás quedan como abreviaciones cómodas y no como conectivos primitivos. Lo mismo para el cuantificador existencial.

[6] Elliot Mendelson: Introduction to Mathematical Logic. Van Nostrand Reinhold (1964).

Este libro es mi principal influencia en Lógica. Sin embargo estas notas difieren mucho de la estrategia aplastantemente eficiente y condensada de Mendelson.

[7] Patrick Suppes: Introduction to Logic. Van Nostrand Reinhold (1957).

Libro propio para lectores de espíritu humanista. Sin embargo en 300 páginas no llega demasiado lejos.

Junio de 1988.