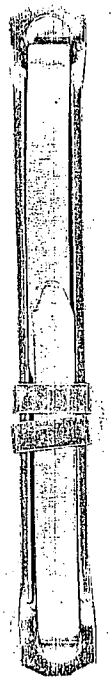
COMUNICACIONES DEL CIMAT

99

CAOS Y AZAR

por

DIEGO BRICIO HERNANDEZ



CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto.
México
Tels. (473) 2-25-50
2-02-58

CAOS Y AZAR

por

DIEGO BRICIO HERNANDEZ

CIMAT
Apartado Postal 402
36000 Guanajuato, Gto.
MEXICO

RESUMEN

Este artículo desarrolla la idea de que los sistemas dinámicos determinísticos pueden exhibir un comportamiento que pasa varias pruebas de aleatoriedad. Además, trata de explicar el origen de las descripciones probabilísticas en la Mecánica, que se dan como un expediente para simplificar los modelos matemáticos de sistemas de un gran número de partículas. Finalmente, estos dos puntos de vista complementarios se integran en el estudio de las fluctuaciones térmicas mediante un sistema dinámico determinístico que exhibe un comportamiento aleatorio.

1. Introducción.

Durante siglos, la Física fué un baluarte del determinismo, y la Mecánica Clásica su paradigma. Clasicamente, los fenómenos se describen en términos de funciones suaves que satisfacen ecuaciones diferenciales ordinarias (o parciales). Dichas funciones especifican trayectorias en algún espacio fase Γ asociado con el sistema en consideración (Γ es un subconjunto abierto de algún $\mathbb{R}^d$, en la Mecánica de partículas). El carácter determinístico de dichos fenómenos se manifiesta como un teorema de existencia y unicidad para el problema de valores iniciales asociado con la correspondiente ecuación diferencial en Γ:

$$\dot{x} = f(x) \qquad x(0)=x_0 \tag{1}$$

Sea f Lipschitz continua en Γ. Entonces, dado $x_0 \in \Gamma$, existe un número positivo δ y una trayectoria única $\phi:(-\delta,\delta)\to \Gamma$ que satisface (1).

* Conferencia dictada durante el VI Coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV (Oaxtepec, Mor., Agosto de 1989), dentro del Ciclo de Conferencias Generales.

COMUNICACIONES DEL CIMAT

CAOS Y AZAR

99

por

DIEGO BRICIO HERNANDEZ

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto.
México
Tels. (473) 2-25-50
2-02-58

Por otro lado, los sistemas de partículas de la teoría cinética son sistemas de gran escala, en el sentido moderno del término [Siljak,1978], y podría pensarse en tratar la descripción matemática correspondiente (1) mediante alguno de los diversos métodos de simplificación de que se dispone en la literatura sobre dichos sistemas. Una posible estrategia de simplificación [Hernández,1987] requiere partir la fase x del sistema de partículas en dos componentes: una componente *lenta* y y una *rápida* η, para luego reescribir las ecuaciones dinámicas en la forma

$$\dot{y}=g(y,\eta), \qquad \epsilon\dot{\eta}=h(y,\eta), \tag{2}$$

después de un cambio de escala temporal en las ecuaciones de las componentes rápidas. Aquí ϵ es un *parámetro pequeño.* Despreciar la dinámica más rápida equivale a reemplazar (2) por la descripción más sencilla

$$\dot{y}=g(y,\eta), \qquad h(y,\eta)=0 \tag{3}$$

Además, se supone que la decomposición que lleva a (2) se hizo en forma tal que y es de dimensión "baja", por lo que la parte diferencial de (3) consta de "unas pocas" ecuaciones diferenciales.

Si introducimos las hipótesis adicionales de que a) la dinámica rápida se puede dar como la suma de dos contribuciones, digamos como en

$$g(y,\eta)= b(y) + c(y,\eta),$$

y b) el segundo término del lado derecho se substituye por uno de *ruido blanco* $\sigma\xi$, de ahí resulta la descripción dinámica simplificada

$$\dot{y}=b(y) + \sigma\xi, \quad y(0)=y_0 \tag{4}$$

Nótese que se ha despeciado la parte algebraica de (3) , y se ha reemplazado el efecto de los componentes rápidos sobre la derivada

Esta nítida imagen del mundo no quedó muy bien parada cuando la Mecánica se empezó a ocupar de sistemas constituidos por un gran número de partículas. En efecto, después de que Daniel Bernoulli diera una primera versión cuantitativa de la teoría cinética en su tratado "Hydrodynamica", publicado en 1738, la reinventaron Maxwell y Boltzmann a mediados del siglo pasado [Brush,1976, Libro 1]. Tal construcción tenía (y tiene) por objeto explicar el comportamiento macroscópico de las substancias en términos de la entonces revolucionaria teoría molecular de la materia, de acuerdo con la cual *la materia consiste de un enorme número de partículas (átomos, moléculas) ligadas por medio de fuerzas interatómicas o intermoleculares, según sea el caso; la materia se manifiesta como gas, líquido o sólido, dependiendo de la intensidad de dichas fuerzas.*

Macroscopicamente, este colectivo molecular se manifiesta en términos de propiedades medibles como la presión, el volumen, la temperatura y otras. En el enfoque cinético al estudio de los fenómenos térmicos, los observables macroscópicos se obtienen de las cantidades dinámicas microscópicas promediándolas. Asi pues, al menos en principio el enfoque cinético requiere el estudio de sistemas de partículas en extremo numerosos, para luego calcular los promedios adecuados.

Típicamente, el número de partículas que debe ser considerado es del órden del número de Avogadro (N_{Av}= 6.023 $\times$ 10^{23} moléculas/g.mol). Nótese que resolver problemas de valor inicial como (1) requiere que se conozca la fase inicial (posición y velocidad) de cada partícula en el sistema. Esto es claramente imposible desde un punto de vista práctico. Aún si se dispusiera de tal información, la integración de las ecuaciones de movimiento con objeto de obtener la trayectoria correspondiente en el espacio fase excedería la capacidad de las computadoras más veloces. La Mecánica Estadística fue creada por Maxwell y Boltzmann con objeto de darle la vuelta a esta dificultad. Para profundizar en los fundamentos del enfoque estadístico en la Mecánica, véase el Capítulo 10 de [Brush,1976], también [Ehrenfest-Ehrenfest,1959].

componente observable (la nueva salida) no afecta la dinámica del estado. De ello resulta una versión simplificada de (1), diferente de (3), de la forma

$$\dot{z}=\phi(z), \qquad y=\psi(z) \tag{5}$$

Ahora bien, se han dado ejemplos de sistemas dinámicos como (5) cuya salida y se comporta en una forma que hace recordar el comportamiento de sistemas no determinísticos como las monedas, véase [Taylor,1987]. Véase también [Galgani et al.,1988], donde se hace ver que las partículas cargadas en un campo de radiación (un sistema dinámico determinístico) se mueven de modo fluctuante altamente irregular, de apariencia aleatoria.

Más familiarmente, en forma rutinaria se utilizan sistemas dinámicos determinísticos a tiempo discreto para generar sucesiones que pasan diversas pruebas de aleatoridad: de hecho, todos los sistemas modernos de cómputo vienen con generadores de números aleatorios (véase la sección 4) implementados en sófuer, y toda una rama de la probabilidad computacional se ocupa de idear algoritmos para transformar dichas sucesiones aleatorias en muestras de distribuciones deseadas. [Knuth,1981].

Asi pues, los sistemas dinámicos determinísticos pueden exhibir un comportamiento aparentemente aleatorio. La sección 5 presenta un sistema tal, propuesto en [Beck-Roepstorff, 1987] con objeto de detallar la estructura del término fluctuante ξ en la ecuación de Langevin (4), y que constituye un *generador de trayectorias aleatorias.*

2. Sistemas Dinámicos.

Bajo condiciones determinísticas, el propósito del modelado es proporcionar un medio para predecir el comportamiento futuro en términos del conjunto de condiciones actuales. La forma más general de un modelo determinístico es un *sistema dinámico* [Kalman et al, 1969]

$$\langle T,U,X,Y,\mathcal{U},\delta,\lambda\rangle$$

de los lentos mediante el término aleatorio de ruido blanco aditivo. En (4), σ es un parámetro (escalar, vector o matriz) que representa la intensidad del ruido, y ξ es un ruido blanco estándar.

A diferencia de la imagen completamente determinística que rodea a los problemas de valores iniciales (1) de la Mecánica Clásica, los problemas de valor inicial como (4) ofrecen una descripción mucho menos ambiciosa del mundo. En efecto, en lugar de pretender predecir el valor de la variable lenta y t segundos después del comienzo del movimiento, ahora las predicciones toman la forma de *dado y(0), la probabilidad de que* y(t) *caiga en algún conjunto* A *es tal.*

En la Física Estadística se han utilizado ventajosamente modelos como (4) [Uhlenbeck-Ornstein,1930], [Beck-Roepstorff, 1987], bajo la denominación de *ecuación de Langevin.* En la sección 5 de este trabajo se discute con cierta amplitud un caso especial de dicha ecuación (*fluctuaciones térmicas*). Asi pues, la Mecánica puede tratar grandes sistemas de partículas, pero al costo de perder el determinismo. Véase [Kac,1959] para una interesante presentación de los métodos probabilísticos y el correspondiente razonamiento en las ciencias físicas; véase también la sección 3 de este trabajo en relación con el papel de la probabilidad en la mecánica de partículas.

La sección 2 trata el concepto de sistema dinámico, tal y como se le concibe en la teoría matemática de sistemas [Kalman et al., 1969], centrada en torno a las nociones de *entrada, salida* y *estado.* En particular, los sistemas de partículas de la mecánica clásica son sistemas dinámicos sin entradas, y cuyos espacios de estados coinciden con Γ, el espacio fase respectivo.

Una simplificación alternativa de la descripción (1) se basa en dar una partición diferente del vector de estado x, esta vez en una parte *observable* y y una parte *no observable* z. Además, se hace la suposición de que a) la dinámica de la parte observable y sigue de cerca la dinámica de z (el nuevo estado), y b) la

sistema dinámico queda identificado especificando $<T,X,\delta>$, con $\delta:\Delta\times X \to X$ y (2) se especializa a

$$\delta(r,t,\delta(s,r,x)) = \delta(s,t,x) \tag{3}$$

Más precisamente, considérese la situación en que la función de transición del estado es *homogénea en el tiempo* e. d. T es cerrado bajo la suma y

$$\delta(s+h,t+h,x) = \delta(s,t,x) \ \forall\ h \in T$$

siempre que $(s,t) \in \Delta$, $x \in X$. Entonces,

$$\delta(s,t,x) = \delta(0,t-s,x)$$

y conviene simplificar la notación como sigue: para cada $t \in T$, sea $P_t:X \to X$ definida por

$$P_t x: = \delta(0,t,x)$$

Entonces (3) se transforma en

$$P_s P_t x = P_{s+t} x \ \forall\ x \in X$$

e. d.

$$P_s P_t = P_{s+t},\ s,t\in T \tag{4}$$

y se dice entonces que $\{P_t, t \in T\}$ constituye un *semigrupo* de operadores en X. Nótese que se necesita que T sea cerrado bajo la suma con objeto de poder siquiera escribir (4). La propiedad de semigrupo se tomará como la contrapartida matemática del determinismo.

Se dice que *interviene el azar* siempre que el comportamiento observado sea tan errático que no se pueda esperar ninguna reproducibilidad de los resultados. En otras palabras, cuando las observaciones no apoyan un análisis determinístico de la situación bajo estudio.

Cuando se detecta la influencia del azar, el fin último del modelado tiene que bajar un poco en cuanto a sus pretensiones. En

donde, tipicamente,

a) T es un intervalo (tiempo continuo) o un conjunto de enteros (tiempo discreto). Los elements de T se conocen como *instantes.*

b) X e Y son conjuntos no vacios. Los elementos de U se conocen como *valores de la entrada,* mientras que los de X e Y son los *estados* y *valores de la salida,* respectivemente.

c) $\mathcal{U}$ es un conjunto de funciones de T en U, y cada $\gamma \in \mathcal{U}$ se conoce como una *trayectoria admisible de la entrada.* $\delta:\Delta\times X\times\mathcal{U} \to X$ es la *función de transición del estado,* donde $\Delta := \left\{(s,t) \in T^2 : s \leq t\right\}$. δ es tal que

$$\delta(s,t,x,\gamma') = \delta(s,t,x,\gamma'') \text{ si } \gamma'|_{[s,t]} = \gamma''|_{[s,t]}. \tag{1a}$$

$$\delta(t,t,x,\gamma) = x \tag{1b}$$

Aquí, $\delta(s,t,x,\gamma)$ es el estado al que se llega al tiempo t si el estado era x al tiempo s y se aplicó la trayectoria γ durante el intervalo de tiempo [s,t].

Nótese que, dados (s,r), $(r,t)\in\Delta$, $\gamma\in\mathcal{U}$, $x\in X$, se sigue necesariamente que $(s,t)\in\Delta$ y

$$\delta(r,t,\delta(s,r,x,\gamma),\gamma) = \delta(s,t,x,\gamma), \tag{2}$$

a menos que se viole el determinismo.

Finalmente

e) $\lambda:X \to Y$ es la *función de lectura del estado*, es decir, $\lambda(x)$ es el valor observado a la salida cuando el estado es x.

Para simplificar algo las cosas, consideremos el caso especial en que el estado es observable ($X = Y$ y λ es la función identidad) y $\mathcal{U}$ consta de solamente una trayectoria λ. Entonces, el

$$x,\ f(x),\ f^{(2)}(x)\ \ldots$$

Examinemos en lo que sigue las nociones de caos y azar tal y como se manifiestan en algunos sistemas físicos clásicos.

3. La probabilidad en la mecánica de partículas.

Considérese un sistema constituido por N partículas puntuales de masas $m_1,\ldots,m_n$, que interactúan según un potencial V, que es una función suave de las 3N coordenadas espaciales $q_1,\ldots,q_n$ que especifican una configuración de este sistema de partículas. Sean $p_1,\ldots,p_N$ los momentos individuales de estas partículas, cuyas energías cinéticas son

$$\frac{\|p_i\|^2}{2m_i}\ (i=1,\ldots,N).$$

Aquí y en lo que sigue $\|\cdot\|$ denota la norma en un espacio euclidiano apropiado. La función *hamiltoniana* (o *energía total*) asociada con este sistema de partículas se define como

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} + V(q)$$

donde hemos usado la notación $q:=(q_1,\ldots,q_N)$, $p:=(p_1,\ldots,p_N)$. Cada $(q,p)\in\mathbb{R}^{6N}$ será llamado una *fase* del sistema; denotemos por $\Gamma:=\mathbb{R}^{6N}$ al *espacio fase*.

De acuerdo con la formulación hamiltoniana de la Mecánica Clásica [Arnold,1978], los movimientos físicos de este sistema de partículas corresponden a las soluciones del sistema de 6N ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

Supongamos que H es suficientemente suave, como para que (1) tenga una única solución $t\mapsto(\phi(t),\psi(t))$, definida para todo $t\in\mathbb{R}$, para cada fase inicial (q,p). Entonces (1) define un sistema dinámico con $T = \mathbb{R}$, Γ como espacio de estados y con semigrupo asociado dado por

lugar de aspirar a emitir predicciones como P_t *x es el estado al que se llega t segundos después de haber partido del estado x*, uno tiene que contentarse con predicciones del tipo de *la probabilidad de llegar a un estado en A t segundos después de haber partido del estado x es* $\pi_t(x,A)$, *un número en [0,1]*, para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Así pues, X debe dotarse de una estructura medible, y una familia $\{\pi_t, t \in T\}$ de probabilidades de transición juega el papel del semigrupo $\{P_t, t \in T\}$.

Sin embargo, es de hacer notar que esta familia de probabilidades de transición define a su vez una familia $\{P_t, t \in T\}$ de operadores que actúan sobre M, la familia de todas las funciones medibles acotadas $f: X \to \mathbb{R}$. Esta familia de operadores está definida por

$$P_t f(x) := \int_X f(y)\pi_t(x,dy),$$

pero no es siempre cierto que $\{P_t, t \in T\}$ constituya un semigrupo. Cuando sí lo es, se dice que dicha familia de operadores en $\mathcal{M}$ es *Markoffiana*. Se recupera el determinismo, al precio de cambiar el espacio de estados (M en lugar de X). Véase [Rosenblatt, 1971].

Por otro lado, el *caos* es un comportamiento aparentemente aleatorio que se observa en ciertos sistemas dinámicos, cuyas órbitas exhiben un comportamiento más bien errático [Devaney,1987]. Así pues, también un análisis determinístico puede llevar a un comportamiento aparentemente aleatorio, de la clase que comúnmente se modela en términos probabilísticos.

En relación con el caos, uno normalmente considera sistemas dinámicos a tiempo discreto de la forma

$$P_n x = f^{(n)}(x)$$

e. d. las transformaciones en el semigrupo son las iteradas de una cierta función f ($=P_1$). Por un abuso de la terminología, a f misma se le llama comúnmente un *sistema dinámico*. La *órbita* de un elemento $x \in X$ bajo un sistema dinámico f es la sucesión de iteradas

$$\mu(P_t B) = \mu(B) \quad \forall\ B \in \mathcal{B}(M_o).$$

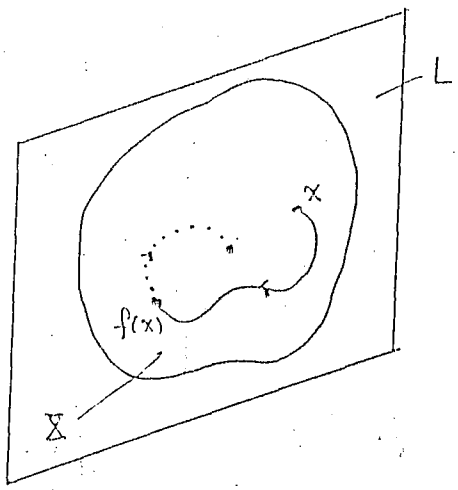
En efecto, tal medida está dada por [Khinchin, 1949].

$$\mu(A) = c\int_A \frac{d\sigma}{\|\nabla H\|}$$

donde c es una constante positiva de normalización e.d. $\mu(M_o) = 1$, μ es una medida de probabilidad. Basta que H se vaya a infinito con sus argumentos para garantizar que M_o es compacto, y entonces $P_t : M_o \to M_o$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, basta que $\nabla H \neq 0$ en Γ para garantizar que μ está bien definida. En la literatura física [Thompson, 1972] el espacio probabilístico $(M_o, \mathcal{B}(M_o), \mu)$ se conoce como *el ensamble microcanónico de Gibbs*

La Mecánica Clásica proporciona otros invariantes del movimiento: las tres componentes del momento lineal, las del momento angular, etc. Junto con la energía total, estos invariantes especifican una variedad compacta invariante M, con $\dim(M) =: m < 6N$. Para sistemas de interés físico, m no será mucho menor que 6N, lo que impide la determinación de $\{P_t, t \in \mathbb{R}\}$ sobre la base de una familia suficientemente numerosa de invariantes del movimiento. Por ejemplo, en el estudio de los líquidos y gases N será enormemente grande, del órden del número de Avogadro ($N = 6.023 \times 10^{23}$), por lo que no hay ninguna esperanza de resolver explicitamente las ecuaciones de movimiento con objeto de determinar el grupo.

Impulsado por esta dificultad, Poincaré sugirió el uso de secciones con objeto de estudiar las movimientos de tales sistemas dinámicos: una *sección* es una variedad lineal L, de dimensión baja (típicamente 2) cuya intersección con M se denotará por X. Se puede entonces definir una transformación $f : X \to X$ de la manera siguiente:



$$P_t(q,p) = (\phi(t),\psi(t)).$$

Nótese que la propiedad de semigrupo de $\{P_t, t\in\mathbb{R}\}$ refleja la existencia y unicidad de soluciones del problema de valores iniciales asociado con (1). Nótese también que $\{P_t, t\in\mathbb{R}\}$ es de hecho un *grupo*, con $P_t^{-1} = P_{-t}$ para cada $t\in\mathbb{R}$, pues

$$P_{-t}P_t = P_tP_{-t} = P_o = I.$$

El hecho de que cada operador en $\{P_t, t\in\mathbb{R}\}$ sea invertible resume el carácter *reversible* de cada uno de los movimientos que puede sufrir el sistema dinámico (1).

Ahora bien, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}H(\phi(t),\psi(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0,$$

donde todas las derivadas parciales del lado derecho han sido evaluadas en $(\phi(t),\psi(t))$. Así pues, *se conserva la energía total a lo largo de las trayectorias de este sistema dinámico.*

Para cada subconjunto de Borel B de Γ, sea P_tB su imagen bajo P_t, para cada $t \in \mathbb{R}$. El teorema de Liouville [Arnold,1978] asegura que

$$|P_tB| = |B| \quad \forall\ B \in B(\Gamma),$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{6N}$. Así pues, el flujo en Γ inducido por (1) es conservador también en este sentido: *el volumen en el espacio fase se conserva ante el flujo inducido por (1).*

Ahora bien, por la conservación de la energía total, el flujo puede ser restringido a cualquier hipersuperficie de energía constante, como $M_o := \{(q,p)\in\Gamma: H(q,p) = E_o\}$. Se puede dotar a M_o de una medida μ (definida en $B(M_o)$, los subconjuntos de Borel de M_o en la topología relativa como subconjunto de Γ) que se preserva por el flujo en M_o, e.d.

este requisito puede volver difícil la aplicación de este método. Sin embargo, cuando se le puede aplicar puede llevar a resultados sorprendentes.

Para ver lo anterior, observe que una sección de Poincaré L debe tener dimensión baja (digamos n) para permitir el análisis. Las coordenadas que identifican los puntos de L son los verdaderos observables, y es razonable esperar una pérdida substantial de información al pasar de una descripción en términos del espacio fase (o la variedad invariante M) a una descripción en términos de las secciones de Poincaré L or, más bien, de su intersección X con M. Sea como sea, el experimentador está obligado a aceptar tal estado de cosas.

Un observador, ignorante de la estructura dinámica subyacente dada por (1), observa x y de hecho su órbita completa (3). En realidad, el observador observa unicamente un número finito de elementos de tal órbita (digamos r de ellos), pero al menos en principio se puede concebir el observar la órbita completa. A menudo sucede que esta observación limitada (restringida a una sección de Poincaré) produce observaciones bastante irregulares, que dejan toda la impresión de azar.

Un enfoque utilizado a menudo en las ciencias físicas en estas situaciones consiste en partir X en subconjuntos, genericamente denotados por A, para luego calcular las frecuencias relativas

$$f_r(A) := \frac{\#\{i \le r:\ f^{(i)}x \in A\}}{r}$$

Es un hecho empírico el que, cuando r crece, los valores de $f_r(A)$ tienden a estabilizarse en torno a un valor fijo, que depende solamente de A, y al que se denotará por $\pi(A)$. Así pues, $\pi(A)$ es *la probabilidad de encontrar el sistema en alguna fase en A*, i.e.

$$\pi(A) = \lim_{r \to \infty} \frac{\#\{i \le r: f^{(i)}(x) \in A\}}{r}$$

Para cada $x \in X$, considérese la trayectoria correspondiente $t \mapsto P_t x$. Sea

$$\tau(x) := \inf \{t>0:\ P_t x \in X\}$$

y defínase $f: X \to X$ por

$$f(x) = P_{\tau(x)}(x),$$

siempre que $\tau(x) < +\infty$.

Supóngase por un instante que

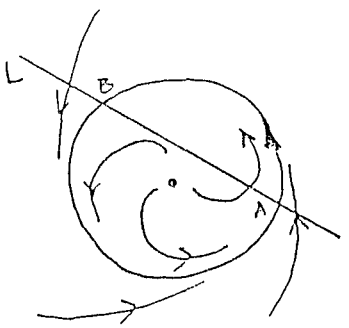
$$\tau(x) < +\infty \quad \forall x \in X, \tag{2}$$

de tal manera que f esté definida en todo X. Queda así definido un sistema dinámico en X, y la órbita de un elemento $x \in X$ es

$$x,\ f(x),\ f^{(2)}(x),\ \ldots \tag{3}$$

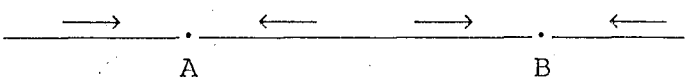
Para ilustrar lo anterior, considérese el sistema dinámico en $\mathbb{R}^2$ especificado por las ecuaciones diferenciales ordinarias en coordenadas polares

$$\dot{r} = r(1-r),\ \dot{\theta} = 1. \tag{4}$$



El retrato fase del sistema es muy fácil de construir: consta de un punto crítico inestable (el origen) y un ciclo límite estable (el círculo unitario). Sea L una línea recta cualquiera, transversal al círculo unitario (L es una sección de Poincaré).

La órbita de un punto arbitrario $p \in L$ es una sucesión de puntos en L, digamos $\{P_n\}$, con A y B como puntos límite.



Para aplicar el método, debe garantizarse la condición (2). Resulta evidente que garantizar (2) es no trivial, aún en los casos más simples, como el ejemplo anterior (4). En la práctica,

Para precisar las cosas, diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es *equidistribuida* en X si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i\le n : x_i \in [a,b]\}}{n} = b-a,$$

para todo subintervalo [a,b] de X.

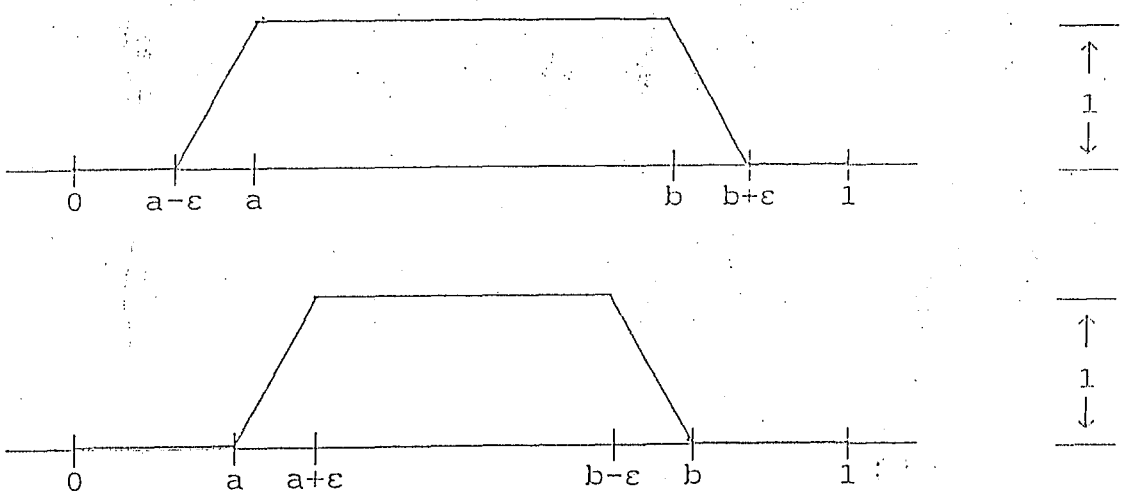
El siguiente resultado es caso particular de un teorema de Hermann Weyl [Cornfeld et al,1982, sec.7.2] y muestra que tales sucesiones en efecto existen. Su demostración ha sido adaptada de [Freiberger-Grenander, 1971].

Teorema.

Sea a un irracional positivo y sea $u_i=\{ia\}$, $i=0,1,2,\ldots$, donde $\{\cdot\}$ es la parte fraccionaria del argumento. Entonces $\{u_i\}$ es equidistribuida en X.

Demostración.

Elíjase un subintervalo [a,b] de X y sea χ su función característica. Fíjese $\varepsilon > 0$ tal que $0\le a-\varepsilon<a<a+\varepsilon<b-\varepsilon<b<b+\varepsilon\le 1$, y sean $\chi_\varepsilon^{\pm}$ dos funciones reales continuas en X, definidas por sus gráficas a continuación:



Entonces

$$\chi_\varepsilon^- \le \chi < \chi_\varepsilon^+ \text{ en } X$$

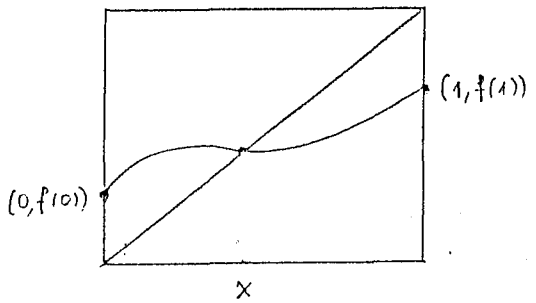
Si se repiten estas mediciones para cada conjunto A en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, de ello resultará un *espacio probabilistico*

$$(X, \mathcal{A}, \pi),$$

que constituye un modelo no determinístico para una tal situación. Y el experimentador que lo construyó permanecerá sin saber que a todo esto subyace una estructura determinística. Este puede muy bien ser el origen del azar en algunos casos, no necesariamente en todos.

4. Generación de números aleatorios.

Sea X el intervalo unitario y sea $f:X \longrightarrow X$ un sistema dinámico que actúa sobre X.



Un argumento topológico elemental muestra que, si f es continua, existe al menos un $x \in X$ tal que $f(x)=x$. Un tal x se llama un *punto fijo* de f.

Es bien sabido que tal punto fijo es único si f es una *contracción* de X. e.d. si

$$|f(x)-f(y)| \leq \alpha|x-y|$$

con $0 \leq \alpha < 1$. En tal caso el único punto fijo $z \in X$ es un *atractor global*. En otras palabras, para cada $x \in X$, la órbita correspondiente x, $f(x)$, $f^{(2)}(x)$,... converge a z.

Claramente un tal comportamiento no es exactamente lo que uno quisiera llamar aleatorio e.d. la órbita $\{f^{(n)}(x)\}$ no constituye una sucesión aleatoria, sea cual sea el concepto de azar utilizado. Intuitivamente, nos gustaría tener sistemas dinámicos f cuyas órbitas cubren todo X, si es posible de manera uniforme; ciertamente podría pensarse en decir que tales órbitas sí constituyen *sucesiones aleatorias*.

la órbita de $a\in[0,1]$ es precisamente $\{\{ia\}, i=0,1,2,\ldots\}$, por lo que es una sucesión aleatoria ya que llena el intervalo unitario de manera uniforme e.d. la órbita es equidistribuida ahí.

Sin embargo, tal comportamiento podría no ser suficientemente errático para calificarlo de aleatorio, si esta última propiedad se entiende en el sentido de *ausencia de cualquier comportamiento sistemático*. Para ver lo anterior, considérese el siguiente ejemplo, tomado de [Knuth, 1981]: sean $\{U_k\},\{V_k\}$ equidistribuidas en $[0,1]$ y constrúyase la nueva sucesión

$$\frac{1}{2}U_0, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}V_0, \frac{1}{2}U_1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}V_1, \ldots$$

La subsucesión $\{\frac{1}{2}U_k\}$ es equidistribuida en $[0,{}^1/_2]$ mientras que $\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}V_k\}$ es equidistribuida en $[{}^1/_2,1]$, por lo que la sucesión combinada es equidistribuida en $[0,1]$. Sin embargo, sus elementos saltan del subintervalo izquierdo al derecho y viceversa, por lo que no podemos llamarla "aleatoria". Es claro entonces que una sucesión debe ser más que equidistribuida para que se le pueda llamar "aleatoria". Siguiendo a [Knuth, 1981], introduzcamos los siguientes conceptos:

<u>Definición</u>.

Sea $\{U_i\}$ una sucesión en $[0,1]$, $k \geq 1$.

a) $\{U_i\}$ es *k-equidistribuida* if

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i\leq n: U_{i+j}\in[a_j,b_j], j=0,1,\ldots,k-1\}}{n} = \prod_{j=0}^{k-1}(b_j-a_j),$$

para cualquier elección de $0\leq a_j<b_j\leq 1$, $j=0,1,\ldots,k-1$.

b) $\{U_i\}$ es *aleatoria* si es k-equidistribuida para cada $k\geq 1$.

Hay sistemas dinámicos simples que tienen órbitas aleatorias en el sentido anterior. Por ejemplo, el siguiente resultado afirma que, para casi todo $\theta>1$, la órbita de $\{\theta\}\in[0,1]$ bajo $f(x) = \theta x$ (mod.1) es aleatoria:

Nótese que el carácter equidistribuido de $\{u_i\}$ equivale a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi(u_k) = \int_0^1 \chi(u)\,du.$$

Nótese también que si una tal relación valiera para toda f continua, digamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(u)\,du$$

entonces valdría también para las dos funciones $\chi_\varepsilon^{\pm}$, para cualquier $\varepsilon>0$, y tomando el límite cuando $\varepsilon\longrightarrow 0$ se establecería su validez también para χ. Por otro lado, toda función continua f es el límite uniforme de polinomios trigonométricos [Weiss,1965], por lo que basta con probar la propiedad en cuestión para f de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{2\pi ikx}, \quad x \in X.$$

Notando que, para tal f,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i(ja)k} = \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(e^{2\pi kia}\right)^j$$

y tomando en cuenta que a es irracional, se obtiene finalmente que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \frac{1}{n} \frac{1 - e^{2\pi inka}}{1 - e^{2\pi ia}} \cdot e^{2\pi ika} \longrightarrow 0 \text{ as } n \longrightarrow \infty.$$

Por otro lado

$$\int_0^1 f(u)\,du = \sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^1 e^{2\pi iku}\,du = 0$$

lo que prueba el resultado. ∎

Un sistema dinámico que tiene como órbita la sucesión anterior es

$$f(x) = x + a \pmod 1;$$

De acuerdo con la teoria molecular, el fluido que rodea la partícula consiste de un número en extremo grande de partículas más ligeras (sus moléculas), que se mueven constantemente y chocan con la partícula que se difunde: cada colisión altera el momento lineal de la partícula pesada y así contribuye a determinar su trayectoria. Además, el fluido actúa sobre la partícula para contrarrestar su movimiento, e.d. se manifiesta bajo la forma de una fuerza de fricción.

Para simplificar las cosas, descompongamos el movimiento de la partícula en tres direcciones ortogonales y analicemos el movimiento en una de estas direcciones solamente. Denotemos la posición de la partícula mediante x, y mediante v su velocidad; sea $\phi(v)$ la fuerza de fricción en la dirección x cuando la partícula se mueve con velocidad v. Claramente $\phi(0)=0$.

En el espíritu de la Mecánica Estadística, simplifiquemos aún más las cosas reemplazando el "baño térmico" constituido por las moléculas del fluido mediante un término aleatorio, con las properties del ruido blanco gaussiano de amplitud σ. Entonces, en la notación del cálculo de Ito [Schuss,1980] la Segunda Ley de Newton se expresa como

$$dv = \phi(v)dt+\sigma dW, \tag{1}$$

donde $(W(t),t\geq 0)$ es un proceso de Wiener estándar unidimensional y hemos tomado como 1 la masa de la partícula [compare con la ec. (1.4)]. Finalmente, la cinemática de la situación dice que

$$dx = vdt. \tag{2}$$

Supongamos que ϕ es suficientemente regular como para garantizar la existencia de una única solución $((x(t),v(t)),0\leq t\leq T)$ de (1), (2) para fase inicial (x_0,v_0). Esto sucede si, por ejemplo

$$\phi(v) = -\beta v,$$

que por cierto es el término de fricción considerado en el

Teeorema [Franklin, 1963]

Para cada $\theta>1$, sea $U_n = \theta^n (mod. 1)$. Entonces $\{U_n\}$ es aleatoria θ - c.s. con respecto a la medida de Lebesgue. Además, $\{U_n\}$ es aleatoria sólo si θ es un número trascendente.

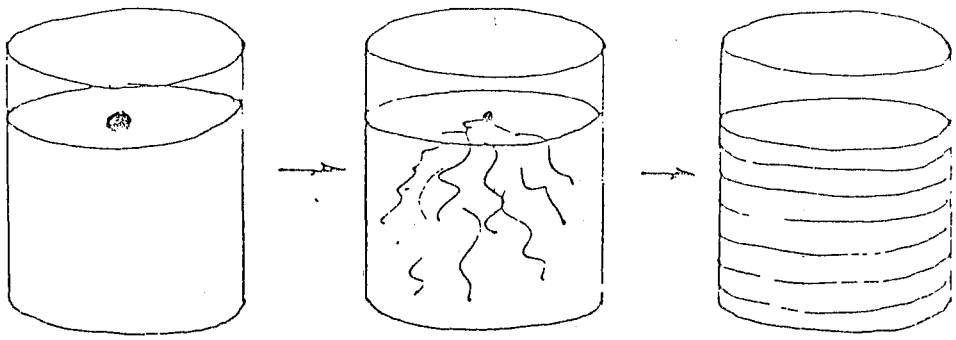
Así pues, *con probabilidad uno* las sucesiones correspondientes a $\{\pi^n\}$, etc. son aleatorias. Sin embargo, no hay ninguna certidumbre acerca de su carácter aleatorio o falta del mismo. Un algoritmo explícito que produce sucesiones aleatorias se da en [Knuth, 1965].

Hay muchos algoritmos sencillos y computacionalmente eficientes que se usan para generar "números aleatorios", y todos comparten la siguiente estructura: hay un sistema dinámico $f:X \longrightarrow X$, y se genera una "sucesión aleatoria" de longitud deseada simplemente eligiendo una "semilla" $x \in X$ y calculando tantos elementos de su órbita $\{f^{(n)}(x)\}$ como se requieran. Véase [Knuth, 1981]. El entrecomillado busca reflejar el hecho de que las sucesiones que resultan con frecuencia no son aleatorias en el sentido precisado arriba, pero sí son k-equidistribuidas para algún $k \geq 1$ (a menudo $k=2$).

Los comentarios anteriores ilustran el hecho de que los sistemas dinámicos caóticos se pueden usar con objeto de generar azar en la línea real. La siguiente sección mostrará que también pueden usarse para generar azar en un espacio de funciones.

5. Fluctuaciones térmicas.

Regresemos al estudio de los sistemas de partículas usando los métodos de la Mecánica Clásica, con objeto de modelar la difusión de una partícula "pesada" en el interior de un fluido.



fluctuación térmica a la intensidad de la disipación es

$$\sigma^2=2\beta kT, \tag{5}$$

donde k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. Entonces, (4a) se transforma en

$$C(t) = \begin{bmatrix} 2kTt & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{4b}$$

Entonces, asintóticamente las dos componentes del proceso O-U son independientes y gaussianas, con varianzas 2kTt (la posición) y σ^2 (la velocidad). En otras palabras, la distribución límite de la velocidad es la de Maxwell, y el análogo para la posición es la distribución que predice la teoría de Einstein-Smoluchowski del movimiento browniano [Ingarden, 1986], [Einstein,1956].

En un instante cualquiera, la trayectoria del proceso O-U llena todo el espacio fase de la partícula browniana, por lo que ciertamente se trata de un sistema físico aleatorio. A continuación veremos que este sistema aleatorio se puede realizar como la salida de un sistema dinámico caótico.

Para ello, y en el espíritu de la discusión que condujo a (1.4), sigamos a [Beck-Roepstorff, 1987] y consideremos el proceso O-U como la evolución temporal de aquellas variables dinámicas que varían lentamente (la fase de la partícula pesada), mientras que hay una escala temporal τ (mucho más pequeña) que da la evolución de las variables rápidas restantes. Esta escala temporal microscópica correspondería al tiempo medio entre colisiones de la partícula pesada con las moléculas en el baño térmico.

Sea (ξ_t) una sucesión estacionaria de variables aleatorias con media cero y varianza σ^2, definidas en un espacio probabilístico común $(X,\mathcal{A},\mu)$. Supóngase que la partícula recibe en cada instante $n\tau$ $(n=0,1,2,\ldots)$ un impulso de magnitud $\sqrt{\tau}\,\xi_n$. Al tiempo t, habrán ya ocurrido $[t/\tau]$ impactos y el impulso total recibido será entonces

tratamiento original de Langevin: la ecuación (1) se transforma en

$$dv = -\beta v dt + \phi dW. \tag{3}$$

La solución del par (2), (3) correspondiente a una fase inicial (x_o, v_o) se llama el modelo de Ornstein-Uhlenbeck para el movimiento browniano- brevemente, el *proceso O-U*.

Un cálculo fácil muestra que tal proceso está dado por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) \\ 0 & e^{-\beta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_o \\ v_o \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{\beta}\left(1-e^{-\beta(t-s)}\right) \\ \sigma e^{-\beta(t-s)} \end{bmatrix} dW(s),$$

y las propiedades elementales de la integral estocástica [Schuss, 1980] muestran que

i) el proceso O-U es gaussiano

ii) su media es

$$\begin{bmatrix} x_o + \frac{v_o}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) \\ v_o\, e^{-\beta t} \end{bmatrix}$$

iii) su matriz de covarianza es

$$C(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{\beta^2}\left(e^{-\beta t}-1 + 2\beta t\right) & \sigma^2\left(1-e^{-2\beta t}\right) \\ \sigma^2\left(1-e^{-\beta t}\right) & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Véase [Doob, 1942], también [Nelson, 1967] para estos resultados, que originalmente fueron obtenidos en [Ornstein-Uhlenbeck, 1930] y también en otras fuentes.

Para t grande,

$$C(t) \sim \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{\beta} t & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{4a}$$

La fórmula de Einstein que relaciona la amplitud de la

$$x_{n+1} = Q(x_n) \tag{8b}$$

El par de ecuaciones (8) constituye un sistema dinámico que actúa on el espacio $X \times \mathbb{R}$. Nótese que no hay nada aleatorio en él, y sin embargo vale la siguiente afirmación:

<u>Teorema</u> [Beck-Roepstorff, 1987].
Bajo ciertas "condiciones técnicas" sobre f y Q,

$$S(t) := \sqrt{\tau} \sum_{n=0}^{[t/\tau]} f(X_{n+1}) \Rightarrow \sigma W(t)$$

para $t \in [0,T]$, *donde* "$\Rightarrow$" *denota la convergencia débil y*

$$\sigma^2 := E\ \xi_o^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_o \xi_n)$$

El resultado anterior nos permite usar el sistema dinámico (8) para generar (aproximaciones de) las trajectories del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (1), (2). De esta manera hemos construido un generador (determinístico ciertamente) de funciones aleatorias. Para implementarlo, basta tomar cualquier sistema dinámico caótico, tal como

$$f(x) = 2x^2 - 1 \text{ on } [-1,+1],$$

que tiene una medida invariante μ dada por

$$\mu(A) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

suponiendo que dicho sistema satisfaga "condiciones técnicas" mencionadas arriba. Véase [Beck-Roepstorff,1987] para los detalles.

BIBLIOGRAFIA.

Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer Verlag, Berlin, 1978.

Beck, C. & G. Roepstorff, "From Dynamical Systems to the Langevin Equation", *Physica* 145A (1987), 1-14.

Brush, S. G., *The Kind of Motion we Call Heat*, (2 vols), North

$$S_\tau(t) = \sqrt{\tau} \sum_{n=0}^{[t/\tau]} \xi_n$$

La Segunda Ley de Newton se expresa como

$$dv = \phi(v)dt + dS_\tau(t)$$

-compare con la ecuación nolineal de Langevin (1).

Sea $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ igual a ξ_o y supongamos que μ es de hecho su distribución. El carácter estacionario de $\{\xi_n\}$ es equivalente a la invariancia de μ bajo alguna transformación $\mathcal{A}$-medible $Q:X \longrightarrow X$, e.d.

$$\mu \circ Q^{-1} = \mu. \tag{6}$$

Además, $\xi_{n+1} = \xi_n \circ Q$, por lo que $\xi_n(x) = f(Q^n x)$, véase [Hida, 1970]. Sea $x_n := Q^n x_o$, $n = 0,1,2,\ldots$

Por otro lado, entre dos impactos sucesivos, digamos para $n\tau \leq t < (n+1)\tau$, $n=0,1,2,\ldots$ la velocidad de la partícula evoluciona de acuerdo con

$$\dot{v} = \phi(v) \quad , \quad , v(n\tau) = v_n \tag{7}$$

Sea $g(t,v_o)$ la solución sobre $[0,\tau]$ de (7) para $n=0$. Entonces, la invarianza temporal de la ecuación diferencial en (7) nos permite decir que

$$\lim_{t \longrightarrow (n+1)\tau} v(t) = g(\tau, v_n)$$

Al final del n^{simo} periodo, la partícula sufre la $(n+1)^{esima}$ colisión, de la que obtiene un impulso adicional de magnitud $\sqrt{\tau}\, f(x_{n+1})$. Por ello la Segunda Ley de Newton se escribe ahora como

$$v_{n+1} = g(\tau, v_n) + \sqrt{\tau}\, f(x_{n+1}) \tag{8a}$$

donde

Nelson, E., *Dynamical Theories of Brownian Motion,* Princeton University Press, Princeton NJ, 1967.

Rosenblatt, M., *Markov Processes: Structure and Asymptotic Behaviour,* Springer Verlag, New York, 1971.

Schuss, Z., *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations,* John Wiley & Sons, New York, 1980.

Siljak, D. D., *Large Scale Dynamical Systems: Stability and Structure,* North Holland, Amsterdam, 1978.

Taylor, T. J. S., *On observations of chaotic dynamical systems and randomness*, manuscrito 1987.

Thompson, C. J., *Mathematical Statistical Mechanics*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1972.

Uhlenbeck, G. E. & L. S. Ornstein, "On the Theory of the Brownian Motion", Phys. Rev., vol. 36 (1930), 823-841, reprinted in [Wax, 1954].

Wax, N. (ed), *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, Dover, Inc., New York, 1954.

Weiss, G., "Harmonic Analysis", pp. 124-178 of I. I. Hirschman, Jr. (ed), *Studies in Real and Complex Analysis,* The Mathematical Association of America, 1965.

Holland Publishing Co., Amsterdam, 1976.

Cornfeld,I.P., S.V.Fomin & Ya.G.Sinai,*Ergodic Theory*, Springer Verlag, Berlin,1982.

Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison Wesley, Reading MA, 1987.

Doob, J. L., "The Brownian Movement and Stochastic Equations", *Ann. Math.*, Vol. 43 (1942), 351-369, reimpreso en [Wax, 1954].

Ehrenfest, P. & T. Ehrenfest, *The Conceptual Foundation of the Statistical Approach in Mechanics*, Cornell University Press, Ithaca NY, 1959.

Einstein, A., *Investigation on the Theory of the Brownian Motion.* Dover, Inc., New York, 1956.

Franklin, J. N., *Math. Comp.* 17 (1963), 28-59.

Freiberger, W. & U. Grenander, *A Short Course in Computational Probability and Statistics,* Springer Verlag, New York, 1971.

Galgani, L., C. Angaroni, L. Forti, A. Giorgilli & F. Guerra, *Classical Electrodynamics as a Nonlinear Dynamical System,* manuscrito (1988).

Hernández, D. B., "Model Structure Simplification" pp. 3079-3082 of M. G. Singh (ed), *Systems and Control Encyclopedia: Theory, Technology, Applications,* Pergamon Press, Oxford, 1987.

Hida, T., *Stationary Stochastic Process*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1970.

Ingarden, R. S. (ed.), *Marian Smoluchowski: his Life and Scientific Work*, Polish Academy of Science/Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1986.

Kac, M., *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Interscience Publishers, New York, 1959.

Kalman, R. E., P. L. Falb & M. Arbib, *Topics in Mathematical System Theory,* Mc Graw Hill Book, New York, 1969.

Khinchin, A. I., *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics,* Dover Inc., New York, 1949.

Knuth, D. E., BIT 5 (1965), 246-250.

Knuth, D. E., *Seminumerical Algorithms,* Addison Wesley Co., Reading MA, 1981.