APUNTES DE MECANICA

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en Matemáticas
diciembre 1987

40

40

INDICE

Descripción del curso MECANICA **MEC 201** agosto - diciembre 1987
Profesor: Alfinio Flores Peñafiel

Contenido:

0. Vectores
Suma de vectores
Productos de vectores: producto escalar, producto vectorial
[Berkeley cap. 2]

1. Aplicaciones de la mecánica a la geometría
1.1 La composición de fuerzas.
1.2 El postulado del movimiento perpetuo.
[Kogan cap. 1 - 2]

2. Los principios de la mecánica
2.1 La palanca.
2.2 El centroide de un triángulo. El área de la parábola.
2.3 El plano inclinado.
[Schiffer y Bowden cap. 1, Pólya cap. 2]

3. Cinemática
3.1 Velocidad y aceleración
3.2 Movimiento rectilíneo - aceleración constante
3.3 Movimiento en un plano
3.4 Velocidad relativa
[Burghes y Downs cap. 2]

4. Leyes de movimiento de Newton
4.0 Sistema internacional de unidades
4.1 Fuerzas y ecuaciones de movimiento
4.2 Ley de la gravitación universal
[Burghes y Downs cap. 3, Berkeley cap. 3]

5. Campos de fuerza
5.1 Movimiento de una partícula en un campo gravitacional uniforme
[Burghes y Downs cap. 5, Berkeley cap.3]

6. Teoremas de conservación
6.1 Momento lineal
6.2 Momento angular
6.3 Trabajo
6.4 Fuerzas conservativas
6.5 Energía potencial
6.6 Conservación de la energía
[Burghes y Downs cap. 6, Berkeley cap. 5-6]

7. Dinámica del espacio
7.1 Cónicas
7.2 Movimiento planetario
[Burghes y Downs cap. 7, Berkeley cap. 9]

9. Oscilaciones y vibraciones
9.1 Movimiento armónico simple
9.2 Péndulo simple
9.3 Resortes
[Burghes y Downs cap. 9, Berkeley cap. 7]

Calificación:
Exámenes parciales 40%
Laboratorio 20% (es necesario aprobar el laboratorio para aprobar el curso)
Reseña de libro 10%
Examen final 30%

1. Aplicaciones de la mecánica a la geometría

1.1 La composición de fuerzas.

1.2 El postulado del movimiento perpetuo.

1.1 La composición de fuerzas [Kogan cap. 1]

Principales suposiciones

1. La **fuerza** es un vector y se caracteriza por una magnitud, una dirección y un punto de aplicación. La línea a lo largo de la cual actúa una fuerza se llama su **línea de acción**.

2. Un cuerpo que no se deforma, esto es, que siempre conserva su forma y tamaño, se llama **rígido**.
De hecho todo cuerpo puede ser deformado en cierto grado, pero estas deformaciones son tan pequeñas que pueden ser despreciadas. El concepto de cuerpo rígido es una idealización.

3. Una colección de fuerzas que actúan en un cuerpo se llama un **sistema de fuerzas**. Un sistema de fuerzas se dice que está en **equilibrio** o que es **un sistema de equilibrio** si no se produce ningún movimiento cuando se aplica a un cuerpo rígido en reposo.

4. Dos sistemas de fuerzas son **equivalentes** si producen el mismo movimiento al ser aplicados a un cuerpo rígido.
De esta definición se sigue que para todo fin práctico, un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser sustituído por cualquier sistema equivalente sin alterar la discusión.

5. Si un sistema de fuerzas es equivalente a una sola fuerza **R**, decimos que la fuerza **R** es la **resultante** del sistema.
Nota que cada sistema de fuerzas tiene una resultante.

Además de los conceptos anteriores usaremos las siguientes reglas (axiomas) de la estática.

Regla 1. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan en el mismo punto tienen una resultante **R** que actúa en el mismo punto y que se representa por la diagonal del paralelogramo que tiene las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como lados adyacentes.
Esta construcción se llama la ley del paralelogramo para fuerzas.
Esta regla permite cambiar las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ por la fuerza **R**, y al revés, cambiar una fuerza **R** por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. En el primer caso se trata de la composición de fuerzas, y en el segundo, de la descomposición de la fuerza **R** en los componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. (Esta descomposición se puede

realizar de un número infinito de maneras, ya que es posible construir un número infinito de paralelogramos con una diagonal **R**.)

Regla 2. Si añadimos un sistema de equilibrio a un sistema de fuerzas, o si quitamos un sistema de equilibrio a un sistema de fuerzas, el sistema resultante será equivalente al sistema original.
En particular esto implica que una colección de sistemas de equilibrio es un sistema de equilibrio.

Regla 3. Dos fuerzas están en equilibrio si y sólo si tienen la misma magnitud, direcciones opuestas y una línea de acción común.

Regla 4. Una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser arbitrariamente desplazada a lo largo de su línea de acción.

En otras palabras si las fuerzas **F** y **F'** tienen la misma magnitud y dirección y tienen una línea de acción común, entonces son equivalentes. El converso es también cierto: si las fuerzas **F** y **F'** son equivalentes, entonces tienen la misma magnitud y dirección y una línea de acción común.
La regla 4 implica que para fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, el punto de aplicación no importa; es la línea de acción la que determina la fuerza resultante.
La regla 4 nos permite sumar fuerzas cuyos puntos de aplicación sean diferentes con tal de que sus líneas de acción se intersecten. Supón que queremos sumar las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$. (fig 1) Podemos trasladar las fuerzas al punto O y usar la regla 1 para obtener la resultante **R** de las fuerzas $\mathbf{F'_1}$ y $\mathbf{F'_2}$ completando el paralelogramo.

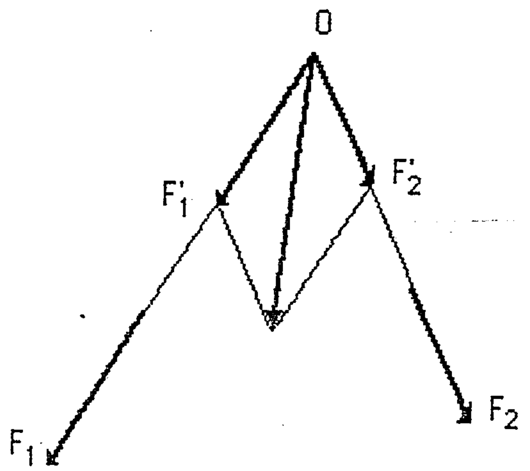


Figura 1

De las reglas 3 y 4 obtenemos la siguiente importante proposición:

Proposición 1. Si tres fuerzas no paralelas y coplanares están en equilibrio, entonces sus líneas de acción se intersectan en un sólo punto.

Demostración. Supón que las fuerzas $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ y $\mathbf{P_3}$ están en equilibrio. (fig 2) Trasladando las fuerzas $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ al punto O, podemos obtener la resultante $\mathbf{R_{12}}$. Las fuerzas $\mathbf{P_3}$ y $\mathbf{R_{12}}$ están en equilibrio. Pero esto sólo es posible si tienen una línea de acción común. Entonces la línea de acción de $\mathbf{P_3}$ pasa por el punto O, esto es, las líneas de acción de las tres fuerzas se encuentran en este punto. □

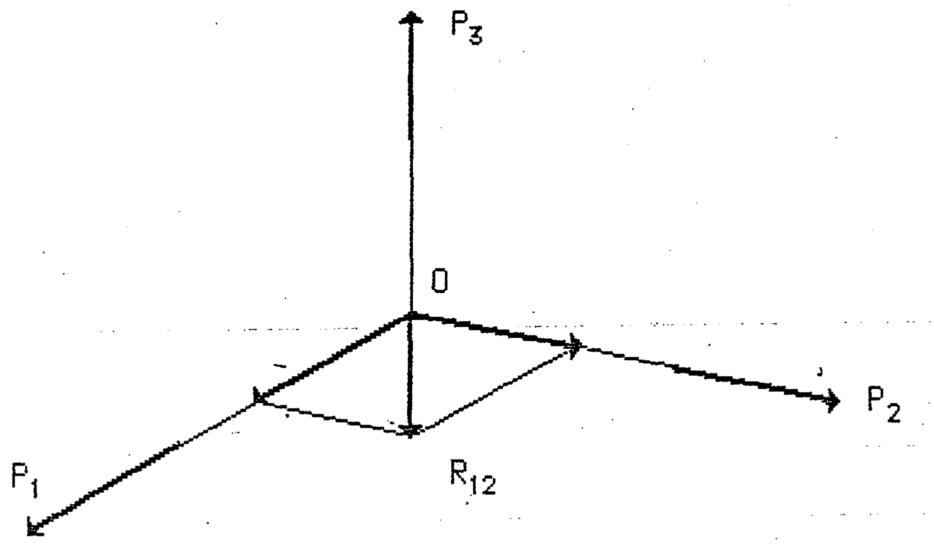


Figura 2

Usando esta proposición, probaremos algunos teoremas de geometría.

Teorema sobre las bisectrices de un triángulo

Teorema 1. Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se intersectan en un punto.

Consideremos seis fuerzas iguales $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_6}$ actuando a lo largo de los lados de un triángulo, como se muestra en la figura 3. Como estas fuerzas se cancelan mutuamente por pares, están en equilibrio, y por tanto las resultantes $\mathbf{R_{16}}, \mathbf{R_{23}}$ y $\mathbf{R_{45}}$ también están en equilibrio. Pero las fuerzas $\mathbf{R_{16}}, \mathbf{R_{23}}$ y $\mathbf{R_{45}}$ están dirigidas a los largo de las bisectrices de los ángulos interiores en A, B y C. (Los paralelogramos son rombos y la diagonal es la bisectriz del ángulo.) □

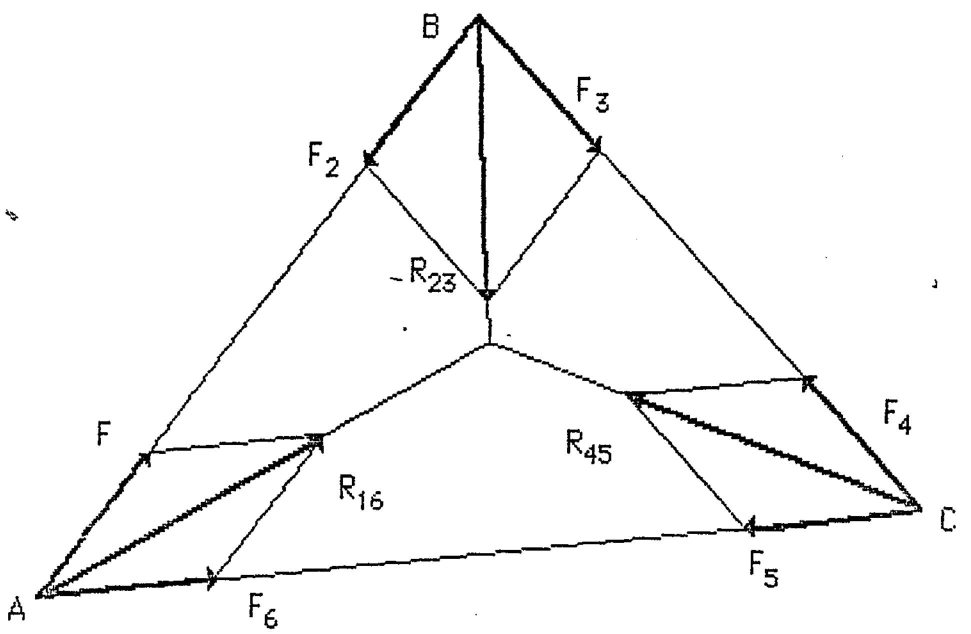


Figura 3

Otro teorema sobre las bisectrices de un triángulo

Teorema 2. Las bisectrices de dos ángulos exteriores y de un ángulo interior de un triángulo se intersectan en un punto.

Considera las seis fuerza iguales $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_6}$ mostradas en la figura 4. Estas fuerzas están en equilibrio ya que cada uno de los tres pares de fuerzas, tomadas consecutivamente alrededor del triángulo están en equilibrio. Pero la resultante de las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_6}$ está dirigida a lo largo de la bisectriz del ángulo exterior A, y la resultante de $\mathbf{F_4}$ y $\mathbf{F_5}$ está dirigida a lo largo de la bisectriz del ángulo exterior C. La resultante de $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_3}$ está dirigida a lo largo de la bisectriz del ángulo interior B. □

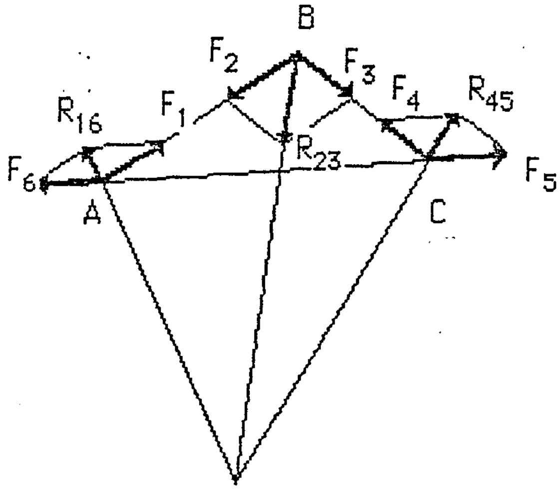


Figura 4

Teorema sobre las alturas de un triángulo.

Teorema 3 Las alturas de un triángulo se intersectan en un solo punto.

La figura 5 representa un triángulo ABC, con las fuerzas $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_6}$ actuando a lo largo de sus lados. Se han escogido las fuerzas de modo que se satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_2 = F \cos C \\
F_3 &= F_4 = F \cos B \qquad (1) \\
F_5 &= F_6 = F \cos A
\end{aligned}
$$

donde F es una unidad de fuerza. (Nota que usamos la convención que si $\mathbf{F}$ denota un vector, F es su magnitud.) Como las fuerzas $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_6}$ están en equilibrio, las líneas de acción de las resultantes $\mathbf{R_A}$, $\mathbf{R_B}$ y $\mathbf{R_C}$ mostradas en la figura se deben intersectar. Veamos la dirección de las resultantes.

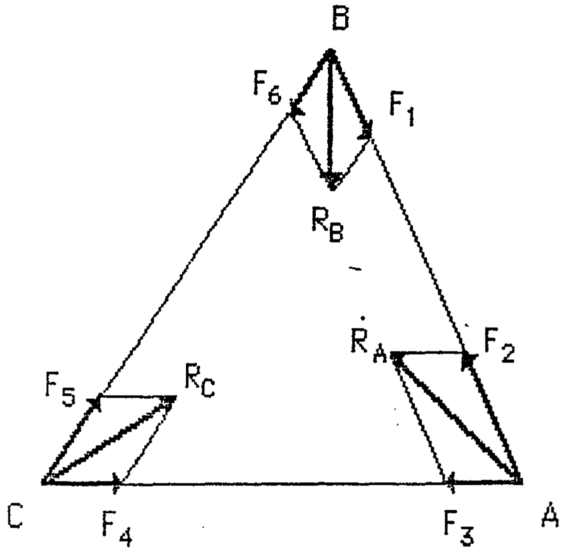


Figura 5

Por ejemplo, sumemos las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_6}$ que actúan en el vértice B (fig. 6).

Para hacer esto, descompongamos estas fuerzas en dos componentes, una paralela la lado AC y otra perpendicular a éste. La primera componente la llamaremos horizontal, y a la segunda, vertical.

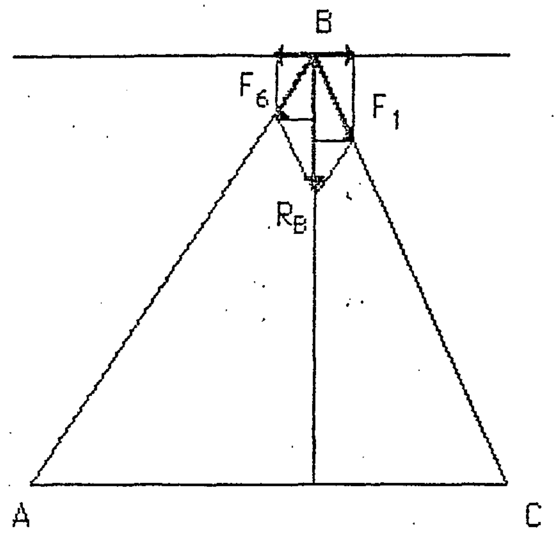


Figura 6

De la figura 6 es claro que las magnitudes de las componentes horizontales de las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_6}$ son iguales a F_1 cos C y F_6 cos A. Pero de (1) se sigue que

$$F_1 / F_6 = \cos A / \cos C$$

De donde

$$F_1 \cos C = F_6 \cos A.$$

Así, las componentes horizontales de las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_6}$ se cancelan y por tanto la resultante de las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_6}$ es perpendicular al lado AC. Por lo tanto la fuerza $\mathbf{R_B}$ está dirigida a lo largo de la altura perpendicular a AC.

Análogamente, podemos deducir que las fuerzas $\mathbf{R_C}$ y $\mathbf{R_A}$ están dirigidas a lo largo de las otras alturas del triángulo ABC. De aquí se sigue el resultado. □

Un teorema sobre las medianas de un triángulo.

Teorema 4. Las medianas de un triángulo se intersectan en un solo punto.

Considera las fuerzas $F_1, F_2, \ldots, F_6$ que actúan como se muestra en la figura 7. Supón que cada una de estas fuerzas tiene magnitud igual a un medio de la longitud del lado correspondiente del triángulo. Entonces la resultante de las fuerzas F_1 y F_6 estará representada por la mediana dibujada al lado BC; la resultante de las fuerzas F_2 y F_3 estará representada por la mediana dibujada al lado AC; y la resultante de las fuerzas F_4 y F_5 estará representada por la mediana dibujada al lado AB, ya que se forman triángulos semejantes por los paralelogramos de fuerzas mostrados en la figura 7. Las fuerzas $F_1, F_2, \ldots, F_6$ están en equilibrio y de aquí se sigue la conclusión. □

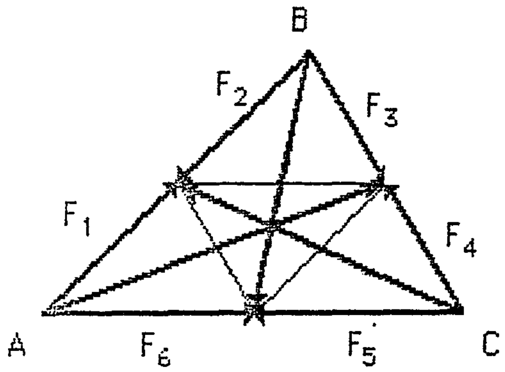


Figura 7

EL POSTULADO DEL MOVIMIENTO PERPETUO (Kogan cap. 2)

Es posible probar ciertos teoremas geométricos usando el postulado que el movimiento perpetuo es imposible. En este capítulo se demostrarán varios teoremas de este tipo.

1.2 El momento de fuerza

Además del postulado de la imposibilidad del movimiento perpetuo, necesitaremos la ley de momentos. Enunciaremos primero esta ley.
Supón que un cuerpo está bajo la influencia de una fuerza **F** y que puede rotar alrededor del eje z. El movimiento rotatorio causado por una fuerza **F** está determinado por su **momento** con respecto al eje z. Para calcular este momento, descomponemos la fuerza **F** en componentes **F'** y **F''**, con la primera componente sobre un plano perpendicular al eje z, y la segunda paralela al eje. El movimiento rotacional causado por la componente **F''** es claramente igual a cero. La acción rotacional de la componente **F'** se mide por el producto del vector **F'** por el escalar d, donde d es la distancia entre el eje z y la línea de acción de la fuerza **F'**. Este producto, denotado por F'd, es a veces llamado la torca, y en este texto será llamado el momento de la fuerza **F** con respecto al eje z.
Como la fuerza F' es la proyección de la fuerza **F** sobre el plano P, podemos dar la siguiente definición de momento:
Definición. El momento de la fuerza **F** con respecto al eje z es el producto F'd, donde **F'** es la proyección de la fuerza **F** sobre el plano perpendicular al eje z, y d es la distancia entre el eje z y la línea de acción de la proyección F'.
Así,

$$M_z(\mathbf{F}) = \mathbf{F}'d$$

donde $M_z(\mathbf{F})$ es el momento de la fuerza **F** con respecto al eje z.
Se sigue de esta definición que el momento de fuerza es igual a cero en sólo dos casos: cuando la línea de acción de la fuerza intersecta al eje z, o cuando es paralela a este eje.
Si, como frecuentemente ocurre, la fuerza **F** tiene una línea de acción que está sobre un plano perpendicular al eje z, entonces **F'** = **F** y por tanto

$$M_z(\mathbf{F}) = \mathrm{F}d$$

En este caso la distancia d se llama el brazo de la fuerza F.
Asignamos un signo al momento de fuerza. Para este propósito designamos una de las direcciones de rotación como positiva y la otra negativa.

Entonces, si la fuerza tiende a rotar el cuerpo en la dirección positiva, consideramos el momento positivo, y en caso opuesto como negativo. Por tanto podemos escribir

$$M_z(F) = \pm Fd$$

donde el signo está determinado por la dirección de la rotación.

Se necesitarán las siguientes dos reglas:

Regla 1. Si **R** es la resultante del sistema ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$), el momento de fuerza R es igual a la suma vectorial de los momentos individuales de las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$.
Esta regla se puede escribir en la forma

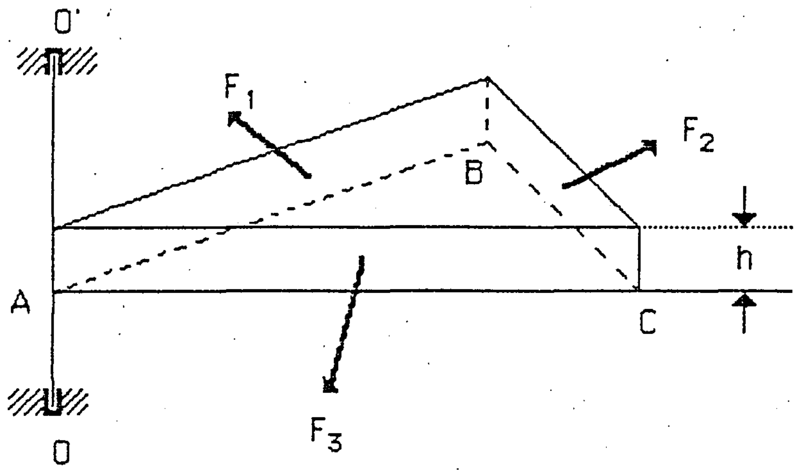
$$M_z(\mathbf{R}) = M_z(\mathbf{F}_1) + M_z(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_z(\mathbf{F}_n),$$

Donde $M_z(\mathbf{R})$ denota el momento de la fuerza **R** con respecto al eje z.
Esta proposición se conoce como el teorema de Varignon.

Regla 2. (Ley de momentos) Supón que un cuerpo rígido puede rotar alrededor de un eje fijo. Para que las fuerza que actúan sobre él no causen rotación, es necesario y suficiente que la suma vectorial de sus monetos sea igual a cero.
(En otras palabras, el momento de las fuerzas que tienden a rotar el cuerpo en la dirección positiva debe tener la misma magnitud que el momento de la fuerzas que tienden a rotarlo en la dirección negativa.)

Teorema de Pitágoras

Considera un prisma triangular cuya base es el triángulo rectángulo ABC. Llenamos el recipiente con gas y permitimos que rote alrededor del eje vertical OO'.



Como el movimiento perpetuo es imposible, el recipiente mantendrá su estado inicial de reposo, y las fuerzas causadas por el gas en las paredes laterales del recipiente deben estar en equilibrio. Cada una de estas fuerzas tiende a rotar el recipiente alrededor del eje OO': Las fuerzas F1 y F2 en sentido contrario a las manecillas del reloj, F3 en el sentido de las manecillas. Por tanto la suma de los momentos rotacionales de las fuerzas F1 y F2 deben igualar el momento rotacional de la fuerza F3. Como los brazos de estas fuerzas son iguales a AB/2, BC/2 y AC/2 respectivamente, podemos usar las fórmulas para los momentos rotacionales para obtener:

$$F1 * AB/2 + F2 * BC/2 = F3 * AC/2$$

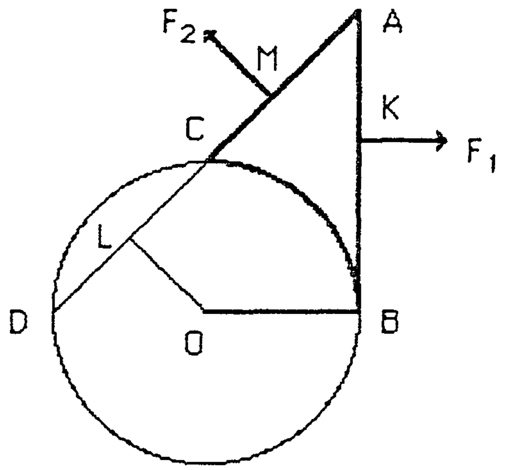
Como $F1 = p(AB * h)$
$F2 = p(BC * h)$
$F3 = p(AC * h)$

Donde p es la presión del gas y h la altura del prisma. Sustituyendo, y simplificando se obtiene

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

TEOREMA SOBRE TANGENTES Y SECANTES

Supón que un recipiente lleno de gas tiene una base cuya forma es la figura ABC. La figura se muestra vista desde arriba, el plano ABC es horizontal.



El recipiente tiene altura h. Supón que el recipiente está fijo a la varilla BO, y que esta varilla está fija al eje vertjcal O de modo que el recipiente puede rotar alrededor de este eje. El recipiente permanece en reposo y la suma de los momentos actuando sobre las paredes es cero. Sólo las fuerza F1 y F2 sobre las paredes AB y AC producen momentos rotacionales. Como estos son de signos opuestos y los brazos son iguales a BK y LM, sabemos

$F1 * BK = F2 * LM$

Como $BK = AB/2$ y $LM = (LC + LA)/2 = (LD + LA)/2 = AD/2$

Por lo tanto $F1 * AB = F2 * AD$

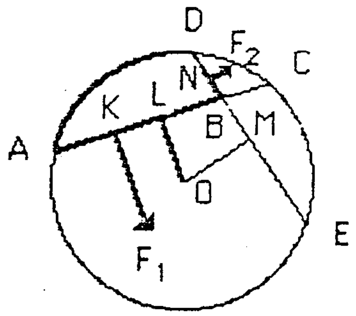
Se tiene también que $F1 = p\,(AB * h)$ y $F2 = p(AC * h)$
de donde $p(AB*h)\,AB = p(AC * h)\,AD$

o sea $AB = AC * AD$

Esta ecuación expresa el teorema: El cuadrado de la tangente a un círculo desde un punto es igual al producto de la secatante desde ese punto por la parte externa de la secante.

TEOREMA SOBRE CUERDAS QUE SE INTERSECTAN EN UN CIRCULO

Sea un recipiente en forma de prisma con base ABD y altura h lleno de gas, sujeto a la varilla LO que puede girar libremente alrededor del eje O.



Como el recipiente permanece en reposo, los momentos rotatorios de las fuerzas F1 y F2 son de signos contrarios y de igual magnitud

De donde

F1 * KL = F2 *MN

KL = AL - AK = AC/2 - AB/2 = (AC-AB)/2 = BC/2

MN = DM - DN = DE/2 -DB/2 = (DE-DB)/2 = BE/2

F1 * BC/2 = F2*BE/2

F1* BC = F2 * BE

Como F1 = p h AB y F2 = p h DB

p h AB * BC = p h BE * DB

De donde

AB * BC = BE * DB

2. Los principios de la mecánica

2.1 La palanca.

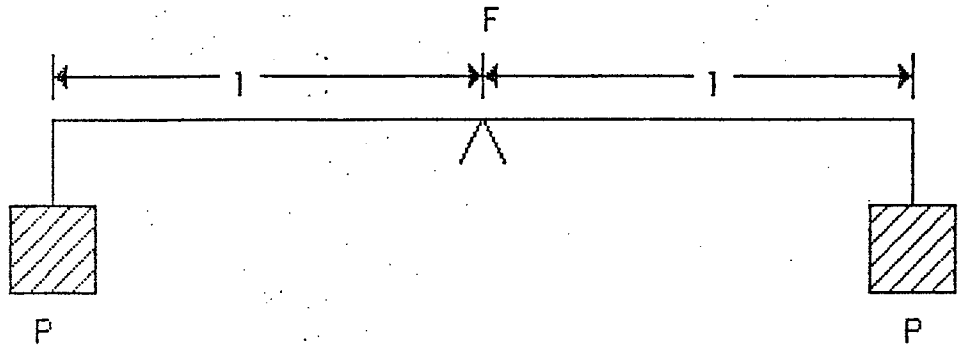
2.2 El centroide de un triángulo. El área de la parábola.

2.3 El plano inclinado.

La ley de la palanca de Arquímedes

Regla 1

Axioma de Arquímedes: dos pesos iguales colgados a distancias iguales del punto de apoyo están en equilibrio.

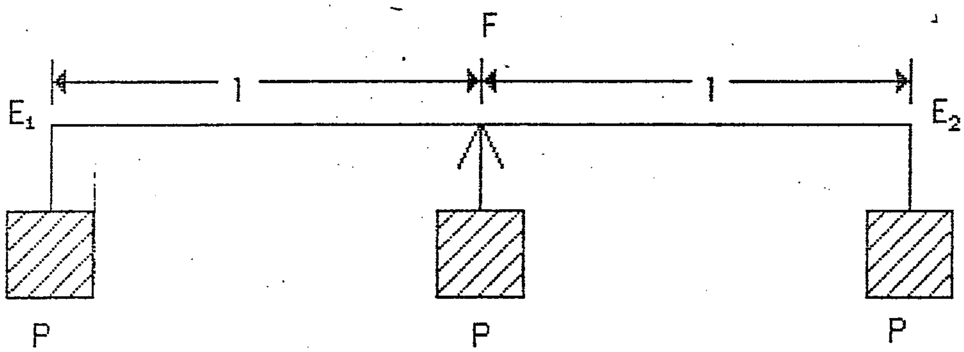


Regla 2

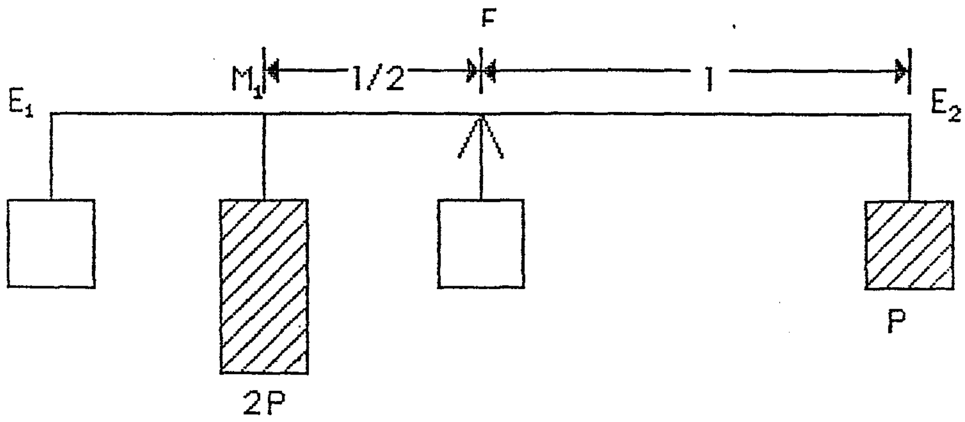
Dos pesos iguales pueden ser sustituidos por un peso doble situado a la mitad de los dos sin alterar el equilibrio.

Ejemplo

Si a un sistema en equilibrio se añade un peso en el punto de apoyo, el equilibrio no se altera.



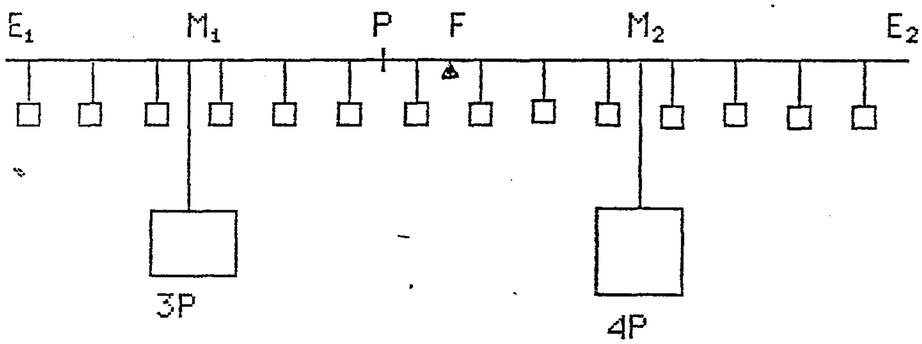
Si se sustituyen los dos pesos de la izquierda por un peso doble situado a la mitad, el equilibrio no se altera.



En este sistema se satisface 2P * 1/2 = P * 1

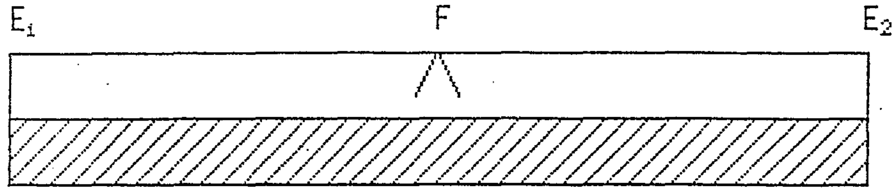
Ejemplo 2

14 pesos de 1/2 P cada uno se suspenden a intervalos iguales de una palanca, simétricamente situados con respecto al punto de apoyo. 3P colgados a una distancia 4 equilibran a 4P a una distancia 3.

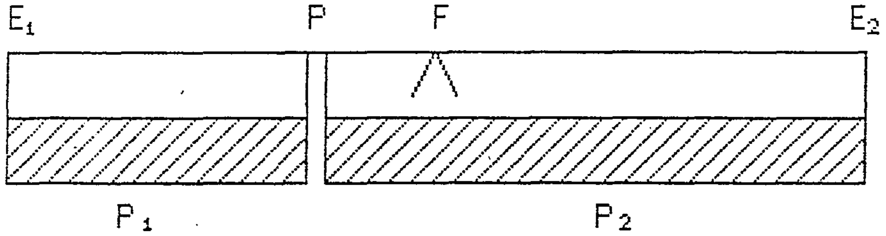


Palanca (Galileo)

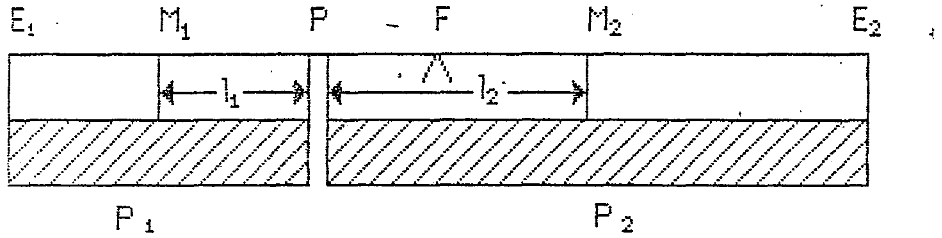
Una viga homogénea de sección transversal constante se cuelga de los extremos de una palanca cuyo punto de apoyo está en el centro.



Si se corta la viga y se amarran los nuevos extremos, se mantiene el equilibrio.

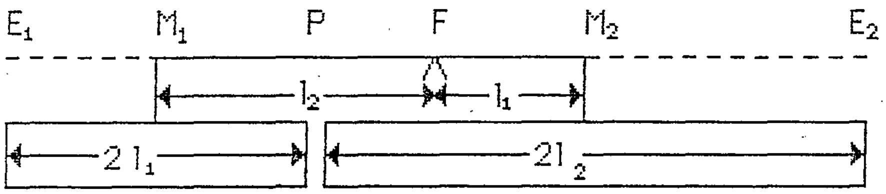


Si los segmentos de viga se cuelgan de sus centros de masa en vez de los extremos, se conserva el equilibrio.



$M_1F = E_1F - E_1M_1 = \frac{1}{2}E_1E_2 - \frac{1}{2}E_1P = l_1 + l_2 - l_1 = l_2$

$M_2F = l_1$

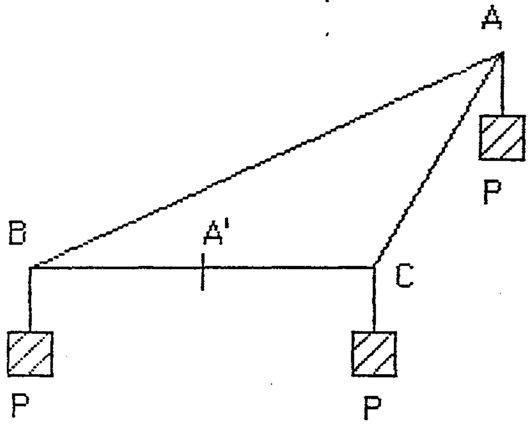


Un peso $P_2 = 2l_1$ suspendido en M_1 equilibra un peso $P_1 = 2l_2$ suspendido en M_2

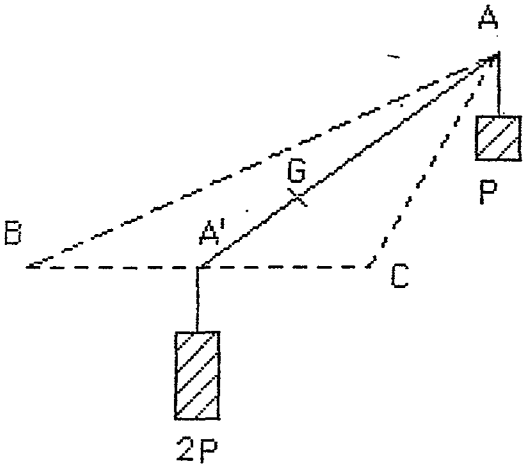
$$\mathbf{P_1\, l_1 = P_2\, l_2}$$

Aplicación del principio de la palanca

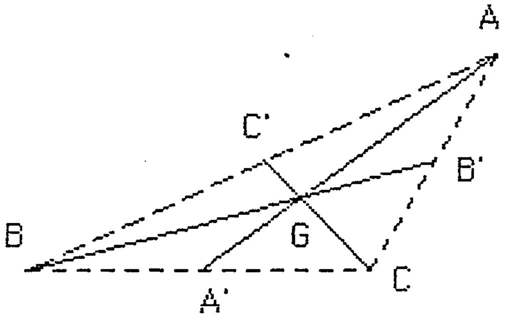
Teorema: las medianas de un triángulo se intersectan en un punto.
De un triángulo rígido horizontal se cuelgan tres pesos iguales de sus vértices.



Se sustituyen los pesos en B y C por un peso doble en el punto medio A'. El punto de equilibrio G de este peso doble y el peso en A está sobre la mediana a un tercio de su longitud.

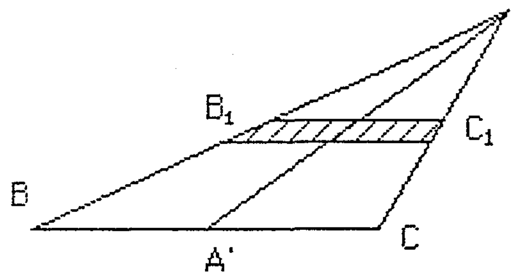


El argumento es simétrico para las otras medianas. Como la resultante es única, las medianas se intersectan en un sólo punto.



Aplicación: el centro de gravedad de un triángulo.

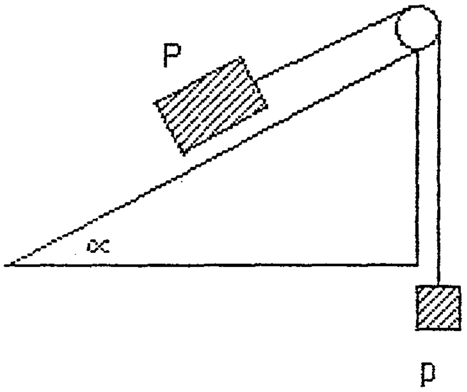
Sea una lámina triangular homogénea de ancho constante, formada por fibras paralelas a la base.



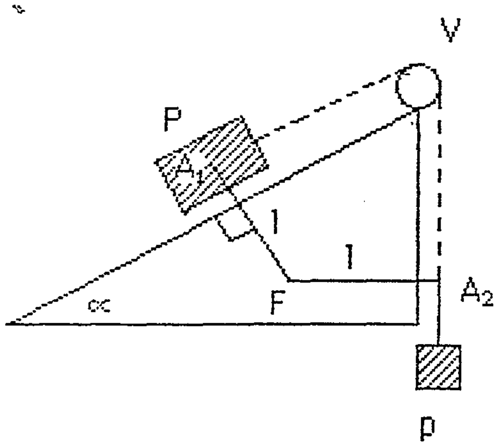
Para cada fibra B_1C_1, la mediana la bisecta, por lo tanto, si se sostiene el triángulo por la mediana queda en equilibrio. Lo mismo vale para las otras medianas. La intersección de las medianas es el centro de gravedad o centroide del triángulo.

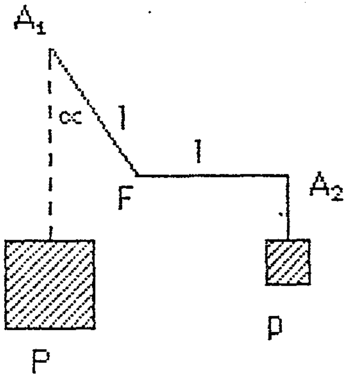
Plano inclinado (Galileo)

Para determinar cuál es la fuerza que se debe hacer para que un objeto que está en un plano inclinado (sin fricción) se deslice, podemos imaginar una polea en el extremo del plano del cual cuelga un peso tal que mantiene el sistema en equilibrio.



- La polea se puede sustituir por una palanca torcida.





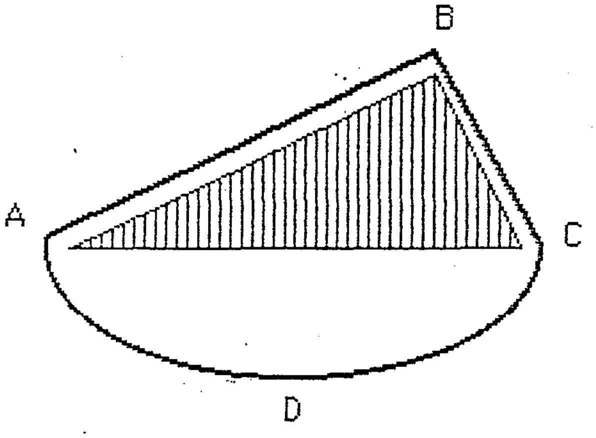
De la ley de la palanca torcida, p l sen 90º = P l sen α

De donde

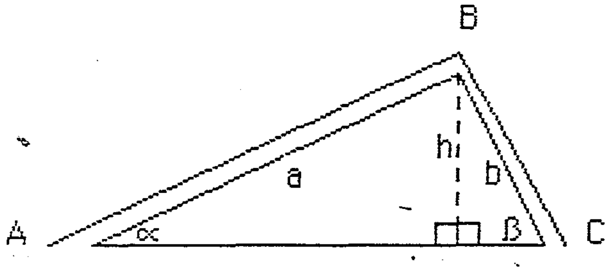
$$p = P \operatorname{sen} \alpha$$

Stevin: el plano inclinado

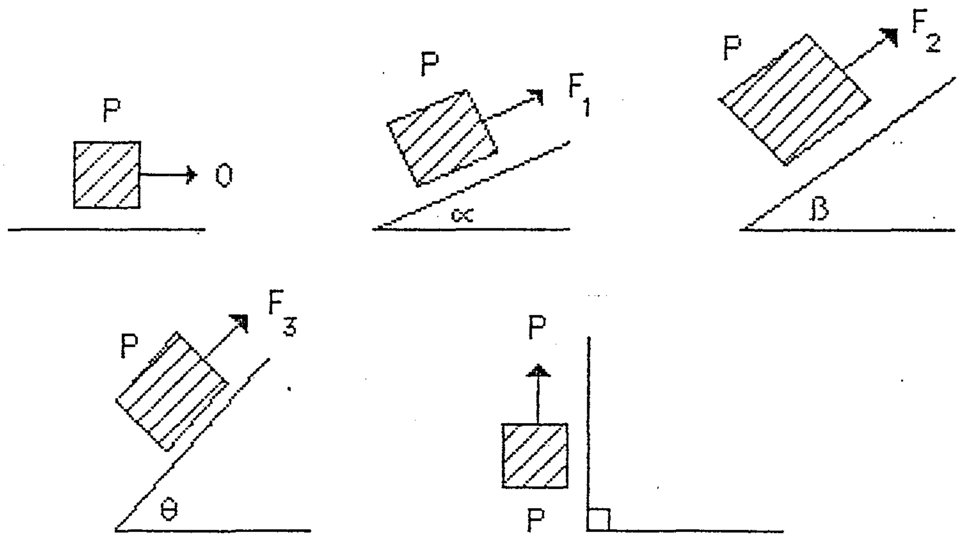
Una cadena cuelga sobre un triángulo. Como el movimiento perpetuo es imposible, la cadena está en equilibrio.



El equilibrio no se altera si se quita el segmento colgante AC.



La fuerza necesaria para evitar que la cuerda resbale depende del ángulo y del peso $F = f(\alpha)\, P$



$F_1 = a\,\rho\;\; f(\alpha)$ donde ρ es la densidad de la cuerda.
$F_2 = b\,\rho\;\; f(\beta)$

$F_1 = F_2$

$a\,\rho\;\; f(\alpha) = b\,\rho\;\; f(\beta)$

$a = h\,/\,\text{sen}\,\alpha \qquad b = h/\text{sen}\,\beta$
$f(\alpha)/\,\text{sen}\,\alpha\; = f(\beta)\,/\,\text{sen}\,\beta = c$ cte

$F = P\ c\ \text{sen}\ (\theta)$
si $= 90^0$
$P = P\ c\ 1$, de donde $c = 1$

$$\mathbf{F = P\ sen\ (\theta)}$$

De aquí se tiene la descomposición de fuerzas en el plano inclinado:

$P = P\ \text{sen}\ (\alpha) + P\ \cos\ (\alpha)$

donde una componente es paralela al plano y la otra ortogonal a éste.

3. Cinemática

3.1 Velocidad y aceleración

3.2 Movimiento rectilíneo - aceleración constante

3.3 Movimiento en un plano

3.4 Velocidad relativa

3.1 CINEMATICA

Cinemática: descripción del movimiento.

Supón que una partícula P se mueve en el espacio. Su posición está dada por
$\bar{r} = \bar{r}(t)$
$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
ecuación paramétrica de la trayectoria de la partícula.

Ejemplo:

movimiento circular, radio = a, periodo τ

$\bar{r} = a \cos \phi\, \hat{i} + a \operatorname{sen} \phi\, \hat{j}$

como el periodo es τ

$$\phi/2\pi = t/\tau$$
$$\phi = 2\pi t/\tau$$

la posición de la partícula está dada por

$r(t) = a \cos (2\pi t/\tau)\, \hat{\mathbf{i}} + a \operatorname{sen} (2\pi t/\tau)\mathbf{j}$

VELOCIDAD

Si en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la partícula se mueve a la posición

$$\mathbf{r}(t + \Delta t)$$

el cambio en la posición está dado por

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

y el cambio promedio de posición es

$$\frac{\overline{r}(t + \Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t}$$

Def. la velocidad de la partícula es

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t + \Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t}$$

esto es $\overline{v} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$

la velocidad es la razón de cambio instantánea del vector de posición de la partícula.

La velocidad $\overline{v}$

es un vector, dirigido a lo largo de la tangente a la curva en P y en el sentido de t creciente.

La magnitud del vector de velocidad se llama la rapidez

$$v = |\overline{v}|$$

En términos de coordenadas cartesianas

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

Ejemplo movimiento circular (cont),

$$v = \frac{d\overline{r}}{dt} = -\frac{2\pi a}{z}\,\mathrm{sen}\,(2\pi t/z)\hat{\imath} + \frac{2\pi a}{z}\cos(2\pi t/z)\,\hat{\jmath}$$

la rapidez está dada por $v = |\overline{v}| = 2\pi a/z$

Def.
La aceleración está definida por

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

o

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\,\hat{k}$$

En el ejemplo

$$\bar{a} = -\left(\frac{2\pi}{z}\right)^2 a\cos\frac{2\pi t}{z}\,\hat{\imath} - \left(\frac{2\pi}{z}\right)^2 a\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{z}\,\hat{\jmath}$$

$$\bar{a} = -w^2\bar{r} \qquad\qquad w = \frac{2\pi}{z}$$

Ejemplo:
El vector de posición de una partícula está dada por

$$\bar{r}(t) = (a\cos(wt),\ b\,\mathrm{sen}\,(wt)\ ,\ 0)$$

donde a, b y w son constantes.

La partícula se mueve sobre una elipse y la aceleración es

$$x = a\cos(wt) \qquad\qquad x^2 = a^2\cos^2(wt)$$
$$y = b\,\mathrm{sen}\,(wt) \qquad\qquad y^2 = b^2\,\mathrm{sen}^2\,(wt)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ecuación de una elipse

$$\bar{v} = (-a\,w\,\mathrm{sen}\,(wt),\ b\,w\cos(wt),\ 0)$$

$$\bar{a} = (-aw^2\cos(wt),\ -bw^2\cos(wt),\ 0)$$

de donde $\bar{a} = -w^2\bar{r}$

3.2 Movimiento en línea recta: aceleración constante

$$\bar{r} = (x(t), 0, 0)$$

$$\bar{v} = \left(\frac{dx}{dt}(t), 0, 0\right)$$

$$\bar{a} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, 0, 0\right)$$

para este caso es convencional

$$r = x$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si a es constante

$$\frac{d^2x}{dt} = a$$

$v = \int a$

$v = at + k$

si en $t = 0$ $v = u$, entonces $k = u$

$$\mathbf{v = u + at}$$

$x = \int(u + at)\,dt$

$= ut + \frac{1}{2}at^2 + k_2$

si en $t = 0$ la partícula está en el origen

$k_2 = 0$

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \frac{v - u}{a}$$

$$x = u(v - u)/a + \frac{1}{2}a(v - u)^2/a^2$$

$$ax = uv - u^2 + \frac{1}{2}a(v^2 - 2vu + u^2)$$

$$2ax = -u^2 + v^2$$

$$v^2 = u^2 + 2ax$$

esta ecuación determina la velocidad en cualquier posición.

Estas ecuaciones son válidas sólo para aceleración constante.

3.2 Aceleración constante [Burghes cap. 2]

Ejemplo:

El código británico de carretera afirma que un coche que viaja a v km/h no puede detenerse en una distancia menor que $.3(v + v^2/70)$ m. El primer término representa la "reacción del conductor" y la segunda la "distancia de frenado".

Dos coches viajan en la misma dirección a 100 km/h con una distancia entre sí de x m.

Si

a) el primer coche tiene una colisión de frente, que lo detiene instantáneamente,

b) el primer coche hace una parada de emergencia, debido a un peligro del cual el segundo coche no tiene aviso previo;

encuentra en cada caso la distancia máxima entre los coches para que una colisión sea inevitable. [Supón que el segundo coche no tiene ninguna otra opción más que frenar.]

Solución:

a) En este caso, para que haya oportunidad de evitar una colisión entre los coches, la distancia para parar del segundo coche debe ser menor que x;

esto es, $.3(100 + 100^2/70) < x$
esto es, $x > 73$

Así que una colisión es inevitable si $x < 73$ m.

b) Claramente los dos coches tienen la misma "distancia de frenado", y el conductor del segundo coche iniciará su parada de emergencia tan pronto como vea las luces de freno del primer coche. Así que una colisión se puede evitar sólo si

$x >$ "tiempo de reacción"
esto es, $x > .3 \times 100$

Por tanto una colisión es inevitable si $x < 30$ m.

Ejercicio 2.6 (Burghes pag. 31)

Un coche acelera a 100 km / h de la siguiente manera:

1a	0 - 15 km / h	en	2 segundos
2a	15 - 30 km / h	en	3 segundos
3a	30 - 50 km / h	en	5 segundos
4a	50 - 100 km / h	en	15 segundos

Suponiendo que el coche viaja con aceleración constante en cada velocidad [gear], encuentra la distancia recorrida para llegar a 100 km / h

(Sugerencia: utiliza una gráfica velocidad - tiempo)

Ejercicio 2.7

Los datos para el uso de las velocidades de un coche están dados a continuación:

Velocidad	Rango de velocidades posibles (km / h)	Aceleración constante que puede ser mantenida (m / s^2)
1a	0 - 30	2
2a	15 - 55	2.5
3a	50 - 70	3
4a	55 - 110	2.5

Usando los datos de arriba, ¿cuando vaya a qué velocidades debe el conductor cambiar de velocidad [gear] para alcanzar 100 km / h en el mínimo tiempo posible? Encuentra este tiempo.

3.3 Movimiento en un plano

Otra fórmula para la velocidad

$$\bar{r}(t) = r(t)\ \hat{r}(t)$$

donde $r(t)$ es la magnitud del vector y $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección de $\bar{r}$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(t)\ \hat{r}(t)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\ \hat{r}(t+\Delta t) - r(t)\ \hat{r}(t)}{\Delta t}$$

se reescribe el numerador usando la aproximación lineal

$$r(t+\Delta t) \approx r(t) + \Delta t \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\hat{r}(t+\Delta t) \approx \hat{r}(t) + \Delta t \frac{d\hat{r}(t)}{dt}$$

de donde

$$\left(r(t) + \Delta t \frac{dr}{dt}\right)\left(\hat{r}(t) + \Delta t \frac{d\hat{r}}{dt}\right) - r(t)\ \hat{r}(t) =$$

$$= \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}\right) + (\Delta t)^2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt}$$

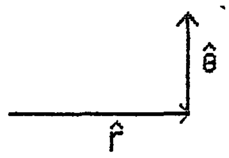
por lo tanto

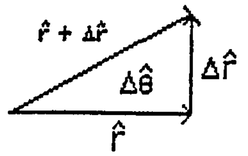
$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}\ \hat{r} + r\ \frac{d\hat{r}}{dt}$$

Este es un caso especial de regla de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\, a\bar{b} = \frac{da}{dt}\,\bar{b} + a\frac{d\bar{b}}{dt}$$

Otra expresión para $\frac{d\bar{r}}{dt}$ usando $\hat{r}$ y un vector ortogonal unitario $\hat{e}$





Si $\Delta\theta$ es pequeño

$|\Delta\hat{r}| \approx \Delta\theta$

si $\Delta\theta$ es pequeña

$\Delta\hat{r} \approx \Delta\theta\,\hat{\theta}$

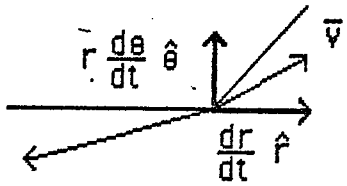
$$\frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

de igual manera

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$



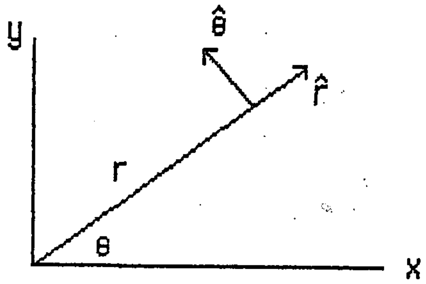
Otra forma de verlo

$\mathbf{r} = \cos\phi\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\ \mathbf{j}$

$$\frac{d}{dt}\hat{r} = -\operatorname{sen}\phi\frac{d\phi}{dt}\hat{\imath} + \cos\phi\frac{d\phi}{dt}\hat{\jmath}$$

$$= \frac{d\phi}{dt}\left(-\operatorname{sen}\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{d\phi}{dt}\hat{\theta}$$



Aceleración

$$\bar{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\hat{\theta}$$

$$\bar{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{\theta}$$

Movimiento circular

$$\bar{r} = a\,\hat{r}$$

de donde $r = a$

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\bar{v} = a\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}$$

Velocidad Angular

rapidez angular $w = \frac{d\theta}{dt}$

para el movimiento en un plano

$$\bar{w} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{z}$$

donde $\hat{z}$ es el vector unitario en la dirección z

En términos de $\bar{w}$ podemos escribir

$$\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}$$

ya que

$$\bar{w} \times \bar{r} = \frac{d\theta}{dt}\hat{z} \times a\hat{r} = a\,\frac{d\theta}{dt}\left(\hat{z} \times \hat{r}\right) = a\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}$$

Para movimiento circular uniforme

$$\theta = \frac{2\pi\, t}{z} \qquad w = \frac{do}{dt} = \frac{2\pi}{z} \quad \text{constante}$$

para w constante con $r = a$ se tiene

$$\bar{a} = -\,a\,w^2\,\hat{r} = -\frac{v^2}{a}\,\hat{r}$$

si w no es constante

$$\bar{a} = -a\,w^2\,\hat{r} + a\,\frac{dw}{dt}\,\hat{\theta}$$

$$\bar{a} = -\frac{v^2}{a}\,\hat{r} + \frac{dv}{dt}\,\theta$$

la componente transversa se debe a la rotación no uniforme

3.35 Movimiento en $\mathbb{R}^3$

Sea C una curva suave en $\mathbb{R}^3$ con ecuación paramétrica

$$\hat{r} = \hat{r}(t) \qquad t_0 \leq t \leq t_1$$

Se define la longitud de arco a lo largo de esta curva por

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt}}\, dt$$

La ecuación intrínseca de la curva se define por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \qquad 0 \leq s \leq L$$

donde L es la longitud total de la curva.

La ecuación intrínseca usa s la longitud de arco como parámetro en vez del tiempo t.

El vector $\frac{d\hat{r}}{dt}$ es tangente a la curva

el vector tangente unitario es

$$\hat{T} = \frac{d\hat{r}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right|$$

$$\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right| = \left(\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt}\right)^{1/2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt}\right)^{1/2}$$

de donde $\hat{T} = \frac{d\hat{r}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\hat{r}}{ds}$

(regla de la cadena)

La derivada de un vector unitario es perpendicular a él

$\frac{d\hat{T}}{dS}$ es perpendicular a $\hat{T}$

Se define el radio de curvatura ρ y N el vector unitario principal normal a C

$$\frac{d\hat{T}}{dS} = \frac{1}{\rho}\hat{N} \qquad P \leq 0$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{ds}\ \frac{ds}{dt}$$

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt}\hat{T}$$

Diferenciando otra vez

$$\bar{a} = \frac{d^2s}{dt}\ \hat{T} + \frac{ds^2}{dt}\ \frac{d\hat{T}}{ds}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2s}{dt}\ \hat{T} + \frac{1}{P}\ \frac{ds^2}{dt}\ \hat{N}$$

La aceleración tiene dos componentes, una en la dirección tangencial y otra de magnitud v^2/ρ en la dirección hacia el centro de curvatura.

VELOCIDAD RELATIVA

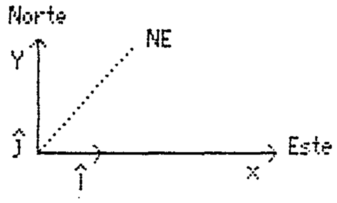
Def.

Si dos partículas P y Q tienen velocidades $\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$ respectivamente, la velocidad relativa de Q con respecto a P es $\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Ejemplo.

Un ciclista pedaleando hacia el este a 15 $^{km}/_h$ encuentra que el viento parece que viene del norte. Al doblar su velocidad, parece que viene del NE. Encuentra la velocidad del viento.

Sea $\bar{V}$ la velocidad del viento.



la velocidad del hombre es $15\,\hat{\imath}$
la velocidad del viento $\bar{V} = v_1\,\hat{\imath} + v_2\,\hat{\jmath}$
la velocidad relativa del viento con respecto al hombre es

$$\bar{V} - \bar{U} = (v_1 - 15)\,\hat{\imath} + v_2\,\hat{\jmath}$$

Este vector es paralelo a $-\hat{\jmath}$
de donde $v_1 - 15 = 0$ y $v_2 < 0$

$$v_1 = 15\ ^{km}/_h$$

En el segundo caso la velocidad relativa del viento con respecto al hombre

$$(v_1 - 30)\,\hat{\imath} + v_2\,j$$

y esto es paralelo a $-\hat{\imath} - \hat{\jmath}$

de donde $v_1 - 30 = v_2$
por lo tanto $v_2 = -15$
y $V = 15\,I - 15\,\hat{\jmath}$

por tanto $v = 15\sqrt{2}\ ^{km}/_h$ y el viento es del NO.

TAREA

ver los ejemplos resueltos del libro.

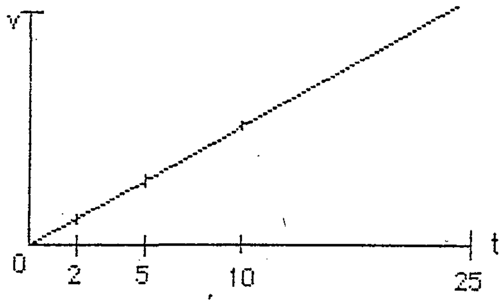
Ejercicios 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13*

traducir a sistema métrico 2.6, 2.7, 2.8.

Ejercicio 2.6
Un coche acelera a 100 $^{Km}/_{h}$ de la siguiente manera.

1a	0 - 15 $^{km}/_{h}$	en	2 segundos
2a	15 - 30 $^{km}/_{h}$	en	3 segundos
3a	30 - 50 $^{km}/_{h}$	en	5 segundos
4a	50 - 100 $^{km}/_{h}$	en	15 segundos

suponiendo que el coche viaje con aceleración constante en cada velocidad; encuentra la distancia recorrida para llegar a 100 $^{km}/_{h}$.



4. Leyes de movimiento de Newton

4.0 Sistema internacional de unidades

4.1 Fuerzas y ecuaciones de movimiento

4.2 Ley de la gravitación universal

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

UNIDADES BASICAS S. I.

Cantidad física	nombre de la unidad S. I.	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
temperatura	kelvin	K
corriente eléctrica	ampere	A
intensidad luminosa	candela	cd

UNIDADES DERIVADAS

Cantidad física	nombre	Símbolo	Definición
energía	Joule	J	$kg\ m^2\ s^{-2}$
fuerza	Newton	N	$kg\ m\ s^{-2} = J\ m^{-1}$
potencia	Watt	W	$kg\ m^2\ s^{-3} = J\ s^{-1}$
carga eléctrica	Coulomb	C	$A\ s$
diferencia de potencial eléctrico	Volt	V	$kg\ m^2\ s^{-3} A^{-1} = J\ A^{-1}\ s^{-1}$
resistencia eléctrica	Ohm	Ω	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2} = V\ A^{-1}$
capacitancia eléctrica	Farad	F	$A^2\ s^4\ kg^{-1}\ m^{-2} = A\ s\ V^{-1}$
área	metro cuadrado	-	m^2
volumen	metro cúbico	-	m^3
densidad	kilogramo por metro cúbico	-	$kg\ m^{-3}$
velocidad	metro por segundo	-	$m\ s^{-1}$
aceleración	metro por segundo cuadrado	-	$m\ s^{-2}$
presión	Newton por metro cuadrado	-	$N\ m^{-2}$
campo eléctrico	Volt por metro	-	$V\ m^{-1}$
campo magnético	Ampere por metro	-	$A\ m^{-1}$

Leyes de Newton

Nature and Nature's laws
lay hid in night
God said, Let Newton be !
and all was light.
Alexander Pope

Def. La cantidad de momento de un cuerpo es el producto de su masa y su velocidad.

Ley 1.
Todo cuerpo permanece en reposo o movimiento uniforme en línea recta a menos que una fuerza actúe sobre el.

Ley 2.

$$F = m\,\bar{a}$$

$$F = \frac{d}{dt}\,(m\,\bar{v}) \qquad \text{más general}$$

Ley 3.
A toda acción se opone una reacción de igual magnitud y sentido opuesto.

Masa inercial.

La razón de la masa es la razón inversa de las aceleraciones producidas por fuerzas iguales.

Aplicación al caso unidimensional.

$$F = m\,\bar{a} = m\,(\ddot{x}, 0, 0)$$

nos interesan fuerzas que dependan de la posición y velocidad de la partícula y tal vez de **t**.

$$F = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = m\,\bar{a}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

Movimiento vertical bajo la gravedad.

ALTURA MAXIMA

i) partícula puntual de masa m
ii) la partícula está sujeta a una fuerza constante hacia abajo, igual a su peso debido a la gravedad.
iii) no se toman en cuenta las otras fuerzas que actúan sobre la partícula (resistencia del aire, viento, etc.)
iv) la partícula se arroja directamente hacia arriba con velocidad u.

Integración directa.
si g denota la aceleración de la gravedad.

$F = mg$ la aceleración hacia arriba es x

2a ley de Newton

$$mx = -mg$$

Condiciones iniciales

$$x(0) = 0 \qquad x(0) = u$$

integrando con respecto a t

$$x = gt + A$$

como $x(0) = u$ $A = u$
se tiene $x = u - gt$
integrando otra vez

$$x = ut - \tfrac{1}{2} gt^2 + k$$

pero $x(0) = 0$ $k = 0$

la altura máxima se alcanza cuando $x = 0$

$$t = u/g$$
$$h(u/g) = u^2/2g$$

Método de inmersión
la altura máxima depende de u

$$h = h(u)$$

considera para $t = 0$ y $t = \Delta t$

en un tiempo Δt la partícula recorre una distancia $\approx u\,\Delta t$ y su velocidad decrece por $g\,\Delta t$.
la velocidad es entonces $u - g\Delta t$.

Problema equivalente al original.

ALTURA MAXIMA que alcanza al ser arrojado el projectil desde una altura $u\Delta t$ con velocidad $u - g\Delta t$.

$$h(u) = u\Delta t + h(u - g\Delta t)$$

expansión de Taylor de $h(u - g\Delta t)$

$$h(u) = u\Delta t + h(u) - g\,\Delta t\,\frac{dh}{dn} + O(\Delta t^2)$$

$$O(\Delta t^2) \to 0 \quad \text{si } \Delta t^2 \to 0 \ \text{ y } O(\Delta t^2) \leq C\,\Delta t^2$$

$$u = g\,\frac{dh}{dn}(u) + O(\Delta t)$$

$$\text{si } \Delta t \to 0 \qquad \frac{dh}{du}(u) = u/g$$

la condición a la frontera es

$$h(0) = 0$$

integrando $h(u) = u^2/2g$

Ley de conservación

$$\ddot{x} = -g$$
$$\dot{x}\,\ddot{x} = -g\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = -g\,\dot{x}$$

integrando con respecto a t

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + g\,x = c$$

esto es la cantidad

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + g\,x$ permanece constante.

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 m$ energía cinética

$g\,x\,m$ energía potencial

el valor de la constante se puede determinar de las condiciones iniciales.

$$x(0) = 0 \qquad x\,(0) = u$$

$$c = \frac{1}{2}u^2$$

$$\dot{x}^2 + 2gx = u^2$$

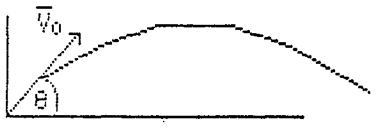
máxima altura si $x = 0$

$$h = \; = u^2/2g$$

5. Campos de fuerza

5.1 Movimiento de una partícula en un campo gravitacional uniforme

Movimiento de una partícula en un campo uniforme.



fuerza gravitacional constante y hacia abajo.

$\bar{F} = -m g \hat{y}$

si despreciamos fuerzas tales como la fricción

$$m\left(\hat{x}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y}\,\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -m g \hat{y}$$

como las dos componentes son ortogonales, se separa en dos ecuaciones de componentes.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Condiciones iniciales.

velocidad inicial $\quad v_{xo} = v_o \cos\theta$

$\qquad\qquad\qquad\quad v_{yo} = v_o \operatorname{sen}\theta$

altura inicial y_o

$$\frac{dy}{dt} = -g\,t + k_1$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_o \operatorname{sen}\theta$$

$$y = y_o + t\,v_o \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = k_2 \qquad\qquad k_2 = v_o \cos\theta$$

$$x = x_o + t\,v_o \cos\theta$$

ecuación de una parábola en forma paramétrica.

Altura máxima

cuando $\frac{dy}{dt} = 0$ $t = \frac{v_0 \text{ sen } \theta}{g}$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \text{ sen}^2 \theta}{g}$$

alcance $t_A = \frac{2 v_0^2 \text{ sen}^2 \theta}{g}$

$$x = \frac{2}{g} v_0^2 \text{sen } \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\theta$$

Alcance máximo

$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\theta$

$R'(\theta) = v_0^2 \, 2 \cos 2\theta = 0$ si $\cos 2\theta = 0$

$2\theta = 90°$

$\theta = 45°$

Ejemplo:

$\frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\theta = 8.90$

altura

$1.40 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \text{ sen}^2 \theta$

$2 \times \frac{1.40}{\text{sen } \theta} = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen}^2$

$\frac{v_0^2}{g} 2 \text{ sen } \theta \cos \theta = 8.90$

$\frac{2 \times 1.40}{\text{sen } \theta} \cdot 2 \cos \theta = 8.90$

$4 \times 1.40 \cot \theta = 8.90$

$\cot \theta = \frac{8.90}{4 \times 1.40} = 1.58$

$\tan \theta = .62$ $\theta = 32°$

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$\theta = 32°$ $v_0 =$

$\text{sen } 2\theta = .90$

$8.9 \times 9.8 / .90 = v_0^2$

$96.75 = v_0^2$

9.8 m/seg.

Ley de la gravitación universal.
una partícula de masa m_1 atrae a otra partícula de masa m_2 con una fuerza.

$$\bar{F} = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^2}$$

$$m_1 \xrightarrow{\hat{r}} m_2$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

Como la fuerza depende inversamente del cuadrado de la distancia, un objeto que posea simetría esférica interactúa como si fuera una partícula con toda su masa concentrada en el centro.

Ejemplo. **Satélite Morelos**

Satélite en órbita circular, a qué radio **r** parece el satélite estacionario visto desde la tierra. Orbita circular concentrica y coplanar con el ecuador.

$$\frac{G\, m_t \quad m_s}{r^2} = m_s\, w^2 r$$

$w^2 r$ aceleración

$$m_t = 5.98 \times 10^{24}\, kg$$

frecuencia de la tierra $\tilde{w}_e = \dfrac{2\pi}{1\ \text{día}} = \dfrac{2\pi}{86400}$

$$w_e = 7.23 \times 10^{-5}\ S^{-1}$$

$$r^3 = \frac{G\, me}{w^2} = \frac{G\ \ me\, T^2}{(2\pi)^2}$$

$$r\,3 \approx \frac{(6.67 \times 10^{-11})\,(5.98 \times 10^{24})}{(7.27\ \times 10^{-5})^2} =$$

$$\frac{6.67 \times 5.98}{(7.27)^2} \times \frac{10^{-11} \times 10^{24}}{10^{-10}} = 7.54 \times 10^{22}$$

$$r^3 = 7.54 \times 10^{22}$$
$$r^3 = 75.4 \times 10^{21}$$
$$r \approx 4.2 \times 10^7\, m$$

radio de la tierra $r_t = 6.38 \times 10^6$ m. El satélite gira a una altura sobre la superficie de la tierra aprox. a 35600 km.

6. Teoremas de conservación

6.1 Momento lineal

6.2 Momento angular

6.3 Trabajo

6.4 Fuerzas conservativas

6.5 Energía potencial

6.6 Conservación de la energía

12 de Octubre

LEYES DE CONSERVACION

La motivación para formular leyes de conservación que sean aplicables en un rango amplio de situaciones es que además de simplificar el trabajo, una ley de conservación puede dar una comprensión valiosa de un sistema más complejo, permitiendo hacer inferencias generales cuando la matemática es complicada.

Al formular una ley de conservación buscamos una cantidad fundamental que permanece constante bajo ciertas condiciones.

Consideremos tres leyes de conservación relacionadas con el movimiento newtoniano de una sola partícula (es decir suponiendoo que las leyes de Newton son válidas): Conservación del Impulso Lineal, del Momento Angular y la Energía.

Impulso Lineal

$$\bar{p} = m\,\bar{v}$$

Teorema. (Conservación del impulso lineal)
Si la fuerza total actuando sobre una partícula es cero, el impulso lineal de una partícula se conserva.

Demostración.
la segunda ley de Newton.

$$F = m\bar{a} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Si $F = 0$ $\quad \frac{d\bar{p}}{dt} = 0$ de donde $\bar{p}$ es constante

Corolario.

Si la fuerza total en una dirección cualquiera es cero, el impulso lineal en esa dirección se conserva.

Definición.
El momento de un vector F, con línea de acción $\mathcal{L}$, con respecto al punto **a**.
Se define

$$M\,\bar{a} = (\bar{r} - \bar{a}) \times F$$

donde $\bar{r}$ es el vector de posición de cualquier punto sobre $\mathcal{L}$

Def.

La torca es el momento de una fuerza.

Def.

Si F es la fuerza actuando en una partícula P, la torca (o momento de F) alrededor del punto A es

$$G_A = (\bar{r} - \bar{a}) \times F$$

Def.

Sea A un punto con vector de posición **a**. El momento angular alrededor de A se define como

$$H_A = m(\bar{r} - \bar{a}) \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

en términos del impulso lineal $\bar{p}$

$$H_A = (\bar{r} - \bar{a}) \times p$$

Lema: La razón de cambio del momento angular alrededor de cualquier punto A es igual a la torca alrededor de A.

$$\frac{dHa}{dt} = G_A$$

Dem.

$$\frac{dHa}{dt} = \frac{d\left[m(\bar{r} - \bar{a}) \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right]}{dt} =$$

$$m(\bar{r} - \bar{a}) \times \frac{d^2\bar{r}}{dt} + m\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d\bar{r}}{dt} =$$

$$(\bar{r} - \bar{a}) \times m\frac{d^2r}{dt} = (\bar{r} - \bar{a}) \times F = G_A$$

Teorema. (Conservación del momento angular)

Si la torca alrededor de A de las fuerzas actuando sobre una partícula es cero, el momento angular de la partícula con respecto a **A** se conserva.

Demostración

Si $G_A = 0$ $\qquad \frac{dH_A}{dt} = 0 \qquad$ y $\qquad H_A = \bar{e}$

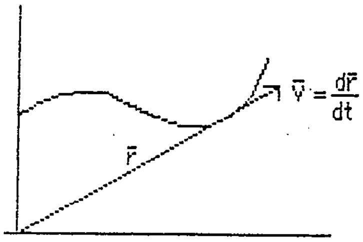
La torca de F con respecto a A es cero cuando

i) $F = 0$

ii) La línea de acción de F pasa a través de A.

Movimiento en un plano.

Momento angular con respecto al origen



H_o es perpendicular tanto a $\bar{r}$ como a $\bar{v}$ por lo que es paralelo al eje $\hat{z}$

Coordenadas cartesianas

$$H_o = m\, \bar{r} \times \bar{v}$$

$$\bar{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0\right)$$

$$H_o = \left(0,\ 0,\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

Coordenadas polares cilíndricas (R, ϕ, z) la trayectoria de la partícula está descrita por $\bar{r} = R\ \hat{e}_R$

donde R y ϕ son funciones del tiempo t.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{e}_R + R\,\frac{d\phi}{dt}\,\hat{e}_\phi$$

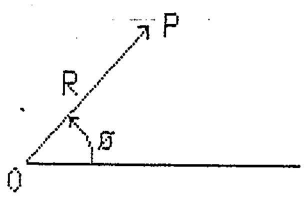
de donde $H_o = m\,R\,\hat{e}_R\ \times\left(\frac{dR}{dt}\hat{e}_R + R\,\frac{d\phi}{dt}\,\hat{e}_\phi\right)$

$$H_o = m\,R^2\,\frac{d\phi}{dt}\,\hat{e}_z$$

Ejemplo:

Una partícula P de masa constante m se mueve en un plano, sujeta a una fuerza dirigida hacia un punto fijo O en el plano.

Si (R, ϕ) son coordenadas polares.



muestra que $R^2\frac{d\phi}{dt}$ es constante

Solución: como la línea de acción de la fuerza pasa a través de O, la torca es cero.

$G_0 = 0 \qquad \frac{dH_0}{dt} = 0$ de donde H_0 es un vector constante

$|H_0|$ = constante
$R^2 \dot{\varnothing}$ = constante

mov. circular uniforme.

$$\frac{dA}{dt} = R^2 \dot{\varnothing} \qquad A = R^2 \varnothing$$

mov. rectilíneo uniforme.

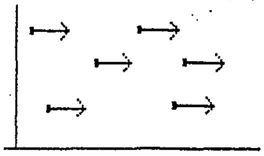
$$\frac{dA}{dt} = R^2 \frac{d\varnothing}{dt} \qquad C = dA = R^2 d\varnothing$$

Integral de línea

Definición:

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una función $\bar{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $\bar{x}$ en su dominio A.

un vector $\bar{F}(\bar{x})$



Ejemplo:

$$\bar{F} = -\frac{mMG}{r^3}\,\bar{r} \qquad \bar{r}(x, y, z) = (x, y, z)$$

Def. Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuo en la trayectoria de clase C^1.

$\bar{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^3$

La integral de línea de F a lo largo de $\bar{r}$ está definida por:

$$\int_e \bar{F}.\,d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)).\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt$$

relación con integral de trayectoria

$$\int_{\bar{r}} \bar{F}.\,d\bar{r} = \int_a^b \left(\bar{F}(\bar{r}(t)).\frac{d\bar{r}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\right\|\right) \left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\right\| dt = \int_{\bar{r}} f(\bar{r}(t)) \left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\right\| dt$$

donde $f(\bar{r}(t)) = \bar{F}(\bar{r}(t)) \,.\, \hat{T}(t)$

$\hat{T}$ vector tangente unitario

Def.

El trabajo W de una fuerza $\hat{F}$ sobre una partícula que se mueve de A a B se define como.

$$W = \int_{e_{AB}} \bar{F}\,.\,d\bar{r}$$

Ejemplo: $\bar{F} = (F, 0, 0)$

$\bar{r} = (t, t, 0)$

6.3

P se mueve de O $(0, 0, 0)$ a A $(0, a, 0)$

$$d\bar{r} = (1, 1, 0)\, dt$$
$$W = \int_{e}(F, 0, 0) \bullet (1, 1, 0)\, dt$$
$$= \int_{0}^{a} F\, dt = F a$$

Ejemplo:

Satélite en orbita $\bar{r} = r \cos \alpha \hat{\imath} + r \operatorname{sen} \alpha \hat{\jmath}$

$$F = -\frac{mMG}{r^3}\, r$$

Ejemplo:

$$\bar{r} = (t, t^2, t^3) \qquad t \in [0, 1]$$
$$d\bar{r} = (1, 2t, 3t^2)\, dt$$
$$F = (0, 0, -mg)$$
$$W = -mg$$

Fuerzas conservativas.

Si el trabajo hecho por una fuerza F sobre una partícula que se mueve de **A** a B es independiente de la trayectoria recorrida, se dice que la fuerza es conservativa.

Ejemplo:

$$F = (0, 0, -mg)$$
$$\bar{r}(t) = (t, t, t)$$
$$W = \int_0^1 (0, 0, -mg) \bullet (1, 1, 1)$$
$$= \int_0^1 -mg\, dt = -mg$$

en general sea

$$\bar{r} = (x, y, z)$$
$$W = \int_{t_0}^{t_1} (0, 0, -mg) \bullet \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt$$
$$\bar{r}(t_0) = 0 \qquad \bar{r}(t_1) = A$$
$$\int_{t_0}^{t_1} -mg \frac{dz}{dt}\, dt = \int_0^1 -mg\, dz = -mg$$

si $\quad F = \text{grad}\,\Omega$

entonces $\displaystyle\int_{AB} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \Omega_B - \Omega_A$

$$\int_{AB}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\Omega}{dt}\,dt \qquad \text{regla de la cadena}$$

$$=\int_{AB} d\Omega = \Omega_B - \Omega_A$$

ver Marsden p. 300

Energía Cinética.

Def. La energía cinetica de una partícula de masa **m** que se mueve con velocidad $\bar{v}$ es $T = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v}$

Energía Potencial. Si F es una fuerza conservativa entonces existe una función Ω: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que F grad Ω.
La función Ω se conoce como un potencial para F y es único excepto por una constante aditiva arbitraria.

Def. En un campo de fuerza conservativo F, la fuerza potencial V de una partícula situada en P se define como el trabajo hecho por F al mover la partícula desde P a una posición fija O.

$$V_p = \int_{po} F.\, dr = \int_{po} \text{grad}\, \Omega \,.\, dr = \Omega o - \Omega p$$

$$V = \Omega + \Omega o$$

La energía potencial es función de la posición.

$$V = V(\bar{r})$$

La energía potencial es una medida de la energía que posee una partícula debido a su posición en un campo de fuerza conservativo.

Ejemplo:
Una partícula es lanzada hacia arriba bajo el efecto de la gravedad. Encuentra la energía de la partícula cuando ha alcanzado una altura h.

$$F = m\,(-g, 0, 0)$$

F es conservativa

$$F = \text{grad}\,(-\,mgx) \qquad \Omega = -\,mgx$$

$$V = -\,(-mgx)$$

$$V = mgh$$

Ejemplo. Si la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m que se mueve en un plano es de la forma

$$F = m\, f(R)\ \hat{e}\, r$$

encuentra la energía potencial de la partícula.

6.5

F es conservativa p 129

$$F = \text{grad}\,\Omega$$

$$F = \frac{\partial \Omega}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial \Omega}{\partial \emptyset}\hat{e}_\emptyset + \frac{\partial \Omega}{\partial Z}\hat{e}_z$$

$$m\, f(R)\, e_R = \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

$$m\, f(R) = \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

$$\Omega = \int_{R_0}^{R} m\, f(R)\; dR$$

$$V = -m\int f(R)\, dR$$

Teorema. Conservación de la Energía.

Si la fuerza F que actúa sobre una partícula es conservativa, la suma de las energías <u>cinética</u> y <u>potencial</u> permanece constante durante el movimiento

$$T + V = cte$$

Supon que la partícula P se mueve sobre la fuerza con ecuación

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad t_0 \le t \le t_1$$

sujeta a una fuerza conservativa $\bar{F}$

$$m\,\ddot{\bar{r}} = \bar{F}$$

$$m\,\ddot{\bar{r}}\cdot\dot{\bar{r}} = \bar{F}\cdot\dot{\bar{r}}$$

$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\dot{\bar{r}}\cdot\dot{\bar{r}}\right)$ donde t es la energía cinética de la partícula

como F es conservativa

$$F = \text{grad}\,\Omega$$

$$\frac{dT}{dt} = \text{grad}\,\Omega\cdot\dot{\bar{r}}$$

$$= \frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{dR}{dt}$$

como $V = -\Omega$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

$$T + V = E = cte$$

Ejemplo. Velocidad de Escape

Un satélite de masa m se mueve en un plano bajo una fuerza por unidad de masa de $F = -k/R^2\,\hat{e}_R$
donde $(R, \emptyset)$ son la coordenadas polares.

El satélite con velocidad inicial Vo se mueve a lo largo de lalínea $\emptyset = \emptyset o$, desde una posición inicial $R = a \quad \emptyset = \emptyset o$.
Muestra que si $Vo \geq (2k/a)^{\frac{1}{2}}$ el satélite escapará.

Solución.

Cambio la energía potencial

$$m \int_a^{\infty} -k/R^2\, dR = mk/R \Big]_a^{\infty} = m\frac{k}{a}$$

energía cinética $\frac{1}{2} m v_0^2 \quad \frac{1}{2} m v_0^2 \geq m\frac{k}{a} \qquad v_0^2 \geq \sqrt{\frac{2k}{a}}$

6.6

Ejemplo 6.2

Una partícula de masa m se mueve del origen a un punto A de coordenadas (1, 1, 1) sujeto a una fuerza dada por F = (Y + Z, Z + X, X + Y).
Determina el trabajo hecho cuando la partícula se mueve de O a A a lo largo de las siguientes curvas:

i) la línea recta de O a A
ii) la curva $\bar{r} = (t, t^2, t^3) \quad 0 \le t \le 1$
iii) la línea recta de O a (1, 0, 0) sigue de la línea de (1, 0, 0) a (1, 1, 1).

i) una curva paramétrica está dada por
$\bar{r} = (t, t, t) \qquad 0 \le t \le 1$
$\bar{F}$ en esta curva $\bar{F} = (2t, 2t, 2t)$
$\frac{d\bar{r}}{dt} = (1, 1, 1)$
$W = \int_{OA} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 (2t, 2t, 2t).(1, 1)\, dt$
$= \int_0^1 6t\, dt = 3t^2\Big]_0^1 = 3$

ii) evaluando sobre la curva $\bar{r} = (t, t^2, t^3)$
F =
$\frac{d\bar{r}}{dt} = (1, 2t, 3t^2)$
$W = \int_{OA} \bar{F} \cdot d\bar{r} \qquad (t^2 + t^3 + 2t^4 + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4)\, dt$
$= \int_0^1 (5t^4 + 4t^3 + 3t^2)\, dt = t^5 + t^4 + t^3\Big]_0^1 = 3$

iii) sobre la línea $r = (t, 0, 0)$
F vale (0, t, t) $\quad F \cdot dr = 0$
no hay trabajo en el 1^er pedazo
$\bar{r} = (1, t, t) \quad \bar{F} = (2t, 1+t, 1+t)$
$W = \int_0^1 (2t, 1 + t, 1 + t) \cdot (0, 1, 1)\, dt$
$= \int_0^1 2(1 + t)\, dt = 2t + t^2\Big]_0^1 = 3$

Ejemplo 6.3
Ecuentra una función escalar Ω tal que

$$\bar{F} = \text{grad}\ \Omega = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = y + z$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = x + y$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = x + z$$

integrando la primera con respecto a x $\quad \Omega = xy + zx + G(y, z)$
de la 2^a ecuación

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = z + x = \frac{\partial\Omega}{\partial y} + x$$

de donde $z = \frac{\partial G}{\partial y}$

$G = yz + H(z)$
de donde $\Omega = xy + zx + yz + H(z)$

pero $\frac{\partial\Omega}{\partial z} = x + y = x + y + \frac{dH}{dz}$

$\frac{dH}{dz} = 0 \qquad\qquad H = cte$

$$\Omega = xy + yz + zx + cte$$
$$V = -(xy + yz + zx) + cte$$

TAREA
Burghes cap. 6.
6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.9

Berkeley cap. 5.
1a, b, c, d, 2a, b, c, 5, 7a, b, 8.

7. Dinámica del espacio

7.1 Cónicas

7.2 Movimiento planetario

29 Octubre

DINAMICA DEL ESPACIO

Leyes de Kepler

1) Los planetas se mueven en órbitas elipticas con el sol en uno de sus focos.
2) Para cada planeta, la línea que une al sol con el planeta barre areas iguales en tiempo iguales.
3) Los cuadrados de los periodos de los planetas, son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol.

ILUSTRAR CON TABLA 7.1 BURGHES

Newton. Ley Gravitación.

$$F = \frac{m\, m_T G}{r^2} = mg$$

$m_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg

$r_t = 6.38 \times 10^{6}$ m

$G = 6.67 \times 10^{-11}$

g constante cerca de la tierra

a 100 km arriba de la superficie de la tierra

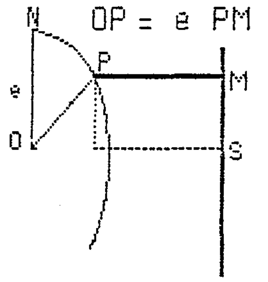
$$g\,(R_E{}^{+100}) = \frac{G\, M_T}{(r_t + 100)^2}$$

$$\frac{g(r_t)}{g\,(r_t + 100)} = \left(1 + \frac{100}{Re}\right) = (1 + .016)$$

$$9.81 / 1.032 = 9.5$$

Geometría de Cónicos

Una cónica es el lugar geometríco de los puntos cuyas distancias a un punto fijo y una línea fija tienen razon constante, llamada e la excentricidad.



O foco, e directriz.

en coordenadas polares

$$R = e\,(OS - R\cos\varnothing)$$

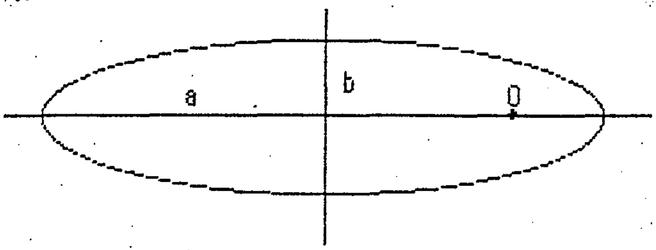
$ON = l = e\,OS$

$$R = l/(1 + e\cos\varnothing)$$

$e > 1$ hiperbola

$e = 1$ parábola

$0 \geq e < 1$ elipse



$$2a = \frac{l}{1+e} + \frac{l}{1+e} = 2e$$

$$a = l/(1 - e^2)$$

$$b = l/(1 - e^2)^{1/2}$$

$$b^2 = l^2/(1 - \varepsilon^2) \qquad l = a(1 - \varepsilon^2)$$

$$b^2 = a^2/(1 - e^2)$$

$$R = l/(1 + \varepsilon\cos\varnothing)$$

$$y = R\,\mathrm{sen}\,\varnothing$$

$$y = \frac{l\,\mathrm{sen}\,\varnothing}{(1 + \varepsilon\cos\varnothing)}$$

$$\frac{dy}{d\varnothing} = \frac{(1 + \varepsilon\cos\varnothing)\,.\,l\cos\varnothing + l\,\mathrm{sen}\,\varnothing\;\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varnothing}{(1 + \varepsilon\cos\varnothing)}$$

$$= \frac{l\cos\varnothing + l\,\varepsilon\cos^2\varnothing + l\,\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\varnothing}{(1 + \varepsilon\cos\varnothing)^2}$$

$$= \frac{l\cos\varnothing + l\,\varepsilon}{(1 + \varepsilon\cos\varnothing)^2}$$

$$0 = l\cos\varnothing + l\,\varepsilon$$

$$\cos\varnothing = -\varepsilon \qquad \mathrm{sen}\,\varnothing = (1 - \varepsilon^2)$$

$$b = \frac{l\,(1 - e^2)^{1/2}}{1 - \varepsilon^2} = l/(1 - e^2)^{1/2}$$

Movimiento planetario (el problema de fuerza central)

Una partícula se mueve sujeta a una fuerza gravitacional dirigida hacia el origen $\mathbf{F} = - m k \mathbf{r} / r^3$

El movimiento queda determinado por la segunda ley de Newton:

$$m\, d^2\mathbf{r}/dt^2 = - m k\, \mathbf{r} / r^3$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales:

$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$
$d\mathbf{v}/dt = -k\, \mathbf{r}/r^3$

El momento angular del planeta se conserva ya que la fuerza está dirigida hacia el centro (y por tanto la torca es cero).
$m\, \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$
[Otra forma de verlo es $d/dt(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$]

Si $c \neq 0$, todo el movimiento es en un sólo plano que contiene al origen, ya que $\mathbf{r}$ es siempre perpendicular a $\mathbf{c}$.

Usando coordenadas polares:
$\mathbf{r} = (r \cos \theta\, , r \operatorname{sen} \theta\, , 0)$
$\mathbf{c} = (0, 0\, , c)$
$\mathbf{v} = (-r \operatorname{sen} \theta\, d\theta /dt + dr/dt \cos \theta, r \cos \theta\, d\theta/dt + dr/dt \operatorname{sen} \theta, 0)$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos \theta & r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -r \operatorname{sen} \theta\, d\theta /dt + dr/dt \cos \theta & r \cos \theta\, d\theta/dt + dr/dt \operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$=(r^2\cos^2 \theta\, d\theta/dt + r\, dr/dt \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r^2\operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta/dt - r\, dr/dt \cos \theta \operatorname{sen} \theta)\mathbf{k}$
por lo tanto $r^2\, d\theta/dt = c$

Razón con la cual varía el área:

$\Delta A = 1/2\ \Delta\theta\, r\, r$
$\Delta A / \Delta t = \Delta\theta / \Delta t\ 1/2\, r^2$
$dA/dt = 1/2\, r^2\, d\theta/dt$

La partícula barre áreas con razón constante $c/2$ (2a Ley de Kepler: barre áreas iguales en tiempos iguales)

Otra cantidad que se conserva constante en el movimiento de un planeta es el eje excéntrico **e**, que se obtiene de la siguiente manera:

$$d/dt[\mathbf{r}/r] = (r\mathbf{v} - dr/dt\ \mathbf{r})/r^2 = [(\mathbf{r} \bullet \mathbf{r})\ \mathbf{v} - (\mathbf{r} \bullet \mathbf{v})\ \mathbf{r}]/r^3 = [(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}]/r^3 =$$
$$= [\mathbf{c} \times \mathbf{r}]/r^3$$

ya que $\mathbf{r} \bullet \mathbf{v} = r\ dr/dt$
porque $r^2 = \mathbf{r} \bullet \mathbf{r}$ y $d/dt\ r^2 = 2\ r\ dr/dt$, $d/dt\ (\mathbf{r} \bullet \mathbf{r}) = 2\ \mathbf{r} \bullet \mathbf{v}$

Multiplicando por -k, se tiene

$$-k\ d/dt[\mathbf{r}/r] = \mathbf{c} \times (-k\ \mathbf{r}/r^3)$$

y por la segunda ley de Newton, $d\mathbf{v}/dt = -k\ \mathbf{r}/r^3$, de donde

$$k\ d/dt[\mathbf{r}/r] = d\mathbf{v}/dt \times \mathbf{c}$$

Integrando,

$$k\ (\mathbf{e} + \mathbf{r}/r) = \mathbf{v} \times \mathbf{c}$$

De esta última ecuación se ve que $\mathbf{e} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{0}$, es decir que si $c \neq 0$, **e** y **c** son perpendiculares y **e** está en el plano de movimiento.

$$k\ (\mathbf{e} + \mathbf{r}/r) \bullet \mathbf{r} = (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \bullet \mathbf{r} = c\ r^2\ d\theta/dt = c^2$$

Si $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, $r = c^2/k$ o sea que se tiene movimiento circular. En este caso **r** y **v** son ortogonales, por tanto $r\ v = c$ de donde $v = c/r = k/c$ o sea que la rapidez es constante. Se tiene movimiento circular uniforme.

La energía total en el movimiento circular es negativa ya que

$$E = 1/2\ m\ v^2 - mk/r = mk^2/2c^2 - mk^2/c^2 < 0$$

Si $\mathbf{e} \neq 0$

$\mathbf{e} \bullet \mathbf{r} = e\ r \cos \phi$, ϕ ángulo entre **e** y **r**.

$$r\ (1 + e \cos\ ) = c^2/k$$

$$r = (c^2/k) / (1 + e \cos \phi)$$

Esto es, el planeta se mueve en una órbita que es una cónica.

7.2

Conservación de la Energía

$$\frac{1}{2} m v^2 \frac{mk}{r} = E$$

Eje excéntrico

$$\frac{d}{dt}\frac{\bar r}{r} = \frac{r\bar v - \dot r \bar r}{r^2} = \frac{(\bar r . \bar r)\,\bar v - (\bar r . \bar v)\,\bar r}{r^3}$$

$$= \frac{(\bar r \times \bar v) \times \bar r}{r^3} = \frac{\bar c \times \bar r}{r^3}$$

ya que $\frac{d}{dt} \bar r . \bar v = 2\bar r . v$

$$\frac{d}{dt} r^2 = 2r\dot r$$

$$-k\frac{d}{dt}\frac{\bar r}{r} = \bar c \times \frac{-k\bar r}{r^3}$$ por la 2 ley de Newton

$$k\frac{d}{dt}\frac{\bar r}{r} = \dot{\bar v} \times \bar c$$

integrando

$$k\left(\bar e + \frac{\bar r}{r}\right) = \bar v \times \bar c$$

se tiene que $\bar e . \bar c = 0$, si $c \neq 0$ $\bar e$ y $\bar c$ son perpendiculares y $\bar e$ esta en el plano del movimiento.

$$k\left(\bar e + \frac{\bar r}{r}\right) . \bar r = (\bar v \times \bar c) . \bar r$$

$$(\bar v \times \bar c) . \bar r = \begin{vmatrix} v_1 & 0 & r_1 \\ v_2 & 0 & r_2 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = r_1 v_2 c - r_2 v_1 c$$

$$= c\,(r^2 \cos^2\theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\theta}{dt} - r\frac{dr}{dt} \operatorname{sen}\theta)$$

$$= c\, r^2\frac{d\theta}{dt} = c^2$$

Si $\bar e = 0$ $\quad r = \frac{c^2}{k}$ $\quad$ movimiento circular

$$\bar e . \bar r + r = c^2/k$$

como $rv = c$
en este caso $\bar r$ y $\bar v$ son ortogonales
$v = c/r = k/c$ velocidad constante

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{mk}{r} = \frac{k^2}{2c^2} = \frac{k^2}{c^2} = -\frac{k^2}{2c^2} < 0$$

la energía total en el movimiento circular es negativa.

si $e \neq 0$

$\bar{e} \cdot \bar{r} = er \cos \varnothing$ $\quad$ $\varnothing$ ángulo entre $\bar{e}$ y $\bar{r}$

$r\,(1 + e \cos \varnothing) = c^2 / k$

$$r = \frac{c^2/k}{1 + e \cos \varnothing} \quad \text{cónica}$$

relación entre excentricidad y energía

$$\left| k \left(\bar{e} + \frac{\bar{r}}{r} \right) \right|^2 - \left| \bar{v} \times \bar{c} \right|^2$$

$k^2 \left(\bar{e} + \frac{\bar{r}}{r} \right)^2 = \bar{v}^2 \;\; \bar{c}^2$ $\qquad$ por que $\underline{V} \perp c$

$k^2 \left(\bar{e}^2 + \frac{2}{r}\, \bar{e} \cdot \bar{r} + 1 \right) = \bar{v}^2 \;\; \bar{c}^2$

como $\bar{e} \cdot \bar{r} = c^2/k - r$

y como $v^2 = 2\,\frac{E}{m} + 2\,\frac{K}{r}$

$K^2 \left(e^2 - 1 \right) = 2\, c^2\, \frac{E}{m}$

de aquí concluye que si

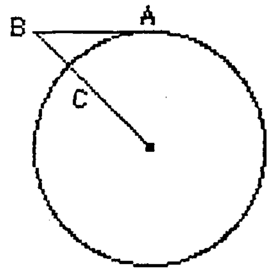
$E > 0$	$e > 1$
$E = 0$	$e = 1$
$E < 0$	$e < 1$

2

Aceleración Centrípeta

Movimiento Circular Uniforme
La dirección de la aceleración es centrípeta, pues si no la fuera habría una componente en la dirección tangencial.
El efecto de esta ultima sería variar **v** que es tangente, cambiaría v, pero no puede ser, pues el movimiento es circular uniforme.

Método de Huygens para calcular la aceleración centrípeta.



si no hubiera aceleración la partícula se movería de A a B, AB = vt. Por causa de dicha aceleración se produce la "caída" BC que vale (según Galileo).

$$BC = \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

en el triángulo rectángulo O A B

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \quad y \quad OA = OC = r$$

$$(r + \tfrac{1}{2} a t^2)^2 = r^2 + a r t^2 + \tfrac{1}{4} a^2 t^4 = r^2 + (vt)^2$$

$$a\, r\, t^2 + \frac{1}{4} a^2\, t^4 = v\, t^2$$

de donde $\quad a\, r + \frac{1}{4}\, a^2\, t^2 = v^2$

si $t \rightarrow 0$

$$ar = v^2$$

$$a = v^2/r$$

como $\quad v = w\, r \qquad v^2 = w\, r^2$

$$a = w^2\, r$$

La aceleración lunar

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/t)^2}{r} = \frac{4\pi^2\, r}{T^2}$$

$r = 384\,400$ km $= 3.844 \times 10^{8}$ m
$T = 27$ días 7 h 43 min. 11.5 seg $= 2.353 \times 10^6$ s
$a = 2.74 \times 10^{-3}$ m/seg^2

la aceleración disminuye conforme la distancia al centro de la tierra se hace más grande.

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{9.81}{2.74 \times 10^{-3}} = 3.58 \times 10^3$$

radio tierra 6.38×10^6 m

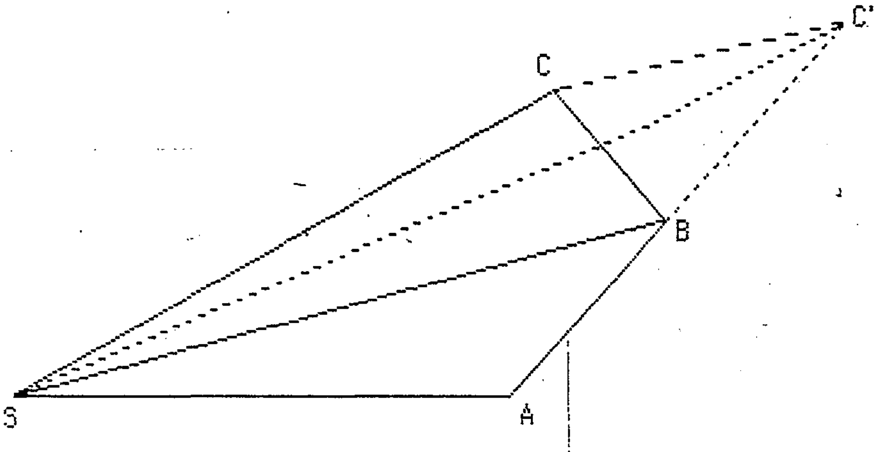
la razón entre los cuadrados de los radios

$$\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = \left(\frac{384\,400}{6380}\right)^2 = (60.25)^2 = 3630$$

las aceleraciones son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias al centro de la tierra.

Dirección de la aceleración a partir de la ley de Kepler de las áreas.
Newton proposición 2, teorema 2. pag. 42

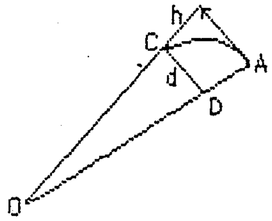
Todo cuerpo que se mueve en una línea curva en un plano con un radio en punto que describe áreas proporcionales a los tiempos es atraída con una fuerza centrípeta dirigida hacia el punto.



A $\triangle$ S A B = A $\triangle$ S B C
= A $\triangle$ S B C'
. . C C' $\parallel$ SB

p - d C C' $\parallel$ S B

Magnitud de la aceleración centrípeta a partir de la ley de Kepler de las áreas.



7.2

área OAC $\approx \frac{1}{2}$ OA x CD = $\frac{1}{2}$ r d = u t

siendo u = cte la razón con la que se basan las áreas.

$$t = \frac{rd}{2u}$$

$$h = \frac{1}{2}\ a\ t^2 = \frac{1}{2}\ a\ \left(\frac{rd}{2u}\right)^2 = \frac{a\ r^2 d^2}{8\ u^2}$$

$$a = \frac{8\ u^2}{r^2}\ \frac{h}{d^2}$$

inversa el cuadrado de la distancia.

la cantidad $\lim_{t \to 0} \frac{h}{d^2}$ es constante para cada punto de la elipse.

3^a Ley de Kepler

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} c$$

$A = \frac{1}{2} c\, t \qquad A = 0 \quad \text{en} \quad t = 0$

$A = \pi\, a\, b$

$A = \frac{1}{2}\, C\, T$

$T = \frac{2}{c} \quad A = \frac{2}{c}\, \pi\, a\, b$

$l = \frac{c^2}{k} \qquad T = \frac{2\pi\, ab}{\sqrt{e}\,\sqrt{k}}$

sustituyendo $b = l/(1-\varepsilon^2)^{1/2}$

$$T = \frac{2\pi\, a\sqrt{e}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sqrt{k}}$$

sustituyendo $a = l/(1-\varepsilon^2)$

$$T = \frac{2\pi\; a^{3/2}}{\sqrt{k}}$$

$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$ para todos los planetas

Orbitas de Satélites

Sobre un satélite en órbita alrededor de la tierra, la principal fuerza que actúa es la fuerza gravitacional de la tierra, si el satélite no está cerca de la luna, la ecuación de movimiento queda descrita por

$$m\, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{m\, m_T G_{\bar{r}}}{r^3}$$

m la masa del satélite, m_T la masa de la tierra y **r** el vector de posición con respecto al centro de la tierra.

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}\,\hat{r}$$

donde ahora $k = G\, m_T$

Como la masa del satélite no aparece en la ecuación, la teoría anterior se aplica al satélite.

Teorema.

Un satélite en órbita elíptica tiene una velocidad

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

y en órbita parabólica $\quad v^2 = 2k/r$

Demostración.

$$E = \frac{k^2}{2c^2}\,(e^2 - 1)$$

para movimiento elíptico

$e^2 - 1 = -\,l/a$

como $l = \dfrac{c^2}{k}$

$$E = \frac{k^2}{2c^2}\left(-\frac{c^2}{k}\right) = -\frac{k}{2a}$$

la ecuación de la energía es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - km/r$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{r} - \frac{k}{2a}$$

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

para movimiento parabólico $e = 1$ y $E = 0$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{r}$$

$$v^2 = k/r$$

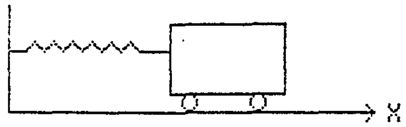
9. Oscilaciones y vibraciones

9.1 Movimiento armónico simple

9.2 Péndulo simple

9.3 Resortes

Oscilador Armónico



Una masa m unida por un resorte a un soporte fijo, resbala sin fricción sobre una superficie.
Si se estira el resorte y se suelta, el cuerpo oscila.
Si las oscilaciones son armónicas (sinusoidales) es movimiento está descrito por.

$$x = x_0 \cos\ wt$$

w frecuencia de oscilación
x_0 desplazamiento inicial
T periodo $wt = 2\pi$
derivando dos veces.

$$d^2x/dt^2 = -\ w^2\ x_0 \cos w\ t$$
$$d^2x/dt^2 = -\ w^2\ x$$

La aceleración es opuesta a la distancia y proporcional a ella.

Ley de Hook para resorte.

Pruebas experimentales han mostrado que la extensión es proporcional a la fuerza aplicada.

$$T = \lambda\ x/a$$

T = fuerza
a = longitud natural
x = extensión
λ = modulo de elasticidad

Ecuación de Movimiento.

$$m\ d^2x/dt^2 = -\ T$$
$$d^2x/dt^2 = -\ \lambda\ x/ma$$

multiplicando por $\frac{dx}{dt}$ e integrado

$\frac{1}{2}(dx/dt)^2 = -\lambda\ /2ma\ \ x^2 + A$

Condiciones iniciales $x(0) = b$

$\frac{dx}{dt}(0) = 0$

$A = \lambda\, b^2/\ 2ma$

$(dx/dt)^2 = \lambda/ma\ (b^2 - x^2)$

$\int dx/(b^2 - x^2) = \int \sqrt{\lambda/ma}\ \ dt + B$

$\text{arc sen}\ (x/b) = \sqrt{\lambda/ma}\ \ t + B$

$B = \text{arc sen}\ 1 = \pi/2$

$x = {}^{b} \cos (\sqrt{\lambda/ma})t$

el periodo de oscilación

$(\lambda/ma)\ T = 2\pi$

$T = 2\pi \sqrt{ma/\lambda}$

9

Movimiento Armónico Simple

Si una particula de masa m se mueve el línea recta bajo una fuerza $-mw^2x$ donde w es una constante real positiva y x denota la distançia a un punto fijo 0 en la línea, se ecuación de movimiento está dada por

$$d^2x / dt^2 = -w^2x$$

Esta ecuación diferencial tiene la solución general

$$X = A \cos (wt) + B \operatorname{sen} (wt)$$

Vemos que cada valor de x se repite a intervalos de $2\pi/w$.
Decimos que x(t) tiene periodos $2\pi/w$.

Si la particula en t = 0 está en la posición x = a y se suelta de modo que dx/dt (0) = 0 las constantes A y B se determinan de la condición

$$x = a \qquad t = 0$$

la cual da A = a y la segunda condición dx/dt (0) da B =0 de modo que la solución completa es

$$x = a \cos (wt)$$

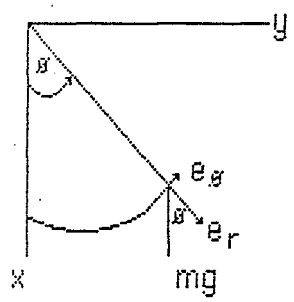
La distancia a es la amplitud del movimiento.

Péndulo Simple

Un modelo práctico de movimiento armónico simple es un péndulo que tiene oscilaciónes pequeñas.

De un hilo (de masa cero, que no se estira) de longitud l, fijo en un extremo, colgamos una masa m.
La masa oscila libremente en un plano.

El modelo queda ilustrado.



r, ϕ son coordenadas polares

Si T es la tensión en el hilo la ecuación de movimiento de la partícula es

$$m\, d^2\bar{r}/dt^2 = m\bar{g} - T\, e_r$$

$\bar{r} = r\,\hat{e}_r$ $\quad$ r fijo

$\bar{v} = r\,\dot{\phi}\, e_\phi$

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_r = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt} e_\phi = -\dot{\phi}\,\hat{e}_r$$

$$\bar{a} = r\dot{\phi}(-\dot{\phi}\hat{e}) + r\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi = -r\dot{\phi}^2\,\hat{e}_r + r\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

sustituyendo

$$m(-r\dot{\phi}^2\,\hat{e}_r + r\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi) = m(g\cos\phi\, e_r - g\,\mathrm{sen}\,\phi\, e_\phi) - T\, e_r$$

tomando componentes

$$m\, r\,\dot{\phi}^2 = -m\, g\cos\phi + T \qquad (1)$$
$$m\, r\,\ddot{\phi} = -m\, g\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad (2)$$

9

como la ecuación diferencial (2) no es facil de resolver.

si ϕ es pequeño $\phi \approx \text{sen}\,\phi$

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{\text{sen}\,\phi}{\phi} = 1$$

de donde se obtiene (2)[1]

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{r}\phi \quad \text{péndulo simple equivalente}$$

la solución de (2)[1] es movimiento armónico simple con periodo $2\pi\sqrt{r/g}$ la longitud $r = g/w2$ el periodo de oscilación depende sólo de r y g (la longitud) yu no depende de la masa (en el vacío).

Referencias

- Libros de texto
- Libros de apoyo para el curso
- Libros de texto alternativos
- Libros más elementales
- Libros más avanzados

Lista de libros a reseñar

Lecturas optativas

Referencias para el curso de mecánica

MEC 201 Agosto 1987

Profesor: Alfinio Flores Peñafiel

Libros de texto:

Burghes, D. N. Modern introduction to classical mechanics and control. Ellis Horwood, 1975.

Kittel, C.; Knight, W. D.; Ruderman, M. A.; Helmholz, A. C.; Moyer, B. J. Mechanics Berkeley Physics Course Vol. 1, Second Edition. MacGraw Hill, 1973. (Mecánica. Reverté, 1982)

Libros de apoyo para el curso:

Braun, M. Differential equations and their applications. Springer, 1983.

Flores Peñafiel, Alfinio. El problema restringido de los tres cuerpos. Tesis licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, 1976.

Friedrichs, K. O. From Pythagoras to Einstein. Mathematical Association of America, 1975.

Kogan, B. Yu. The application of mechanics to geometry. University of Chicago Press, 1974.

Lyúbich, Yu. I.; Shor, L.A. Método cinemático en problemas geométricos. Editorial Mir, 1978.

Pólya, George. Mathematical methods in science. Mathematical Association of America, 1984.

Rosas, L.; Riveros, H. G. Iniciación al método científico experimental. Trillas, 1984.

Schiffer, M. M.; Bowden, L. The role of Mathematics in science. Mathematical Association of America, 1984.

Uspenski, V. A. Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas. Editorial Mir, 1979.

Libros de texto alternativos:

Collinson, C. D. Introductory mechanics. Arnold, 1980.

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. The Feynman lectures on physics Vol. 1 Addison Wesley, 1969. (Física Volumen 1 Fondo Educativo Interamericano, 1971.)

Oyarzabal, Juan de. Mecánica Clásica. Apuntes manuscritos, 1979.

Resnick, R.; Halliday, D. Física parte 1. CECSA, 1980.

Libros más elementales:

Bachillerato:

Cetto, Ana Ma.; Domínguez, H.; Lozano, J. M.; Tambutti, R.; Valladares, A. El mundo de la física. Trillas, 1984-86.
Tema 1 Acerca de la física
Tema 2 El movimiento: su descripción
Tema 3 El movimiento: sus causas
Tema 4 Fuerzas en la naturaleza
Tema 5 Leyes de conservación.
Tema 6 Energía

Para todo público

Landau, L. Kitaigorodski, A. Física para todos. Editorial Mir, 1967.

March, Robert H. Física para poetas. Siglo veintiuno, 1977.

Universitarios:

Gamow, George. Matter, Earth and Sky. Second Edition. Prentice Hall, 1965. (Materia, tierra y cielo. CECSA, 1970)

Physical Science Study Committee. Física. Editorial Reverté. 1967.

Sears, F. W.; Zemansky, Mark W. College Physics. Addison Wesley, 1960. (Física. Aguilar)

Libros más avanzados:

Marion, Jerry B. Classical dymanics. Academic Press, 1965.

Goldstein, Herbert. Classical mechanics. Addison Wesley, 1978.

Arnold, V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Springer Verlag, 1978.

Abraham, R.; Marsden, J. E. Foundations of mechanics. Benjamin/Cummins, 1978.

Lista de libros para reseñar **MEC 201** Agosto 1987

Barnett, L. El universo y el doctor Einstein. Fondo de Cultura Económica, 1967.

Bondi, Hermann. Relativity and common sense. Doubleday, 1964.

Boys, C. V. Soap bubbles. Heinemann, 1960.

Cohen, I. Bernard. The birth of a new physics. Doubleday, 1960.

Drake, Stillman. Discoveries and opinions of Galileo. Doubleday, 1957.

Drake, Stillman. Galileo. Hill and Wang, 1980.

Einstein, Albert. La relatividad. Editorial Grijalbo. 1970.

Einstein, A.; Infeld, L. The evolution of physics. Simon and Schuster, 1967. (La física, aventura del pensamiento. Losada)

Feynman, Richard. The character of the physical law. MIT Press, 1975.

Galilei, Galileo. Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias. Editora Nacional, 1981. Jornada tercera y jornada cuarta.

Gamow, George. Gravity. Heinemann, 1974. (Gravedad. EUDEBA)

Gamow, George. Mr Tompkins in paperback. Cambridge University Press, 1965. (El breviario del señor Tompkins. Fondo de Cultura Económica, 1985)

Gamow, George. Treinta años que conmovieron la física. EUDEBA, 1971.

Grosser, Morton. The discovery of Neptune. Dover, 1979.

Jaffe, Bernard. Michelson and the speed of life. Heinemann, 1961.

Koestler, Arthur. Los sonámbulos. CONACYT, 1981. Cuarta parte. La línea divisoria (Kepler).

Kuhn, T. S. La estructura de las revoluciones científicas. Fondo de Cultura Económica, 1971.

Poincaré, Henri. La ciencia y la hipótesis. Espasa Calpe, 1943.

Poincaré, Henri. El valor de la ciencia. Espasa Calpe, 1964.

Lecturas optativas para el curso de mecánica

Bernal, John D. La proyección del hombre: historia de la física clásica. Siglo Veintiuno, 1975.
Cap. 6 La física heliocéntrica.
Cap. 7 Ciencia y religión
Cap. 8 El nacimiento de la dinámica

Birkhoff, George D. El concepto matemático de tiempo y la gravitación. En Birkhoff, G. D. Collected Mathematical Papers Vol 2 p. 944-966.

Birkhoff, George D. The mathematical nature of physical theories. En Birkhoff, G. D. Collected Mathematical Papers Vol 2 p. 890-919

Bochner, Salomon. The role of mathematics in the rise of sciece. Princeton University Press, 1981.
Cap 5 The role of mathematics in the rise of mechanics.
Cap 6 The significance of some basic mathematical conceptions for physics.

Bronowski, J. The ascent of man. Little, Brown, 1973.
Cap. 6 The starry messenger
Cap. 7 The majestic clockwork

Browder, F. E.; Mac Lane, S. The relevance of mathematics. En Steen, L. A. (Ed.) Mathematics today. Springer Verlag, 1978. p 323-350.

Gårding, Lars. Encounter with mathematics. Springer Verlag, 1977.
Cap 1 Models and reality.

Kline, Morris (Ed) Mathematics in the modern world. Readings from Scientific American. Freeman, 1968.
Biografías
Crombie 4. Descartes
Cohen 5. Isaac Newton
Newman 6. Laplace
Whittaker 7. Hamilton
Newman 10. Maxwell
The import of mathematics
Dirac 32. The evolution of the physicist picture or nature
Dyson 33. Mathematics in the physical sciences
Einstein 34. On the generalized thery of relativity
Gamow 35. Gravity

Kline, Morris. Mathematics and the physical world. Dover, 1981.

Kline, Morris. Mathematics and the search for knowledge. Oxford University Press, 1985.

Newman, J. R. Sigma el mundo de las matemáticas. Vol 2 Las matemáticas del mundo físico. Grijalbo, 1979
1 Galileo Galilei: La matemática del movimiento
2 Daniel Bernoulli: Teoría cinética de los gases
4 Jones: John Couch Adams y el descubrimiento de Neptuno
8 Karl Menger: ¿Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones?
9 C. Vernon Boys: Las burbujas de jabón
10 Courant y Robbins: El problema de Plateau
14 Haldane: El tamaño adecuado
17 D' Arcy Thompson: Sobre la magnitud

Noyola Isgleas, Arturo. Antología de física. Universidad Nacional Autónoma de México, 1971.

Judson, Horace Freeland. La búsqueda de respuestas. Fondo Educativo Interamericano, 1984.

EXAMENES

0. VECTORES
1. FUERZAS
2. CINEMATICA
3. LEYES DE NEWTON
4. LEYES DE CONSERVACION
5. MOVIMIENTO PLANETARIO
6. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

VECTORES
Examen de reconocimiento MEC 201 agosto 4 1987

En lo que sigue un vector se representa por **A** y su magnitud por A, o por |**A**|

1. a) Ilustra la ley del paralelogramo para la suma de dos vectores **A** y **B**
b) En el mismo paralelogramo ¿qué interpretación se puede dar a la otra diagonal en términos de los vectores **A** y **B**?
c) Ilustra geométricamente el hecho: $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$ (a un escalar)

2. El producto escalar $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ de dos vectores **A**, **B** se define como $A\,B \cos \alpha$, donde α es el ángulo entre **A** y **B**.
a) muestra que $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$
b) muestra que $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = A^2$
c) ¿Qué significa geométricamente el hecho: $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$, si $A \neq 0$, $B \neq 0$?

3. a) Prueba la desigualdad de Schwarz: $|\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}| \leq A\,B$
b) Prueba la desigualdad del triángulo: $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq A + B$

4. Prueba el teorema de Pitágoras utilizando el producto escalar.

5. (Ley de cosenos) En un triángulo $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$, donde γ es el ángulo entre a y b.
Prueba esta identidad utilizando el producto escalar.

6. Sean **x**, **y**, **z** tres vectores unitarios ortogonales que definen un sistema cartesiano. Un vector **A** puede ser escrito como $\mathbf{A} = A_x\mathbf{x} + A_y\mathbf{y} + A_z\mathbf{z}$, donde A_x, A_y, y A_z son los componentes de **A**.
a) muestra que $A_x = \mathbf{A} \bullet \mathbf{x}$.
b) Expresa el producto escalar en términos de los componentes de **A** y de **B**.

7. a) Si a es un número real, prueba que $a\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{A} \bullet a\mathbf{B}$
b) Prueba que $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{C} + \mathbf{B} \bullet \mathbf{C}$

8) El producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se define como un vector ortogonal al plano que incluye a $\mathbf{A}$ y a $\mathbf{B}$ y cuya magnitud es $A\,B\,|\mathrm{sen}\,\alpha|$, donde α es el ángulo que va de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. El sentido de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ queda determinado por la convención de la mano derecha.

a) muestra que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

b) muestra que $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

9) La magnitud $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = A\,B\,|\mathrm{sen}\,\alpha|$ es el área del paralelogramo con lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

a) muestra utilizando esta interpretación que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})$

b) demuestra la igualdad anterior utilizando el hecho que

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

10) El escalar $|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C}|$ es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.

a) muestra que tres vectores son coplanares si y sólo si $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = 0$

b) muestra que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \mathbf{A} \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$

11) (Ley de senos) En un triángulo $(\mathrm{sen}\,\alpha) / a = (\mathrm{sen}\,\beta) / b = (\mathrm{sen}\,\gamma) / c$. Demuestra este hecho utilizando el producto vectorial.

12) Encuentra las componentes de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ en términos de los componentes de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{B}$. Recuerda que si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y $\mathbf{z}$ son los vectores unitarios que determinan el sistema cartesiano,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Examen parcial de mecánica 27 agosto 87

1.- Tres fuerzas $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_3}$ actúan simultáneamente sobre una partícula. Sea $\mathbf{F_R}$ la resultante de las tres fuerzas.

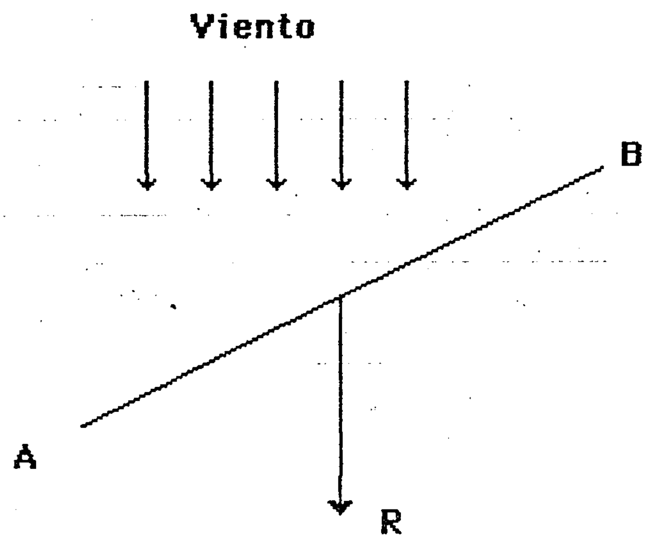
a) Muestra que si $\mathbf{F_R} = \mathbf{0}$, los vectores que representan las tres fuerzas forman un triángulo.

b) Si $\mathbf{F_R} = \mathbf{0}$, ¿es posible que uno de los vectores quede fuera del plano determinado por los otros dos? Justifica tu respuesta.

2.- Encuentra la línea de acción de la resultante de dos fuerzas paralelas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ de magnitud 3 y 2 respectivamente. Justifica tu respuesta.

3.- Da un argumento físico para mostrar que las medianas de un triángulo se intersectan en un solo punto.

4.- Muestra que el viento siempre empuja a la vela de un barco formando un ángulo recto con el plano de la vela. (Sugerencia: descomponer la fuerza $\mathbf{R}$ en dos componentes ortogonales.)



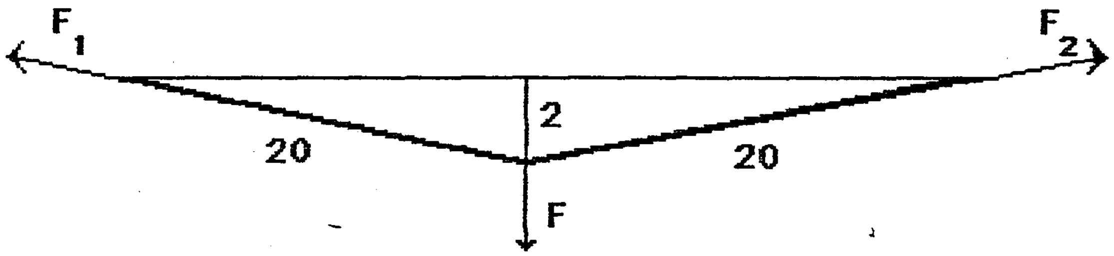
5. - "Dame un punto de apoyo y levantaré la Tierra" es la frase atribuída a Arquímedes. Si la Tierra tiene una masa de 6×10^{21} toneladas y un hombre puede levantar 60 kg, y se utiliza una palanca para levantar la Tierra,

a) ¿Cuántas veces más largo debe ser el brazo de palanca mayor con respecto al menor?

b) ¿Qué distancia necesitaría recorrer el hombre para levantar la Tierra un cm?

c) Si el hombre puede levantar los 60 kg a un metro en un segundo, ¿cuánto tiempo necesitaría para levantar la Tierra 1 cm?

6.- Dos personas tiran de los extremos de una cuerda de 40 m de logitud en direcciones opuestas para mantenerla tensa. Una tercera persona jala a la mitad de la cuerda con una fuerza **F** de magnitud F en dirección ortogonal y se desplaza 2 m.



a) ¿Qué fuerza necesitan hacer las personas de los extremos para mantener el sistema en equilibrio?

b) ¿Cuánto se desplazaron las personas de los extremos desde su posición inicial?

7.- ¿Qué fuerza debe hacer un hombre para empujar un carrito de 2000 N sobre una rampa de 2 m de largo y que sube 1 m?

8.- Demuestra **uno** de los siguientes teoremas:

a) Las bisectrices internas de un triángulo se intersectan en un sólo punto.

b) Las alturas de un triángulo se intersectan en un sólo punto.

c) Las mediatrices de un triángulo se intersectan en un sólo punto.

d) Las medianas de un triángulo se intersectan en un sólo punto.

e) Dos bisectrices externas de un triángulo y una interna se intersectan en un sólo punto.

(Nota: si consideras alguno de estos teoremas como un caso particular de un teorema más general, como Ceva, demuestra el teorema general.)

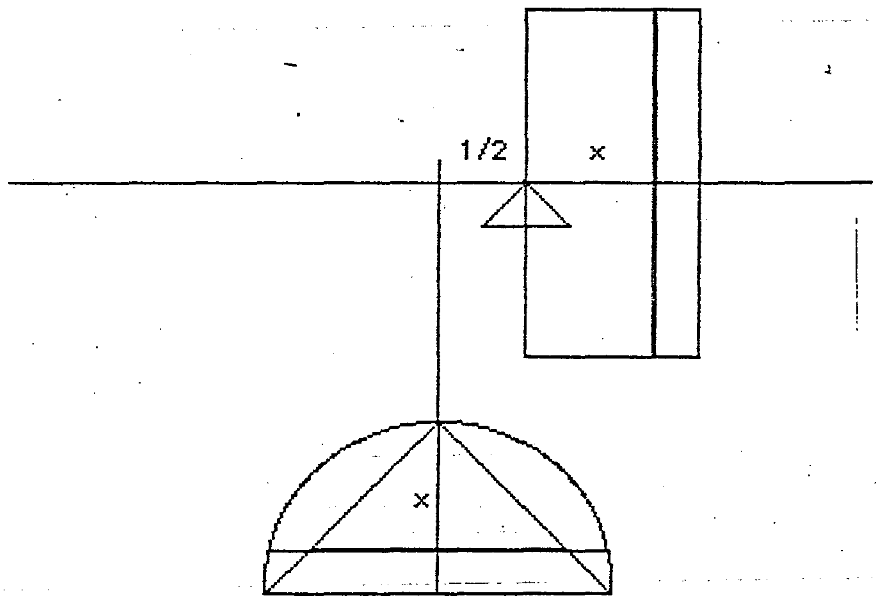
9.- Demuestra **uno** de los siguientes teoremas

a) Las bases de las bisectrices de dos ángulos interiores y uno exterior de un triángulo son colineales. (Supón que la bisectriz exterior no es paralela al lado opuesto.)

b) Las bases de las bisectrices de los tres ángulos exteriores de un triángulo son colineales. (Supón que ninguna de la bisectrices es paralela al lado opuesto.)

10.- Considera una fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{x} - \mathbf{y} - 5\mathbf{z}$ actuando sobre el punto (7,3,1). Calcula la torca o momento rotacional de la fuerza alrededor del eje z.

11. - Sean un cilindro con radio de base 1 y altura 1, el cono con la misma base y altura, y la semiesfera inscrita en el cilindro. Muestra que la semiesfera y el cono colgados a una distancia 1/2 equilibran a el cilindro en la posición dada. (Sugerencia: calcula el área de una sección transversal del cono a una distancia x del vértica, el área de una sección transversal de la semiesfera a una distancia x, y el momento de una sección transversal del cilindro a una distancia x.)



12.- Si x_i son un conjunto de datos, f_i sus frecuencias y μ la media,

a) Muestra que $\Sigma\, f_i\,(x_i - \mu) = 0$

b) Interpreta f_i como fuerza, $(x_i - \mu)$ como brazo de palanca y muestra que la media es el centro de equilibrio del sistema.

Examen parcial

1) El vector de posición de una partícula está dada por
$\mathbf{r} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t$, $0 \leq t$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes.
Muestra que la partícula se mueve en una línea recta con velocidad uniforme.

2) Un coche acelera a 100 km / h de la siguiente manera:

1a	0 - 15 km / h	en	2 segundos
2a	15 - 30 km / h	en	3 segundos
3a	30 - 50 km / h	en	5 segundos
4a	50 - 100 km / h	en	15 segundos

Suponiendo que el coche va con aceleración constante en cada "velocidad" [gear], encuentra la distancia recorrida para llegar a 100 km / h.
(Sugerencia: utiliza una gráfica velocidad - tiempo)

3) Un ciclista pedaleando hacia el oeste a 10 km / h encuentra que el viento parece venir del sur. Al aumentar su velocidad al doble, parece que el viento viene del suroeste. Encuentra la velocidad del viento.

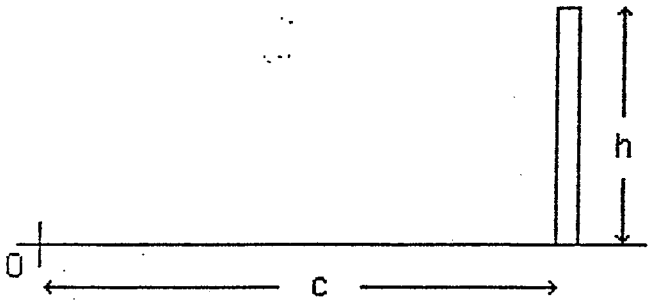
4) El satélite Morelos se encuentra moviéndose con velocidad angular constante en una órbita circular con radio de 42 000 km. El satélite da una vuelta completa cada 24 horas.
a) Encuentra su velocidad $\mathbf{v}$.
b) Encuentra su aceleración $\mathbf{a}$.

5) Una partícula P es lanzada desde una distancia R_t del centro de la tierra, con una velocidad vertical $\mathbf{u}$. La aceleración de la partícula hacia el centro de la tierra es $G * M_t / x^2$, donde x es la distancia al centro de la tierra, y G y M_t son constantes.
a) Muestra que para $u^2 \geq 2\, G * M_t / R_t$ la partícula escapa de la tierra.
b) Encuentra la velocidad de escape de la tierra. ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 /kg^2, $M_t = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $R_t = 6.38 \times 10^6$ m)

EXAMEN PARCIAL MECANICA 20 - 10 - 87

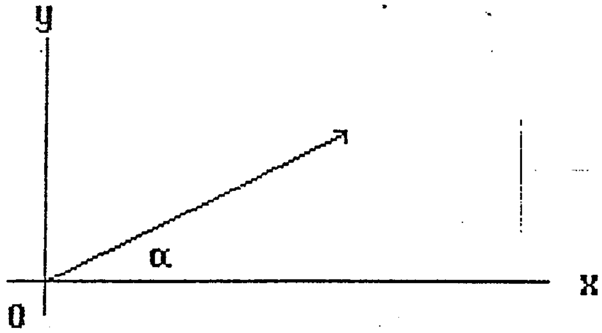
ESCOGE 4 DE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1) Una pelota es lanzada con velocidad v_o desde un punto O al nivel del suelo hacia una pared vertical de altura h, que está a una distancia c de O.



Prueba que si
$v_o^2/g < h + (h^2 + c^2)^{1/2}$
la pelota no puede pasar encima de la barda. (Descuenta todas las fuerzas que actúan sobre la partícula excepto la gravedad).

2) Un proyectil es lanzado desde un punto O con velocidad v_o con un ángulo de elevación α.



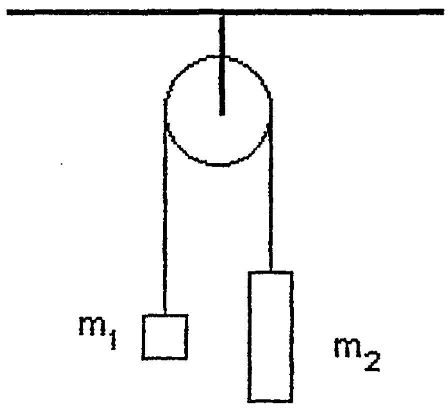
Despreciando todas las fuerzas excepto la gravedad,
a) encuentra la ecuación de la trayectoria de la partícula, tomando O como el origen y usando coordenadas x,y.
b) Prueba que el máximo alcance es para un ángulo $\alpha = 45°$.

3) ¿Qué viaja más rápido, la luna o un satélite en órbita alrededor de la tierra a 150 km sobre su superficie? ¿Cuál es la razón de las velocidades en términos de la razón de los radios? ¿Cuál es la razón de los periodos?

4) Una partícula de masa m se mueve verticalmente sujeta a una fuerza gravitacional constante $F = -mg$.
Si x es la altura de la partícula en un tiempo t, v es la velocidad de la partícula en el tiempo t, y v_o es la velocidad inicial, demuestra que

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgx = \frac{1}{2} m v_o^2$$

5) En una polea se cuelgan dos masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 3$ kg.



Suponiendo que la cuerda no se estira y que no hay fricción, encuentra la aceleración de m_2 ($g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$).

SOLUCION DEL EXAMEN

1) La región de movimiento posible está dada por

$$x^2 \leq \frac{2\mu^2}{g}\left(\frac{\mu^2}{2g} - y\right)$$

$$\sup \frac{\mu^2}{g} < h + (h^2 + c^2)^{1/2} \qquad y = h$$

$$2\frac{\mu^2}{g}\left(\frac{\mu^2}{2g} - h\right. < 2\left]\left(h + (h^2 + c^2)^{1/2}\right)\left(\frac{h}{2} + \frac{()}{2} - h\right) = c^2$$

3)

$$\frac{Gm_t m_s}{r^2} = m_s w^2 r$$

Ley de Kepler

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{w_2^2}{w_1^2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

$$w^2 = \frac{Gm_t}{r^3} \qquad r_1^3 w_1^2 = r_2^3 w_2^2$$

$$v = w\,r \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1 r_1}{w_2 r_2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}}$$ razón de velocidad

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$ razón de los periodos

$$T_1^2 = T_2^2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad T_1^2 = T_2^2 \quad (216\,000) \qquad T_1 = .29 \text{ hrs.}$$

4)

$$F = -mg$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -gm$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = -gm\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = -gm\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int_0^t -gm\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$m\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int_0^x -gm\,dx$$

$$m\frac{1}{2}v^2 = -gmx + c$$

en $v = v_0 \qquad x = 0$

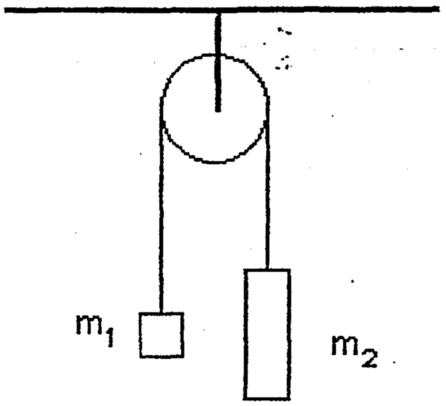
$$c = m\frac{1}{2}v_0^2$$

EXAMEN TEOREMAS DE CONSERVACION

1) En una polea se cuelgan dos masas m_1 y m_2. Suponiendo que no hay fricción, que la cuerda no tiene masa y que no se estira,

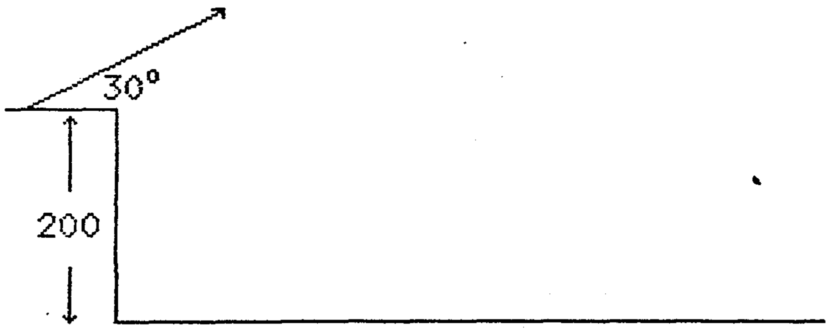
a) encuentra la velocidad de las dos masas cuando m_2 ha recorrido una distancia d partiendo del reposo.

b) Encuentra la aceleración a partir de esta expresión para la velocidad.



2) Un satélite de masa M se mueve alejándose del sol bajo la influencia de una fuerza k/x^2 dirigida hacia el centro del sol. Si el satélite es lanzado desde una distancia r del centro, muestra que su velocidad de escape es $(2k/r)^{1/2}$.

3) Un proyectil de 0.1 kg es lanzado desde lo alto de un acantilado de 200m de altura con una velocidad inicial de 50m/s, con un ángulo de elevación de 30°.



Descontando la resistencia del aire, ¿cuál sería su velocidad al tocar el suelo?

4) ¿Cuál es el trabajo necesario para mover un satélite de masa M de la superficie de la tierra a una órbita de 42000 km de radio?
[radio tierra 6.37×10^6m, masa tierra 5.98×10^{24} kg, $G = 6.671 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$]

5) Una partícula de masa m se mueve en el espacio. En coordenadas rectangulares muestra que el momento angular de la partícula con respecto al origen está dado por:

$\mathbf{H_0} = m\,(y\, dz/dt - z\, dy/dt,\ z\, dx/dt - x\, dz/dt,\ x\, dy/dt - y\, dx/dt)$

EXAMEN DE MECANICA

PRIMERA PARTE MOVIMIENTO PLANETARIO

ESCOGE **DOS** DE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

1) Descontando la fricción, encuentra la velocidad con la que debe ser lanzado un satélite desde la superficie de la tierra para alcanzar el punto entre la tierra y la luna donde la fuerza de gravedad es cero.
[Radio tierra 6.37×10^6 m, masa tierra 5.98×10^{24} kg, masa luna 7.34×10^{22} kg, distancia tierra-luna 3.84×10^8 m]

2) Muestra que una órbita circular $r = a$ es solución de la ecuación de movimiento planetario

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = -k\mathbf{r}/r^3$$

si el momento angular con respecto al origen tiene un valor específico. Encuentra este valor.

3) El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica de excentricidad $e = 0.97$ y periodo 76 años.
a) Calcula el semieje mayor del cometa en términos del semieje mayor de la tierra.
b) Encuentra la distancia mínima del cometa al sol y su distancia máxima.
[$r_p = a(1 - e)$, $r_a = a(1 + e)$]

SEGUNDA PARTE MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

ESCOGE **DOS** DE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

1) El péndulo de Foucalt fue puesto en Paris en 1851 para mostrar el efecto de la rotación de la tierra. Su longitud es 69 m. Encuentra su periodo.

2) Una partícula de masa m se mueve en línea recta bajo una fuerza $-m\omega^2 x$, donde ω es una constante real positiva y x es la distancia a un punto fijo O en la línea, tiene ecuación de movimiento dada por

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$$

a) Muestra que $x = a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t)$ es solución de la ecuación de movimiento.
b) La partícula en $t = 0$ está en la posición $x = a_0$ y se suelta de modo que su velocidad es cero. Determina los valores de las constantes a y b.

3) Un cilindro circular de radio a y altura h, de densidad ρ_1, flota en un líquido de densidad ρ_2. Encuentra el periodo de oscilación vertical del cilindro. (El principio de Arquímedes afirma que el empuje hacia arriba sobre el cilindro es igual al peso del líquido desplazado.)