

EL RUIDO: <sup>(1)</sup>  
su caracterización,  
eliminación y síntesis.

33

por

Diego Bricio Hernández <sup>(2)</sup>

CIMAT, Apdo. 402  
36000 Guanajuato, Gto.  
México

10  
55

1986

<sup>(1)</sup> Conferencia dictada el 21.11.86, dentro del XIV Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, celebrado en Guadalajara, Jal., México.

<sup>(2)</sup> Bajo licencia del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, Apdo. 55-534, 09340 México, D.F., México.



## RESUMEN

Se presentan algunos ejemplos de situaciones en las que se detecta el ruido, mismo del que luego se da una caracterización como un proceso estocástico de segundo orden. A la vez, se expone el punto de vista de que hay ruido siempre que se efectúe una medición, y de que sólo en aquellos casos en que el ruido es despreciable en relación con la magnitud medida se justifica un análisis de tipo determinístico. Además, la caracterización antes mencionada se utiliza como base para el diseño de un método para generar trayectorias de ruido coloreado a partir de trayectorias de ruido blanco, dentro del espíritu clásico de la Ing. de Comunicaciones.

Por otro lado, la conveniencia de generar trayectorias de ruido resulta porque éste es una componente importante de algunos modelos matemáticos de las ciencias experimentales y se desea simular el comportamiento de dichos sistemas. Se da un ejemplo de lo anterior, basado en una situación que se presenta en Agricultura. Se ilustra el artículo con gráficas generadas mediante un paquete computacional para la generación de trayectorias de ruido blanco utilizando procesos de transporte uniforme. Es pertinente aclarar que esta presentación está dirigida a un público amplio, lo que se refleja en el estilo adoptado en ella.

## O. INTRODUCCION.

En este artículo se estudia el ruido presente en las mediciones de cantidades físicas, tanto en las constantes como en las que varían con el tiempo -o con respecto a cualquier otro parámetro unidimensional. Por razones de espacio hemos dejado de fuera el importante caso de parámetro bidimensional (en general, multidimensional), de tanta importancia práctica en la actualidad para el procesamiento de imágenes [Marroquín (1987)].

Aunque si nos referimos brevemente a la eliminación de ruido (sólo en la sección 2, en relación con las mediciones físicas independientes del tiempo), el énfasis se pone en la caracterización y aplicaciones del ruido en todo el resto del artículo. La conveniencia de emprender este tipo de estudio radica en que numerosos modelos matemáticos de interés en ciencia e ingeniería contienen componentes "ruidosas" (p. ej., véanse [Alvarez-Gamas (1986)], [Gorostiza (1983)]): para conocer el comportamiento de los sistemas reales correspondientes hay que simular con base en dichos modelos, para lo cual debemos generar computacionalmente los términos en los que aparece el ruido.

La sección 3 contiene un ejemplo de interés en Agricultura que busca complementar el tratamiento dado en [Hernández (1986)]. Es un ejemplo sencillo, mediante el cual se desea ilustrar en un caso simple la aplicación de las ecuaciones diferenciales y los procesos estocásticos a la solución de problemas prácticos. Los conceptos sobre la caracterización del ruido, la síntesis de ruido coloreado a partir de ruido blanco y la generación de ruido blanco gaussiano que después se dan van motivados en dicho ejemplo. Por supuesto, la validez de los conceptos presentados en las secciones 4, 5, 6 y 7 va más allá de tal situación práctica. Con objeto de aligerar la presentación, hemos omitido toda referencia al Cálculo Estocástico, limitándonos en todo momento a los métodos lineales. En un trabajo anterior [Hernández (1985)] hemos presentado los conceptos del Cálculo Estocástico requeridos para estudiar sistemas no lineales, incluyendo a la vez una extensa bibliografía al respecto. Refiéranse los lectores a dichos trabajos con objeto de ampliar y profundizar los conceptos dados aquí. A propósito, también hemos buscado minimizar los requisitos de Probabilidad y Procesos Estocásticos que se piden a los lectores; como referencias estándar sobre dichos temas proponemos a [Feller (1966), vol 1] y [Lamperti (1977)]. Bien harían los lectores en consultar dichas obras.

La fórmula o figura  $n$  se cita desde la sección  $m$  utilizando el nombre " $m.n$ " si  $m \neq n$ ; en caso contrario, se usa el nombre local " $n$ ". Una versión previa de este artículo fue revisada por L. G. Gorostiza, de quien obtuvimos numerosas sugerencias que mucho contribuyeron a mejorar la calidad del material aquí presentado; por todo ello, muchas gracias. Para terminar esta introducción, no falta sino agradecer a la Sociedad Matemática Mexicana su amable invitación a dictar una de las cuatro conferencias magnas durante su pasado XIV Congreso, conferencia recogida en este artículo con leves modificaciones.

## 1. ORIGENES DEL RUIDO

Toda captación de información genera ruido. En efecto, se trate de medir una variable física cualquiera, de transmitir una fotografía o un mensaje, de calcular un número real usando aritmética de precisión finita, de recoger las respuestas a una encuesta o de tirar un dado, la respuesta obtenida está contaminada por ruido. La presencia de este ruido contaminante se manifiesta de diversas maneras, pero la manifestación más característica es la falta de reproducibilidad de los resultados obtenidos.

Tipicamente, al medir una magnitud física y repetir el experimento un número  $N$  de veces, se obtienen resultados distintos, digamos

$$x_1, \dots, x_N;$$

en vista de la no reproducibilidad que indican estos resultados, lo usual en las ciencias experimentales es calcular la media aritmética de los resultados, a saber

$$\bar{x}_N = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}, \quad (1)$$

con objeto de dar un solo "representante" de los resultados.

Más aún, es frecuente reportar dicha media como el resultado de la medición, diciendo que la variabilidad observada es simplemente "error experimental"; esto se hace, por ejemplo, siempre que se cumpla una condición del tipo

$$|x_i - \bar{x}_N| < \epsilon, \quad i=1, \dots, N, \quad (2)$$

donde  $\epsilon$  es una tolerancia preespecificada por el experimentador. En la práctica es esta última condición la que justifica el uso de un enfoque determinístico a la descripción de los fenómenos físicos, tan frecuentemente utilizado.

A manera de ilustración, consideremos un fenómeno tan familiar como es la caída libre de un cuerpo (p. ej., una piedra pequeña) a partir del reposo. Supongamos que

- a) el fenómeno se da en el vacío,
- b) la aceleración de la gravedad es constante,
- c) el cuerpo es una partícula puntual de masa conocida y que
- d) se conoce la altura desde la cual se deja caer.

Supongamos también que se dispone de medios para medir tiempo y posición con precisión satisfactoria, de tal manera que

cada repetición del experimento arroja una tabla de dos columnas, a saber la de instantes  $t_1, \dots, t_m$  y la de las alturas respectivas  $z_1, \dots, z_m$ . Se repite el experimento  $N$  veces, y si para cada instante considerado las mediciones de la altura correspondiente cumplen una condición del tipo (2), se dice entonces que "el fenómeno es determinístico", en el sentido de que "para cada instante de tiempo hay uno y solo uno valor de la altura a que se encuentra el cuerpo que cae". Así pues, la variabilidad de hecho observada simplemente se descarta, atribuyéndola al "error experimental".

El modelo cinemático usual para este fenómeno es la función  $z: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$z(t) = \begin{cases} z_0 - gt^2/2 & \text{si } t \leq \sqrt{(2z_0/g)} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En otras palabras, mientras que la piedra se encuentra en el aire (para  $t \leq \sqrt{(2z_0/g)}$ ),  $z$  satisface el problema de valores iniciales (PVI)

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g, \quad z(0) = z_0, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0. \quad (3)$$

Pero a dicho modelo subyacen hipótesis que quizá no siempre se cumplan. Por ejemplo,

a) Bajo condiciones normales el fenómeno no se da en el vacío. De hecho, se sabe que el aire está constituido por moléculas, las cuales chocan con la piedrecilla, intercambiando impulso lineal con ella,

b) La aceleración de la gravedad varía en razón inversa al cuadrado de la distancia que hay al centro de la Tierra. Como la piedra cae, dicha distancia cambia a lo largo de la trayectoria seguida.

Mantengamos todas las hipótesis que subyacen al modelo anterior con excepción de la primera, la que reemplazamos por la observación a) precedente. La acción de las moléculas del aire sobre la piedra se manifiesta mediante una fuerza  $F$  que actúa en dirección vertical y que depende del tiempo y del lugar que ocupe la piedra, y quizá también de su velocidad. Por ello, el PVI (3) debe cambiarse por

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{1}{m} F\left(t, z, \frac{dz}{dt}\right), \quad z(0) = z_0, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0, \quad (4)$$

donde  $m$  es la masa de la piedra.

Si la fuerza de gravedad es grande comparada con la que ejercen las moléculas del aire sobre la piedra, entonces el término adicional se puede despreciar y el modelo usual será

aceptable. De hecho, esto es lo que sucede a nuestra escala, donde sabemos que (3) aporta una descripción aceptable del movimiento de una partícula en caída libre. La Fig. 1 es una gráfica de la trayectoria prevista por este modelo determinístico.

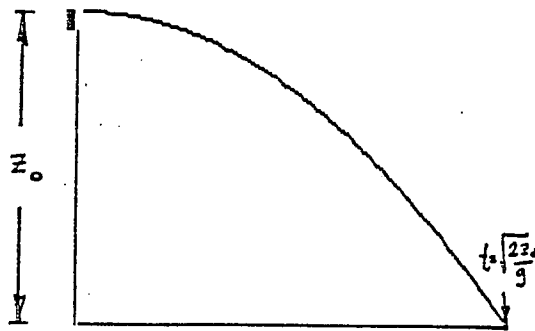


Figura 1

Supongamos ahora que la "piedra" es pequeña, de hecho una partícula de polvo, una pluma de ave o, más aún, una molécula. Podemos imaginar una sucesión de experimentos idénticos, en los que dejamos caer partículas de masa cada vez menor. Encontramos que los efectos de los choques con las moléculas del aire se vuelven cada vez más apreciables, de tal manera que la trayectoria se vuelve errática, pareciéndose cada vez más a la Fig. 2 antes que a la Fig. 1.

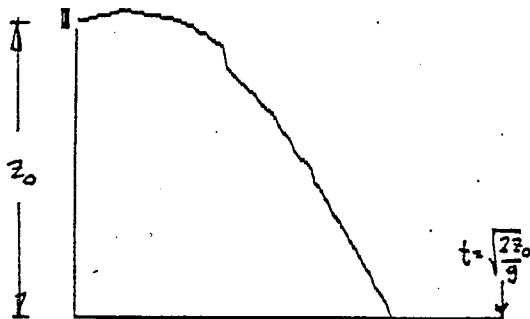


Figura 2

El fenómeno observado es el efecto resultante de la atracción de la gravedad, combinada con los choques de la partícula con las moléculas del medio. Para ser más precisos, en este caso se trataría de un movimiento (fluctuante) en tres dimensiones y no unidimensional como era el caso para masas grandes, lo cual se debe a que los choques se dan en todas direcciones. En las dos coordenadas restantes se observaría un comportamiento parecido al que se ilustra en la Fig. 3 (página siguiente).

Por cierto, la Fig. 2 supone que el cuerpo cae, si bien de manera fluctuante, por lo que podemos esperar variaciones mucho mayores en el valor de  $z$  que los que se observan en  $x$  e  $y$ . Sin embargo, si tomamos partículas de masa aún más pequeña (digamos una de polvo), observamos que las tres coordenadas se comportan más o menos según se indica en la Fig. 3 de la página siguiente. El fenómeno es bien conocido (efecto Tyndall) y para observarlo basta hacer entrar un rayo de luz a una habitación a oscuras.

Huelga decir que las observaciones señaladas no dependen tanto de la magnitud misma de la masa, sino más bien de su valor relativo con respecto a las partículas del medio. De manera muy importante, dichas observaciones dependen también del valor local de la aceleración de la gravedad. En efecto, el que la partícula caiga o no depende únicamente del balance de dos efectos contrarios: el campo de fuerza externo (que tira hacia abajo) y el empuje hacia arriba provocado por los choques contra algunas de las partículas del medio.

A manera de conclusión, podemos decir que el mismo fenómeno

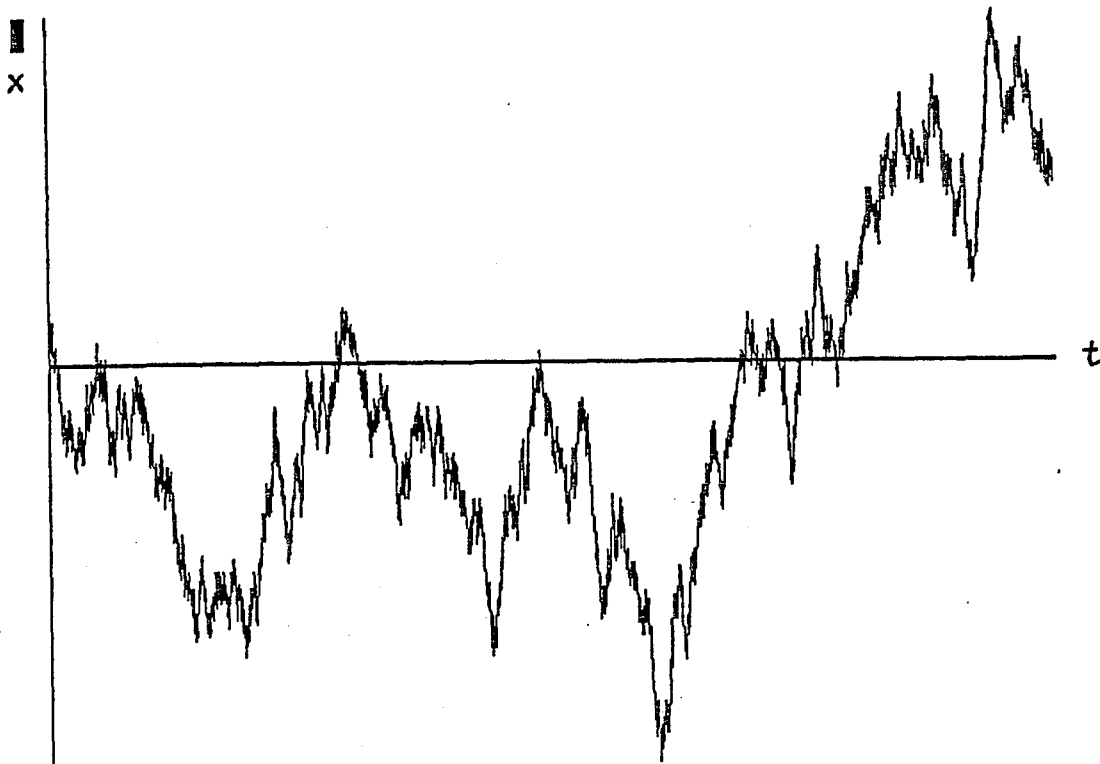


Figura 3

puede analizarse bajo una òptica determinística en algunos casos, pero en otros no. Cual enfoque es el adecuado depende unicamente de las circunstancias en las que se observa el fenòmeno. Aquí nos ocuparemos del estudio de fenòmenos bajo circunstancias tales que no resulta conveniente analizarlos bajo una òptica determinística, pues hacerlo nos llevaría a construir modelos deficientes. Se estudiaràn situaciones erràticas, en las que no se obtienen observaciones reproducibles. En tales casos se dice de lo que se observa que tiene ruido.

## 2. ELIMINACION DEL RUIDO.

Al comienzo de la secciòn precedente vimos còmo se representan mediante un solo nùmero (la media) los  $N$  valores obtenidos durante otras tantas repeticiones de la misma mediciòn. Esto es bueno, pues el ruido presente en los datos se elimina (al menos parcialmente) mediante la operaciòn de tomar la media y se reduce tanto màs cuanto mayor sea  $N$ . Veamos a continuaciòn por què, utilizando un enfoque probabilístico.

Segùn dicho enfoque, en cada mediciòn obtenemos como resultado uno de una infinidad de valores -todos ellos posibles, aunque no todos igualmente probables. Lo anterior se formaliza mediante el concepto de variable aleatoria (VA) [Feller (1966), vol. 1]: el resultado de una mediciòn es una VA y representamos una sucesiòn de mediciones independientes mediante una sucesiòn



de VA's tambien independientes.

Brevemente y sin pretender reemplazar una lectura de las secciones adecuadas de [Feller (1966), vol.1], podemos decir lo siguiente: si X es una VA, entonces podemos calcular la probabilidad de que tome valores comprendidos entre a y b, cualquiera que sea el intervalo [a,b]. En símbolos, dicha probabilidad se denota mediante

$$P(X \in [a,b]), \text{ o bien } P(a \leq X \leq b).$$

La infinidad de valores que en principio podría tomar una VA X pueden promediarse de manera ponderada tomando la esperanza matemática de X, denotada como EX, tambien llamada "el valor esperado de X". La operación E es lineal, en el sentido de que

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha EX + \beta EY. \quad (1)$$

Supondremos en cuanto sigue que las VA's que encontremos tienen todas valor esperado.

La idoneidad del valor esperado como "representante" de los posibles valores de X se mide mediante la varianza de X, que se define como

$$\text{Var}(X) := E(X - EX)^2. \quad (2)$$

una propiedad muy importante de la varianza es la desigualdad de Chebycheff, según la cual

$$P(|X - EX| > \delta) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\delta^2}.$$

Asi pues, los valores de una VA X podrán apartarse mucho de su valor esperado sólo si X tiene varianza grande; dicho de otra manera, cuanto menor sea la varianza de una VA X, menor será la probabilidad de que ésta tome valores alejados de su valor esperado EX.

De (1) y (2) es muy fácil ver que

$$\text{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \text{Var}(X). \quad (3)$$

Por otro lado, si

$$X_1, \dots, X_n, \dots \quad (4)$$

es una sucesión de VA's, decimos que dichas VA's son independientes si

$$P(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = \prod_{j=1}^n P(X_j \in I_j),$$

para cualquier elección de intervalos  $I_1, \dots, I_n$  y cualquier  $n \geq 1$ .

Es una propiedad muy importante de las VA's independientes el que Var resulta una operación aditiva, en el sentido que

$$\text{Var}(X+Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y), \text{ para } X \text{ e } Y \text{ independientes.} \quad (5)$$

Finalmente, regresemos a nuestra sucesión de VA's independientes, modelo matemático de la colección de todas las posibles mediciones que podemos en principio hacer de la misma cantidad. Sea  $\mu$  el valor esperado de  $X_1$  y  $\sigma^2$  su varianza, de tal manera que  $\mu$  es el "valor real" de la magnitud medida si el método de medición está bien diseñado y  $\sigma^2$  es pequeño si las mediciones son aceptablemente precisas. Más aún, si suponemos que las repeticiones sucesivas del experimento de medición se realizan según idénticas reglas,  $X_2, X_3, \dots$  son meras copias de  $X_1$ , si bien independientes todas, pues el resultado observado de una de ellas no tiene por que influir en la observación de las demás. Así pues, supondremos que la sucesión (4) está constituida por VA's independientes e idénticamente distribuidas (iid), cada una con valor esperado  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .

Si, haciendo un paralelo con (1.1), definimos la VA media muestral de las N VA's  $X_1, \dots, X_N$  mediante

$$\bar{X}_N = \frac{X_1 + \dots + X_N}{N}; \quad (6a)$$

de (1), (4) y (5) resulta fácil llegar a que

$$E\bar{X}_N = \mu, \quad \text{Var}(\bar{X}_N) = \sigma^2/N. \quad (6b)$$

Este último resultado indica que, en efecto, es bueno promediar los resultados que se obtienen al repetir una medición dada: los valores del promedio se agrupan alrededor del valor verdadero de la magnitud medida, con una dispersión tanto menor cuanto mayor sea el número de veces que se repite la medición. Así pues, formar promedios efectivamente "filtra" el ruido presente en las mediciones físicas.

De todo lo anterior resulta razonable modelar la magnitud medida mediante una VA  $X$  que puede expresarse en la forma

$$X = \mu + \epsilon, \quad (7a)$$

donde  $\epsilon$  (el ruido) es una VA con

$$E\epsilon = 0, \quad \text{Var}(\epsilon) = \sigma^2. \quad (7b)$$

En el resto de este trabajo tendremos múltiples oportunidades de utilizar éste y otros modelos del tipo

$$\text{"observación"} = \text{valor verdadero} + \text{ruido}. \quad (8)$$

Por ahora, nos contentaremos con hacer algunos señalamientos de tipo práctico en relación con el filtraje del ruido basado en

modelos del tipo anterior, específicamente (7). En efecto, de (1.1) se llega fácilmente a que

$$\bar{x}_{N+1} = \bar{x}_N + \frac{1}{N+1} v_N, \quad (9a)$$

donde

$$v_N = x_{N+1} - \bar{x}_N. \quad (9b)$$

Esta reformulación muestra varias cosas:

a) a medida que van incorporándose nuevas mediciones, el valor de la media se puede actualizar sin tener que repetir todo el cálculo;

b) el valor de la corrección a añadir es cada vez más pequeño, de tal manera que puede esperarse convergencia.

Desde un punto de vista práctico estas observaciones tienen gran importancia. En la Fig. 1 incluimos algunos resultados computacionales que muestran claramente la conveniencia de organizar los cálculos de esta manera.

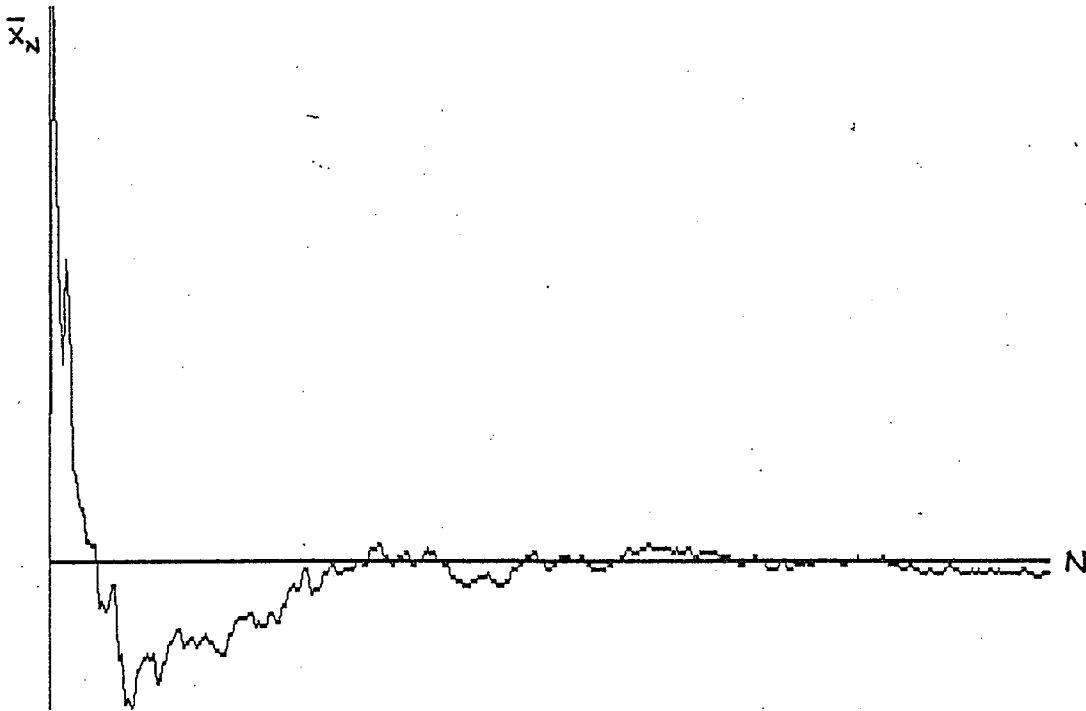


Figura 1

Desde un punto de vista teórico, las relaciones (7) indican

que el mecanismo de eliminación de ruido que proporciona la media aritmética -el filtro (9)- constituye un sistema dinámico con estado el estimador  $\hat{x}$  y actuado por  $v$ , definido por (7a) y al que en este contexto se le conoce como la innovación.

Hemos presentado ya estas ideas en un contexto simple pero más general en [Hernández (1984)] y hemos expuesto con gran amplitud la teoría del filtraje en [Hernández (1985)]. Para mayor información sobre este tema, los lectores pueden acudir a dichos trabajos y a la amplia bibliografía que ahí se cita.

### 3. EL RUIDO COMO AUXILIAR.

Consideremos la siguiente situación:

"Se tiene un cultivo de una planta con alto contenido de un cierto nutriente  $N$ . El valor del cultivo al momento de la cosecha depende de la fracción peso en que se encuentre dicho nutriente; en promedio es de  $c$  pesos/Ton, pero se otorga un premio de  $a$  pesos/Ton si la proporción de  $N$  en la planta excede un cierto umbral  $q_{min}$ , mismo que se descuenta en caso contrario. Se desea estimar el valor unitario de la cosecha (en pesos/Ton), la que se levanta  $T$  meses después de la siembra. Conviene señalar que en la región se distinguen sólo dos estaciones, la de lluvias y la de secas, situación por demás típica en estas latitudes; además, se dispone de un buen servicio meteorológico, con registros de las condiciones climatológicas que cubren un periodo de varios años".

Sea  $q(t)$  la fracción peso de  $N$  en el instante  $t \geq 0$ . Entonces, la solución del problema está dada por

$$\text{Valor unitario} = \begin{cases} c+a, & \text{si } q(T) \geq q_{min} \\ c-a, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así pues, para resolver este problema se requiere calcular  $q(T)$ ; a su vez, para ello convendría conocer la función  $q$ , la cual puede resultar de un modelo cinético de la producción de  $N$  en la planta. Para simplificar la presentación, supongamos que  $N$  es humedad, misma que se "produce" en la planta como resultado del intercambio entre ella, la atmósfera y el suelo. De considerar otro nutriente (digamos una determinada proteína vegetal), habría que construir un modelo matemático para la fijación del nitrógeno atmosférico en la planta, lo cual es una tarea mucho más compleja.

Se ha construido un modelo cinético para esta situación en la sección 2 de [Hernández (1986)], a saber

$$\frac{dq}{dt} = -\gamma(q - q_a) + \beta(q_s - q), \quad (1)$$

donde

$q_a/q_s$  = fracción peso de humedad en la atmósfera/el suelo,

en tanto que  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes positivas (que suponemos son conocidas).

Los registros de humedad atmosférica en la comarca, los cuales acusan comportamientos del tipo que se ilustra en la Fig. 1. Del análisis de dichos registros resulta evidente la presencia

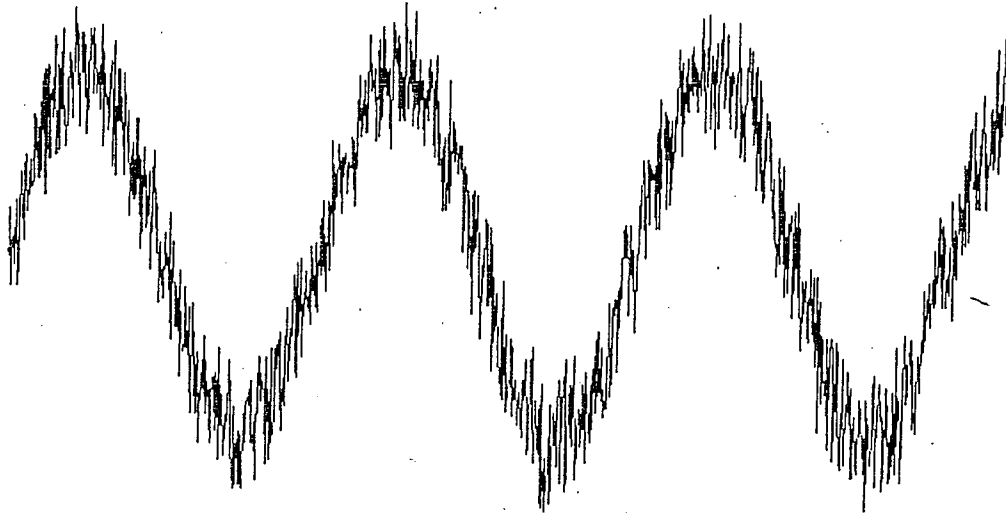


Figura 1

de dos componentes que hacen que  $q_a(t)$  se desvie de su valor promedio  $\bar{q}_a$ , a saber

a) una componente de baja frecuencia (anual), producto de la variación estacional, del tipo

$$A \sin(\omega t + \delta),$$

b) una componente de alta frecuencia  $\epsilon(t)$ .

Sea  $\mu(t) := \bar{q}_a + A \sin(\omega t + \delta)$ , de tal manera que las observaciones sobre la humedad atmosférica pueden representarse mediante la función

$$q_a = \mu + \epsilon. \quad (2)$$

Al comparar los registros de humedad atmosférica tomados en años diferentes se encuentran descripciones del mismo tipo,

pero los residuales  $\varepsilon(t)$  varían con  $t$  en forma por demás errática e imprevisible, tal y como se ilustra en la Fig. 2. Esto nos

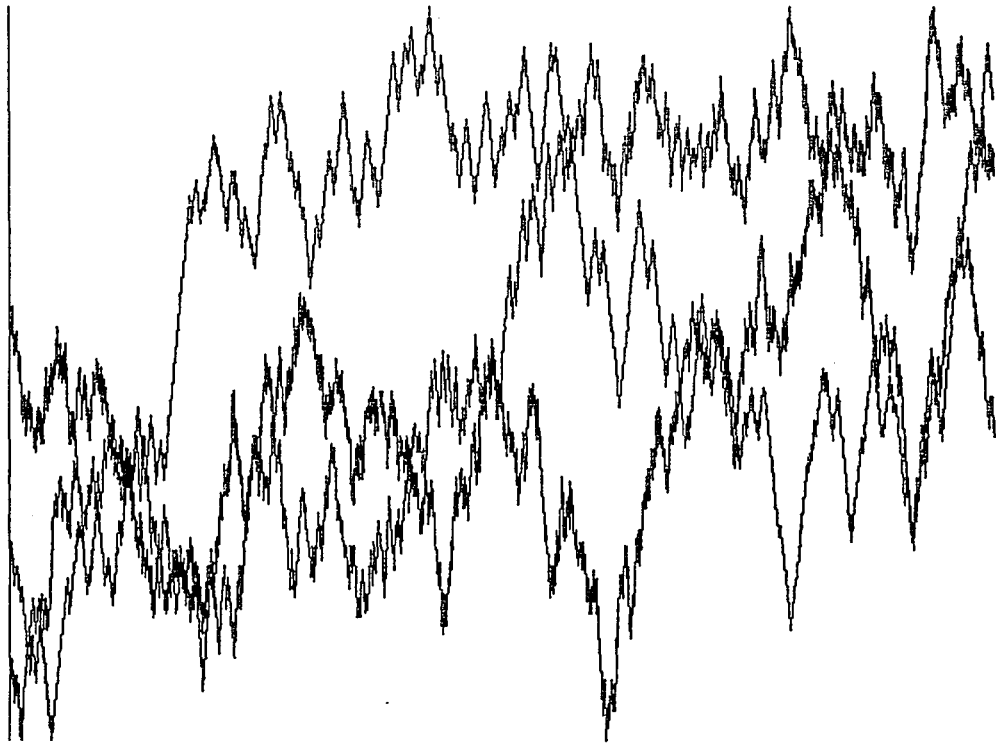


Figura 2

indica que el modelo (2) para las observaciones es del tipo general (1.8). La única diferencia entre estas dos situaciones radica en que antes nos interesaba conocer el "valor verdadero" de la variable medida, mientras que ahora sólo nos interesa caracterizar probabilísticamente el ruido residual  $\varepsilon(\cdot)$  en forma satisfactoria con objeto de utilizarlo en la integración de la ecuación diferencial (1). Dicha caracterización será tal que haya

\* una variable aleatoria  $\varepsilon(t)$  para cada instante  $t \geq 0$ , y

\*\* una medida de la correlación existente entre  $\varepsilon(t_1)$  y  $\varepsilon(t_2)$  para cada par de instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

y se dará en la siguiente sección.

Por lo pronto, podemos pensar en resolver la ecuación (1) para cada posible trayectoria del ruido residual, suponiendo conocida la condición inicial  $q(0)$  así como la variación temporal de la humedad en el subsuelo. Encontramos que

$$q = m + \xi, \quad (3a)$$

donde

$$m(t) := e^{-\alpha t} q(0) + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} [\beta q_s(\tau) + \gamma \mu(\tau)] d\tau, \quad (3b)$$

$$\xi(t) := \int_0^t \gamma e^{-\alpha(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (3c)$$

relación claramente de la forma (1.8).

Hecho lo anterior, obtenemos en particular que

$$q(T) = m(T) + \xi(T),$$

donde  $m(T)$  es un número en tanto que  $\xi(T)$  es una VA, de distribución conocida si disponemos del modelo probabilístico del ruido residual  $\varepsilon$ . En consecuencia, podemos conocer las probabilidades  $P\{q(T) < q_{min}\}$  y  $P\{q(T) \geq q_{min}\}$ , con las que se puede calcular el valor esperado del precio unitario de venta de la cosecha (también una VA). Se obtiene así

$$\begin{aligned} & (c-a)P\{q(T) < q_{min}\} + (c+a)P\{q(T) \geq q_{min}\} \\ & = c+a[P\{q(T) \geq q_{min}\} - P\{q(T) < q_{min}\}], \end{aligned}$$

con lo cual queda resuelto el problema planteado.

Así pues, no en todas las aplicaciones el ruido juega un papel negativo: aquí podemos decir que el considerarlo nos permite construir mejores modelos matemáticos para situaciones con elementos erráticos fuera de nuestro control.

#### 4. CARACTERIZACION DEL RUIDO.

Comencemos por presentar algunos conceptos estadísticos de gran importancia para el estudio del ruido y que se originaron en la Ingeniería de Comunicaciones, en donde eran ya utilizados en la década de los años 40 (véase, por ejemplo, el artículo de S. O. Rice, "Mathematical Analysis of Random Noise", en [Wax (1954)], también [Gabor (1946)]). Para simplificar la exposición, comencemos por limitarnos a ruidos definidos desde el pasado más remoto, es decir, para  $-\infty < t < +\infty$ ; nos limitaremos, además, a ruidos con trayectorias continuas, y supondremos que todos los límites que ocurren a continuación existen. Con fines de ilustración, consideremos una trayectoria de ruido como la dada en la Fig. 1 de la página siguiente.

Definimos la media temporal de una trayectoria observada  $r(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$  como

$$\langle r \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T r(t) dt, \quad (1)$$

y decimos que una tal trayectoria es centrada si  $\langle r \rangle = 0$ . En tal caso (que será el único que consideraremos de aquí en adelante),

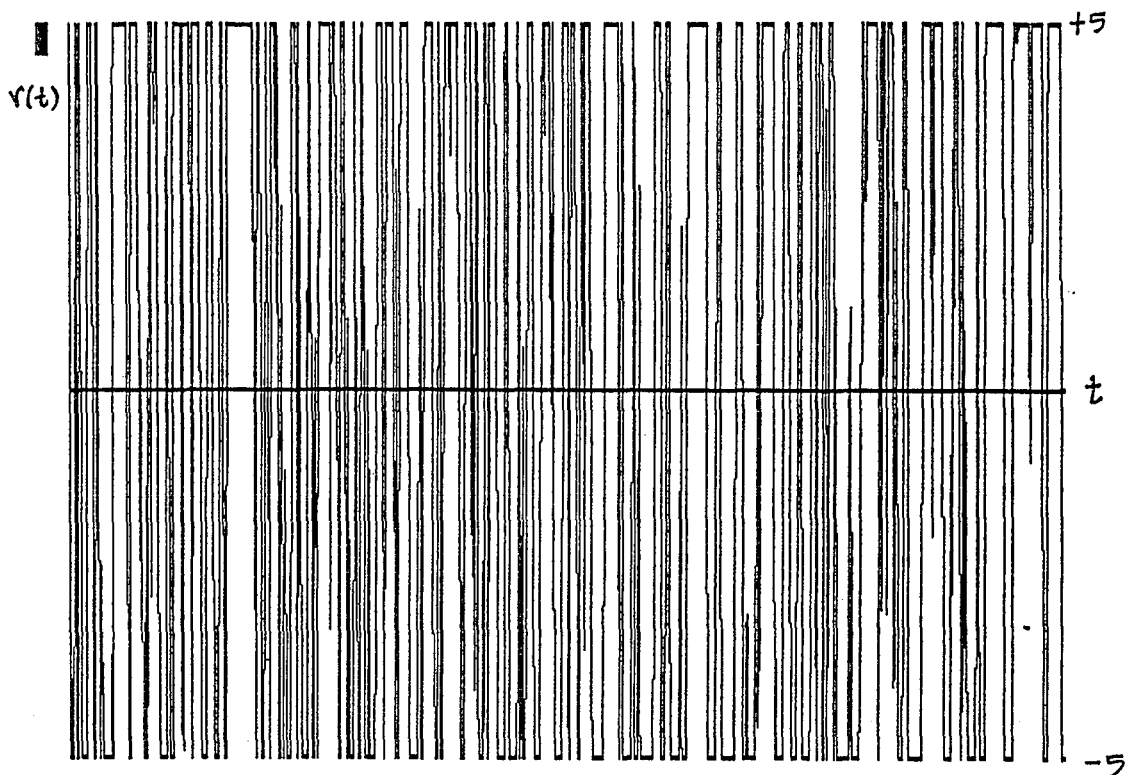


Figura 1

definimos la función de correlación de dicha trayectoria como aquella función real de variable real dada por  $c(\tau) := \langle s \rangle$ , donde  $s(t) := r(t)r(t+\tau)$ ,  $-\infty < \tau < +\infty$ . En otras palabras,

$$c(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T r(t)r(t+\tau) dt, \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (2)$$

Tipicamente, para  $\tau$  pequeña los productos  $r(t)r(t+\tau)$  serán positivos, con un máximo en  $\tau=0$ , pero podrán tomar valores cualesquiera si  $\tau$  toma valores cada vez mayores, por lo que su promedio puede tomar cualquier valor, cercano a cero. Así pues, podemos esperar como forma típica de una función de correlación la que se muestra en la Fig. 2 de la página siguiente. En otras palabras, si pensamos (probabilísticamente) que cada  $r(t)$  es un valor de una VA  $\eta(t)$ , entonces  $c(\tau)$  es una medida del grado de independencia de  $\eta(t)$  y  $\eta(t+\tau)$ , de ahí el nombre de  $c$ .

En efecto, encontramos que a la trayectoria de la Fig. 1 corresponde la función de correlación que se muestra en la Fig. 3 de la página siguiente. Es notorio el hecho de que el desorden aparentemente total que exhibe una trayectoria de ruido se convierte en un orden evidente de la gráfica de  $c$ ; este hecho muestra la utilidad del concepto de función de correlación en el modelamiento y caracterización del ruido.



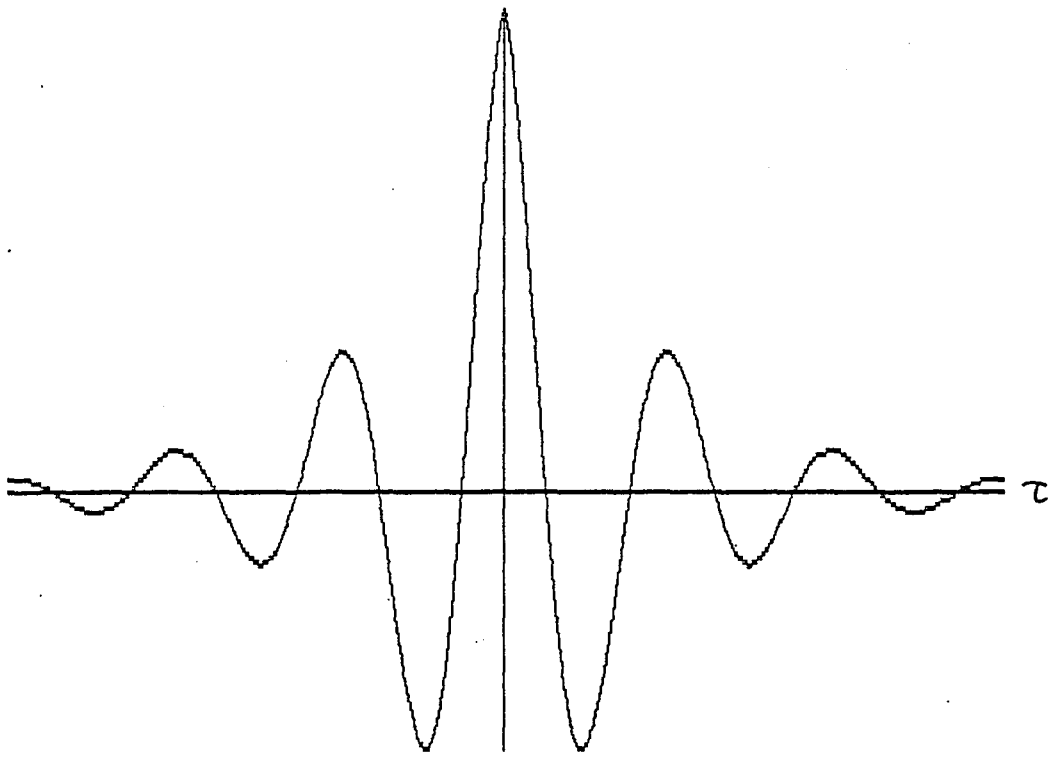


Figura 2

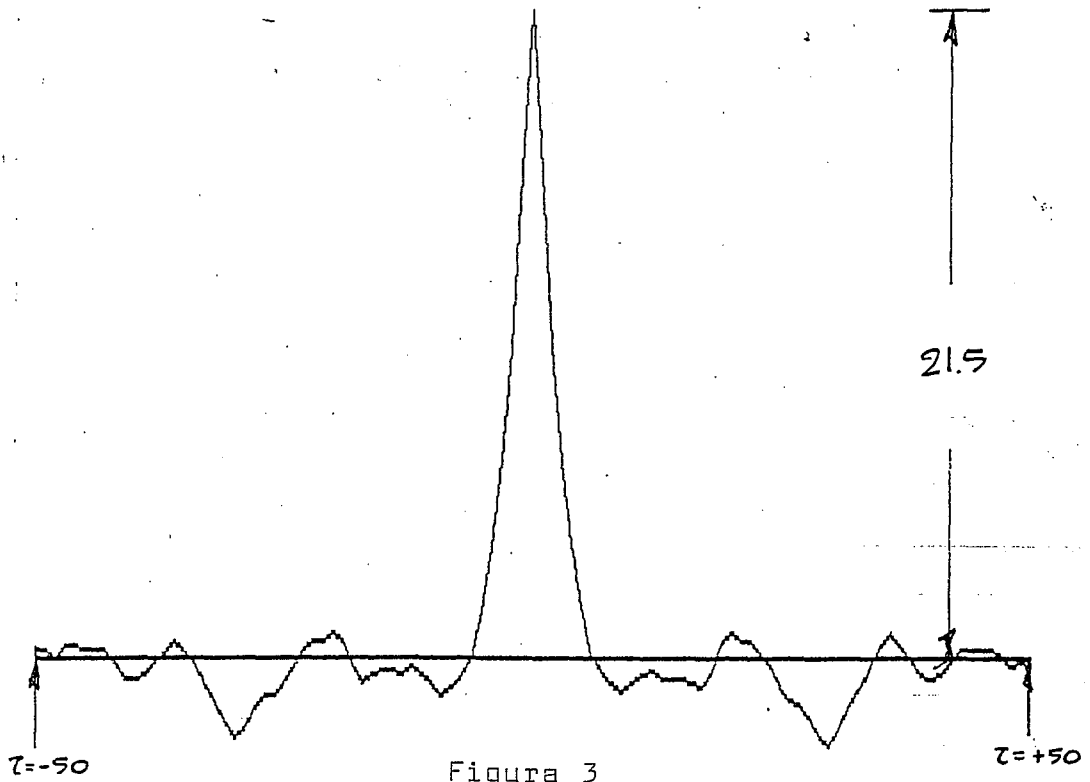


Figura 3

Un concepto equivalente y también muy útil es el de densidad espectral (también llamado espectro de potencia, particularmente en la literatura ingenieril. Este se define como la transformada de Fourier de la función de correlación, es decir,

$$G(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} C(\tau) d\tau. \quad (3)$$

El espectro de potencia correspondiente a la función de correlación anterior se da en la Fig. 4. En dicha gráfica se aprecia con mayor claridad que en la de c el "desorden" evidente en la trayectoria del ruido: aparece una frecuencia principal, pequeña, pero junto con ella aparecen también muchas otras frecuencias con peso apreciable.

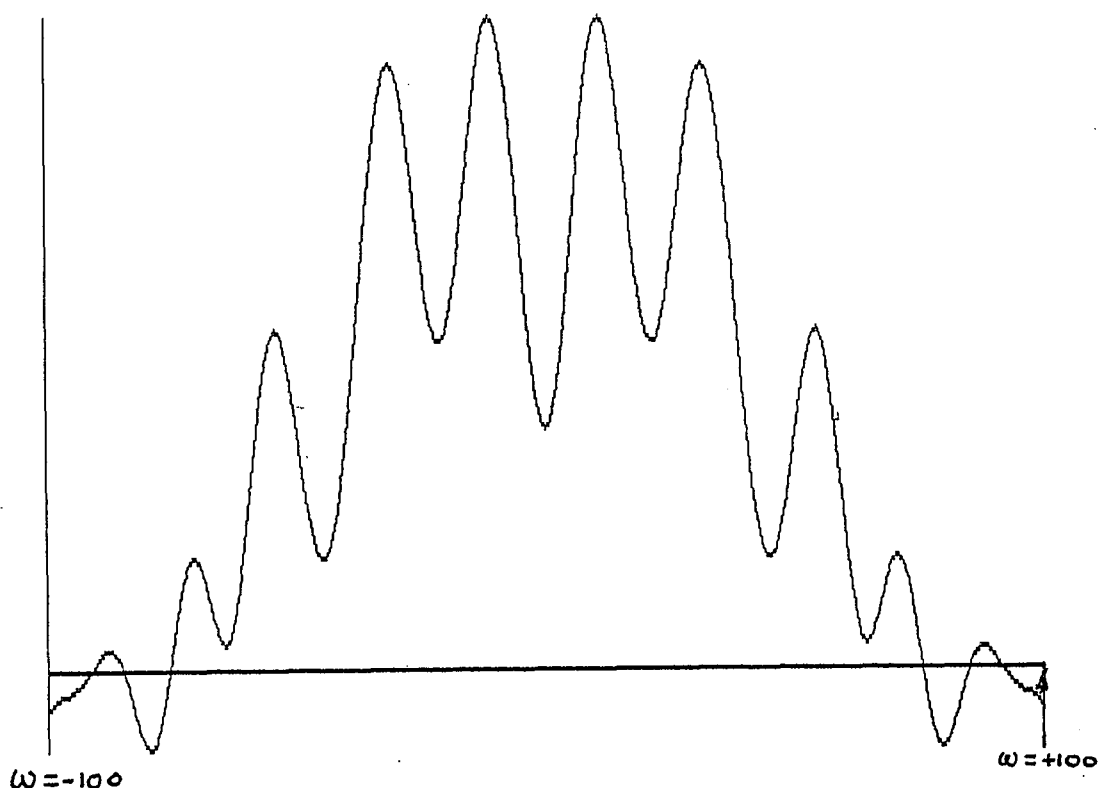


Figura 4

Estos conceptos formaban la base del tratamiento matemático del ruido en la Ing. de Comunicaciones hasta hace relativamente poco tiempo. Actualmente podemos dar descripciones probabilísticas, en términos de procesos estocásticos (véase, por ejemplo, el análisis que se da en [Gorostiza (1983)]), basándose en la idea de considerar cada valor observado  $r(t)$  como una muestra tomada de una "población" descrita por una VA  $X(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Así pues, el modelo probabilístico del ruido es un proceso estocástico (PE), es decir, una familia de VA's

$$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}, \quad (4)$$

[Lamperti (1977)]. Las trayectorias (tambièn llamadas muestras) del ruido no son sino las trayectorias de este proceso estocástico. Desde este punto de vista, tanto la media temporal

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T X(t) dt, \quad (5a)$$

como los valores de la función de correlación

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T X(t)X(t+\tau) dt, \quad (5b)$$

calculados tomando una trayectoria del proceso estocástico (4), son variables aleatorias. Los valores numéricos calculados en (1) y (2) a partir de la muestra realmente observada no son sino muestras de las correspondientes VA's.

En teoría, una vez caracterizado el proceso estocástico (4) se puede calcular la función dada por

$$M(t) := EX(t); \quad (6a)$$

sin pérdida de generalidad supondremos aquí que el proceso (4) tiene media cero (es decir, es centrado). Hecho esto, podemos definir su función de correlación mediante

$$C(s,t) := E[X(t)X(s)], \text{ para } s, t \in \mathbb{R}.$$

Interesa el caso particular en que  $C(s,t)$  es realmente función de la diferencia  $t-s$ , caso en el que podemos escribir

$$C(\tau) := E[X(t)X(t+\tau)], \tau \in \mathbb{R}, \quad (6b)$$

para cualquier valor de  $t \in \mathbb{R}$ . En este caso particular se dice que el proceso (4) es (debilmente) estacionario. Serà èsta la familia de procesos estocásticos utilizados para modelar el ruido y para caracterizarlos basta contar con su media (6a) y su función de correlación (6b) —o sólo con la segunda, si nos restringimos al caso centrado. Véanse los capítulos 2 y 3 de [Lamperti (1977)] en relación con esta clase de procesos estocásticos.

En la vida real, se dispone únicamente de una muestra del proceso (4), o cuando mucho de un número finito de ellas; más aún, se dispone sólo de un segmento de longitud finita de una tal trayectoria, digamos

$$\{r(t), -T \leq t \leq T\}.$$

A causa de esta limitación experimental, cuando mucho podemos aspirar a contar con la media  $m$  y la función de correlación  $c(\tau)$

correspondiente a tal trayectoria, que no son sino muestras de las VA's (5a) y (5b), respectivamente. Por ello, a partir de esta limitada información empírica debemos inferir tanto la media  $M$  del proceso como su función de correlación  $\{C(\tau), -\infty \leq \tau \leq +\infty\}$ .

Por fortuna, las VA's (5) tienen una estructura muy sencilla en un gran número de casos de interés. En efecto, bajo ciertas hipótesis adicionales vale el teorema ergódico, según el cual tanto (5a) como cada una de las VA's de (5b) son constantes y de hecho coinciden con (6a) y (6b) respectivamente (con probabilidad 1) [Lamperti, op. cit.]. En otras palabras, podemos estimar  $M$  y  $C$  simplemente muestreando el proceso (4), con lo que se obtiene una trayectoria  $r$ , para luego calcular  $\langle r \rangle$  y  $c(\cdot)$  mediante las fórmulas (1) y (2), respectivamente. Procediendo así, tendremos la seguridad de obtener el valor correcto de las cantidades estimadas - salvo en casos excepcionales (es decir, casos que se dan con probabilidad cero).

### 5. SINTESIS DE RUIDO.

La solución del problema planteado en la sección 3 requiere calcular el costo unitario previsto, valiéndose para ello de la expresión

$$c + a[P\{q(T) \geq q_{\min}\} - P\{q(T) < q_{\min}\}],$$

en la que aparecen dos probabilidades hasta ahora desconocidas. Veamos a continuación la forma de calcularlas.

De (3.3a) resulta que

$$q(T) = m(T) + \xi(T),$$

donde  $m(T)$  se calcula según (3.3b). Por consiguiente, las probabilidades a calcular se refieren a la VA  $\xi(T)$ ; ellas son

$$P\{\xi(T) \geq d\} \text{ y } P\{\xi(T) \leq d\},$$

donde  $d := q_{\min} - m(T)$ . Puesto que suman 1, basta con que aprendamos a calcular una sola de ellas, digamos la segunda.

Para ello nos conviene observar que dicha probabilidad es el valor esperado  $\mu$  de una VA  $X$  que toma únicamente dos valores: 1, si  $\xi(T) \leq d$ , 0 en caso contrario. Pero ya hemos visto que dicho problema se resuelve muestreando un "gran número" de veces la VA en cuestión, para luego estimar  $\mu$  mediante la media muestral (1.1). Una forma eficiente de actualizar los cálculos en forma dinámica es mediante la "fórmula de innovaciones" (2.9), según ya hemos visto. Queda únicamente la tarea de precisar cómo se calculan  $N$  valores  $x_i := \xi_i(T)$ ,  $i=1, \dots, N$  de la variable  $X$ . Basta dar una ojeada a la relación (3.3c) para darse cuenta de que esto requiere contar con  $N$  trayectorias  $\varepsilon_i(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, N$  del ruido residual en la humedad atmosférica, medido a partir de ahora ( $t=0$ ) y hasta el tiempo de la cosecha.

Ahora bien, es obvio que tal comportamiento futuro es inobservable desde el presente, por lo que no nos queda sino recurrir a la simulación, técnica que ya hemos descrito con anterioridad en [Hernández-Alvarez (1985)]. Pero ello a su vez requiere contar con un modelo estocástico del ruido a generar, por lo que debemos indicar cómo generar trayectorias de ruido centrado y con función de correlación (o densidad espectral) conocida.

Con ese fin, consideremos la forma que tiene la relación existente entre el ruido que afecta a la planta y el que en ella se genera, es decir, la relación (3.3c). Resulta claro que la transformación  $T$  que lleva las trayectorias  $r$  de  $\epsilon$  en las de  $\xi$  es lineal; más aún, dicha transformación lineal está dada por una relación de la forma

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \epsilon(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1a)$$

donde

$$h(t) := \begin{cases} ye^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En otras palabras, las trayectorias del ruido producido se obtienen formando la convolución de  $h$  con las trayectorias del ruido que afecta al sistema. Desde este punto de vista, como procesador de ruido el sistema (la planta) queda caracterizado mediante la función  $h$ . Por el conocido teorema de convolución de la transformada de Fourier [Seeley (1966)], (1a) resulta equivalente a afirmar que

$$\hat{\xi}(\omega) = H(\omega) \hat{\epsilon}(\omega), \quad (1b)$$

donde  $H = \hat{h}$  y  $\hat{\phantom{x}}$  denota la operación de tomar transformada de Fourier. La función  $H(\omega)$  caracteriza también el sistema y se conoce como su función de transferencia.

Un teorema muy importante en la Ing. de Comunicaciones [Papoulis (1981)] afirma que, si se cumple la relación (1), entonces

$$G_{\xi}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{\epsilon}(\omega). \quad (2)$$

En otras palabras, (2) caracteriza el ruido a la salida de un sistema lineal con función de transferencia  $H$  correspondiente a un ruido a la entrada que tiene densidad espectral  $G_{\epsilon}(\omega)$ .

Supongamos que  $\epsilon$  es un ruido con espectro de potencia

$$G_{\epsilon}(\omega) \equiv 1, \quad (3)$$

(es decir, un ruido blanco). Entonces, si se desea sintetizar un

ruido con espectro de potencia  $G(\omega)$ , basta pasar ruido blanco por un sistema lineal cuya función de transferencia  $H$  satisfaga la relación

$$G(\omega) = |H(\omega)|^2; \quad (4a)$$

a la salida se tendrá el ruido deseado.

Dada una densidad espectral  $G(\omega) \geq 0$ , la ecuación (4) tiene una infinidad de soluciones, pero no todas son aceptables. Resulta que el sistema resultante, que será del tipo (1), debe ser causal, en el sentido de no tener efectos anticipativos; para ello se requiere exigir además que

$$h(t) = 0 \text{ para } t < 0. \quad (4b)$$

Tal como se ha planteado, el problema (4) se llama de la factorización espectral y ha recibido gran atención en la literatura especializada. Véase [Papoulis (1981)] para las demostraciones de las siguientes afirmaciones.

Se sabe, por ejemplo, que (4) tiene solución si y solo si se cumple la condición de Paley-Wiener

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log G(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty.$$

Desde un punto de vista práctico, quizá convenga mencionar que el problema de síntesis de un ruido dado a partir de ruido blanco tiene solución satisfactoria sólo si (4) tiene una solución "simple", digamos una función racional del tipo de

$$H(\omega) = \frac{b_0(i\omega)^m + \dots + b_m}{(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n};$$

en este caso el sistema correspondiente puede realizarse mediante  $m$  derivadores y  $n$  integradores, lo cual es conveniente. En efecto, la relación entrada-salida correspondiente a esta función de transferencia (con  $m=0$ , por simplicidad) es

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \xi = b_0 \varepsilon.$$

A este respecto, el importante Teorema de la Factorización Espectral afirma lo siguiente:

"Si la densidad espectral  $G(\omega)$  es una función racional positiva, entonces existe una función racional  $H(\omega)$ , solución de (4), con coeficientes reales y cuyos polos tienen parte real negativa".

Así pues, en el caso racional siempre se puede sintetizar un

sistema lineal real y asintóticamente estable; a través de él se hace pasar ruido blanco y así se obtiene el ruido deseado. Véase también la sección 4.5 de [Astrom (1970)] para mayor información al respecto. Falta únicamente aclarar cómo se puede sintetizar el ruido blanco.

## 6. EL RUIDO BLANCO.

Hemos definido el ruido blanco estándar como aquel con espectro de potencia constante e igual a 1 (5.3); cualquier otro ruido puede entonces llamarse coloreado. Esta denominación proviene del hecho que la luz blanca contiene radiación de todas las frecuencias en la misma proporción, de la misma manera que el ruido blanco asigna igual peso a toda frecuencia  $\omega$ , a través de su densidad espectral.

Invirtiendo la transformada de Fourier de 1 [Lighthill (1958), p.19] se obtiene la función de correlación correspondiente al ruido blanco estándar, a saber

$$C(\tau) = 2\pi\delta(\tau), \quad (1)$$

donde  $\delta$  denota la delta de Dirac. Esta, como se sabe, no es ninguna función; sin embargo, en Física e Ingeniería se maneja formalmente como si lo fuese (y, justo es decirlo, procediendo así se llega a resultados correctos que son bastante útiles). Sus propiedades se pueden resumir en el hecho de que actúa sobre las funciones reales continuas en toda la recta según prescribe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0). \quad (2)$$

Hay muchas construcciones rigurosas que justifican el uso de  $\delta$  en relaciones como (2) - se puede consultar, entre otras referencias, el Apéndice al Cap. VI de [Courant-Hilbert, vol.2 (1961)], aunque recomendamos [Lighthill (1958)] como referencia sobre este tema. Animados únicamente por el propósito de aclarar esta propiedad del ruido blanco y sin ninguna pretensión de rigor, diremos que (2) puede entenderse en un sentido límite de la manera siguiente:

Sea  $\{\sigma_n\}$  una sucesión cualquiera de números positivos que tiende a 0. Es un resultado estándar del Análisis Armónico que las funciones

$$C_n(\tau) := \left(\frac{2\pi}{\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

y

$$G_n(\omega) := \exp\left(-\frac{\sigma_n^2\omega^2}{2}\right),$$

satisfacen (4.3) para cada  $n \geq 1$ . Es fácil convencerse de que las ambas funciones tienen gráficas cualitativamente semejantes: las dos toman su máximo en el origen y descienden monotonamente hacia 0 para valores cada vez mayores (en valor absoluto) del argumento. Sin embargo, para  $n$  grande la gráfica de  $G_n$  tiene el aspecto que se ilustra en la Fig. 1, en tanto que la de  $C_n$  corresponde a la Fig. 2 de la página siguiente.

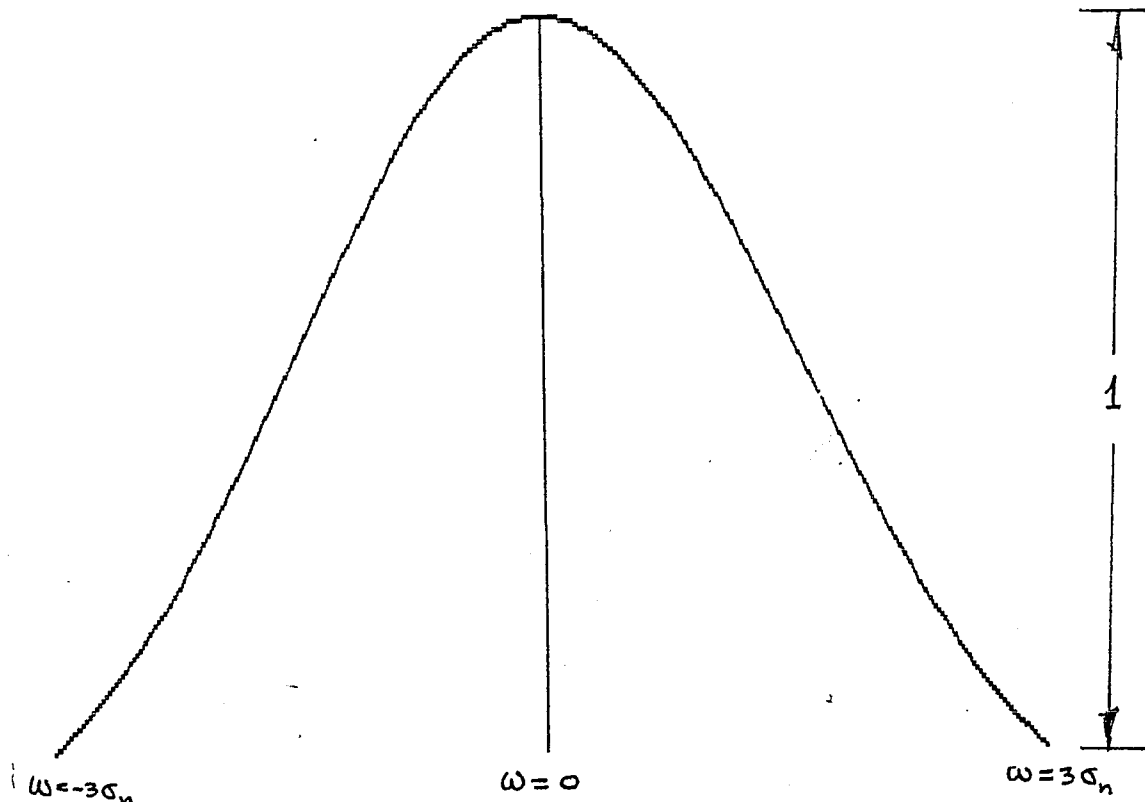


Figura 1

A medida que  $n \rightarrow \infty$ , la gráfica de  $G_n$  se abre, aproximando cada vez mejor la de la función constante e igual a 1 para todo  $\omega$ . Por el contrario, la gráfica de  $C_n$  se vuelve más y más estrecha, con "colas" cada vez más bajas, por lo que aproxima lo que en la literatura ingenieril se conoce como un "pulso en el origen".

Además, se puede demostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} C_n(\tau) f(\tau) d\tau$$

tiende a  $f(0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para cualquier  $f$  continua e integrable en toda la recta real. Véase el Teorema 4-9(iv) de [Seeley (1966)].

Así pues, la relación (2) puede entenderse en el sentido de que, para ciertas sucesiones de funciones  $\{G_n\}$ , se cumple



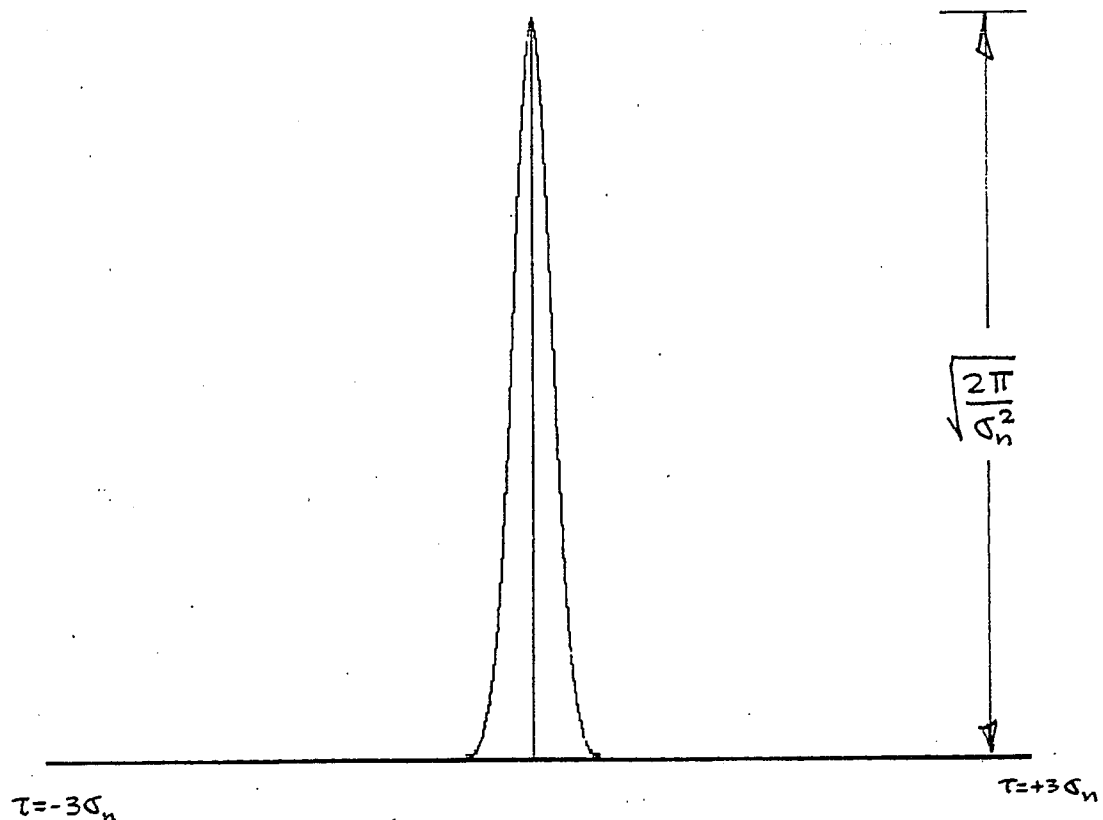


Figura 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(\tau) f(\tau) d\tau = f(0), \quad (3)$$

para cualquier  $f$  continua en toda la recta.

Este punto de vista nos permite sugerir aproximaciones al ruido blanco estándar: basta construir sucesiones de procesos estocásticos, digamos

$$\{\varepsilon_n(t), -\infty < t < +\infty\}, n=1, 2, \dots \quad (4)$$

de tal manera que  $\{\varepsilon_n(t), -\infty < t < +\infty\}$  tiene a  $2\pi\phi_n$  como función de correlación. La sucesión de estas funciones, por (3), aproxima a  $2\pi\delta$  y entonces (4) aproxima al ruido blanco. Este enfoque será precisamente el que adoptemos en la próxima sección para construir nuestras aproximaciones al ruido blanco.

De cuanto se ha dicho hasta ahora acerca del ruido blanco, resulta evidente que su tratamiento matemático riguroso requiere del empleo de algunos conceptos avanzados del Análisis, como es la Teoría de las Funciones Generalizadas. La presentación intuitiva que hemos dado aquí evita el empleo directo de estos conceptos, a cambio de mayores demandas sobre la intuición de los lectores. Quien desee una versión moderna y rigurosa del ruido blanco hará bien en consultar [Hida (1980)].

Nos restringiremos de aquí en adelante al ruido blanco gaussiano, para el que, idealmente

$$\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2), \text{ con } \sigma \text{ muy grande}, -\infty < t < +\infty, \quad (5a)$$

además de que

$$C_\varepsilon(\tau) = 2\pi\delta(\tau), \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (5b)$$

En la práctica, lo que haremos será aproximar este objeto mediante una sucesión (4) de procesos estocásticos, con

$$E[\varepsilon_n(t)] = 0 \text{ y } \text{Var}[\varepsilon_n(t)] \rightarrow \infty,$$

además de tener una función de correlación  $2\pi\phi_n$ , con  $\phi_n$  como en (3). Las trayectorias de ruido blanco ahí generadas son en realidad trayectorias de uno de estos procesos aproximantes, digamos de  $\{\varepsilon_n(t), -\infty < t < +\infty\}$ , con  $n$  suficientemente grande.

## 7. GENERACION DE RUIDO BLANCO.

Hay un gran número de métodos para construir aproximaciones del tipo apenas descrito. La construcción utilizada aquí es la siguiente, para cada  $n \geq 1$ :

Sean  $0 =: T_0 < T_1 < \dots < T_{k-1} < T_k < \dots$  instantes aleatorios distribuidos de tal manera que los incrementos  $T_k - T_{k-1}$ ,  $k=1, 2, \dots$  son VA's independientes e idénticamente distribuidas, cada una con distribución exponencial con parámetro  $n^2$ , es decir

$$P(T_k - T_{k-1} > \tau) = e^{-n^2\tau}.$$

Sea  $B$  una VA independiente de la sucesión anterior y que toma valores  $\pm n$ , cada uno con probabilidad  $1/2$ . Sea  $b$  una muestra de esta VA,  $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$  una de la sucesión de instantes aleatorios. Sea  $w(0) := 0$ ; para  $t > 0$ , sea  $j = j(t)$  tal que  $\tau_{j-1} < t \leq \tau_j$  y supongamos que ya ha quedado definido  $w(\tau_{j-1})$ . Definamos entonces  $w(t) := w(\tau_{j-1}) + (-1)^{j-1} b(t - \tau_{j-1})$ . En otras palabras,  $w: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que parte del origen con pendiente  $b$ , misma que mantiene hasta el instante  $\tau_1$ , en que cambia a pendiente  $-b$ ; dicho valor de la pendiente se mantiene hasta que cambia de signo una vez más en el instante  $\tau_2$ , etc. El proceso estocástico  $\{W_n(t) : t \geq 0\}$  consta de todas las trayectorias  $w$  así construidas. Las Figuras 1, 2 y 3 que se dan en las siguientes páginas ilustran esta construcción, para  $n=5, 10, 20$ , respectivamente.

Sea ahora  $\{U_n(t) : t \geq 0\}$  una copia independiente de dicho proceso y definamos  $W_n(t) := U_n(-t)$ , para  $t < 0$ . Queda así definido un proceso estocástico

$$\{W_n(t), -\infty < t < +\infty\}, \quad (1)$$

al que llamamos un proceso de transporte uniforme.

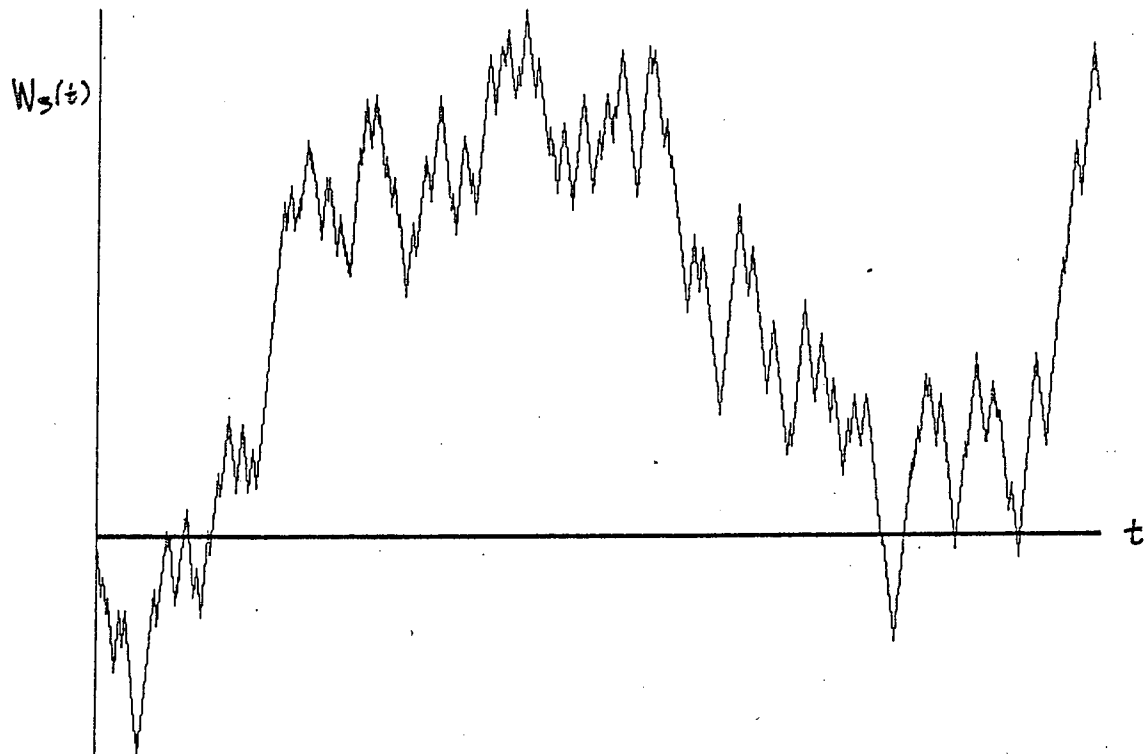


Figura 1

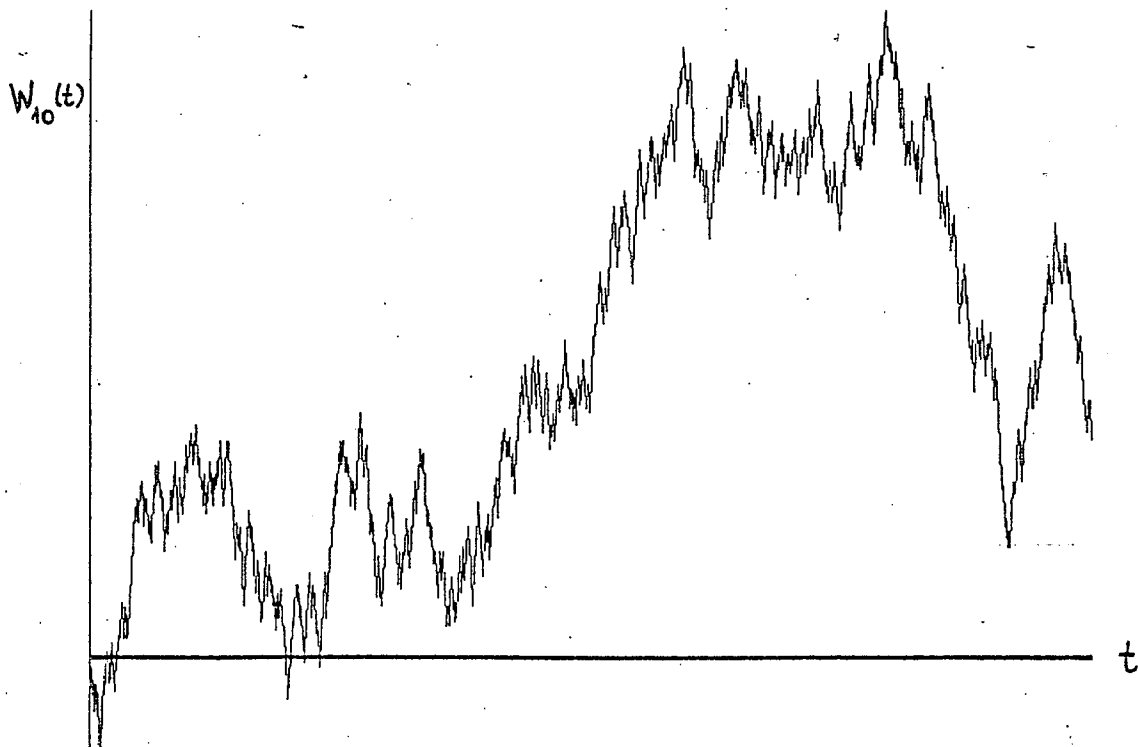


Figura 2

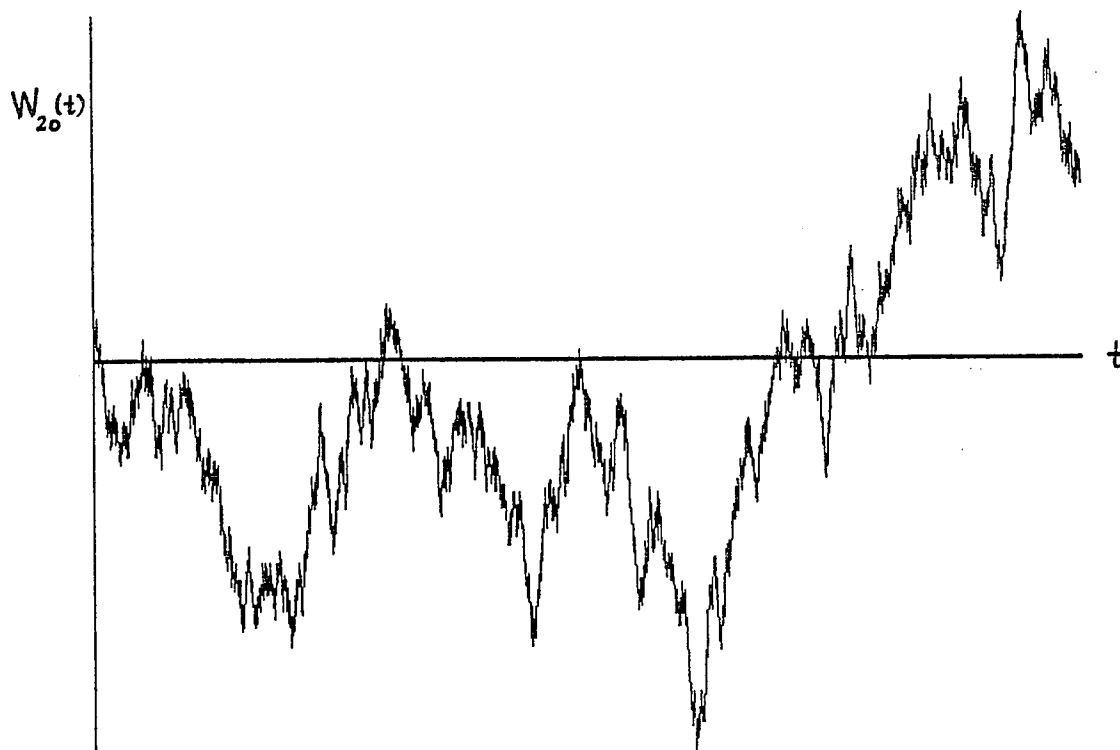


Figura 3

Tomemos ahora una trayectoria cualquiera  $w$  del PE (1) y sea  $\{h_m\}$  una sucesión de números positivos que tiende a cero. Formemos ahora la función  $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$e(t) := \sqrt{2\pi} \frac{w(t+h) - w(t)}{h_m} \quad (2)$$

$e(t)$  debe aproximar la función  $\sqrt{2\pi}w'(t)$ , si la derivada existe. Introduzcamos ahora una numeración  $(m,n) \mapsto k$  de las parejas ordenadas  $(m,n)$ , en modo tal que  $k \rightarrow \infty \Leftrightarrow m, n \rightarrow \infty$ . Hecho esto, sea  $\varepsilon_k(t)$  la VA cuyos valores son todos los cocientes  $e(t)$  correspondientes a trayectorias de (1); entonces, el PE

$$\{\varepsilon_k(t), -\infty < t < +\infty\} \quad (3)$$

es nuestro  $k^{\text{ésimo}}$  aproximante al ruido blanco gaussiano.

Veremos enseguida el por qué de esta construcción; por ahora, ilustrémosla mediante dos de sus trayectorias (Figuras 4 y 5 de la página siguiente), obtenidas tomando  $n=10$ ,  $h=0.01$  y  $n=20$ ,  $h=0.01$ , respectivamente:

En una serie de trabajos [Griego et al (1971)], [Gorostiza-Griego (1980)] fue establecida la convergencia de la sucesión de procesos (1) cuando  $n \rightarrow \infty$ ; sabemos que existe un proceso

elt)

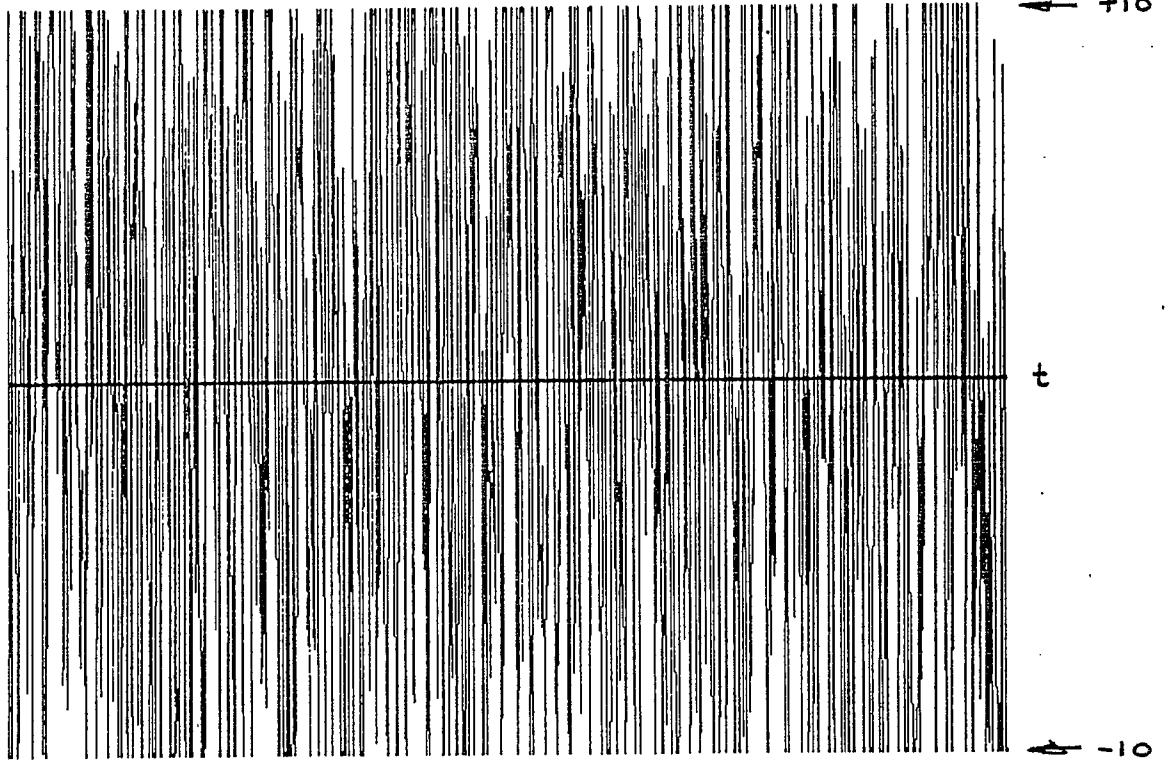


Figura 4

elt)

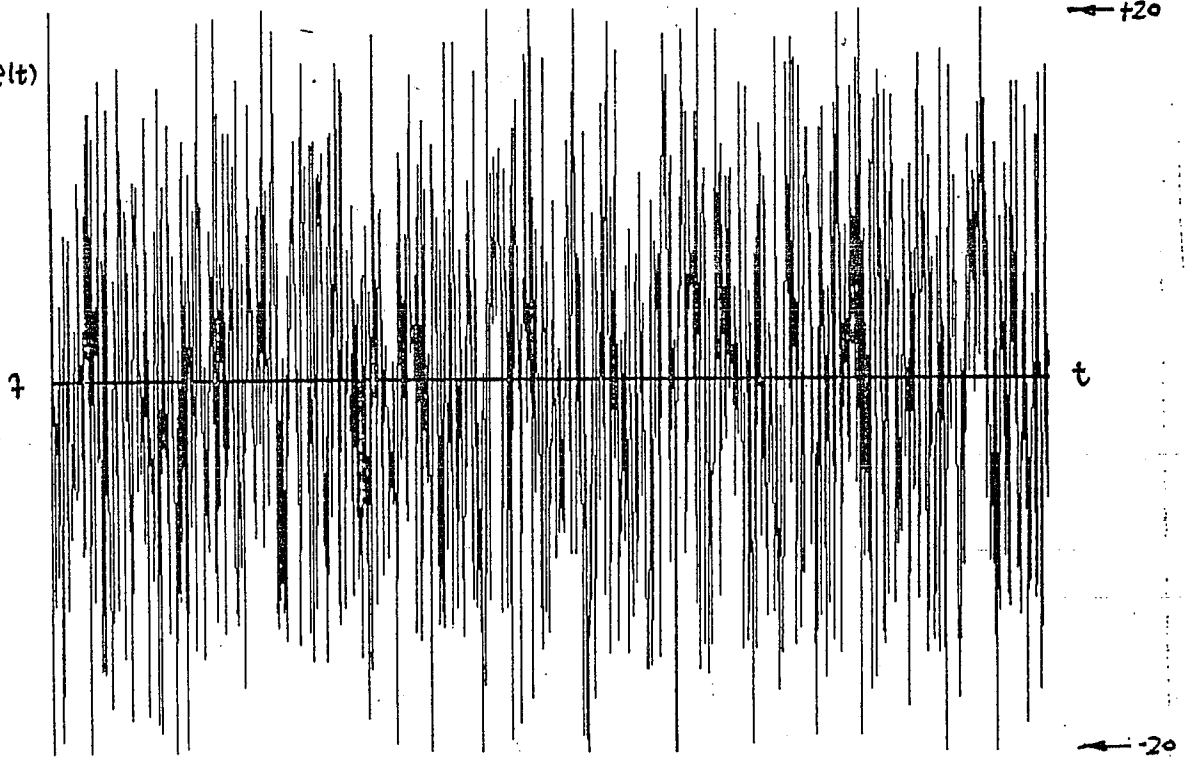


Figura 5

estocástico

$$\{W(t), -\infty < t < +\infty\} \quad (4)$$

tal que, para  $a < b$  reales cualesquiera, se tiene

$$P\left(\sup_{a \leq t \leq b} |W_n(t) - W(t)| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\right) = 1 \quad (5)$$

es decir,  $W_n(t) \rightarrow W(t)$  uniformemente en intervalos acotados, con probabilidad 1 (cp1). De (5), es claro que

i)  $t \mapsto W(t)$  es continua en toda la recta, cp1 y

ii)  $W(0) = 0$  cp1;

además, se demuestra en [Griego et al (1971)] que dicho proceso cumple con

iii)  $W(t+h) - W(t) \sim N(0, h)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$  arbitrarios, cp1

iv)  $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  son independientes, cualquiera que sea  $n \geq 1$  y para cualquier elección de reales  $t_1 < \dots < t_n$ .

De hecho, se puede demostrar que las propiedades ii), iii) y iv) implican la afirmación i), según fue probado originalmente por Wiener en 1923. Estas propiedades caracterizan el proceso (4), llamado el proceso de Wiener o modelo de Wiener para el movimiento browniano [Braun (1984)]. Si bien todas las trayectorias de este proceso son continuas, son en extremo irregulares: con probabilidad 1, no son diferenciables en ningún punto de su dominio (véase el Teorema 6.2.1 en [Hernández (1985)]). Así pues, las trayectorias del PE (4) son funciones bastante irregulares, con gráficas llenas de ángulos, tal como las del proceso (1) para  $n$  grande -véanse las Figuras 1 y 2.

Por otro lado, de iii) y iv) es claro que

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \sim N(0, 1/h), \quad (6a)$$

además de que, si  $t_1 < t_1 + h \leq t_2 < t_2 + h$ , entonces

$$\frac{W(t_1+h) - W(t_1)}{h} \text{ y } \frac{W(t_2+h) - W(t_2)}{h} \text{ son independientes.} \quad (6b)$$

Basta comparar las dos afirmaciones anteriores con las propiedades (6.5a) y (6.5b) del ruido blanco gaussiano -siempre teniendo en mente la convergencia (5)- para convencerse de que es razonable tomar el proceso (3) como aproximante del ruido blanco gaussiano. Falta únicamente hacer ver la bondad de la

aproximación que ofrece el proceso

$$\{\varepsilon_k(t), -\omega < t < +\omega\}$$

a dicho ruido blanco.

Para ello, tomaremos como estadística la función de correlación, que debe ser cercana a  $2\pi\delta(\tau)$ . En términos puramente conceptuales, diremos que  $m$  y  $n$  son "suficientemente grandes" si la función de correlación de la muestra generada para (3) es una aproximación "suficientemente buena" a  $2\pi\delta$ . Faltaría únicamente precisar el concepto de "suficientemente bueno", digamos en términos de alguna prueba estadística sobre el cumplimiento de la condición (6.2).

A reserva de precisar lo anterior en el futuro, damos a continuación las gráficas de obtenidas para la función de correlación para valores "grandes" de  $m$  y  $n$  (Figs. 6 y 7 de la página siguiente); es alentador observar que, a medida que  $n$  crece y  $h$  decrece, la función de correlación obtenida califica cada vez más como una aproximante de la delta centrada en el origen.

En [Vázquez-Abad (1984)] se utiliza la misma aproximación a base de procesos de transporte uniforme para generar aproximaciones del proceso de Wiener, apoyándose en la convergencia (5). Ahí se eligió el valor de  $n$  basándose en la prueba  $\chi^2$  de bondad de ajuste, con los incrementos brownianos como observaciones. Ese sería un procedimiento alternativo, pero hemos decidido tomar la función de correlación como indicador simplemente porque esa es la propiedad fundamental que nos interesa reproducir, dado que nuestro objetivo en esta ocasión es generar trayectorias de ruido blanco gaussiano y no de movimiento browniano.

Además, debemos indicar que los procesos de transporte uniforme no son los únicos aproximantes al proceso de Wiener. Entre muchos otros, hay que citar las caminatas aleatorias interpoladas de [Knight (1981)], procesos a los que se aplica un resultado de convergencia análogo a (5). Valdría la pena comparar estos dos métodos, por ejemplo en cuanto a eficiencia computacional.

## B. CONCLUSIONES.

Hemos presentado algunos ejemplos de situaciones en las que se presenta el ruido; en muchos casos, el ruido es un agente contaminante que debemos eliminar, pero hay muchos otros en los que, por el contrario, debemos generar ruido para poder simular sistemas aleatorios y así obtener respuestas a nuestros problemas. Por otro lado, el punto de vista adoptado es el de que siempre que se realice alguna medición hay ruido, de un tipo o del otro: es sólo que, en algunas circunstancias, el ruido resulta despreciable en relación con la magnitud medida, caso en

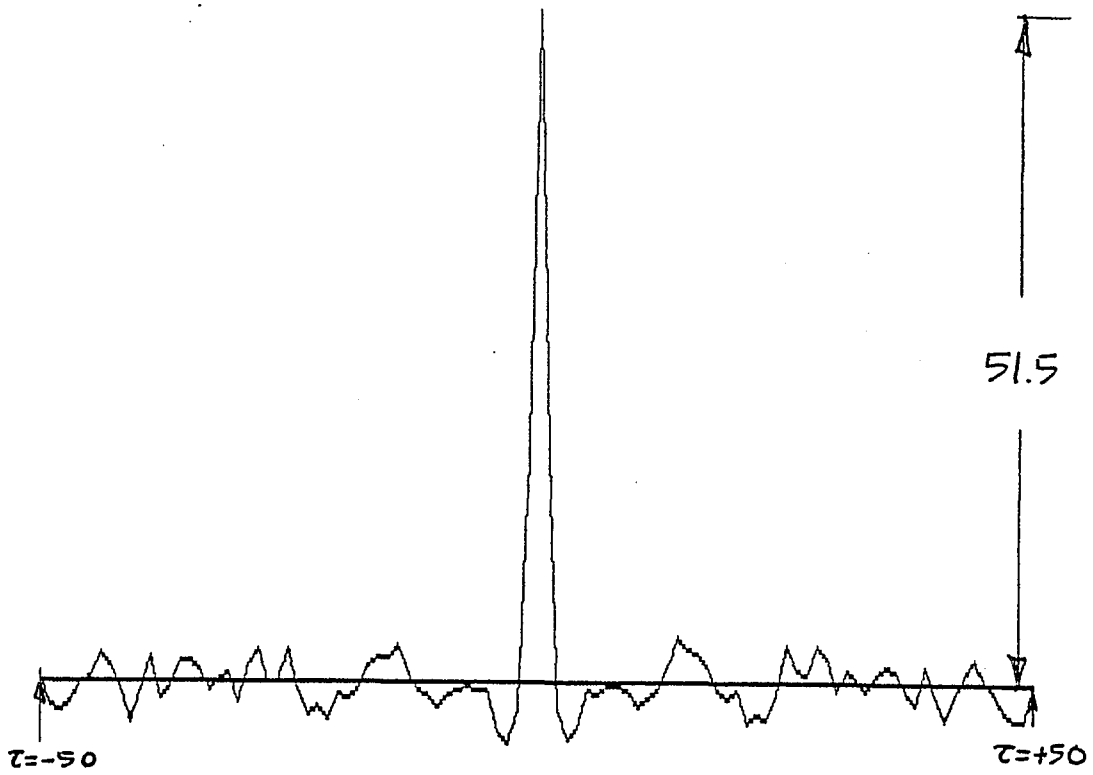


Figura 6

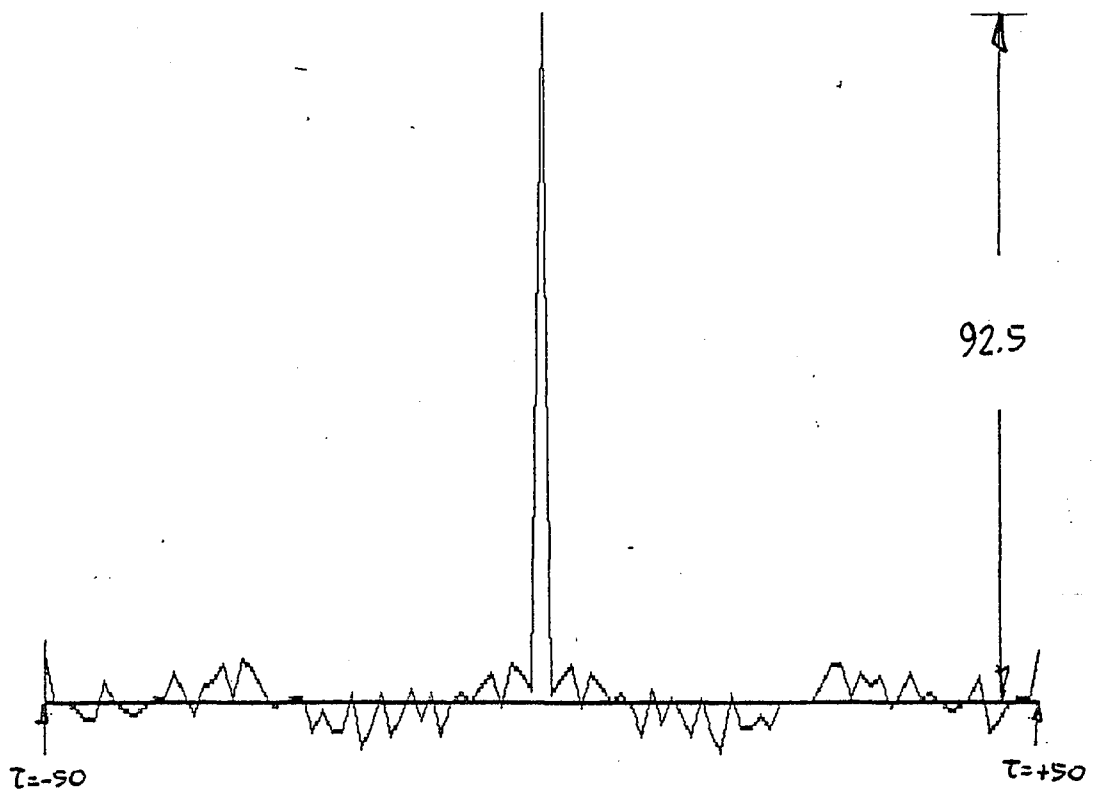


Figura 7



el que efectuamos un análisis determinístico del fenómeno en cuestión. Así pues, es importante saber tratar con el ruido (es decir, eliminarlo o generarlo) cuando se quiere construir modelos matemáticos aplicables a los campos experimentales.

Por otro lado, hemos caracterizado el ruido en términos de las llamadas propiedades de segundo orden y nos hemos apoyado en dicha caracterización para sintetizar ruido coloreado a partir de ruido blanco, así como a éste último a partir de muestras de variables aleatorias fáciles de generar computacionalmente. La teoría de segundo orden está también a la base del diseño de filtros para la eliminación del ruido (véase el Cap. 4 de [Lamperti (1977)]). Sin embargo, estas técnicas de filtraje son algo limitadas para las aplicaciones contemporáneas, por lo que debemos referir a los lectores interesadas a otras técnicas más modernas, de tipo no lineal, que ya hemos revisado en los capítulos finales de [Hernández (1985)].

#### BIBLIOGRAFIA.

ALVAREZ, J. & GAMAS, E., "Estimadores para control de procesos", Revista Ciencia (1986), en prensa.

ASTROM, K.J., "Introduction to stochastic control theory", Academic Press, New York (1970)

BRAUN, E., "Movimiento browniano", Revista Ciencia 35 (1984), 97-116.

COURANT, R. & D. HILBERT, "Methods of mathematical physics" (2 vols.), Interscience Publishers, New York, 1962.

FELLER, W., "An Introduction to Probability Theory and its Applications" (2 vols.), John Wiley & Sons, New York, 1966.

GABOR, D., "Theory of Communications", J. IEE (London), 93, Part III (1946), p. 429.

GOROSTIZA, L.G., "Algunas consideraciones sobre el análisis de sistemas sometidos a perturbaciones estocásticas", Revista Ciencia, 34, Núm. 4 (1983)

GOROSTIZA, L.G. & R. GRIEGO, "Rate of convergence of uniform transport processes to brownian motion", Stochastics 13 (1980), 291-303.

GRIEGO, R., D. HEATH & A. RUIZ-MONCAYO, "Almost sure convergence of uniform transport processes to brownian motion", Ann. Math. Stat. 42 (1971), 1129-1131.

HERNANDEZ, D.B., "Procesos Estocásticos, con aplicaciones al Filtraje". Informe Técnico (Serie Verde) Núm. 9, en 2 partes; Departamento de Ingeniería Eléctrica-CINVESTAV, Cd. de México, 1985.

HERNANDEZ, D.B., "Toma racional de decisiones para la irrigación", pp. 242-258 de Aportaciones Matemáticas (Serie Comunicaciones), Núm. 1, Soc. Mat. Mex. (1986). Memorias del XVIII Congreso Nacional de la SMM, M. Clapp y J. Seade, eds.

HERNANDEZ, D.B. & L.J. ALVAREZ, "El método de Monte Carlo", Informe Monográfico, Depto. de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, 1985.

HIDA, T., "Brownian Motion", Applications of Mathematics #11, Springer-Verlag New York, 1980.

KNIGHT, F.B., "Essentials of Brownian Motion and Diffusion", Mathematical Surveys #18, American Mathematical Society, Providence RI, 1981.

LAMPERTI, J. "Stochastic processes: a survey of the mathematical theory", Springer Verlag, New York, 1977.

LIGHTHILL, M.J., "An Introduction to Fourier Series and Generalised Functions", Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

MARROQUIN, J.L., "A probabilistic approach to computational vision". Aparecerà en "Image Understanding-1987", S. Ullman (ed.), Ablex Publ. Co., 1987.

PAPOULIS, A., "Signal Analysis", Mc Graw Hill, New York, 1981.

SEELEY, R.T., "An Introduction to Fourier Series and Integrals", W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.

VAZQUEZ-ABAD, F., "Simulación probabilística para la toma de decisiones", Tesis de Maestría (Estadística e Investigación de Operaciones) UNAM, Cd. de México, 1984.

WAX, N. (ed.), "Selected papers on noise and stochastic processes", Dover, Inc., New York, 1954.