COMUNICACIONES DEL CIMAT

Curso de Actualización para Profesores de Matemáticas de Secundaria, Obrajuelo, julio - agosto 1986.

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto.
México
Tels. (473) 2-25-50
2-02-58

Prácticas de laboratorio Números

Contenido

BUSCANDO PATRONES

1. Busca un patrón en la tabla de multiplicación.

$2 \times (5) = 10$ — Observa que el primer factor es siempre el mismo : 2
$2 \times (4) = 8$
$2 \times (3) = 6$ — El segundo factor decrece en 1 en cada línea : 5, 4, 3, . . .
$2 \times (2) = 4$
$2 \times (1) = 2$ — ¿ Qué le pasa al resultado ?

$2 \times (0) = 0$ — ¿ Cuál sería el resultado de la siguiente línea ?

$2 \times (-1) = -2$ — ¿ Y la siguiente ?
$2 \times (-2) = -4$
$2 \times (-3) = -6$
$2 \times (-4) = -8$

¿ Decrece el resultado en 2 en cada línea ?

¿ Piensas que el producto de 2 y un entero negativo es siempre negativo ?

2. Busca un patrón en la tabla de multiplicación del -2.

$(-2) \times 3 = -6$ — ¿ Aumentan los productos dos en cada línea ?
$(-2) \times 2 = -4$
$(-2) \times 1 = -2$

$(-2) \times 0 = 0$ — De acuerdo al patrón, continúa la tabla de multiplicación.

$(-2) \times (-1) =$
$(-2) \times (-2) =$
$(-2) \times (-3) =$
$(-2) \times (-4) =$

¿Sugiere esto que el producto de dos enteros negativos es positivo ?

3. Procediendo de manera análoga al ejercicio anterior, llena la siguiente tabla de multiplicar.

	3	2	1	0	-1	-2	-3
3							
2							
1							
0							
-1							
-2							
-3							

Tópico: Factorización

Objetivo: Determinar los números primos menores de 100

Material: Hoja de actividades

Desarrollo: Encierra en un círculo cada uno de los siguientes números primos que aparezcan en la tabla dada: 2, 3, 5 y 7.

Ahora, sigue las indicaciones del siguiente diagrama de bloques:

Empieza

Traza 3 líneas rectas verticales que cruzen todos los múltiplos de 2 excepto el 2.

Algunos múltiplos de 3 fueron cruzados por las líneas trazadas. Traza una línea recta vertical que cruse todos los múltiplos de 3 restantes excepto el 3.

Traza 4 líneas rectas que cruzen todos los múltiplos de 5 excepto el 5.

Traza 3 líneas rectas que cruzen todos los múltiplos de 7 excepto el 7.

Encierra en un círculo cada uno de los números que no fueron cruzados por las líneas trazadas.

Fin

1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31
	32	33	34	35	36	37
	38	39	40	41	42	43
	44	45	46	47	48	49
	50	51	52	53	54	55
	56	57	58	59	60	61
	62	63	64	65	66	67
	68	69	70	71	72	73
	74	75	76	77	78	79
	80	81	82	83	84	85
	86	87	88	89	90	91
	92	93	94	95	96	97
	98	99	100			

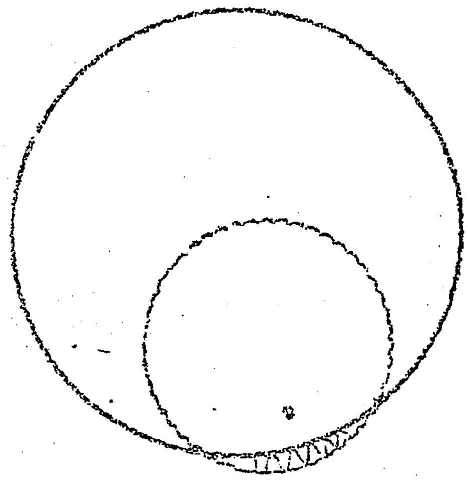
Conclusión: Los números encerrados en los círculos son los números primos menores de 100.

Referencia: Johnson y otros. Activities in mathematics.

Curso de actual. geom.
CIMAT

El espirógrafo y el mínimo común múltiplo de dos números.

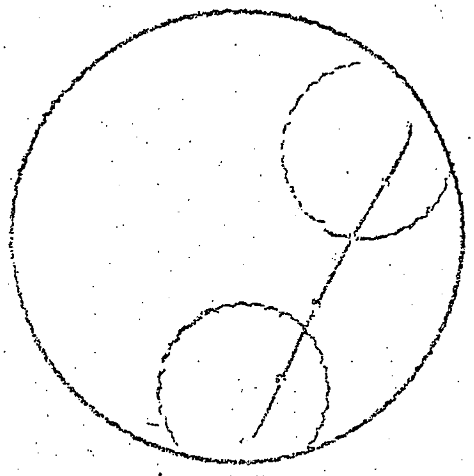
El principio del espirógrafo consiste en dos ruedas con engranes, una de las cuales se hace girar dentro de otra que permanece fija.



Conforme se gira la rueda menor se traza la la trayectoria que recorre un punto en el interior de esta rueda.

De esta manera se obtienen diversos patrones geométricos, estrellas cuyo número de puntas depende de la relación entre los numeros de engranes de las dos ruedas.

Tomemos un punto del círculo menor cuando está más cerca del círculo mayor. Conforme la rueda menor gira, el punto recorre una trayectoria y volverá a estar en la distancia mínima al círculo exterior cuando la rueda menor haya completado una vuelta.



Consideremos el caso en que la rueda mayor tenga 96 engranes y la menor 32.
Cuando la rueda menor completa una vuelta, se han recorrido 32 engranes de la rueda mayor.
Cuando la rueda menor ha completado 3 vueltas, se han recorrido $3 \times 32 = 96$ engranes de la rueda mayor, esto es, una vuelta completa. El punto estará otra vez en su posición inicial.

Si se hace girar la rueda menor hasta que el punto escogido vuelva exactamente a la posición inicial, la rueda menor habrá dado un número entero de vueltas dentro de la rueda mayor y también habrá rotado un número entero de veces

Consideremos el caso de los círculos de 96 y 72 engranes.

Si la rueda menor da 4 vueltas, habrá recorrido $72 \times 4 = 288$ engranes. Pero $288 = 96 \times 3$, esto es habrá dado 3 vueltas dentro de la rueda mayor.

Por cada giro completo de la rueda menor se forma una punta de la estrella.

Al multiplicar el número de puntas de la estrella por el número de engranes de la rueda menor, se obtiene el mínimo común múltiplo de los números de engranes de los círculos

Si ~~el~~ la rueda mayor tiene m engranes, la menor n engranes y la estrella resultante tiene p puntas, entonces el mínimo común múltiplo de m y n es np.

Ejemplo si $m = 96$ $n = 40$ $p = 12$ el mínimo ~~a~~ común múltiplo de 40 y 96 es $12 \times 40 = 480$.

Utilizando los dibujos de las hojas anexas completa la tabla y determina el mínimo común múltiplo de m y n

m	n	p	min. com. mult.
96	60		
96	80		
105	63		
96	40		
105	42		
105	60		
105	84		

Invierte ahora el procedimiento
Obten el minimo comun divisor de los números indicados y determina (sin contar) el numero de puntos de la estrella obtenida.

m	n	min comun mult	p
105	80		
96	42		
105	75		
105	72		
105	32		

ESCRIBE UN PROGRAMA QUE OBTENGA LA EXPANSION DECIMAL INFINITA DE UNA FRACCION DE LA FORMA 1/N.

1) PLANTEA EL PROBLEMA DE OBTENER LA EXPANSION DECIMAL DE UNA FRACCION EN TERMINOS MATEMATICOS.

2) HAZ EXPLICITO EL PROCEDIMIENTO PARA UN CASO CONCRETO.

EFECTUA LA DIVISION 1/7 ANOTANDO TODOS LOS PASOS, SIN EFECTUAR NINGUNO MENTALMENTE.

3) DESCRIBE LOS PASOS EFECTUADOS EN TERMINOS GENERALES.

4) CODIFICA EL PROCEDIMIENTO AL LENGUAJE BASIC.

CORRE EL PROGRAMA PARA LOS SIGUIENTES VALORES DE N:
7, 6, 5, 17, 8, 256, 37, 27, 99, 11, 999, 3.

DETERMINA EN CADA CASO EL PERIODO Y SU LONGITUD.

EXPLICA POR QUE EL PERIODO NO PUEDE TENER UNA LONGITUD MAYOR QUE N.

MODIFICA TU PROGRAMA PARA OBTENER LA EXPANSION DECIMAL INFINITA DE CUALQUIER FRACCION DE LA FORMA K/N (0 < K/N < 1)

CORRE EL PROGRAMA PARA LAS SIGUIENTES FRACCIONES:

1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7.

ANOTA EL PERIODO EN CADA CASO.

QUE OBSERVAS CON LAS CIFRAS QUE APARECEN EN LOS PERIODOS DE LAS FRACCIONES MENCIONADAS?

EL GRAN UNO

TEMA: VALOR POSICIONAL DECIMAL

PARA: GRUPO CHICO O UN SOLO JUGADOR Y UNA CALCULADORA.

OBJETO DEL JUEGO: HACER QUE APAREZCA 1 EN LA PANTALLA.

COMO JUGAR: UNA PERSONA PREPARA LA CALCULADORA PARA LOS JUGADORES, SIN QUE ELLOS VEAN QUE PUSO EN LA CALCULADORA. LA CALCULADORA SE PREPARA APRETANDO UN NUMERO, LUEGO - =. DESPUES DE QUE LA CALCULADORA HA SIDO PREPARADA, LOS JUGADORES ADIVINAN NUMEROS Y APRIETAN = HASTA QUE LA PANTALLA MUESTRA 1.

EJEMPLO: ESCOGE UN NUMERO SECRETO ENTRE 1 Y 100, DIGAMOS 27. PREPARA LA MAQUINA APRETANDO 27 - =. APRETANDO - = HACE DEL 27 UN DIVISOR CONSTANTE. (PRECAUCION NO APRETAR LA TECLA CLR UNA VEZ QUE EL NUMERO SECRETO HA SIDO PUESTO, O EL NUMERO SERA BORRADO)

ENTREGA LA CALCULADORA A LOS JUGADORES, QUIENES TRATARAN DE ADIVINAR EL NUMERO SECRETO APRETANDO NUMEROS DE PRUEBA Y DESPUES APRETANDO =. CUANDO EL NUMERO SECRETO SE ADIVINA, LA PANTALLA MUESTRA 1 DESPUES DE APRETAR =. SI EL NUMERO DE PRUEBA NO ES EL CORRECTO, LA PANTALLA DARA PISTAS MOSTRANDO A QUE ES IGUAL EL NUMERO DE PRUEBA DIVIDIDO ENTRE EL NUMERO SECRETO.

MIM

TEMA: ADICION

PARA: DOS JUGADORES Y UNA CALCULADORA

OBJETO DEL JUEGO: LLEGAR A 67 EN LA CALCULADORA.

COMO JUGARLO: EL PRIMER JUGADOR APRIETA LA TECLA DE UN NUMERO (DISTINTO DE 0), DESPUES APRIETA LA TECLA +. EL SIGUIENTE JUGADOR APRIETA UN NUMERO (DISTINTO DE 0) Y LA TECLA +. LOS JUGADORES APRIETAN POR TURNOS HASTA QUE UN JUGADOR APRIETA + Y APARECE EL 67 EN LA CALCULADORA. SI UN JUGADOR APRIETA + Y APARECE UN NUMERO MAS GRANDE QUE 67, EL JUGADOR PIERDE.

VARIACION PARA PRIMARIA: USA SOLO LAS TECLAS 1, 2, 3 Y TOMA 21 COMO META.

VARIACION PARA SECUNDARIA: USA SOLO LA PRIMERA COLUMNA DE DIGITOS, ES DECIR LAS TECLAS 1,4,7 Y LLEGA A 47.

NUMEROS PARA SONIDOS
(tomado de MATHEMATICS IN SCIENCE AND SOCIETY pag.315-317)

El sonido es causado por un objeto vibrante. El objeto hace que las moléculas de aire cercanas empiecen a oscilar. Estas moléculas hacen que otras moléculas vibren hasta que las moléculas cerca del tímpano oscilen. Las moléculas cerca del tímpano hacen que el tímpano vibre con la misma frecuencia que el objeto original. Los nervios transmiten un mensaje al cerebro y el cerebro interpreta el mensaje como sonido. Se necesita el aire o alguna otra sustancia para que se oiga el sonido. No se escucharía ningún sonido si un diapasón vibra en el vacío. Entre más rapido vibra un objeto, más alto se vuelve el tono del sonido. Entre más grande sea la vibración, más fuerte es el sonido. Entre más cerca del oido este el objeto vibrante, más fuerte es el sonido.

1. Lista tres de los sonidos más fuertes que puedas pensar.

2. Lista tres de los sonidos más suaves que puedas pensar.

3. Compara tu lista con la de otros en el salón. De todos los sonidos listados, cuál piensas que es el más fuerte? El mas suave?

4. Hay varios sonidos que quedarían entre el más suave y el más fuerte que acabas de listar. Algunos de los sonidos que oye la gente se listan abajo. Ordena los 13 sonidos en orden del más suave a más fuerte. Coincide tu orden con el de otros en la clase?
licuadora
conversación (cerca)
tren
susurro
reloj despertador
conjunto de rock
sirena antiaerea
tránsito pesado
calle silenciosa
murmullo de hojas
fábrica de calentadores
oficina quieta
campo quieto

El oido humano es suficientemente sensitivo para oir sonidos muy suaves y sin embargo es suficientemente resistente para resistir el dolor de sonidos muy fuertes.

Ningún instrumento mecánico puede medir ese rango tan amplio. Es como tener una balanza tan sensitiva como para pesar un cabello humano con una precisión razonable y sin embargo tan resistente como para pesar un barco acorazado!

La escala de decibeles fue diseñada para tratar con esta amplia gama. Se usa en medidores de sonido para medir la intensidad de un sonido. Si un sonido es 10 veces más intenso que otro, su medida decibel sería 10 decibeles más.

5. Compara tu orden de sonidos con esta tabla. Luego termina las dos columnas usando los patrones iniciados.

SONIDO	INTENSIDAD RELATIVA	DECIBELES
mínimo de percepción	1	0
murmullo de hojas	10	10
campo quieto	100	20
susurro	1000	30
oficina quieta	10000	40
conversación		
tránsito pesado		
reloj alarma		
tren subterraneo		
licuadora		
conjunto de rock		
fábrica de calentadores (limite dolor)		
sirena antiaerea		
sonido que quema la piel		
:		
nivel letal		
arma de ruido		

6. La columna de la intensidad relativa esta dada en potencias de 10. Cada sonido es 10 veces más intenso que el sonido anterior.

Escribe algunas de las intensidades relativas usando exponentes.

Por ejemplo: 10 = 10↑1
100 = 10X10 = 10↑2
1000 = 10X10X10 =

límite de dolor =
nivel letal =
mínimo de percepción

7. Que sonido es mil veces más intenso que el mínimo de percepción?
Un millón de veces más intenso?
Mil millones de veces?

8. Mira cada sonido y compara su intensidad relativa con su medida en decibeles. Explica como la intensidad relativa de un sonido puede ayudarte a encontrar la medida decibel.

ACTIVIDAD

TOPICO: ORDEN Y DENSIDAD DE LOS NUMEROS RACIONALES

OBJETIVO: DETERMINAR EL ORDEN, APLICAR LA LEY DE LA TRICOTOMIA Y LA DENSIDAD DE LOS NUMEROS RACIONALES.

MATERIAL: LAPIZ Y HOJAS DE ACTIVIDADES.

Desarrollo: Para cualquier par de numeros, sabemos que solo se cumple una de dos condiciones. Esto es, los numeros son iguales, o no lo son.

Si los dos numeros son 8 + 6 y 7 x 2, diremos que son iguales. Por otra parte, si los numeros son 3/7 y (1/2) + (1/3), estos no son iguales.

Si dos numeros no son iguales, existe entonces una disyuntiva: Que el primero sea menor o mayor que el segundo.

Las tres condiciones descritas, constituyen la llamada LEY DE LA TRICOTOMIA.

Ley de la Tricotomia

Para cualquier par de numeros racionales, a y b, se cumple una y solo una de las condiciones siguientes:

i) $a < b$

ii) $a > b$

iii) $a = b$

Con la introduccion de los simbolos " = ", " > " y " < " y la terminologia "menor que..." y "mayor que...", es necesario definir estas expresiones. La siguiente definicion es unicamente para el caso en el que a es menor que b. Una definicion similar puede hacerse para a mayor que b.

El numero a es menor que el numero b,
si existe un numero positivo c,
tal que $a + c = b$.

1. Indica cual de las siguientes relaciones (<, >, ó =) es verdadera para los siguientes pares de numeros. En los casos de desigualdad, encuentra el numero positivo c que se requiere sumar al numero menor para obtener el mayor.

a) 4, 6 b) 3/4, 2/3

c) -4, -9/2 d) 2+(3/4), 11/4

2. Para el conjunto de los numeros enteros, no es dificil

determinar cuando a < b , a = b o a > b. En cambio, lo anterior no es facil para algunos otros elementos del conjunto de los numeros racionales. Un recurso para lograrlo puede ser el transformar las fracciones de tal forma que sus denominadores sean iguales y luego proceder a compararlas.

Empleando este recurso determina cual de las relaciones (<, > o =) es verdadera, para los pares de numeros dados a continuacion. Luego, encuentra el numero positivo que debe ser sumado al numero menor, para obtener el mayor.

a) 7/9, 8/9 b) 16/13, 4/3

c) -15/16, -1/2 d) 31/7 , 22/5

3. Escribe una regla general que indique que a/b es menor que c/d en cada una de las siguientes situaciones:

a) b es igual a d

b) a es igual a c

c) Cuando no se cumpla ninguna de las condiciones anteriores

4. Determina si son falsas o verdaderas las siguientes proposiciones:

Sean p, q, r y s numeros racionales.

a) Si p < q, entonces p + r < q + r

b) Si p < q, entonces p x r < q x r

c) Si p < q y r<>0, entonces (p/r) < (q/r)

d) Si p =< q y q =< p, entonces p = q

e) Si p + r < q + r, entonces p < q

f) Si pr < qr, entonces p < q

g) Si p < q, entonces q < p

h) Si p < q y q < r, entonces p < r

i) Si p < q y r < s, entonces p + r < q + s

j) Si p < q y r < s, entonces pr < qs

5. El concepto de densidad se relaciona con la existencia de "huecos", en conjuntos de numeros. Una definicion informal seria la siguiente:

Un conjunto de numeros es denso si entre cualquier par de numeros de un conjunto se haya otro numero del conjunto de referencia.

¿Por qué se dice que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso?

a) Grafica en una recta numérica los números racionales representados por las fracciones 3/4 y 7/8 y verifica si el racional representado por 13/16 se encuentra entre estos.

b) Determina sin el empleo de la recta, otros dos números que se encuentren entre 3/4 y 7/8.

c) Encuentra un número entre -11/7 y -21/14.

d) ¿Observas algún camino "fácil" para encontrar un número racional entre cualquier par de racionales? Descríbelo.

6. Los siguientes son tres subconjuntos del conjunto de los racionales. Determina cuál de ellos es denso:

a) El conjunto de los números enteros.

b) El conjunto de los números naturales.

c) El conjunto $A = \{x / x \text{ es racional y } 0 < x < 1\}$.

7. Volviendo al concepto de densidad del conjunto de los números racionales: Un camino para mostrar que los racionales son densos es el de obtener el promedio de dos racionales dados; esto es, obtener el racional que se halla a mitad del intervalo que describen dos racionales x e y; o sea, $x < (x + y)/2 < y$.

a) Encuentra el número racional que está situado a la mitad de los siguientes pares de racionales dados:

[illegible]/4, [illegible] -3/7, 2/5 12/5, 17/8

b) Muestra para uno de los pares que el racional obtenido efectivamente se encuentra justo la mitad del intervalo correspondiente.

c) Encuentra una fórmula general para el número medio entre a/b y c/d.

8. El concepto de densidad, en general no presenta dificultades para el alumno, si es presentado empleando la noción de "entre....". Analiza cómo puedes de manera accesible abordar este tópico con tus alumnos. Compara con tus compañeros los diferentes planteamientos didácticos al respecto.

Referencia: Le Blanc, Kerr, Thompson. Rational Numbers. Addison-Wesley. 1976.

CIMAT

Curso de actualizacion.

JULIO 1986

Otro ejemplo de programa para obtener la expansion decimal completa de una fraccion de la forma A/B, donde A<B, de tal manera que la representacion decimal de la fraccion siempre es menor que la unidad.

```
10 INPUT " Fraccion A/B. Dame A,B "; A,B
20 PRINT " 0 .";
30 D=INT(10*A/B);
40 PRINT D;
50 A=10*A-C*B
60 GOTO 30
```

```
  5 REM FRACCION DECIMAL A BINARIA
 10 INPUT "J"; J
 20 PRINT ".";
 30 LET J = 2 * J
 40 IF J >= 1 THEN GOTO 100
 50 IF J < 1 THEN PRINT 0;
 70 GOTO 30
100 PRINT 1;
110 LET J = J - 1
120 IF J = 0 THEN STOP
130 GOTO 30
```

TEMA: ARITMETICA DEL RELOJ

OBJETIVO DEL PROGRAMA: ESCRIBIR LA TABLA PARA SUMAR EN SISTEMAS FINITOS.

1) ESCRIBE UN PROGRAMA QUE DESPLIEGUE LA TABLA DE SUMAR DE [0, 1, 2] CON LA ARITMETICA DEL RELOJ.

2) ESCRIBIR UN PROGRAMA QUE DESPLIEGUE LA TABLA DE SUMAR DE [0, 1, 2, 3, 4] CON LA ARITMETICA DEL RELOJ.

3) ESCRIBE UN PROGRAMA QUE DESPLIEGUE LA TABLA DE SUMAR DE [0, 1, 2,... n-1] PARA UNA N DADA.

VALOR POSICIONAL

1) ESCRIBE LOS SIGUIENTES NUMEROS EN TERMINOS DE POTENCIAS DE 10.

EJEMPLO:

375 = 3X10↑2 + 7X10↑1 + 5X10↑0

a) 2345
b) 34.5
c) .5678
d) 30005

2) ESCRIBE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA QUE ESCRIBA UN NUMERO DADO EN TERMINOS DE POTENCIAS DE 10.

3) ESCRIBE LAS POTENCIAS DE 2 DESDE 2↑0 HASTA 2↑10

4) ESCRIBE LOS SIGUIENTES NUMEROS EN TERMINOS DE POTENCIAS DE 2.

EJEMPLO: 27 = 2↑4 + 2↑3 + 0X2↑2 + 2↑1 +2↑0

a) 1
b) 3
c) 4
d) 7
e) 8
f) 31
g) 45
h) 1000
i) .375

5) ESCRIBE UN PROGRAMA DE COMPUTACION QUE EXPRESE UN NUMERO EN TERMINOS DE POTENCIAS DE 2.

6) ESCRIBE UN PROGRAMA DE COMPUTACION QUE CAMBIE LA NOTACION DE UN NUMERO DE NOTACION DECIMAL A NOTACION BINARIA.

Curso de actualización 21·7·86

```
5 REM FIBONACCI
10 INPUT "A,B"; A,B
20 PRINT A; B;
30 LET A = A+B
40 LET B = A+B
50 GOTO 20
```

```
5 REM COCIENTE FIBONACCI
10 INPUT "A, B"; A, B
20 PRINT A/B
30 LET A = A+B
40 PRINT B/A
50 LET B = A+B
60 GOTO 20
```

CAMBIOS SUGERIDOS

```
20 PRINT N+1, A/B
40 PRINT N+2, B/A
55 LET N = N+2
```

12	3	-15
-24	-6	30
8	2	-10

Coloca una ficha en cualquiera de los cuadros. Después coloca otra ficha en un cuadro que no esté en el mismo renglon o columna que la primera. Luego coloca otra ficha que no esté en la misma columna o renglón que los anteriores. Fíjate en los números que quedan tapados por las fichas. Multiplícalos. El resultado es 720 ¿Por qué?

PALITOS DE FRACCIONES

TRADUCIDO DE HIGGINS, J.L.; SACHS, L.A.
MATHEMATICS LABORATORIES.
ERIC, 1974, p. 148.

OBJETIVOS Y PROPOSITOS:

Mejorar habilidades con fracciones equivalentes. Usar una ayuda computacional para la suma y sustracción de fracciones.

MATERIALES:

10 palitos de paleta o abatelenguas. Marca cada palito en 10 secciones. Numera las secciones del 1er. palito del 1 al 10; el segundo con múltiplos de 2 hasta 20, el tercero con múltiplos de 3 hasta el 30, etc. El último palo debe ser numerado con múltiplos de 10. (Ver figura 1).

PROCEDIMIENTO:

La equivalencia de fracciones puede ser mostrada con dos palitos como se ve en la figura 1.

Fig. 1 Muestra fracciones equivalentes

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Fig. 2 Suma las fracciones

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} = \frac{13}{15}$$

1	2	3	4	...		2	4	6	8	10 ...
5	10	15	20	...		3	6	9	12	15 ...

SOLITARIO

Enseña: las funciones de la calculadora
Para: un jugador y una calculadora

Objeto del juego: usando sólo las teclas permitidas llegar al número meta en la calculadora

Cómo jugarlo: escoge un número meta y un conjunto de teclas permitidas. El juego consiste en ver quien puede obtener la respuesta apretando el menor número de teclas.

EJEMPLO: numero meta 17, teclas permitidas 5, $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{=}$. Usando sólo estas teclas obtener 17. Una respuesta puede ser

$$5 \boxed{+} 5 \boxed{\div} 5 \boxed{=} \boxed{+} 5 \boxed{+} 5 \boxed{+} 5 \boxed{\div} 5 \boxed{=}$$

- Esta solución requiere apretar 15 teclas. Hay soluciones más cortas.

Escoge diferentes números meta y variá el dígito permitido

Variacion para primaria: Usa números meta que sean multiplos del dígito permitido.

Variación para secundaria: usa números meta negativos.
Ejemplo: usando 5, $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{=}$ llegar a -3

Se pueden pedir soluciones sofisticadas
Ejemplo: usando 5 $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{=}$ ¿puedes llegar a 626 con sólo diez teclas?

BORRAR

Enseña: valor posicional

Para: un número cualquiera de jugadores, cada uno con una calculadora y un jugador que da un número

Objeto del juego: quitar un dígito de la pantalla sin cambiar ninguno de los otros dígitos.

Cómo jugar: El jugador que da el número escoge un numero, todos los jugadores lo meten a sus calculadoras y dice cual número debe ser borrado. Números convenientes son aquellos que siguen un cierto patrón, de modo que sea facil ver si cambió algun digito distinto del escogido.

Ejemplo: En la pantalla 8765432, borra el 7 sin cambiar ningún otro dígito.

Esto se hace restando un número del número de la pantalla. Aprieta $\boxed{-}$, luego el número que debe ser restado y luego aprieta $\boxed{=}$. Aparece 8065432 Los alumnos pueden turnarse para escoger números y seleccionar el dígito que debe ser borrado.

Variaciones para 2°, 3° de primaria
Limita los numero a 3 cifras.

Variaciones para secundaria: usa decimales

Ejemplo: borra el 8 de .567891

UN ENFOQUE CONCRETO PARA LA SUMA Y RESTA DE ENTEROS.

Adaptado de AT mayo 1976

Las fichas negras serán usadas para representar números naturales y las fichas rojas representarán enteros negativos. Por ejemplo un conjunto de 5 fichas negras y un conjunto de 6 fichas rojas son modelos para los enteros 5 y (-6) respectivamente. (Ver figura 1).

Acordando que una ficha negra cancela a una ficha roja, cada entero puede ser representado de muchas maneras. La figura 2 muestra otra forma de representar los números 5 y -6.

Actividad 1

Usa fichas negras y rojas para mostrar dos formas distintas para representar 8. Repite esta actividad mostrando cinco formas para representar -3. Si tuvieras una cantidad ilimitada de fichas, ¿de cuántas maneras podrías representar el entero -3?

INVERSOS

Las 3 fichas negras y las 3 fichas rojas de la figura 3 pueden ser puestas en correspondencia uno a uno, por lo tanto, las fichas negras cancelan a las rojas y el conjunto representa el número 0. Por esto decimos que 3 y -3 son inversos; es decir 3 es el inverso de -3 y -3 es el inverso de 3.

En general, si un conjunto de fichas negras y un conjunto de fichas rojas pueden ser puestos en correspondencia uno a uno, el número natural representado por las fichas negras, y el entero negativo representado por las fichas rojas son inversos uno del otro.

Actividad 2 (INVERSOS)

Usa las fichas para formar cinco conjuntos diferentes que representen 0. Nombra los pares de inversos.

SUMA DE ENTEROS

El modelo usual para la suma de números naturales es "juntar", o más formalmente, la unión de conjuntos. El modelo es usado en la figura 4 para ilustrar la suma de dos números naturales.

Este modelo para la suma puede ser extendido para la suma de dos enteros usando nuestras fichas de colores. La figura 5 muestra cómo se pueden usar la fichas para calcular -5 + 2. Los dos primeros conjuntos representan los enteros -5 y 2. La unión de los dos conjuntos es el tercero, que tiene 5 fichas rojas y 2 fichas negras. Este conjunto representa -3 ya que 2 de las fichas rojas se pueden cancelar con las fichas negras y quedan 3 fichas rojas sin cancelar.

Actividad 3 (SUMA DE ENTEROS)

Usa el número indicado de fichas para calcular las siguientes sumas.

5 + 2	cinco fichas negras dos fichas negras
(-4) + (-3)	cuatro fichas rojas tres fichas rojas
7 + (-3)	siete fichas negras tres fichas rojas
(-8) + 2	ocho fichas rojas dos fichas negras

FORMULANDO REGLAS PARA LA SUMA

Usando la fichas para calcular sumas de enteros, el alumno tiene la oportunidad de desarrollar reglas para calcular sin usar las fichas. Por ejemplo, se pueden hacer dos observaciones en los cálculos de la figura 5. Primero, que hay más fichas rojas en el primer conjunto que fichas negras en el segundo, y por lo tanto, cuando se hacen corresponder las fichas negras con las rojas, hay algunas rojas que sobran. Segundo, el número de fichas rojas que sobran es 5 - 2. Por tanto sobrarán 3 fichas rojas y -5 + 2 = -3. En otras palabras, el alumno puede aprender de éste y otros ejemplos semejantes, que la suma de un número natural y un entero negativo se puede determinar restando dos números naturales y usando el signo apropiado en el resultado. De manera similar, la regla para sumar dos números negativos se puede formular usando fichas rojas.

RESTA DE ENTEROS

El modelo de "quitar" para la resta es el medio usual para introducir la resta de dos números naturales. Este modelo se usa con las fichas negras para calcular 5 - 3 en el primer ejemplo de la figura 6. La figura muestra 5 fichas negras y 3 que se quitan.

El segundo ejemplo de la figura 6 muestra el uso del modelo de quitar con fichas rojas para ilustrar la resta de dos números negativos. Para calcular -6 - (-2), cuenta 6 fichas rojas y quita 2 de ellas. Sobrarán 4 fichas rojas, y así la resta es -4.

Actividad 4 (RESTA DE ENTEROS).

Usa el número indicado de fichas para calcular las siguientes restas.

(-5)	− (-3)	(5 fichas rojas)
(-6)	− (-1)	(6 fichas rojas)
(-4)	− (-4)	(4 fichas rojas)

En la enseñanza de la sustracción de dos números enteros, cuando la diferencia es un número negativo, el modelo de "quitar" es usualmente abandonado. Por ejemplo, para calcular 5 - 8, ¿cómo se pueden quitar 8 de 5 ? La figura 7 muestra cómo se puede hacer esto usando las fichas. El primer conjunto sólo tiene 5 fichas negras, así que usamos 3 fichas negras más junto con 3 fichas rojas para obtener el segundo conjunto. Ambos conjuntos representan el número 5, pero el segundo conjunto tiene 8 fichas negras. El tercer conjunto muestra que se quitan las 8 fichas negras y que quedan 3 fichas rojas. Por lo tanto, 5 - 8 = -3.
El proceso de cambiar del primer conjunto al segundo para obtener una representación más conveniente de 5 ilustra el uso de las propiedades del idéntico aditivo y del inverso aditivo. Las siguientes ecuaciones son una descripción matemática de este proceso. Nota que el (3 +(-3)) en la segunda ecuación corresponde a las 3 fichas negras y 3 fichas rojas extra que se usaron en el segundo conjunto.

$$\begin{aligned} 5 - 8 &= (5 + 0) - 8 \\ &= 5 + (3 + (-3)) - 8 \\ &= 5 + 3 + (-3) - 8 \\ &= 8 + (-3) - 8 \\ &= 8 - 8 + (-3) \\ &= -3 \end{aligned}$$

La figura 8 muestra otro ejemplo de sustracción. Para calcular 6 - (-2), se ha cambiado el primer conjunto por el segundo usando 2 fichas rojas y 2 fichas negras extra. Ahora es posible quitar 2 fichas rojas del segundo conjunto. El tercer conjunto muestra que se quitan 2 fichas rojas y que quedan 8 fichas negras.

Actividad 5

Calcula la resta (-3) - 5 usando las fichas.
Primero cuenta 3 fichas rojas para representar -3.
Luego, representa -3 poniendo 5 fichas negras y 5 fichas rojas más junto con las 3 rojas.

Actividad 6

Usa las fichas para calcular las siguientes restas.

$5 - (-2)$

$(-3) - 2$

$(-3) - (-4)$

FORMULANDO REGLAS PARA LA SUSTRACCION
El uso de las fichas y el modelo de "quitar" para la sustracción ofrecen una oportunidad para el alumno de introducir simplificaciones en el proceso de calcular. Estos simplificaciones pueden conducir a la sustracción de enteros por medio de sumar inversos, o de encontrar sumandos perdidos.

SUMANDO INVERSOS
Para calcular (-8) - 2 usando la regla de sumar inversos, calcularíamos (-8) + (-2). Usemos el modelo de quitar para calcular (-8) - 2 para ver cómo el proceso de calcular puede conducir a la regla de sumar inversos. En la figura 9 cambiamos el primer conjunto por el segundo añadiendo 2 fichas negras y 2 rojas. El tercer conjunto muestra que se quitan las 2 fichas negras.

Para pasar del primer conjunto al tercero, pusimos 2 fichas rojas, pusimos y quitamos 2 ficahs negras. La simplificación de este proceso sería poner 2 fichas rojas al primer conjunto. Esto es, restar 2 es equivalente a sumar su inverso, es decir, -2.

$$-8 - 2 = -8 + (-2)$$

El ejemplo en la figura 9 muestra que para restar un entero, podemos sumar su inverso. En general, para cualesquiera dos enteros a y b, a - b se puede definir por la siguiente regla:

$$a - b = a + (-b)$$

Actividad 7 (SUMANDO INVERSOS).

Calcula las restas indicadas en la izquierda usando las fichas, luego calcula las sumas en la derecha. Compara las respuestas.

$(-5) - 4$	$(-5) + (-4)$
$3 - (-2)$	$3 + 2$
$(-6) - (-3)$	$-6 + 3$

SUMANDO PERDIDO

Para calcular 3 – 5 usando la regla del sumando perdido, debemos encontrar un número k tal que 3 = k + 5. Usemos el modelo de quitar para calcular 3 – 5 para ver cómo una simplificación en el proceso de calcular puede conducir a la regla de sumandos perdidos. En la figura 10, el segundo conjunto se ha obtenido del primero, usando 2 fichas negras y 2 fichas rojas más. El propósito fue encontrar una representación más conveniente para 3, de modo que pudiéramos quitar 5 fichas negràs. El tercer conjunto muestra que se quitan las 5 fichas negras y sobran las 2 fichas rojas.

La simplificación en la figura 10 es omitir el uso del tercer conjunto. El segundo conjunto nos muestra que 3 = -2 + 5, y así 3 = k + 5 para k = -2. Esto es, para calcular 3 – 5, usando la regla del sumando perdido, sólo necesitamos encontrar la representación de 3 que contiene exactamente 5 fichas negras. El ejemplo en la figura 10 muestra que en el proceso de usar el modelo de quitar, podemos determinar el sumando perdido. En general, para cualesquiera dos enteros a y b,

$$a - b = k \quad \text{si y sólo si} \quad a = k + b$$

Actividad 8 (SUMAÑDO PERDIDO)

a) Usa las fichas negras y 4 fichas negras para representar 6 ¿Qué número de fichas negras se debe añadir a 4 para obtener 6? (6 = $\square$ + 4) Este sumando perdido es la diferencia entre 6 y 4 (6 – 4 = $\square$)

b) usa las fichas negras y 5 fichas rojas para representar 8. ¿ Qué número se debe sumar al – 5) para obtener 8 ? (8 = $\square$ + (-5) Este sumando perdido es la diferencia entre 8 y (-5) (8 – (-5) = $\square$).

c) Usa las fichas rojas y 7 fichas negras para representar (-3) ¿ Qué número se debe sumar a 7 para obtener (-3) ? (-3 = $\square$ + 7)

d) Calcula 7 – (-2) usando las fichas para encontrar el siguiente sumando perdido .

$$7 = \square + (-2)$$

e) Calcula (-8) – 3 encontrando el sumando perdido (-8) = $\square$ + 3.

UN ENFOQUE CONCRETO PARA LA SUMA Y RESTA DE ENTEROS
(FIGURAS)

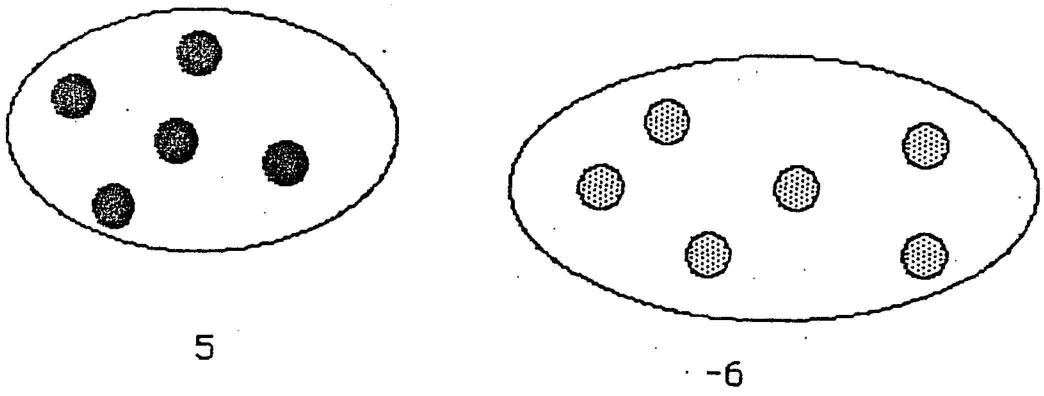


Fig. 1

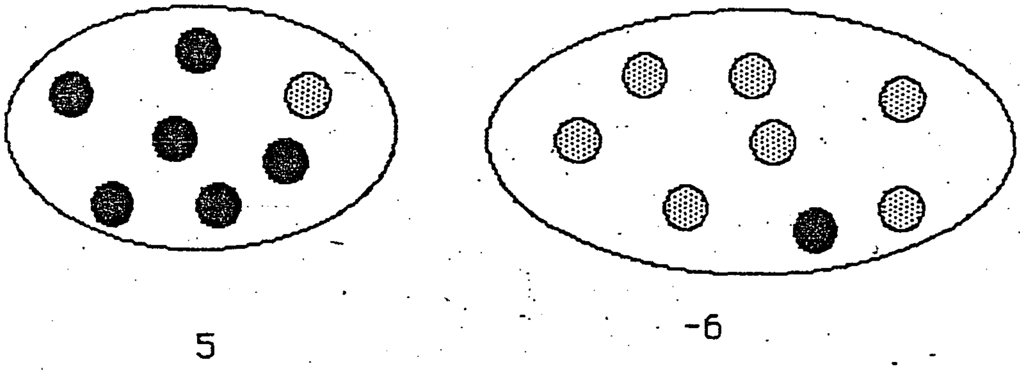


Fig. 2

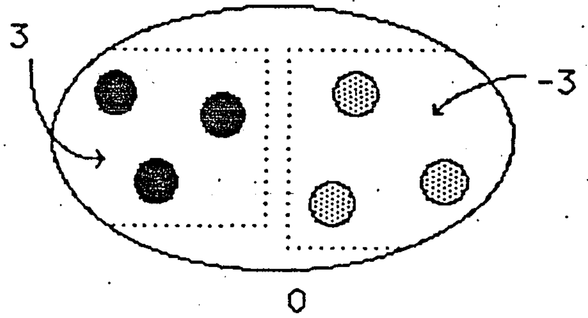
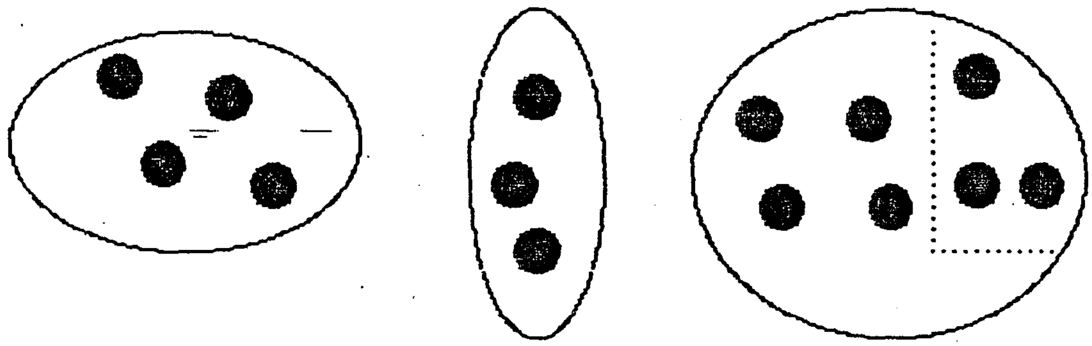
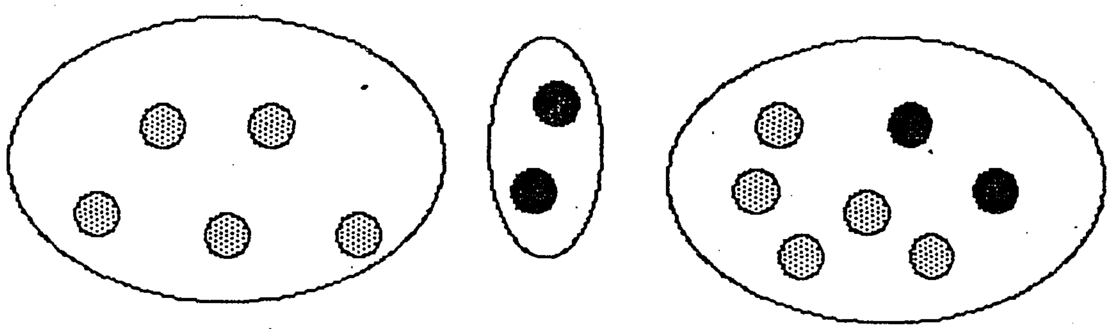


Fig. 3



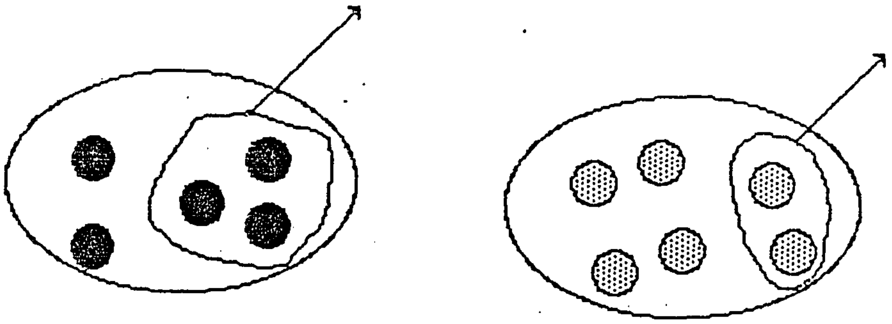
$4 + 3 = 7$

Fig. 4



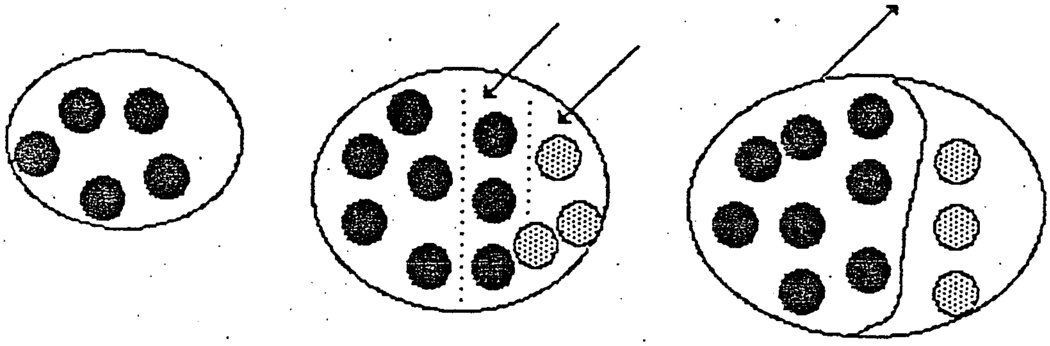
$-5 + 2 = -3$

Fig. 5



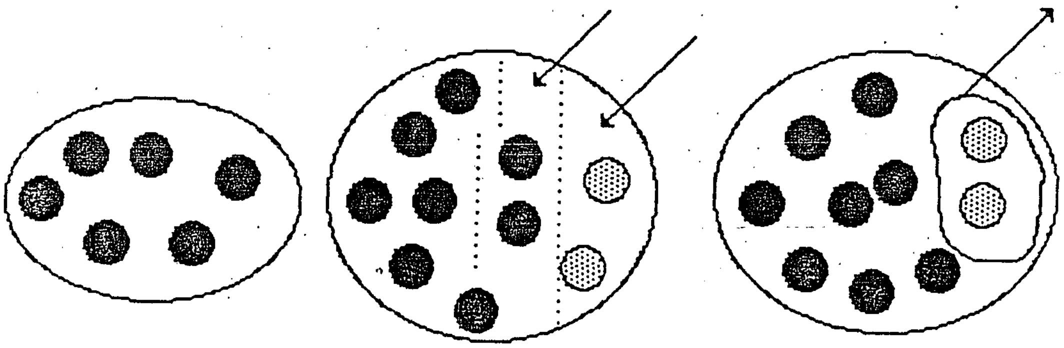
$5 - 3 = 2$ $\quad$ $-6 - (-2) = -4$

Fig. 6



5 $\quad$ 5 $\quad$ $5 - 8 = -3$

Fig. 7



6 $\quad$ 6 $\quad$ $6 - (-2) = 8$

Fig. 8

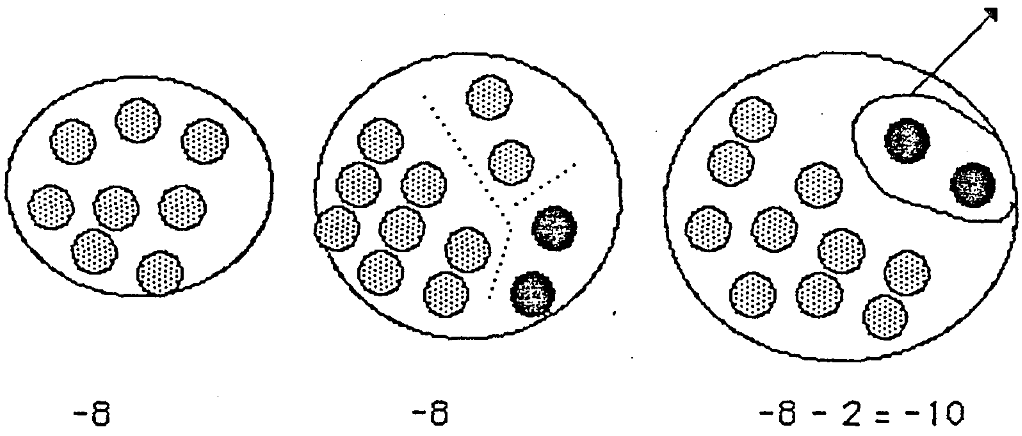


Fig. 9

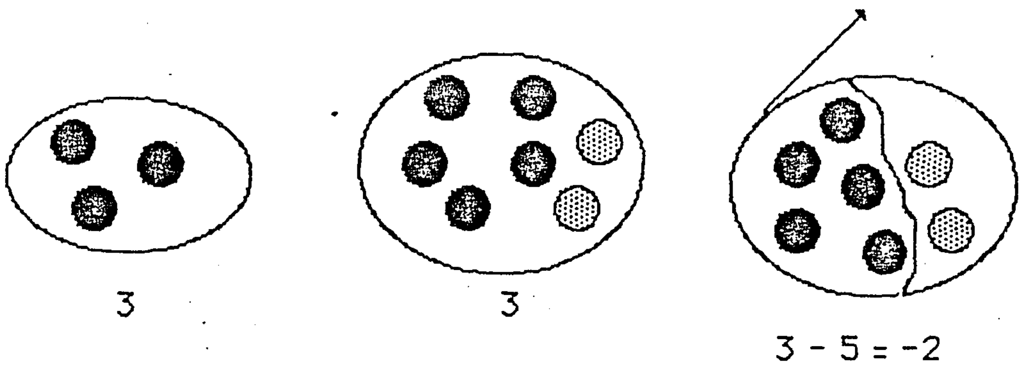
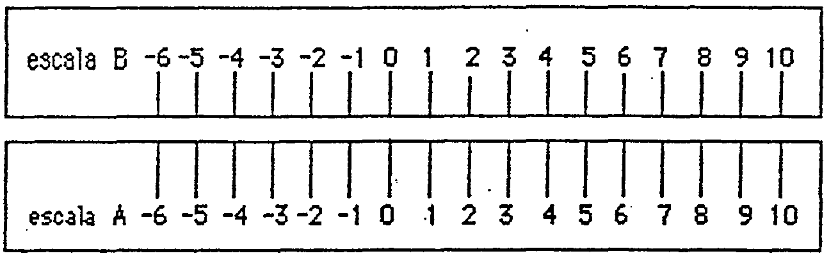


Fig. 10

UNA REGLA DE CALCULO

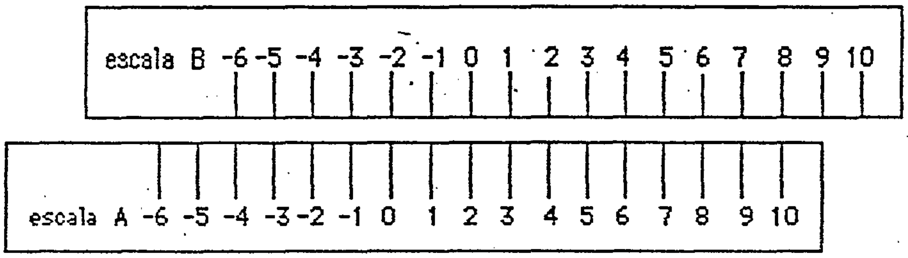
1 En este ejercicio vamos a hacer una regla de cálculo para sumar enteros.

a) Corta dos tiras rectangulares de cartulina como se muestra en el diagrama de abajo.
b) Marca un borde de cada tira en segmentos de 1 cm de longitud.
c) Numera las marcas como se muestra abajo.



2. Veamos cómo se puede usar la regla para obtener una suma **2 + 3**.

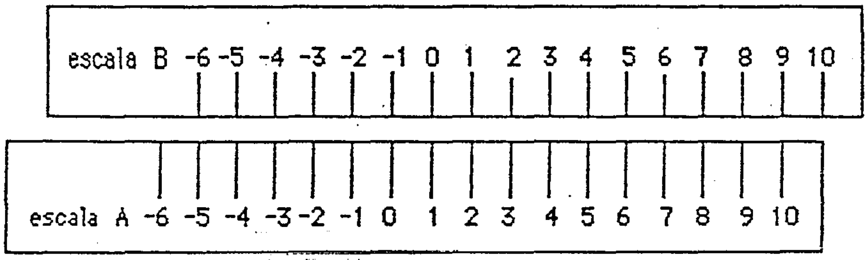
a) Mueve la escala B a la derecha hasta que el **0** de la escala B quede exactamente arriba del **2** en la escala A.



c) Localiza **3** en la escala B. Directamente abajo de **3** de la escala B, está **5** en la escala A. Así **5** es la suma de **2** y **5**

3. Ahora vamos a usar la regla de cálculo para encontrar la suma **1 + (−4)**.

a) Mueve la escala B a la derecha hasta que el **0** de la escala B quede exactamente arriba del **1** en la escala A.



c) Localiza −4 en la escala B. Directamente abajo de −4 de la escala B, está −3 en la escala A. Así −3 es la suma de **1** y −4.

4. a) ¿Es necesario cambiar la posición de la regla del inciso 3 para encontrar cualquiera de las siguientes sumas?

1 + 1	1 + (-1)
1 + 2	1 + (-2)
1 + 0	1 + (-5)

b) Encuentra cada una de las sumas del inciso a).

c) ¿Podrías encontrar las siguientes sumas poniendo la escala B en una posición distinta? Explica tu respuesta.

1 + 6	1 + 7
1 + (-7)	1 + (-8)

5. Encuentra la diferencia (-4) - 2 usando la regla de cálculo

a) Mueve la escala B hasta que el 2 quede arriba del -4 de la escala A.
b) Busca el 0 en la escala B.
c) Lee la respuesta en la escala A directamente abajo del 0 de la escala B.
d) ¿Es tu respuesta -6?
e) ¿Es cierto que (-4) - 2 = -6 ? ¿Cómo lo verificarías?
f) ¿Es cierto que -6 + 2 = -4 ? Usa la regla de cálculo para verificar.

6. De qué forma se puede utilizar la regla de cálculo par encontrar la diferencia (-4) - 2 ?