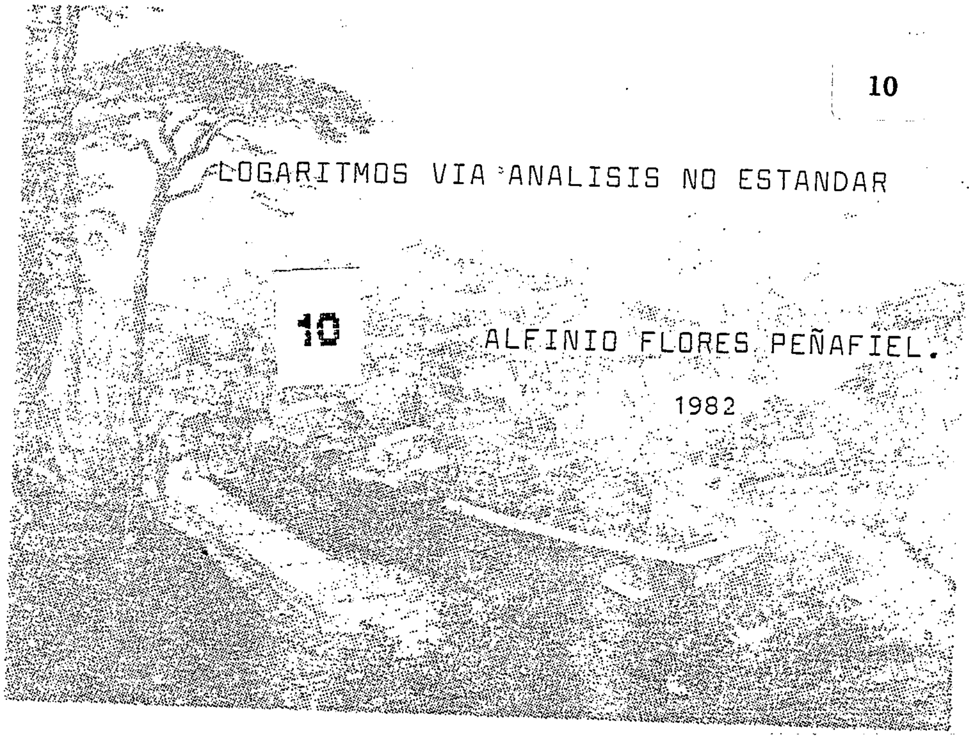
COMUNICACIONES DEL CIMAT



10

LOGARITMOS VIA ANALISIS NO ESTANDAR

10

ALFINIO FLORES PEÑAFIEL.

1982

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto.
México
Tels. (473) 2-25-50
2-02-58

LOGARITMOS VIA ANALISIS NO ESTANDAR

Alfinio Flores Peñafiel *

Los viajes de navegación que produjeron los grandes descubrimientos de los siglos 16 y 17 hicieron necesaria la resolución de dos problemas:

1) Para poder fijar la posición del barco en alta mar y calcular las rutas de navegación había que multiplicar senos y cosenos de ángulos con una precisión de hasta 7 cifras.

2) Para poder calcular el interés compuesto de los capitales acumulados con el producto de esos viajes se tenían que realizar muchas multiplicaciones y extracciones de raíces.

Esto hizo que se buscara intensamente la manera de simplificar los cálculos aritméticos. La forma de hacerlo fue reducir el problema de multiplicar al de sumar mediante los logaritmos, cuyo descubrimiento fue hecho de manera independiente y casi simultánea por Napier en Escocia y por Bürgi en Suiza. Los logaritmos tuvieron no sólo una utilidad práctica para calcular, sino que sirven para el estudio de fenómenos biológicos y económicos y tienen una gran importancia desde el punto de vista teórico de las matemáticas.

Veamos cómo se puede reducir el problema de multiplicar a realizar simples sumas.

La idea básica, de asociar una progresión geométrica a una aritmética la podemos encontrar ya en la obra de Arquímedes "El Contador de Arena". Sin embargo

---

* Centro de Investigación en Matemáticas. Apdo. Postal 402, Guanajuato, Gto.

las cosas para Arquímedes se complican ya que no contaba con el cero.

Galois nos da la forma explicíta. Cuando presentó su examen de admisión a la Escuela Politécnica, la pregunta que le plantearon fue sobre logaritmos. La respuesta de Galois fue simplemente escribir 2 progresiones en el pizarrón una aritmética y una geométrica:

a)	0	1	2	3	4	. . .
b)	1	a	a^2	a^3	a^4	. . .

Los términos de la progresión aritmética son los logaritmos de la progresión geométrica y la base es a. Para multiplicar los términos de la progresión geométrica entre sí, basta sumar los términos correspondientes en a) y ver cuál le corresponde a la suma en b) este es el resultado de la multiplicación.

Consideremos las siguientes progresiones

(a')	0	1	2	3	4	5	6	7	8	. . .
(b')	1	2	4	8	16	32	64	128	256	. . .

Por ejemplo la multiplicación 8 x 32 = 256.

Los términos correspondientes son

				3 + 5						
(a')	0	1	2	3	4	5	6	7	8	. . .
(b')	1	2	4	8	16	32	64	128	256	. . .
				8 x 32						

También podemos dividir números de la sucesión (b') entre sí. Para esto lo que hay que hacer es restar los términos correspondientes de (a')

7 - 4

a')	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b')	1	2	4	8	16	32	64	128	256

$128 \div 16$

Para elevar un número de la sucesión (b') a una cierta potencia, basta multiplicar el término correspondiente en (a') por ese número

2 x 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

4^3

La extracción de raíces también puede realizarse de manera más sencilla. Para esto basta dividir el término correspondiente entre el índice de la raíz.

$8 \div 2$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

$\sqrt{256}$

Utilizando estas dos progresiones se ha simplificado el problema de calcular: en vez de multiplicar sólo hay que sumar, en vez de dividir hay que restar etc. Esto se puede hacer siempre que se tengan una progresión geométrica y una aritmética en correspondencia.

Sin embargo hay una dificultad con la progresión (b'), sus términos están muy separados entre sí. Con ayuda de ella no podemos multiplicar números que no estén en la progresión por ejemplo 90 x 192. Para solucionar esto se puede pensar en utilizar una sucesión geométrica más "cerrada", esto es, una progresión en la que los términos sucesivos estén más cerca entre si. Veamos por ejemplo la progresión con razón 1.1

1   1.1   1.21   1.331   1.464   1.61   ...

en esta progresión la diferencia entre términos sucesivos no es muy grande al principio. Pero veamos por ejemplo el 63° término 405.26 y el siguiente 445.79 la diferencia vuelve a ser demasiado grande.

Podríamos tomar una razón todavía más próxima a 1 por ejemplo 1.01

1   1.01   1.0201   1.030   1.041   ...

En esta sucesión los huecos son más pequeños. Aún así, si quisiéramos aumentar el grado de precisión, trabajar con números con 6 o más cifras después del punto, tendríamos que elaborar otra progresión, por ejemplo

1   1.000 0001 $1.000\ 0001^2$ $1.000\ 0001^3$ ...

Esta tiene los huecos suficientemente pequeños al principio, pero a medida que se toman números más grandes, los espacios se hacen cada vez mayores, de modo que la distancia entre términos sucesivos llega a ser más grande que el error permitido

¿Será posible encontrar una progresión geométrica tal que no surjan estas dificultades?

Desgraciadamente esto no es posible en el sistema de los números reales. Si p es un número real positivo, no importa que tan pequeño, y tomamos la progresión con razón 1+p, podemos siempre encontrar una n tal que la distancia entre $(1+p)^{n+1}$ y $(1+p)^n$ sea mayor que el error permitido.

$(1+p)^{n+1} - (1+p)^n = p\,(1+p)^n$ lo cual puede ser muy grande si n es suficientemente grande.

Para poder encontrar la progresión que buscamos necesitamos trabajar con números infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Estos números forman parte del sistema numérico $^*R$ que es una extensión de los números reales R.

Aunque en el principio del cálculo se manejaban libremente los infinitesimales, principalmente Leibniz y Euler, ciertas dificultades hicieron que la formulación rigurosa del siglo 19- los dejara a un lado. No fue sino hasta hace pocos años cuando- Robinson dió una formulación rigurosa y operativa de un sistema que contiene números infinitesimales. Veamos cómo es este sistema. La recta real es sólo una parte de todo. Más allá que los - reales positivos están los números infinitos positivos.

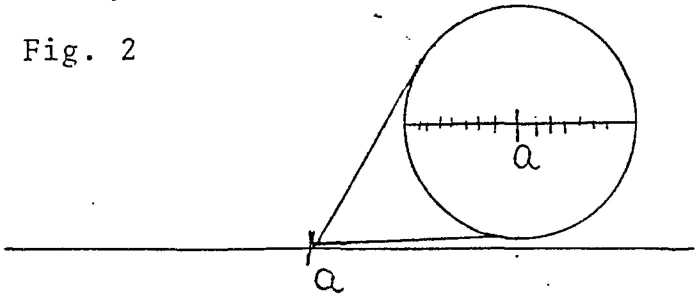
Fig. 1

——— ... ——— ... ———

infinitos negativos R infinitos positivos

Además si tomáramos un microscopio infinitesimal, veríamos que lo que parece un punto en R, en* R es todo un conglomerado - de puntos que están infinitamente cerca de él

Fig. 2



* R es un campo ordenado que contiene propiamente a R. Se pueden distinguir tres tipos de números en *R:

i) los infinitesimales
ii) los finitos
iii) los infinitos

α es infinitesimal si para todo $r \in R^+$ $|\alpha| < r$

a es finito si existe $r \in R^+$ tal que $|a| < r$

A es infinito si para todo $r \in R^+$, $r < |A|$

Se tiene entonces que si α es infinitesimal y a es finito αa es infinitesimal.

Si α es infinitesimal entonces $\frac{1}{\alpha}$ es infinito y si A es infinito $\frac{1}{A}$ es infinitesimal.

Si a,b son dos números tales que su diferencia es infinitesimal se denota $a \approx b$.

Si a es un número finito de *R, entonces existe un real r tal que $a \approx r$. A este real se le llama la parte estandar de a.

Los números de *R se pueden operar con las mismas reglas que los de R. Por ejemplo para sumar fracciones del tipo

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

es válido, aunque ahora a,b,c, estén en *R.

Otro ejemplo sería el teorema del binomio.
Se tiene que para m un número natural de R

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1!}\,\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\,\frac{1}{m^2} + \cdots$$

Esta misma fórmula sigue siendo válida aunque ahora tomemos números naturales infinitos.

Podemos, con ayuda del sistema extendido *R construir la progresión deseada.
Sea N un número natural infinito. Consideremos las siguientes progresiones.

$$\begin{array}{llllllll} c) & 0 & \frac{1}{N} & \frac{2}{N} \;\cdots & 1 \;\cdots & \frac{M}{N} \;\cdots \\ d) & 1 & 1+\frac{1}{N} & \left(1+\frac{1}{N}\right)^2 \cdots & \left(1+\frac{1}{N}\right)^N \cdots & \left(1+\frac{1}{N}\right)^M \cdots \end{array}$$

La distancia entre términos sucesivos de la progresión (d) es

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{M+1} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^M = \left(1+\frac{1}{N}\right)^M \cdot \frac{1}{N}$$

lo cual es infinitamente pequeño si $(1+1/N)^M$ es finito. Por otra parte, la progresión (d) tiene valores arbitrariamente grandes ya que

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+\frac{N}{1!}\,\frac{1}{N}+\frac{N(N-1)}{2!}\,\frac{1}{N^2}+\cdots > 2$$

y si $M=N^2$

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^M = \left[\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\right]^N > 2^N$$

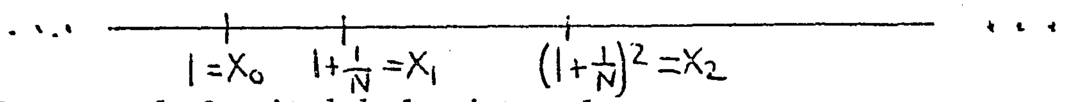
Así tenemos que (d) es una progresión geométrica infinitesimalmente densa entre los números finitos. En particular si r $\in$ R, r estará infinitamente cerca de algún término de (d).

Al igual que hicimos con las progresiones (a') y (b'), para multiplicar términos de (d) basta sumar las correspondientes en (c)

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{M}{N} & \cdots & \dfrac{H}{N} & \cdots & \dfrac{M+H}{N} \\ \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^M & \cdots & \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^H & \cdots & \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^{M+H} \end{array}$$

Veamos cómo se puede interpretar esto geometricamente.

Si en el eje horizontal marcamos los puntos de la progresión (d), con ayuda de un microscopio se verían así



Denotamos la longitud de los intervalos por

$$dx_i = x_{i+1} - x_i$$

Tenemos entonces que

$$dx_0 = \left(1+\frac{1}{N}\right)-1 = \frac{1}{N}$$

$$dx_1 = \left(1+\frac{1}{N}\right)^2-\left(1+\frac{1}{N}\right) = \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N}$$

$$\vdots$$

$$dx_M = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{M+1}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^M = \left(1+\frac{1}{N}\right)^M\frac{1}{N}$$

Sobre estos intervalos construiremos rectángulos de áreas iguales a la distancia entre los términos de la progresión (c) o sea iguales a $\frac{1}{N}$

Sobre el 1er. intervalo se construye un rectángulo de altura igual a 1 que es igual a $\frac{1}{X_0}$, sobre el segundo intervalo uno de altura $1/\left(1+\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{X_1}$, sobre el tercero uno de altura $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2}=\frac{1}{X_2}$, sobre el M-esimo uno de altura $1/(1+1/N)^{M-1} = 1/X_{M-1}$

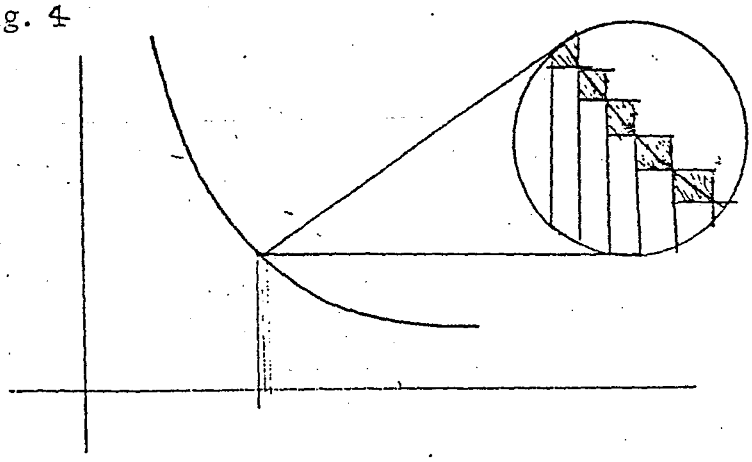
La suma de las áreas de los rectángulos desde el primero hasta el M-esimo es

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{x_i}\, dx_i = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{N} = \frac{M}{N}$$

o sea el término que le corresponde a $\left(1+\frac{1}{N}\right)^M$ en la progresión (c).

Esta suma de las áreas $\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{x_i}\, dx_i$ difiere del área bajo la curva $y=\frac{1}{x}$ desde 1 hasta $\left(1+\frac{1}{N}\right)^M$ en una cantidad infinitamente pequeña ya que la diferencia es menor que la suma de los rectángulos sombreados (Fig. 4).

Fig. ~~4~~



[illegible] y esta suma es menor que un rectángulo cuya altura sea la diferencia en los extremos o sea $1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^M}$ y cuya base sea $\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^M$, o sea de área,

$$\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^M\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^M}\right)=\frac{1}{N}\left(\left(1+\frac{1}{N}\right)^M-1\right)$$

lo cual es infinitamente pequeño.

Esto es, la parte estándar de $\sum_{i=0}^{M-1}\frac{1}{x_i}\,dx_i$ es precisamente $\int_1^{r}\frac{1}{x}\,dx$, donde r es la parte estándar de $\left(1+\frac{1}{N}\right)^M$

O sea que de la correspondencia entre las progresiones (d) y (c)

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^M \longmapsto \frac{M}{N}$$

se tiene la correspondencia entre las respectivas partes estándar

$$r \longmapsto \int_1^r \frac{1}{x}\,dx$$

Esta correspondencia la denotaremos por log

$$\log r = \int_1^r \frac{1}{x}\,dx$$

Si

$$r \approx \left(1+\frac{1}{N}\right)^M, \quad s \approx \left(1+\frac{1}{N}\right)^H$$

Como

$$\log r = \int_1^r \frac{1}{x}\,dx \approx \sum^M \frac{1}{N} = \frac{M}{N}$$

$$\log s \approx \sum^H \frac{1}{N} = \frac{H}{N}$$

y como $\displaystyle\sum^{M+H} \frac{1}{N} = \sum^{M+H} \frac{1}{x_i}\,dx_i \approx \int_1^{rs} \frac{1}{x}\,dx$

se tiene entonces la propiedad fundamental del logaritmo

$$\log(rs) = \log r + \log s$$

$$\int_1^{rs} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^r \frac{1}{x}\,dx + \int_1^s \frac{1}{x}\,dx$$

Las progresiones (c) y (d) se pueden extender hacia la izquierda

(c') $\ldots -\frac{M}{N} \ldots \quad \frac{-2}{N} \quad \frac{-1}{N} \quad 0 \quad \frac{1}{N} \quad \frac{2}{N} \ldots$

(d') $\ldots \left(1+\frac{1}{N}\right)^{-M} \ldots \quad \left(1+\frac{1}{N}\right)^{-2} \quad \left(1+\frac{1}{N}\right)^{-1} \quad 1 \quad \left(1+\frac{1}{N}\right) \quad \left(1+\frac{1}{N}\right)^2 \ldots$

La progresión (d') toma valores positivos, y la (c') va de valores infinitos negativos a valores infinitos positivos, o sea que la imagen de log es todo R.

La función log definida como la integral de una función continua y positiva, resulta ser creciente y diferenciable. Podemos entonces definir la función inversa

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

Esta función tiene la propiedad

$$\exp(x)' = \exp(x) \qquad \text{ya que}$$

$$\frac{d\exp(x)}{dx} = \left(\frac{d\log y}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x)$$

Veamos otra forma en que se puede expresar la función inversa de log.

En la progresión (d) hay un término muy especial: $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ ya que a este le corresponde precisamente el número 1 en (c).

Sea e la parte estándar de $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$. Como para cualequiera M,N infinitos se tiene que $\left(1+\frac{1}{M}\right)^M \approx \left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, no importa cual natural infinito hayamos escogido para definir log y e.

Si K,N son enteros infinitos tales que $x \approx \frac{K}{N}$, la función exp le asocia a x la parte estándar de

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^K = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N\frac{K}{N}} \approx e^{\frac{K}{N}} \approx e^x$$

se tiene entonces que

$$\exp(x) = e^x$$

Si $N = Mx$, entonces

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \left(1+\frac{x}{xM}\right)^{Mx} = \left[\left(1+\frac{1}{M}\right)^M\right]^x \approx e^x$$

o sea que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

De la correspondencia entre las progresiones (c) y (d) tenemos esta otra propiedad de la función exponencial

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Hemos obtenido así las propiedades fundamentales de la función log y de su inversa, la función exponencial, basándonos en la correspondencia entre una progresión aritmética y una geométrica en cada una de las cuales los términos están infinitamente cerca de los términos que los siguen.

Referencias.

La evolución de los logaritmos puede encontrarse en:

Goldstine; H.H. A History of Numerical Analysis from the 16 th through the 19 th Century. Springer Verlag. 1977.

Voellmy E. Jost Bürgi und die Logarithmen (1552/1632). Birkhäuser. 1974.

Textos de cálculo que utilizan los infinitesimales y en los que se pueden ver sus propiedades son:

Henle, James M.;Kleinberg, Eugene M. Infinitesimal Calculus. MIT Press, 1979.

Keisler, H. Jerome, Elementary Calculus, Prindle, Weber & Schmidt, 1976.