Factorización

Taller para 1o y 2o de secundaria

Alfinio Flores Peñafiel
1981

Factorización

Taller para 1o y 2o de secundaria

25 de marzo de 1981

1 Multiplicación con los dedos: la tabla del 9

2 Multiplicación con los dedos: producto de números mayores de 6

3 Truco para sumar números de Fibonacci

4 Truco con el calendario

5 Binomio cuadrado

6 Un modelo para factorizar trinomios

6a Extensión a áreas negativas

7 Rompecabezas algebraico

TALLER DE ALGEBRA: FACTORIZACION

Actividad1 Multiplicación con los dedos: la tabla del nueve.

Se numeran los dedos como se indica en la figura 1.

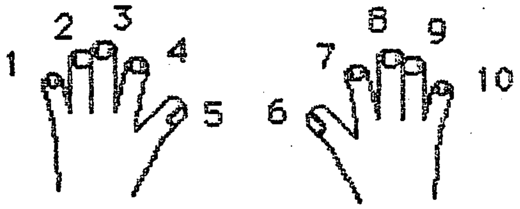


Figura 1

Para multiplicar un número por nueve, se dobla el dedo correspondiente (ver figura 2). Los dedos que queden a la izquierda del dedo doblado cuentan como decenas, los que están a la derecha como unidades. Por ejemplo en la figura 2, se representa 7 x 9 = 63.

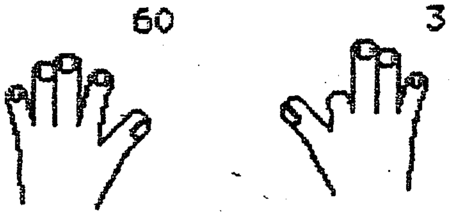


Figura 2

Llena la tabla de multiplicar utilizando el procedimiento anterior. Observa los siguientes hechos y describe cómo se reflejan en el procedimiento digital:

1 x 9 =
2 x 9 =
3 x 9 =
4 x 9 =
5 x 9 =
6 x 9 =
7 x 9 =
8 x 9 =
9 x 9 =
10 x 9 =

a) la suma de los dígitos es siempre 9

b) las unidades decrecen de uno en uno

c) las decenas se incrementan de uno en uno

TALLER DE ALGEBRA: FACTORIZACION

Actividad 2

Multiplicar con los dedos números del 6 al 10 entre sí.

Se numeran los dedos como se indica en la figura 3.

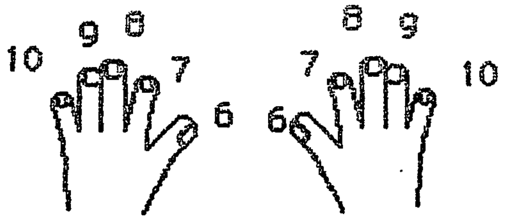


Figura 3

Para multiplicar dos números se tocan los dedos correspondientes. Por ejemplo, en la figura 4 se ilustra 7×9.

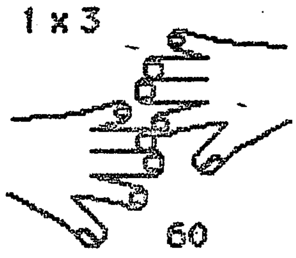


Figura 4

Los dedos que quedan abajo y los que se tocan cuentan como decenas, los que quedan arriba se multiplican (los de una mano con los de la otra) y el resultado se suma a las decenas. En este ejemplo, los dedos que se tocan más los que quedan abajo suman cinco o sea que tenemos 6 decenas o 60. Los que quedan arriba son dos en una mano y tres en la otra, y se multiplican entre sí $1 \times 3 = 3$. El resultado final es entonces $7 \times 9 = 60 + 3$

En la figura 5 se ilustra $7 \times 7 = 49$.

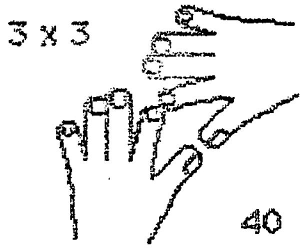


Figure 5

¿Cómo funciona?

Los números del 6 al 10 se pueden escribir como $5 + 1$, $5 + 2$, $5 + 3$, $5 + 4$, $5 + 5$, en general como $5 + n$.
Veamos lo que hacemos al multiplicar dos números de la manera indicada en esta actividad. Supongamos que queremos multiplicar
$(5 + n) \times (5 + m)$
Los dedos que se tocan son el n-ésimo y el m-ésimo de abajo hacia arriba. O sea que los que se tocan más los de abajo suman $n+m$. Como cuentan como decenas, se tiene $10(n+m)$. Quedan $5-n$ dedos en una mano y $5-m$ en la otra. Se multiplica $(5 - n)(5 - m)$.
El método funcionará siempre si la siguiente ecuación es siempre cierta:

$$(5 + m)(5 + n) = 10(n + m) + (5-m)(5-n)$$

Se puede comprobar la ecuación desarrollando ambos lados:

$$(5 + m)(5 + n) = 25 + 5m + 5n + nm$$

$$10(m + n) + (5-m)(5-n) = 10m + 10n + 25 - 5m - 5n + nm$$

TALLER DE ALGEBRA: FACTORIZACION
Actividad 3

Truco para sumar números de Fibonacci.
Los alumnos dictarán al maestro los diez primeros términos de una sucesión de Fibonacci. Para formar esta sucesión, los alumnos dan dos números cualesquiera, por ejemplo 3 y 4. El siguiente término se obtiene sumando estos dos números. Después para obtener los siguientes términos en forma sucesiva se suman los dos anteriores. Así el tercer término sería 3+4 , el siguiente 4+7, el siguiente 7+11 etc. Los primeros términos de la sucesión serían entonces 3, 4, 7, 11, 18, 29, 57, etc.
Se escriben 10 términos y se suman.
El maestro obtiene la suma en forma relampagueante. (Para esto, simplemente multiplica el séptimo término por 11).

3
4
7
11
18
29
57 séptimo término: 57
86
143
+ 229

627 57 x 11 = 627

Veamos cómo funciona.

a
b
$a + b$
$a + 2b$
$2a + 3b$
$3a + 5b$
$5a + 8b$ séptimo término $5a + 8b$
$8a + 13b$
$13a + 21b$
$21a + 34b$

$55a + 88b$ $11(5a + 8b) = 55a + 88b$

FACTORIZACION Actividad 4

El calendario

Se toma un cuadrado cualquiera de 3 x 3 casillas en el calendario. La suma de las diagonales es igual a la suma del primer renglón con el tercero, o de la primera columna con la tercera.
Se puede obtener el resultado de forma inmediata multiplicando el número de la casilla central por 6.

Ejemplo

15	16	17
22	23	24
29	30	31

15+16+17 + 29+30+31 = 138 suma del primer renglón y el tercero
15+22+29 + 17+24+31 = 138 suma de la primera columna y la tercera
15+23+31 + 17+23+29 = 138 suma de las diagonales

6 x 23 = 138

Prueba con varios cuadrados, dejando que los alumnos los escojan. No importa cuál haya sido el cuadrado de 3 por 3 que hayan escogido, siempre funcionará.

Veamos cómo funciona.

Si denotemos por n el primer número de nuestro cuadrado, el siguiente a la derecha será n+1 y el siguiente n+2. El número que está debajo del primero será n+7 pues el calendario está agrupado por semanas. La casilla central será entonces n+7+1. El cuadro completo quedaría entonces así:

n	$n + 1$	$n + 2$
$n + 7$	$n+7+1$	$n+7+2$
$n + 14$	$n+14+1$	$n+14+2$

renglones:

primer renglón $n + n+1 + n + 2$

tercer renglón $n+2*7 + n+2*7+1 + n +14 +2$

total $6n + 6*7 + 6$

columnas:

primera columna $n + n+7 + n+2*7$

tercera columna $n+2 + n+7+2 + n+2*7+2$

total $6n + 6*7 + 6$

diagonales: $n + n+7+1 + n+2*7+2$

$n+2 + n+7+1 + n+2*7$

total $6n + 6*7 + 6$

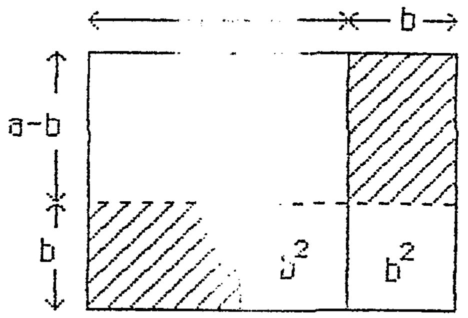
$6(n+7+1) = 6n + 6*7 + 6$

TALLER DE ALGEBRA

Comentarios finales

Es importante que el estudiante de matemáticas desarrolle habilidades para pasar de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto. Una de las habilidades más útil en esta dirección es aprender a observar y reconocer patrones. En un principio los patrones estudiados pueden ser de tipo numérico, donde es frecuente que aparezcan. Esto preparará el terreno para que el alumno busque patrones en el álgebra y en otras áreas de las matemáticas como geometría, probabilidad etc.

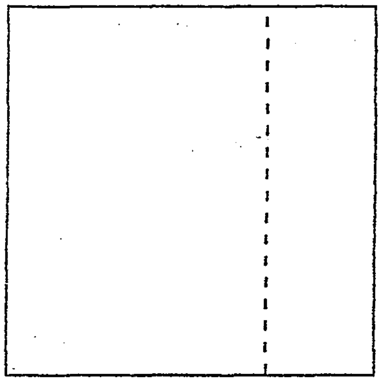
Es importante para el alumno observar primero una cierta regularidad o patrón en casos concretos para asimilar mejor la propiedad abstracta que se quiere enseñar. Es importante que observe el patrón en los casos particulares a fin de que pueda relacionar con éstos el patrón que se sigue en el caso general.

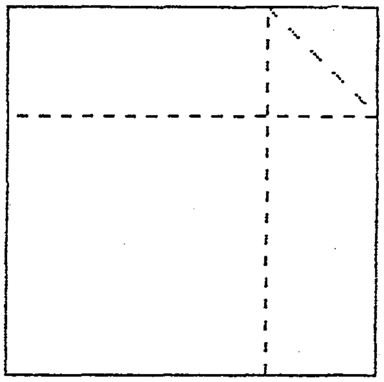

b
a-b
b
b^2
b^2

BINOMIO CUADRADO

5b) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a$ [illegible] $b + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

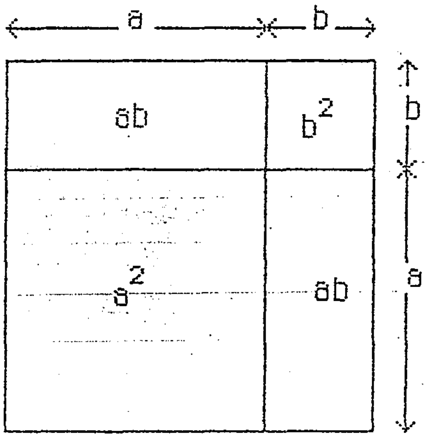
Veamos cómo se puede representar geométricamente esto.
Para obtener el área de un rectángulo, de lados a, b simplemente se multiplican las longitudes. Así pues tanto a^2, ab, b^2 como $(a+b)^2$ representan áreas de cuadrados o rectángulos.
Tomar un cuadrado de papel y doblar una línea paralela a uno de los bordes





luego doblamos otra perpendicular al primer doblez y a la misma distancia del borde perpendicular al primer borde.

De esta manera queda representado geométricamente el producto $(a+b)^2$

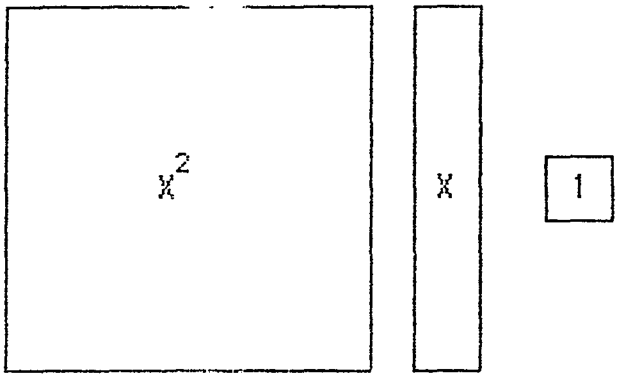


c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

6a) Un modelo para factorizar trinomios.

Se recortan cuadrados de lado 1 y otros cuadrados más grandes de lado x (que no sea múltiplo entero de los cuadrados chicos y rectángulos de lado 1 x 1



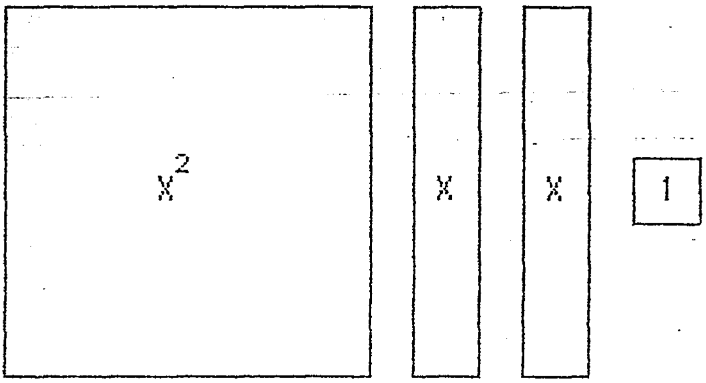
Las áreas representarán x^2 x 1

Cuando se trata de multiplicar binomios es más o menos facil encontrar el producto
$(x+2 (x+3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$
Sin embargo cuando se da un trinomio, no siempre es fácil encontrar la descomposición, por ejemplo:

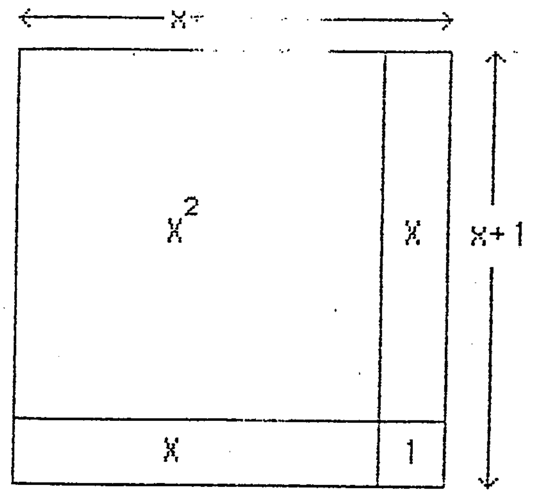
$2x^2 + 7x + 3$ ¿Cómo se factoriza?

Para ésto nos pueden ayudar los rectángulos de áreas x^2, x, 1
Lo que tenemos que hacer es tomar el número indicado de cada uno de ellos y tratar de formar un rectángulo. Veamos un ejemplo:

$x^2 + 2x + 1$



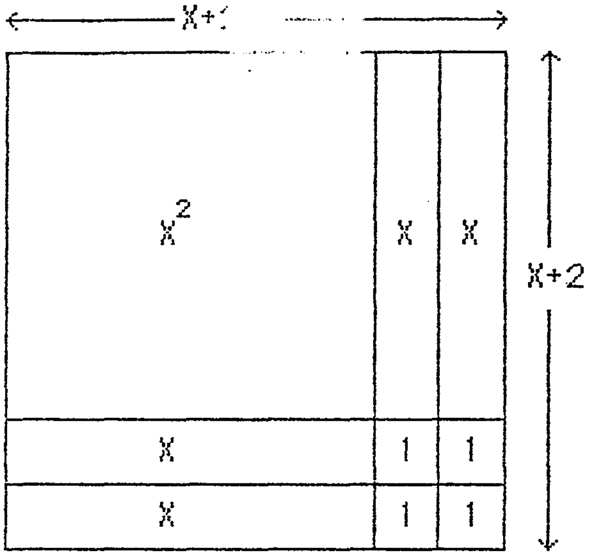
Las piezas se pueden acomodar de la manera siguiente:



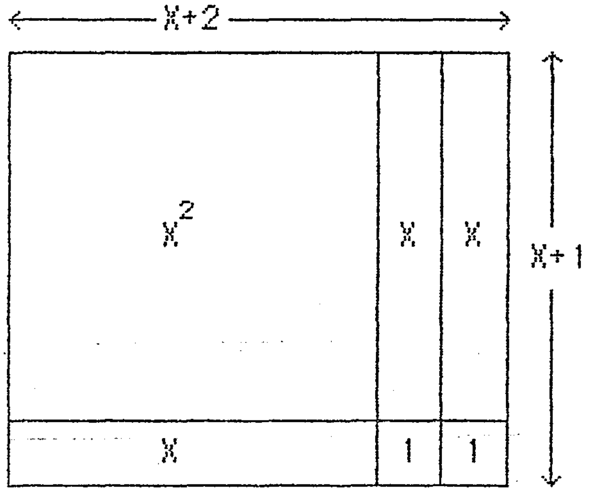
El cuadrado tiene lados de longitud $x + 1$
o sea que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Otros ejemplos.

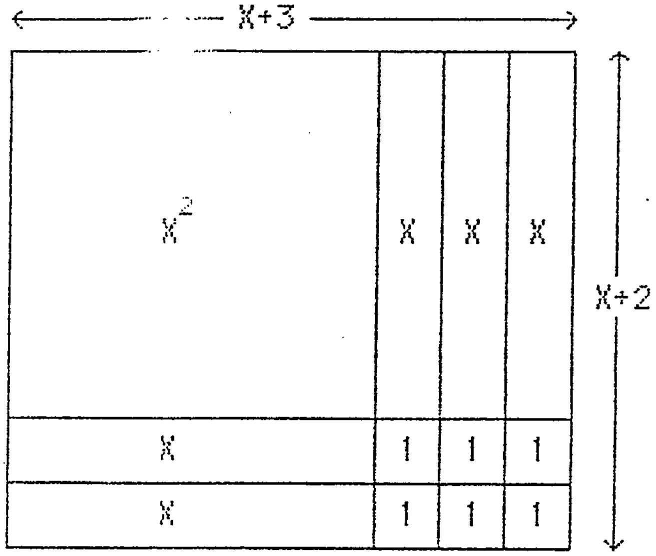
$x^2 + 4x + 4$



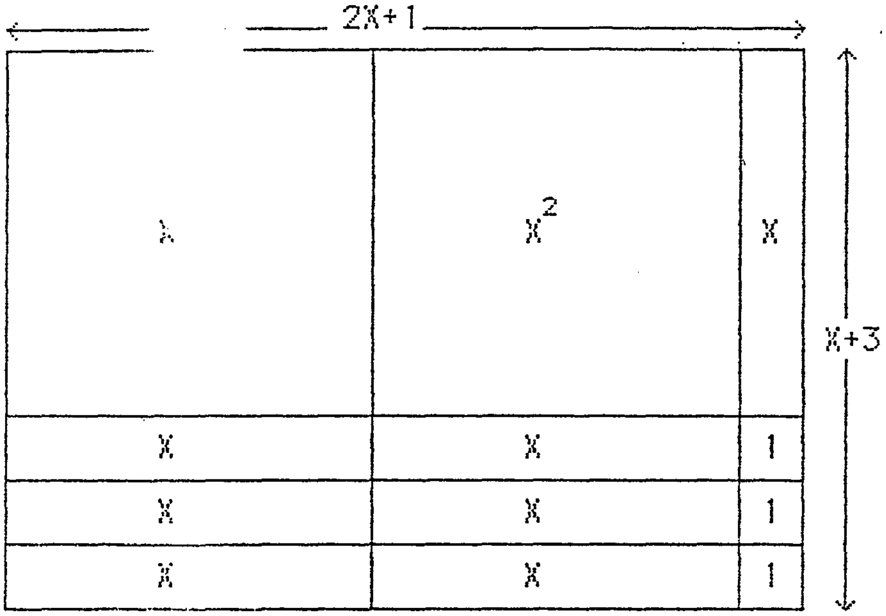
$x^2 + 3x + 2$



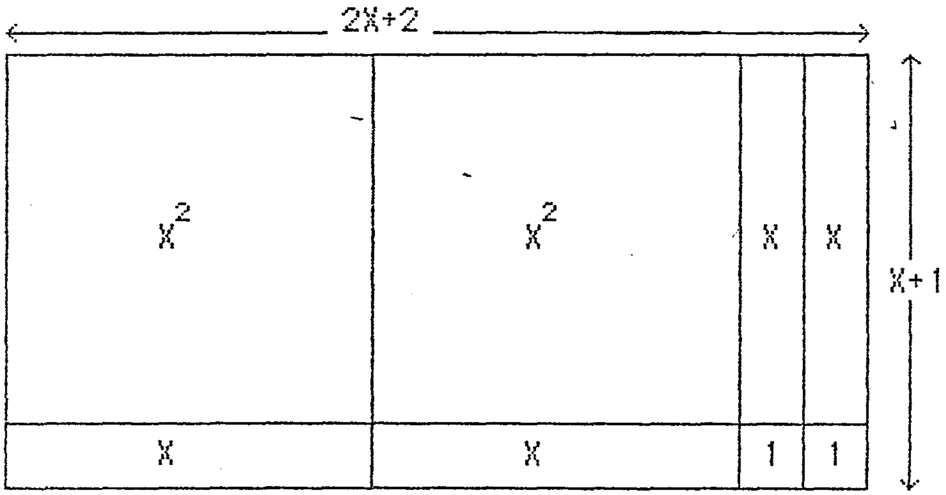
$x^2 + 5x + 6$



$2x^2 + 7x + 3$



$2x^2 + 4x + 2$



6b) Factorización:

Explicación con áreas negativas:

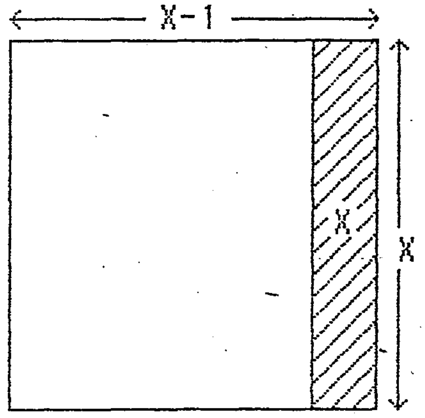
Supongamos que quisieramos factorizar un polinomio como el siguiente

$x^2 - 2x + 1$

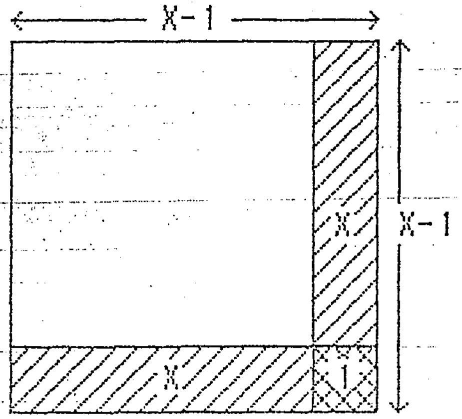
Para hacer esto necesitamos piezas que representen las cantidades negativas.

Utilizando cuadrados y rectángulos iguales a los anteriores pero de color distinto (rayados).

Superponer una tira rayada a una del otro color da como resultado cero.



$x^2 - x = x(x-1)$

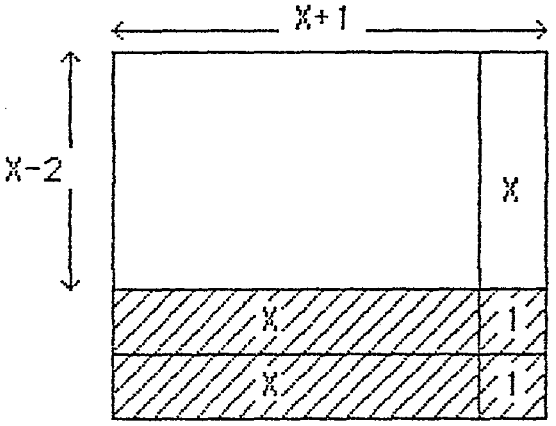


$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

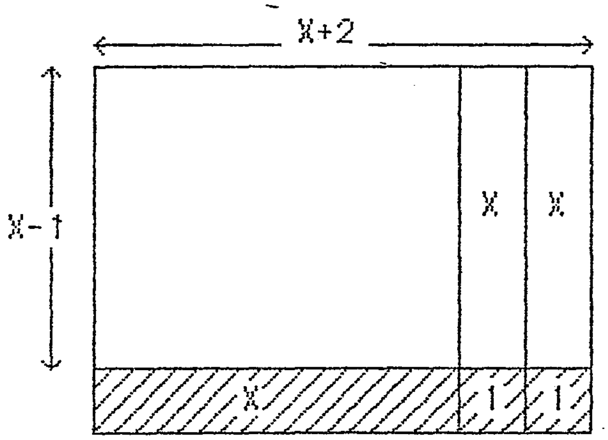
Para que el área cubierta se cuente como cero se necesita que haya el mismo número de áreas de un color que del otr [illegible] en el ejemplo anterior se tiene que añadir 1 para contrarrestar el efecto de la doble superposición de las tiras.

Otros ejemplos:

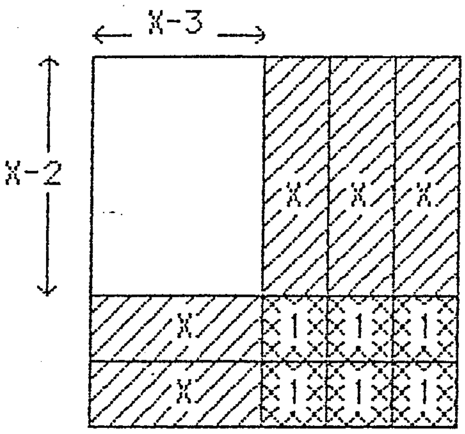
$x^2 - x - 2$



$x^2 + x - 2$



$x^2 - 5x + 6$



ROMPECABEZAS ALGEBRAICO
TIPO 1

$x(x+1)$ $a^2 - b^2$	$x^2 + x$ $x^2 - 3x + 2$ $(x-1)(x+2)$	$(x-1)(x-2)$ $(2x+2)(x+1)$ $x(x+1)$	$2x^2+4x+2$ x^2+2x+1
$(a-b)(a+b)$ x^2-x $11(5a+8b)$	x^2+x-2 $x(x-1)$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$ $a^2+2ab+b^2$	x^2+x $\frac{1}{16}$ x^2-x x^2+5x+6	$(x+1)(x+1)$ $x(x-1)$ x^2-2x+1
$55a+88b$ 7×8 $6(n+7+1)$	$(a+b)^2$ 56 x^2-3x+2 23×11	$(x+3)(x+2)$ $(x-1)(x-2)$ $(x+1)^2$ $2x^2+x^2$	$(x-1)^2$ x^2+2x+1 $(x+2)^2$
$6n+48$ x^2+3x+2	253 $(x+1)(x+2)$ $2x+3x$	$3x^2$ $5x$ x^2-4x+4	x^2+4x+4 $(x-2)^2$