

Instantones:
física, geometría y magia

88



Fausto Ongay
1988

INSTANTONES: FÍSICA, GEOMETRÍA Y MAGIA.

Fausto Ongay

Introducción. La física, o al menos la física teórica, y las matemáticas modernas tienen orígenes comunes, de suerte que solemos considerar a Newton, a Laplace, a Gauss, y a muchos otros como grandes físicos o grandes matemáticos según nuestras propias inclinaciones.

La enormidad de los conocimientos actuales, así como el auge de la filosofía formalista de las matemáticas en la primera mitad de este siglo, han propiciado una especie de "divorcio" entre ambas disciplinas. Un conocimiento universal de la física y las matemáticas, en el sentido que lo tenían por ejemplo Gauss o Poincaré, parece fuera del alcance de las posibilidades de una sola persona.

Sin embargo, en mi opinión este divorcio se debe más a nuestras limitaciones que a un cambio intrínseco de la relación entre ambas ciencias. Por ejemplo, el hecho que los argumentos intuitivos y heurísticos ya no sean aceptables como demostraciones no es algo nuevo: desde la Grecia clásica esto ha sido objeto de controversias, y gentes como Fermat, Cauchy y el mismo Gauss exigían rigor en los argumentos: lo que ha cambiado es el nivel de rigor que se exige y la conciencia que se tiene de lo que significa este rigor.

Por otra parte, pese a los grandes adelantos de nuestra época, seguimos

percibiendo las cosas a través de nuestros sentidos, seguimos teniendo ideas e intuiciones, seguimos apelando a dibujos, imágenes y diagramas para apoyar nuestro trabajo intelectual, etc. y esto, que condiciona por fuerza la forma en que desarrollamos cualquier actividad intelectual, no ha cambiado: la diferencia es que en nuestros días se requiere de trabajo en equipo para abarcar lo que antes podía hacerse a nivel individual.

Un ejemplo reciente y sumamente interesante de los frutos que puede dar el trabajo en equipo (combinado con la genialidad de los integrantes, por supuesto), es precisamente el estudio y solución del problema de los "instantones", originalmente planteado como un problema de la física de partículas elementales y que es el que se describirá en este trabajo.

La descripción se basa en las notas del curso dictado por M. F. Atiyah en Pisa, Italia, en el verano de 1979 ([1]). Debido al espacio disponible, me limitaré a describir tan sólo las ideas que considero esenciales, omitiendo casi por completo definiciones o demostraciones (así como los créditos a los autores de las ideas), los que pueden encontrarse en las referencias bibliográficas que se dan al final: la filosofía del asunto es simplemente dar un ejemplo de cuán profundas, y a veces insospechadas, relaciones existen entre la física y las matemáticas.

Para ello, comenzaré por describir el problema físico de los instantones el que, mediante "transformaciones naturales" se irá convirtiendo en un problema cada vez más abstracto, pero cada vez más susceptible de análisis con la poderosa herramienta de las matemáticas modernas. La magia del asunto es que algunas de estas transformaciones conducen a problemas que son clásicos en otras ramas y que aparentemente no guardan ninguna relación con el problema original.

Por supuesto que aquí la palabra clave es "natural", pues lo que es natural para algunos no lo es tanto para otros, y el reto es de alguna forma convencer a la gente que no conoce el problema, pero que está familiarizada con las técnicas, de esta naturalidad. En ese sentido, cabe señalar que las tres últimas secciones, que es donde propiamente se discute la solución del problema, y en especial la última que es con mucho la más técnica, no fueron expuestas, por cuestiones de tiempo, durante la conferencia. (Sin embargo, quisiera invitar a aquellos lectores suficientemente pacientes para leer todo el artículo a reflexionar sobre la equivalencia entre la primera y la última figuras...)

En todo caso, en las primeras 7 secciones se da una descripción completa de las transformaciones que fue sufriendo el problema de los instantones, hasta llegar a una forma en que finalmente pudo ser resuelto, en un recorrido que va desde su formulación original en términos de ecuaciones diferenciales parciales, hasta un problema abstracto de geometría algebraica.

Antes de cerrar esta ya larga introducción, quisiera agradecer a Socorro Soberón, quien me presentó por vez primera esta fascinante teoría, a Ricardo Vila, quien me ha ayudado a entender muchas de las ideas que aquí discuto y a Adolfo Sánchez Valenzuela, quien leyó estas notas haciendo oportunas observaciones. Las deficiencias que pudiera tener la presentación son, sin embargo, de mi exclusiva responsabilidad.

1. Las partículas elementales.

Durante más de 200 años, la física evolucionó sobre las bases establecidas por Newton, a tal grado que aún hoy día nuestra intuición está condicionada por estas ideas: la física newtoniana parece ser la que describe y explica las experiencias de nuestra vida diaria. Empero, la física del siglo XX nos ha mostrado que existen ciertas fronteras para esa física, a la que estamos tan acostumbrados.

Dos de las más importantes de estas fronteras son las siguientes: Por una parte el reino de las grandes velocidades, que se estudia en la teoría de la relatividad, y que posee una constante básica la velocidad de la luz, que impone un límite a la velocidad con que pueden desplazarse los objetos físicos. Por otra parte, el reino de los objetos "submicroscópicos", cuyas dimensiones son menores que las de los átomos. Esta es la materia de estudio de la mecánica cuántica y también posee una constante fundamental, la constante de Planck, que determina las dimensiones a las que los efectos cuánticos dominan la escena.

Precisamente en la encrucijada de estos dos reinos se sitúa la física de las partículas elementales.

No intentaremos dar aquí una definición precisa de lo que es una partícula elemental, por la simple razón de que no se sabe a ciencia cierta lo que es una tal partícula; por ello nos contentaremos con la imagen que de los cursos básicos de química o física tenemos de éstas: electrones, protones, fotones, etc.. Podemos sin embargo señalar que desde hace algún tiempo se sabe ya que estas partículas, que llamamos elementales, son en realidad objetos complicados, que poseen múltiples atributos, como masa, carga eléctrica, spin y otros, que las distinguen y personalizan.

Pero tal vez aún más sorprendente es el hecho que las partículas elementales parecen agruparse en categorías que presentan características en común. Por ejemplo, una de las más simples de estas agrupaciones es la de los llamados nucleones, que son los constituyentes fundamentales de los núcleos atómicos y que comprende a los protones y a los neutrones; éstos difieren entre, sí, entre otras cosas, porque los neutrones carecen de carga eléctrica y son ligeramente más pesados que los protones. Sin embargo, dentro del núcleo atómico ambas partículas parecen desempeñar un papel igualmente importante.

2. Un universo de protones y neutrones.

Imaginemos por un instante un mundo poblado únicamente por protones y neutrones, que se mueven según las leyes de la mecánica. Ya que las partículas tienen masa muy pequeña y además, como hemos dicho, se mueven a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, las reglas de la mecánica que rigen su comportamiento son las de la relatividad especial. En términos precisos, esto nos dice que el universo en cuestión es el espacio de Minkowski M^4 , es decir, \mathbb{R}^4 dotado de una forma bilineal no degenerada de signatura (3,1).

Las masas de estas partículas son muy parecidas entre sí y la diferencia más conspicua entre ellas radica en la carga eléctrica; pero si imaginamos que "apagamos" la interacción electromagnética, tampoco podremos distinguir a los nucleones por la carga eléctrica. En este mundo idealizado, los protones y los neutrones se vuelven los dos estados posibles en que se manifiesta una misma partícula, el nucleón y el atributo que distingue estos estados es el isospin; así, lo que en el fondo estamos postulando es que los nucleones tienen estructura interna. A qué llamaremos protón y a qué neutrón depende del marco de referencia (o "gauge") que escojamos, pero las ecuaciones físicamente relevantes no deben depender de la elección del gauge.

La estructura interna de los nucleones se puede interpretar intuitivamente diciendo que éstos pueden existir en ciertos estados que, en nuestro caso, caracterizan la probabilidad de que, en el momento en que la observamos, la partícula se manifieste como un protón o un neutrón. El significado preciso de esto sólo puede entenderse dentro de la mecánica cuántica y no es especialmente importante para nuestros propósitos, pero sí es importante señalar que, por razones físicas, se postula que el conjunto de los posibles estados (para este problema específico) está parametrizado por el grupo SU(2).

Así pues, si queremos describir el comportamiento de una de estas partículas tenemos que dar dos tipos de datos: su trayectoria en \mathbb{R}^4 y el conjunto de los estados internos por los que atravesó a lo largo de su movimiento. Esta es la esencia de las llamadas teorías de norma.

El problema que nos ocupa aquí fue analizado por vez primera en 1954 en un trabajo célebre de N. C. Yang y R. Mills; sin embargo, cabe mencionar que una situación análoga se presenta en el estudio del electromagnetismo, remplazando a $SU(2)$ por $U(1)$, situación que en esencia fue observada desde principios de siglo, en especial por H. Weyl. En el electromagnetismo clásico al grupo $U(1)$ (o más bien a su álgebra de Lie- \mathbb{R}), se le conoce como grado de libertad de norma (gauge freedom, en inglés), de ahí la terminología de teorías de norma para estas teorías. Fue precisamente en base a esta analogía con el electromagnetismo que Yang y Mills propusieron un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para describir el comportamiento de esta clase de partículas, y que en la teoría electromagnética corresponde a las ecuaciones de Maxwell.

No es posible describir aquí con detalle el razonamiento de Yang y Mills, (aunque más adelante hablaremos del significado geométrico de las ecuaciones de Yang-Mills), sin embargo, podemos señalar en este punto que, al igual que las ecuaciones de Maxwell, estas ecuaciones deben satisfacer ciertas propiedades de invariancia bajo la acción de ciertos grupos (por ejemplo, las ecuaciones no deben cambiar de forma bajo cambios de sistema de referencia como rotaciones o traslaciones).

En particular, en el caso que nos interesa, las ecuaciones deben ser invariantes bajo transformaciones conformes de M^4 . En términos físicos, esta invariancia bajo transformaciones conformes se debe a que sólo discutiremos el caso de partículas cuya masa en reposo es cero. Para entender qué importancia puede tener estudiar este tipo de partículas, cuya existencia parece a primera

vista como una paradoja, recordemos que por ejemplo los fotones, que son los "portadores" del campo electromagnético, tienen masa en reposo cero. Podemos entonces pensar que nuestro estudio se aplica a los "portadores ideales del campo de isospin".

3. Conexiones, curvatura y campos físicos.

La descripción del movimiento de partículas con estructura interna que hemos mencionado arriba se traduce, en lenguaje matemático riguroso, en la noción de sección de una haz principal, es decir, un haz cuya fibra es el propio grupo de Lie de estructura.

Puesto en forma intuitiva, imagináramos que sobre cada punto del espacio-tiempo se tiene una copia del grupo de estructura interna $SU(2)$, y la descripción del movimiento se hace dando el punto de M^4 más el elemento de $SU(2)$ que describe el estado interno. Esta situación se ilustra en la figura 1.

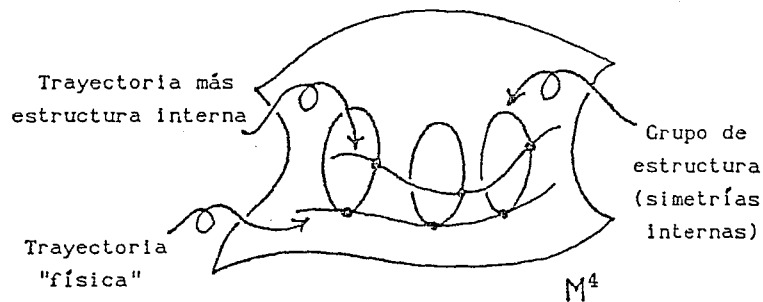


Fig. 1 Descripción de una partícula con estructura interna.

Obsérvese que desde un punto de vista mecánico, con el enfoque de haces principales estamos estudiando una teoría de campo: los haces en cuestión describen el medio en que evolucionan las partículas, en vez de describir directamente su evolución.

Por otro lado, es importante señalar que no hay razón, ni física ni matemática, para postular a priori que estos haces sean triviales, es decir, sean equivalentes, (en algún sentido que hay que precisar) al producto cartesiano $M^4 \times SU(2)$; debemos admitir la posibilidad de tener haces no triviales.

Todavía es necesario introducir más estructura para la descripción del movimiento, ya que en un haz principal arbitrario no hay relación natural entre las diversas fibras; por ello, para describir los distintos estados internos por los que atraviesa una partícula en su movimiento, se requiere especificar una conexión entre las fibras. Formalmente, ésta es un subhaz complementario al haz tangente a las fibras, el que se puede determinar localmente mediante una 1-forma α en M^4 , con valores en el álgebra de Lie de $SU(2)$ y que satisface ciertas propiedades con respecto a la acción de $SU(2)$, y a la que se llama forma de conexión. En lo sucesivo denotaremos por \mathfrak{g} al álgebra de Lie de $SU(2)$ y por $\Omega^p(\mathfrak{g})$ a las p-formas con valores en \mathfrak{g} .

Intuitivamente, uno esperaría que la conexión asociada al problema más simple, es decir el caso de una partícula libre, fuera la conexión "trivial", o en el lenguaje de la geometría diferencial plana, y que el efecto de las perturbaciones externas, que físicamente corresponden a las fuerzas, estuviera medido por la "diferencia" entre esa conexión trivial y la conexión del problema perturbado. Ahora bien, en geometría diferencial, esta desviación se mide fundamentalmente por la curvatura de la conexión: ésta es una 2-forma en $\Omega^2(\mathfrak{g})$, que en términos de la conexión α se define por $\omega = d\alpha + \frac{1}{2} [\alpha, \alpha]$.

Dentro de la literatura de física a la curvatura se le llama campo de norma y es interesante señalar que esta descripción geométrica de las fuerzas, en términos de la curvatura, es la esencia misma de la teoría de la relatividad general de Einstein. (Sin embargo, el problema de la relatividad general es más complejo, pues a diferencia de las teorías de norma, en ese caso el grupo relevante es un grupo de dimensión infinita.)

Por otra parte, se puede replantear el problema en el contexto de haces vectoriales, utilizando por ejemplo representaciones matriciales de $SU(2)$. Este enfoque facilita un poco la percepción heurística de las ideas y de hecho, históricamente así plantearon Yang y Mills sus ecuaciones. En lo sucesivo, consideraremos sólo haces vectoriales obtenidos vía la "representación"

tación de definición" de $SU(2)$ en \mathbb{C}^2 , de modo que los elementos de $SU(2)$ y \mathfrak{g} se representan por matrices de 2×2 con entradas complejas y que actúan en \mathbb{C}^2 por multiplicación por la izquierda. La conexión α determina una conexión lineal ∇ ; la curvatura ω queda entonces representada por la curvatura F de esta conexión lineal y las ecuaciones de Yang-Mills imponen condiciones en ∇ y en F . Esto se describe en la siguiente figura:

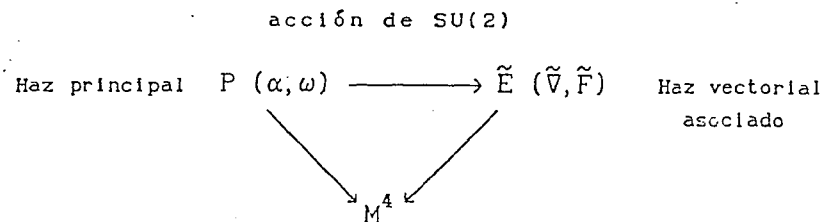


Fig. 2. El paso a haces vectoriales asociados.

Recordemos que en estas condiciones una conexión se describe, localmente, por una función $g : U \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathfrak{g}$, a la que llamaremos, faltos de una mejor traducción, un "gauge" para la conexión.

En resumen, podemos decir que el problema de encontrar soluciones para las ecuaciones de Yang-Mills se puede formular en términos geométricos como el problema de encontrar haces vectoriales sobre el espacio de Minkowski, cuyo grupo de estructura es $SU(2)$, y con una conexión que satisface ciertas condiciones.

4. Autodualidad y antiautodualidad.

Recordemos ahora que dada una métrica y una orientación en una variedad de dimensión n , se tiene automáticamente un operador $*$, que es un isomorfismo de Ω^p en $\Omega^{(n-p)}$, que se extiende de manera natural a las formas con valores en \mathfrak{g} . Si la dimensión es par, digamos $n = 2k$, el operador estrella resulta un automorfismo en las k -formas, que sólo depende de la estructura conforme de la variedad. En el caso que nos interesa, que es de dimensión 4, eligiendo una

orientación, la $*$ determina un automorfismo, conformemente invariante, en las 2-formas. En particular, si tenemos una conexión ∇ con curvatura F , tenemos una forma dual de curvatura $*F$.

Por otra parte, si mediante la "continuación analítica" que reemplaza al tiempo t por it cambiamos a una métrica riemanniana, $*^2 = \text{id}$ en $\Omega^2(\mathfrak{g})$ de modo que los valores propios de $*$ son ± 1 , y esto determina una descomposición de $\Omega^2(\mathfrak{g})$ en suma directa (de hecho ortogonal en la métrica inducida en $\Omega(\mathfrak{g})$) de dos subespacios: las formas autoduales $\Omega^+ = \{F ; *F = F\}$ y las formas anti autoduales $\Omega^- = \{F ; *F = -F\}$. En particular, según el tipo de curvatura, se habla de conexiones autoduales o antiautoduales.

Desde un punto de vista físico es muy importante el hecho que la conexión que hemos mencionado arriba para el problema de Yang-Mills pueda obtenerse mediante un principio variacional, considerando la funcional de Yang-Mills definida por

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge *F) (\dagger)$$

de modo que las ecuaciones de Yang-Mills aparecen como las ecuaciones de Euler-Lagrange para este problema, aunque por razones de simetría y por analogía con las ecuaciones de Maxwell, se agrega la identidad de Bianchi. Las ecuaciones de Yang-Mills en el vacío (esto es, en ausencia de nucleones, que son las "cargas de isospin"), que por supuesto es el caso más simple, quedan como sigue:

$$\nabla \wedge F = 0 \quad ; \quad \nabla \wedge *F = 0$$

En donde la primera ecuación es precisamente la identidad de Bianchi. (En el problema más general que incluye "cargas de isospin" y en el que se pierde la invariancia conforme la segunda ecuación se vuelve inhomogénea.)

Notemos que esta funcional de Yang-Mills es del todo natural: en efecto, $\text{tr}(F \wedge *F)$ es, salvo por un factor constante, la forma de Killing de \mathfrak{g} evaluada en el campo F , pero además (\dagger) puede interpretarse como la norma, en el

sentido de operadores, del operador de curvatura F . Resulta entonces plausible, incluso por razones físicas, imponer la restricción de que la integral (†) sea convergente.

Ahora bien, uno de los principales problemas para estudiar la convergencia de (†) proviene de que trabajamos con una métrica indefinida. Por esta razón es usual efectuar la continuación analítica del problema, reemplazando al tiempo t por it , de modo que el espacio-tiempo M^4 se identifica con \mathbb{R}^4 con la métrica euclídeana usual. De este modo, en lo sucesivo supondremos que trabajamos en una variedad con una métrica definida positiva.

5. Compactificación y finitud: la transición a S^4 .

Así pues, la convergencia de la integral (†) nos fuerza a imponer condiciones de decaimiento en F y en la conexión ∇ que la determina. Notemos sin embargo que, en tanto que para la curvatura debemos exigir que $\|F\| \rightarrow 0$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, para la conexión basta con pedir que para alguna vecindad de ∞ la conexión sea equivalente bajo "transformaciones de norma" (es decir, bajo la acción de $SU(2)$ en la conexión, que a grandes rasgos corresponde a "cambios de coordenadas") a una conexión plana.

Pero esta equivalencia sólo se requiere para una vecindad de ∞ y no globalmente. De hecho, en general no es posible escribir la conexión globalmente como una función con valores en \mathfrak{g} ; es decir, no podemos encontrar un gauge global y la obstrucción para ello puede describirse como sigue:

Si suponemos que la acción de $SU(2)$ cerca de ∞ está descrita por una función $g(x)$, con valores en $SU(2)$, y nos fijamos en la restricción de g a una esfera de radio R suficientemente grande, obtenemos una función (¡continua!) entre las esferas topológicas $S^3 = \{\|x\| = R\}$ y $SU(2)$; estas funciones están clasificadas por su grado, y sólo pueden extenderse al interior de S^3 si tal grado es cero. Al grado de esta función se le llama en física el número de instantón, por razones que describiremos más adelante. Desde un punto de vista

físico, el número de instantón corresponde al estado de excitación interna de la partícula. Esto se resume en la siguiente figura:

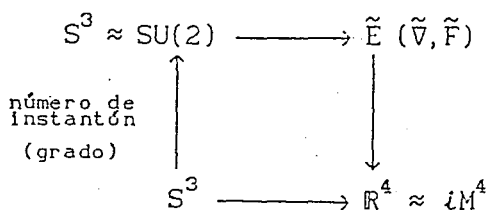


Fig. 3. Clasificación de los instantones.

Ahora bien, sobre \mathbb{R}^4 , los problemas de convergencia de (*) se deben básicamente a que este espacio no es compacto; pero en vista de la invariancia conforme de la curvatura, una condición natural de decaimiento es pedir que la conexión se extienda a la compactificación conforme de \mathbb{R}^4 , la 4-esfera S^4 , según se describe en la siguiente figura:

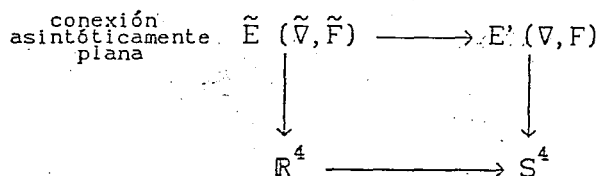


Fig. 4. Finitud asintótica y compactificación conforme.

Por supuesto, el trabajar en una variedad compacta presenta muchas ventajas. En particular, es posible obtener cotas para la norma de la curvatura en términos de invariantes topológicos, utilizando análogos apropiados del teorema de Gauss-Bonnet. De manera precisa, si suponemos que E es un haz que satisface las ecuaciones de Yang-Mills y cuyo número de instantón es k , la segunda clase de Chern de E , $c_2(E)$, puede evaluarse en términos de la curvatura y del número de instantón y resulta en la ecuación

$$8\pi^2 c_2(E) = - \int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) = 8\pi^2 k$$

de donde se sigue $\|F\| \geq 8\pi^2 |c_2(E)|$. Más aún, si fijamos a k y descomponemos a F en sus partes autodual y antiautodual $F = F^+ + F^-$, es inmediato que F alcanza el mínimo absoluto si y sólo si F es autodual o antiautodual, es decir si

$F = F^+$ ó $F = F^-$. Pero una conexión autodual (o antiautodual), en virtud de la identidad de Bianchi, automáticamente satisface las ecuaciones de Yang-Mills; ¡la magia de la simetría!

A los haces que corresponden a estas soluciones del problema de Yang-Mills, los que intuitivamente representan los posibles estados de ciertas "partículas ideales", se les ha llamado, siguiendo la usanza de la física de partículas elementales, instantones, ya que su existencia resulta de la continuación analítica a tiempo imaginario.

6. El universo de Penrose y la complejificación de la física.

La transición del espacio de Minkowski M^4 al espacio euclidiano \mathbb{R}^4 puede pensarse como caso particular del problema general de considerar subespacios de dimensión 2 de \mathbb{C}^4 , con la métrica hermitiana usual, provistos de una conjugación o forma real. Este proceso de complejificación de la física encuentra una expresión sistemática en la teoría de "twistores" de R. Penrose. No discutiremos con detalle aquí esta teoría, contentándonos con señalar que la idea central es traducir o, mejor aún, tratar de codificar las restricciones físicas dentro de la rigidez intrínseca de la variable compleja.

Dentro de este espíritu, una manera de interpretar la introducción de coordenadas complejas en el problema es pensar en el análogo de la identificación $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, identificando en este caso \mathbb{R}^4 con \mathbb{C}^2 . Pero si la primera identificación es natural, dada una métrica y una orientación en el plano, la segunda tiene el inconveniente de no ser canónica: existen en efecto muchas posibles coordenadas complejas en \mathbb{R}^4 , compatibles con una métrica y una orientación fijas, que no están biholomórficamente relacionadas entre sí.

De hecho, si consideramos una estructura compleja en \mathbb{R}^4 , $J \in SO(4)$, $J^2 = -id.$, las estructuras diferenciablemente equivalentes a ésta se obtienen conjugando por elementos de $SO(4)$, pero las estructuras holomórficamente equivalentes se obtienen conjugando por elementos de $U(2)$; en otras palabras,

el conjunto de estructuras complejas de \mathbb{R}^4 está parametrizado por la variedad cociente

$$\frac{SO(4)}{U(2)} \cong S^2 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$$

y lo anterior sugiere, como una manera de tener simultáneamente en cuenta a todas las posibles estructuras complejas, trabajar con el haz fibrado $\mathbb{R}^4 \times S^2$.

Pasando a la compactificación de \mathbb{R}^4 , S^4 , nos vemos confrontados con el problema de que la 4-esfera no admite estructuras complejas. Sin embargo, existe de manera mágicamente natural una variedad compleja que fibra sobre S^4 con fibra S^2 : el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ con la fibración de Hopf. Recordando que $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ es la grassmaniana de líneas de \mathbb{C}^4 se cierra el círculo con la teoría de Penrose.

En lo sucesivo escribiremos los proyectivos complejos omitiendo la \mathbb{C} , así por ejemplo, $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, etc..

Un último comentario: si pensamos ahora en coordenadas cuaterniónicas en \mathbb{R}^4 , identificando \mathbb{R}^4 con \mathbb{H} ; S^4 se identifica entonces con $\mathbb{P}_1(\mathbb{H})$ y la fibración de Hopf puede describirse como la proyección $\mathcal{P} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{H})$, con fibra \mathbb{P}_1 . A la proyección \mathcal{P} se le llama la transformación de Penrose y ocasionalmente diremos que \mathbb{P}_3 es el universo de Penrose.

7. Estructuras unitarias y holomorfas.

Vía la transformación de Penrose podemos "jalar" (pullback) los haces sobre S^4 a \mathbb{P}_3 . Notemos además que un haz E sobre \mathbb{P}_3 que sea el pullback de un haz sobre S^4 necesariamente es trivial sobre las fibras de \mathcal{P} , a las que llamaremos líneas reales de \mathbb{P}_3 .

Ahora bien, las estructuras holomorfas y unitarias son en cierta forma complementarias, en el sentido que un gauge que sea holomorfo y unitario simultáneamente, es necesariamente constante. Si recordamos que cada haz

holomorfo admite una única conexión cuya 2-forma de curvatura es de tipo (1,1), no es de extrañar que se tengan resultados del tipo siguiente:

TEOREMA. Sea E un haz vectorial complejo sobre una variedad compleja, y con grupa de estructura $U(2)$. Entonces E admite una única estructura holomorfa compatible, con conexión cuya curvatura es de tipo (1,1).

Si aplicamos el resultado anterior a haces sobre el universo de Penrose, que resulten de jalar haces sobre S^4 con estructura unitaria, obtenemos el resultado fundamental siguiente, al que llamaremos la correspondencia de Penrose:

TEOREMA. Existe una correspondencia biyectiva natural entre las clases de equivalencia, bajo la acción de $U(2)$, de instantones sobre S^4 con conexión autodual y las clases de isomorfismo de haces holomorfos de rango 2 sobre \mathbb{P}_3 con forma real positiva. El número de instantón corresponde precisamente a la segunda clase de Chern del haz sobre \mathbb{P}_3 .

La correspondencia del teorema anterior se ilustra en la figura 5:

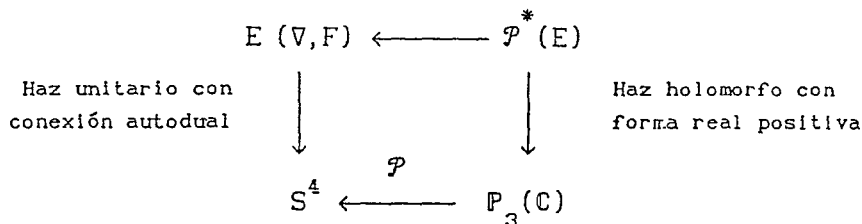


Fig. 5. La correspondencia de Penrose.

Aunque la forma real juega un papel decisivo dentro de toda la discusión que sigue, por falta de espacio no describiremos con detalle lo que significa una forma real positiva en este contexto, limitándonos a señalar los siguientes puntos:

i) La forma real se puede inducir en los haces vía la multiplicación por el cuaternio j . (Recuérdese que $S^4 = \mathbb{P}_1(\mathbb{H})$.)

ii) Una forma real determina una reducción de $U(2)$ a $SU(2)$.

iii) La existencia de una forma real implica que los haces son triviales sobre las líneas reales.

ω) Finalmente, la forma real implica que ciertos grupos de cohomología son triviales.

(Los dos últimos hechos son cruciales para la clasificación de los instantones que discutiremos más adelante.)

El resultado anterior nos dice entonces que para resolver el problema de construir los instantones necesitamos resolver un problema de geometría algebraica: clasificar los haces holomorfos de rango 2 sobre \mathbb{P}_3 , con forma real y triviales sobre las líneas reales. En las siguientes secciones discutiremos la solución de este problema, pero antes recordemos algunos hechos sobre haces sobre los espacios proyectivos, comenzando con el caso de \mathbb{P}_1 , donde se tiene una clasificación completa.

8. Haces holomorfos sobre espacios proyectivos.

Para ello, recordemos primero que los $U(2)$ -haces sobre $S^2 = \mathbb{P}_1$ se determinan especificando su comportamiento en un círculo ecuatorial de S^2 , de modo que a nivel topológico, la clasificación está dada por los homomorfismos de los grupos de homotopía, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1(U(2)) \cong \mathbb{Z}$; es decir, la clasificación está dada por un entero, que corresponde precisamente a la primera clase de Chern del haz.

Por otra parte, para los haces de líneas sobre \mathbb{P}_1 , donde el grupo de estructura es $U(1)$, se tiene un resultado semejante, pero aquí la clasificación topológica y la holomorfa coinciden y están dadas por el grado k , equivalentemente, por la primera clase de Chern: por ejemplo, el caso $k = 1$ corresponde al haz tautológico sobre \mathbb{P}_1 (o equivalentemente a la fibración de Hopf), al que denotaremos por L^1 , $k = -1$, al haz dual L^{-1} (haz de "hiperplanos") y $k = 2$ al haz tangente a \mathbb{P}_1 . En general los haces de líneas sobre \mathbb{P}_1 se obtienen a partir de L^1 y L^{-1} por medio del producto tensorial, y les denotaremos por L^n , $n \in \mathbb{Z}$.

Para haces de rango 2 (y en general, para rango ≥ 2), un resultado clásico de Grothendieck afirma que éstos son holomórficamente equivalentes a una suma de haces lineales:

$$E \cong L_1^{k_1} \oplus L_2^{k_2}$$

con las k_i únicas salvo permutación. Sin embargo, las k_i no son invariantes topológicos, ya que el único invariante es $c_1(E)$ que es la suma de las k_i .

En el caso de \mathbb{P}_3 no se tiene un resultado semejante al teorema de Grothendieck. Sin embargo, una forma natural de estudiar a los haces sobre \mathbb{P}_3 es considerando su restricción a las líneas proyectivas para utilizar ahí el teorema de Grothendieck. De manera más precisa, si E es un haz holomorfo sobre \mathbb{P}_3 y $\ell = \mathbb{P}_1$ es una línea en \mathbb{P}_3 , $E|_\ell$ se descompone como arriba en suma de haces lineales. Cambiar de línea en \mathbb{P}_3 de manera continua puede interpretarse como una deformación topológica de un haz sobre un \mathbb{P}_1 fijo y, por lo dicho antes, para deformaciones "suficientemente pequeñas" la primera clase de Chern debe permanecer constante, pero las k_i pueden variar. A las líneas donde éstas varían se les llama líneas de brinco (jumping lines en inglés).

Regresando al caso de haces E que provienen de instantones, obtenemos $c_1(E) = 0$, ya que los haces son triviales sobre las líneas reales. En particular, las líneas reales no pueden ser líneas de brinco.

9. La construcción de Horrocks.

Consideremos ahora el caso del instantón básico. Siguiendo la convención de Atiyah, para simplificar los problemas de signos debidos a la orientación es conveniente tomar $k = -1$. Necesitamos entonces construir un haz de rango 2 sobre \mathbb{P}_3 , cuya segunda clase de Chern sea -1 , y que sea trivial sobre las líneas reales.

Esto resulta ser sin embargo un problema clásico de geometría algebraica, cuya solución (con una terminología distinta, por supuesto) se conoce desde el

siglo pasado: el haz requerido es el haz de correlación nula y la construcción de este haz es también mágicamente simple:

Para ello consideramos \mathbb{C}^4 con la métrica hermitiana usual h . Esta se descompone en dos formas bilineales reales sobre \mathbb{C}^4 , $h = p + i\omega$, donde p es positiva definida y ω es simpléctica es decir, es no degenerada y alternante (de hecho, es en el estudio de este problema que Weyl introduce la palabra simpléctico en matemáticas). Si consideramos un punto $(z) \in \mathbb{P}_3$ y la recta ℓ_z en \mathbb{C}^4 que éste determina, el subespacio anulador de ℓ_z para ω , ℓ_z^0 , resulta ser un subespacio de \mathbb{C}^4 de dimensión compleja 3, y tal que $\ell_z \subset \ell_z^0$. Si hacemos variar (z) sobre \mathbb{P}_3 obtenemos entonces dos haces \mathcal{U} y \mathcal{U}^0 , de rangos 1 y 3 respectivamente, cuyo cociente $E = \mathcal{U}^0 / \mathcal{U}$ es precisamente el haz de correlación nula.

La construcción anterior puede reformularse como sigue: en el espacio vectorial \mathbb{C}^4 , de dimensión $4 (= 2|k| + 2)$ y provisto de una forma simpléctica ω , cada ℓ_z es un subespacio isotrópico, es decir, tal que $\omega|_{\ell_z} \equiv 0$, de dimensión 1 ($= |k|$) de modo que ℓ_z tiene ipso facto codimensión 2 en su anulador ℓ_z^0 . El haz \mathcal{U} construido con las ℓ_z se identifica entonces, de manera natural, con el haz de hiperplanos sobre \mathbb{P}_3 , que denotamos una vez más por L^{-1} , pensado como subhaz del haz trivial $\mathbb{P}_3 \times \mathbb{C}^4$.

Puesto de esta manera se obtiene una generalización natural de la construcción, que en retrospectiva es poco más que una reformulación del problema para k arbitraria. Esta construcción fue originalmente estudiada, en un contexto más amplio, por G. Horrocks, y podemos describirla como sigue:

Consideremos un espacio vectorial complejo V de dimensión $2|k| + 2$, provisto de una forma simpléctica ω , y denotemos por \mathcal{V} al haz trivial sobre \mathbb{P}_3 con esta fibra. Sea W un haz trivial sobre \mathbb{P}_3 , de dimensión $|k|$ y supongamos que tenemos un encaje

$$W \otimes L^{-1} \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$$

con la propiedad de que en cada punto (z) la fibra del encaje \mathcal{U}_z es isotrópica en V_z (notemos que esto es automático si $|k| = 1$). Podemos entonces construir un haz \mathcal{U}^0 exactamente como antes y el cociente $E = \mathcal{U}^0 / \mathcal{U}$ resulta un haz de rango 2 sobre \mathbb{P}_3 , trivial sobre las rectas reales y cuya segunda clase de Chern satisface $|c_2(E)| = |k|$.

10. Cohomología y Clasificación de las soluciones.

Bajo ciertas condiciones, la teoría de Horrocks permite clasificar completamente los haces de rango n sobre los espacios proyectivos. En esta última sección comentaremos brevemente un resultado de W. Barth, para el problema específico de los instantones, que muestra que todos los instantones resultan de la construcción de Horrocks, con lo que se cierra el círculo y se obtiene una clasificación completa de éstos:

TEOREMA. Sea E un haz sobre \mathbb{P}_3 con una estructura simplectica y supongamos que E satisface las siguientes condiciones:

a) La restricción de E a alguna línea $l \subset \mathbb{P}_3$ es trivial.

b) $H^1(\mathbb{P}_3, E \otimes L^{-2}) = 0$.

Entonces E se obtiene via la construcción de Horrocks de un encaje

$$W \otimes L^{-1} \longrightarrow V$$

donde V es un haz trivial con estructura simplectica.

La idea de la prueba de Barth se basa en el siguiente argumento: dado el encaje $W \otimes L^{-1} \cong \mathcal{U} \subset V$, consideramos los haces \mathcal{U}^0 , $E = \mathcal{U}^0 / \mathcal{U}$ y $Q = V / \mathcal{U}$, y con ellos construimos de manera natural el diagrama conmutativo y exacto de la figura siguiente, el que contiene toda la información sobre el haz E : por ejemplo, tomando sucesiones largas de cohomología, y gracias al teorema de anulamiento de Kodaira, podemos calcular la cohomología de los distintos haces que aparecen en el diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \rightarrow & W \otimes L^{-1} & \rightarrow & Q^* & \rightarrow & E \rightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \rightarrow & W \otimes L^{-1} & \rightarrow & \mathcal{V} & \rightarrow & Q \rightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & & W^* \otimes L^1 = W^* \otimes L^1 & & & \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

(Aquí la * denota al haz dual.) A este diagrama le llamamos el "despliegue" (display en inglés) del haz.

Pero bajo las hipótesis del teorema de Barth este proceso es reversible: es decir, utilizando las propiedades cohomológicas que se desprenden de la hipótesis $H^2(P_3, E \otimes L^{-2})$, que una vez más son consecuencia esencialmente del teorema de anulamiento de Kodaira, es posible reconstruir de manera canónica el despliegue a partir del haz E . La trivialidad del haz \mathcal{V} , así como su estructura simpléctica, se obtienen de las restantes hipótesis.

Para terminar, señalemos que los problemas que se estudian actualmente están relacionados básicamente con cuestiones globales de estructura, tanto para los moduli de instantones como para los moduli de conexiones. Pero como en la historia interminable, esto ya es materia para otra historia...

BIBLIOGRAFIA:

1. M. F. Atiyah "Geometry of Yang-Mills Fields" Monografía de la Scuola Normale Superiore de Pisa, Italia, 1979.
2. M. Forger "Gauge Theories, Instantons and Algebraic Geometry" Rep. Math. Phys. , Vol. 16 , 1979, pp. 359-384.
3. W. M. Gibson & B. R. Pollard "Symmetry Principles in Elementary Particle Physics" Cambridge University Press, 1976.
4. M. Spivak "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry" Vol II, 2nd ed. Publish or Perish, 1979.
5. R. O. Wells "Differential Analysis on Complex Manifolds" 2nd ed., GTM vol. 65, Springer Verlag, 1980.

Fausto Ongay

Centro de Investigación
en Matemáticas (CIMAT)
Apdo. Postal 402
36000, Guanajuato, Gto.