EL TEOREMA DE REDUCCIÓN SIMPLÉCTICA DE MARSDEN Y WEINSTEIN.

86

FAUSTO ONGAY 85

Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, Guanajuato, Gto. 36000

ABSTRACT. Describiremos con detalle el teorema de reducción simpléctica de Marsden y Weinstein, para el caso de variedades C^∞ de dimensión finita, indicando al final las modificaciones necesarias para el caso holomorfo y para dimensión infinita. Discutiremos con detalle el ejemplo de la reducción del momento angular.

1. VARIEDADES SIMPLÉCTICAS.

Una variedad simpléctica es un par (M, ω), donde $\omega \in \Omega^2(M)$ es una 2-forma cerrada y no degenerada. Si (M, ω_M) y (N, ω_N) son dos variedades simplécticas, decimos que una aplicación $f : M \to N$ es simpléctica si $f^*(\omega_N) = \omega_M$, y de esta forma tenemos definida una categoría.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $p \in M$. Para cada subespacio V de T_pM definimos el ω-anulador (o espacio ω-ortogonal) V^ω por

$$V^\omega = \{ X \in T_pM \,;\, \omega(X, Y) = 0 \text{ para toda } Y \in V \},$$

y decimos que un subespacio es isotrópico si $V \subseteq V^\omega$.

El ejemplo básico de variedad simpléctica es el haz cotangente a una variedad cualquiera Q, $M = T^*Q$, con la forma simpléctica canónica $\omega_0 = -d\theta_0$, donde la 1-forma canónica (o de Liouville) θ_0 está dada localmente por $\theta_0 = \sum_i p_i dq_i$, donde las q_i son las "coordenadas en la base" y las p_i "coordenadas en la fibra". Un célebre teorema de Darboux dice que localmente todas las variedades simplécticas se ven así y a este tipo de coordenadas se les suele llamar canónicas, especialmente en la literatura de física.

En particular se sigue que todas las variedades simplécticas son orientables y de dimensión par; de hecho, poseen una estructura casi compleja (simplemente piénsese en la escritura local de ω_0). Desde este punto de vista, una clase muy importante de variedades simplécticas son las variedades kählerianas: éstas son variedades complejas con métrica

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

hermitiana, cuya estructura casi compleja subyacente es covariantemente constante con respecto a la conexión de Levi-Civita. En este caso $\omega = \mathrm{Im} g$, donde g es la métrica hermitiana, define una estructura simpléctica. El ejemplo básico aquí es $P^n(\mathbb{C})$ con su forma de Kähler usual.

2. Campos Vectoriales Hamiltonianos.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Puesto que ω es no degenerada, ésta define un isomorfismo $\mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$ mediante la aplicación $X \mapsto \iota_X\omega$, donde ι_X denota al producto interior. Si $\iota_X\omega$ es una 1-forma cerrada se dice que X es localmente hamiltoniano, si además es exacta, se dice entonces que X es hamiltoniano. La condición de que $X \in \mathcal{X}(M)$ sea hamiltoniano es claramente equivalente a $\mathcal{L}_X\omega = 0$, donde $\mathcal{L}_X$ denota la derivada de Lie. Como ω es cerrada, los campos localmente hamiltonianos forman una subálgebra de $\mathcal{X}(M)$ y los campos hamiltonianos son un ideal de ésta.

Si X es un campo hamiltoniano entonces existe una función h, única módulo constantes si M es conexa, tal que $\iota_X\omega = dh$. Recíprocamente, si $h \in C^\infty(M)$, definimos la correspondencia $h \mapsto X_h \in \mathcal{X}(M)$ mediante $\iota_{X_h}\omega = dh$, y ocasionalmente diremos que X_h es el gradiente simpléctico de h. Podemos entonces dar una estructura de álgebra de Lie a $C^\infty(M)$ "jalando" el paréntesis de Lie de $\mathcal{X}(M)$; éste es el llamado paréntesis de Poisson de funciones, denotado por $\{\cdot,\cdot\}$, construcción de gran importancia en mecánica clásica, pues a través de él se describe la dinámica de los sistemas. Nótese que *ipso facto* $h \mapsto X_h$ es un homomorfismo de $C^\infty(M)$ en un álgebra de derivaciones, hecho de gran importancia para la mecánica cuántica (parece ser que esta observación se debe a Souriau). Así pues, si M es conexa, se tiene la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) \longrightarrow 0.$$

3. La Acción Adjunta.

Si un grupo de Lie G actúa en una variedad M, denotaremos la acción por $(g,p) \mapsto g \cdot p$ y a la órbita del punto $p \in M$ por $G \cdot p$. Al álgebra de Lie de G la denotaremos por $\mathfrak{g}$.

Sea $\xi \in \mathfrak{g}$. El generador infinitesimal de la acción de G en M, correspondiente a ξ, es el campo vectorial X_ξ definido por

$$X_\xi(p) = \frac{d}{dt}(\exp t\xi \cdot p)|_{t=0}.$$

Un ejemplo fundamental de acción es la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$, definida por

$$g \cdot \eta = \mathrm{Ad}_g \eta = (R_{g^{-1}} \circ L_g)_* \eta \ , \ ; \ g \in G \ , \ \eta \in \mathfrak{g},$$

donde R y L son las traslaciones a la derecha y a la izquierda, respectivamente. Para $\xi \in \mathfrak{g}$, el generador infinitesimal de esta acción es precisamente el dado por la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ en sí misma:

$$\eta \mapsto \mathrm{ad}_\xi \eta = [\xi, \eta] \quad ; \ \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

(Recuérdese que en un espacio vectorial, como $\mathfrak{g}$, los campos vectoriales se identifican con las funciones del espacio en sí mismo.)

Dualizando esta construcción obtenemos la acción contragrediente de G en $\mathfrak{g}^*$, llamada en este caso la acción **coadjunta**, denotada por Ad^*_g, y definida por:

$$\mathrm{Ad}^*_g : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* : \beta \mapsto \mathrm{Ad}^*_g\beta : \eta \mapsto \beta(\mathrm{ad}_g\eta) \quad ; \ \eta \in \mathfrak{g},$$

y el generador infinitesimal de esta acción corresponde a menos el pullback de la acción adjunta en el algebra de Lie $\mathfrak{g}$.

4. Mapeos Momento (Momentum Mappings).

Consideremos ahora una variedad simpléctica en la que actúa un grupo de Lie G mediante una acción simpléctica, esto es, tal que para cada $g \in G$ el difeomorfismo de M, $x \mapsto g \cdot x$, es simpléctico. En esta situación tenemos dos tipos de campos vectoriales especiales: los campos hamiltonianos y los generadores infinitesimales de la acción de G; una **aplicación o mapeo momento** es una aplicación que permite realizar a los segundos en términos de los primeros; es decir, permite expresar a los generadores infinitesimales como gradientes simplécticos. De manera precisa: un mapeo momento es una función $J : M \to \mathfrak{g}^*$ tal que, si denotamos por $\hat{J}(\xi)$ a la función de M en $\mathbb{R}$ definida por

$$\hat{J}(\xi)(x) = J(x)(\xi) \quad ; \ x \in M \ , \ \xi \in \mathfrak{g},$$

entonces $X_\xi = X_{\hat{J}(\xi)}$; es decir,

$$\iota_{X_\xi}\omega = d\hat{J}(\xi).$$

Dada una acción simpléctica, en general no existen mapeos momento para ella. Sin embargo, cuando éstos existen representan cantidades que se consevan, en el siguiente sentido:

Proposición: *Si h es una función invariante bajo la acción de G (i.e., si $h(g \cdot x) = h(x)$) y J es una aplicación momento para la acción de G, entonces J es invariante bajo el flujo de X_h.*

La clase más importante de mapeos momento es la de los mapeos Ad^*-equivariantes, es decir, de aquellos mapeos que satisfacen

$$J(g \cdot x) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} J(x),$$

condición que es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ g\cdot\ } & M \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Una de las razones por las que este tipo de mapeos momento es importante es por que en este caso $\hat{J}$ resulta ser un morfismo de álgebras de Lie; de hecho, en este caso tenemos el siguiente diagrama conmutativo de álgebras de Lie:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & C^\infty(M) \arrow[rr] & & \mathcal{X}(M) \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathfrak{g} \arrow[ul, "\hat{J}"] \arrow[ur, "\xi \mapsto X_\xi"'] & & \end{tikzcd}$$

5. Levantamientos de Acciones.

Una de las principales fuentes de mapeos momento Ad*-equivariantes es el levantamiento de acciones de grupos en el espacio de configuración; es decir, dada una acción del grupo G en la variedad Q, ésta se puede levantar por pullback a una acción de G en $M = T^*Q$. De manera precisa, si $(q,p) \in M$ y Φ denota la acción de G en Q, definimos la acción Ψ de G en M mediante

$$\Psi_g(q,p) = (\Phi_g q, \Phi^*_{g^{-1}}(p))$$

(recordemos que p es una forma lineal en T_qQ). Esta acción es simpléctica respecto a la forma simpléctica canónica ω_0: en efecto, $\Psi^*_g\omega_0 = \Psi^*_g d\theta_0 = d\Psi^*_g\theta_0$; luego, si $(u,v) \in T_{(q,p)}T^*Q$ entonces

$$\Psi^*_g\theta_0|_{(q,p)}(u,v) = \theta_0|_{(\Phi_g q, \Phi^*_{g^{-1}}p)}\big(\Psi_{g*}(u,v)\big) = \Phi^*_{g^{-1}}p(\Phi_{g*}u) = p(u),$$

por definición de la forma de Liouville en T^*Q. Obtenemos entonces un mapeo momento Ad*-equivariante definiendo

$$\hat{J}(\xi)(q,p) = p\big(X_{\xi_Q}(q)\big) = \iota_{X_\xi}\theta_0(q,p),$$

donde X_{ξ_Q} es el generador infinitesimal de la acción de G en la base, y donde la última igualdad resulta una vez más de la definición de la 1-forma fundamental en T^*Q. Observemos sin embargo que la última ecuación sólo requiere que la forma simpléctica sea exacta y la construcción puede extenderse a este caso más general.

El ejemplo más simple, que sin embargo es de importancia en física, es el siguiente: si $Q = \mathbb{R}^n$ y $G = \mathbb{R}^n$ actúa en Q por traslaciones (de modo que G es un grupo abeliano y su álgebra de Lie es trivial), el mapeo momento que resulta de la construcción anterior es $J(q,p) = p$, donde p es la coordenada en la fibra de $M = T^*Q$, y recordemos que p se identifica con el momento lineal. Así, el resultado anterior dice que para los hamiltonianos invariantes bajo esta acción, el momento lineal se conserva. Más adelante estudiaremos con detalle el caso $Q = \mathbb{R}^3$ y $G = SO(3)$ actuando por rotaciones, que corresponde al momento angular y que también cabe dentro de este esquema.

6. El Teorema de Reducción Simpléctica.

En física clásica, la presencia de cantidades conservadas se interpreta como una disminución en el número de grados de libertad del sistema, es decir, como una disminución en la dimensión del espacio fase; el teorema de reducción de Marsden-Weinstein hace precisa esta idea.

En lo que sigue G_μ denotará al subgrupo de isotropía de $\mu \in \mathfrak{g}^*$ bajo la acción coadjunta, i.e.

$$G_\mu = \{ g \in G ; \ \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\mu = \mu \}.$$

Con ello, el enunciado del teorema de reducción simpléctica es el siguiente:

Teorema: (Marsden-Weinstein) *Sea (M,ω) una variedad simpléctica y supongamos que el grupo G actúa en M con una acción simpléctica. Supongamos asimismo que $J : M \to \mathfrak{g}^*$ es un mapeo momento Ad^*-equivariante para esta acción. Si $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es un valor regular de J y si el grupo G_μ actúa en $J^{-1}(\mu)$ de manera libre y transitiva, entonces la variedad cociente $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ hereda una única forma simpléctica ω_μ con la propiedad*

$$\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega$$

donde $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \to M_\mu$ es la proyección natural e $i_\mu : J^{-1}(\mu) \to M$ es la inclusión.

Antes de dar la demostración del teorema de reducción hagamos las siguientes observaciones:

Por una parte, en general no podemos esperar que se induzca una forma simpléctica en $J^{-1}(\mu)$, aun si μ es un valor regular de J y la variedad resultante es de dimensión par; en efecto, en $J^{-1}(\mu)$ se induce una 2-forma cerrada, pero que en general es degenerada, el teorema dice entonces que el núcleo de la forma inducida está determinado por la acción de G_μ.

Por otro lado, el siguiente resultado, también debido a Marsden y Weinstein, muestra que el proceso de reducción es "consistente con la física":

Teorema: (Marsden-Weinstein) *Bajo las hipótesis del teorema de reducción, si $H : M \to \mathbb{R}$ es un hamiltoniano G-invariante, entonces $J^{-1}(\mu)$ es también invariante bajo el flujo de X_H, de modo que se tiene un flujo inducido en M_μ, que es a su vez hamiltoniano para la forma ω_μ.*

7. Demostración del Teorema de Reducción Simpléctica.

Para la demostración del resultado, nos basaremos en el siguiente lema, que es interesante en sí, ya que describe la geometría local del problema. Conservaremos las notaciones del punto anterior.

Lema: *Bajo la hipótesis del teorema de reducción*

(1) *Para toda $p \in J^{-1}(\mu)$ se tiene*

$$T_p(J^{-1}(\mu)) \cap T_p(G \cdot p) = T_p(G_\mu \cdot p).$$

(2) *Para toda $p \in J^{-1}(\mu)$ el espacio ω-anulador de $T_p(J^{-1}(\mu))$ es $T_p(G \cdot p)$, i.e.,*

$$\left(T_p(J^{-1}(\mu))\right)^\omega = T_p(G \cdot p).$$

Demostración del lema:

(1) Sea $X \in T_p(G\cdot p)$, entonces existe $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que $X = X_\xi(p)$. Luego, $X \in T_p\big(J^{-1}(\mu)\big)$ si y sólo si $J_{*p}(X) = J_{*p}(X_\xi(p)) = 0$. Pero, si exponenciamos la acción, esto equivale a

$$\mu = J(\exp\xi \cdot p) = \mathrm{Ad}^*_{\exp(-\xi)}J(p) = \mathrm{Ad}^*_{\exp(-\xi)}\mu$$

por la equivariancia de J. Pero esto nos dice que $\exp(-\xi) \in G_\mu$ o, lo que es lo mismo, $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$, y por consiguiente X es tangente a la órbita de p bajo G_μ.

(2) Veamos que $\big(T_p(G\cdot p)\big)^\omega = T_p\big(J^{-1}(\mu)\big)$. Ahora bien, si ξ es como en el inciso anterior, se tiene que:

$$\omega\big(X_\xi(p), Y\big) = d\hat{J}(\xi)_p(Y) = J_{*p}(Y)(\xi),$$

pero el kérnel de J_{*p} es precisamente $T_p\big(J^{-1}(\mu)\big)$, de donde se sigue fácilmente la conclusión.

Demostración del Teorema:

Primeramente, observemos que la condición $\pi_\mu^*(\omega_\mu) = i_\mu^*(\omega)$ fuerza la siguiente definición para ω_μ: si $X, Y \in T_qM_\mu$, definimos

$$\omega_\mu(X,Y) = \omega(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

donde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ son dos levantamientos cualesquiera de X y Y a algún punto de la fibra sobre q, i.e., tal que $\pi_\mu(p) = q$. Como esta construcción es claramente diferenciable, básicamente debemos probar que ω_μ así definida cumple tres cosas: *i)* que está bien definida, *ii)* que es cerrada y *iii)* que es no degenerada.

Para probar *i)*, observemos que si X_1, X_2 son dos levantamientos de X en el mismo punto p, entonces por construcción $\pi_{\mu*}(X_1) = \pi_{\mu*}(X_2) = X$, de modo que $X_1 - X_2 \in T_p(G_\mu\cdot p)$, por el inciso (1) del lema, y de (2) se sigue entonces la conclusión. Similarmente, si p_1, p_2 son dos puntos distintos en $\pi^{-1}(q)$, dos levantamientos distintos serán conjugados por la acción de G_μ, lo que prueba que ω_μ está bien definida.

ii) es claro pues

$$\pi_\mu^* d\omega_\mu = d\pi\mu^*\omega_\mu = di_\mu^*\omega = i_\mu^* d\omega = 0,$$

y puesto que π_μ es sobre se obtiene el resultado.

Finalmente, *iii)* es una consecuencia inmediata del lema, ya que si $\omega_\mu(X,Y) = 0$ para toda $Y \in T_qM_\mu$, entonces X se levanta necesariamente a un vector que está simultáneamente en $T_p(G\cdot p)$ y en $T_p\big(J^{-1}(\mu)\big)$ y por lo tanto se proyecta sobre 0.

8. El Caso del Momento Angular.

Estudiaremos ahora con detalle el caso de $M = T^*\mathbb{R}^3$ y $G = SO(3)$ actuando en $\mathbb{R}^3$ por rotaciones, que corresponde al estudio clásico del momento angular.

Recordemos primeramente que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ se identifica con $\mathbb{R}^3$ con el paréntesis de Lie correspondiente al producto cruz, mediante la aplicación:

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} = \xi$$

y en lo sucesivo usaremos esta identificación.

Recordemos también que para grupos de Lie lineales, la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$ está dada por conjugación: si $A \in G$ y $\xi \in \mathfrak{g}$ entonces $\mathrm{Ad}_A\xi = A\xi A^{-1}$. En el caso de $SO(3)$, $\xi^T = -\xi$ y $A^{-1} = A^T$, de modo que, bajo la identificación anterior, la acción adjunta se convierte en rotaciones en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Ad}_A\xi = A\xi A^{-1} = A\xi A^T \mapsto -A\hat{\xi}$$

$\mathfrak{g}^*$ por su parte se puede también identificar con $\mathbb{R}^3$ con el producto cruz, la dualidad entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ queda dada entonces por el producto interior usual de $\mathbb{R}^3$, al que denotaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y la acción coadjunta corresponde a las rotaciones usuales en $\mathbb{R}^3$ (sin el signo menos). Finalmente, notemos que con nuestras identificaciones, $M = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$.

Así pues, de acuerdo con la teoría general, G actúa simplécticamente en M por pullback de la acción en la base, y se tiene entonces un mapeo Ad^*-equivariante para esta acción, definiendo

$$\hat{J}(\xi)(q,p) = p\big(X_{\xi_Q}(q)\big) \quad ; \ (q,p) \in M \ , \ \xi \in \mathfrak{g}.$$

donde X_{ξ_Q} es el generador infinitesimal de la acción de G en la base. Por lo dicho anteriormente, estos generadores se identifican con la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ en sí misma, de modo que bajo la identificación que hemos hecho, el mapeo momento se escribe

$$\hat{J}(\xi)(q,p) = \langle p, \xi \times q\rangle = \langle q \times p, \xi\rangle.$$

Escrito de otro modo, $J(q,p) = q \times p$, que es la definición usual del momento angular.

Sea ahora $\mu \in \mathfrak{g}^*$ distinto de cero. Entonces μ es un valor regular de J; el subgrupo de isotropía de μ , G_μ es el subgrupo de las rotaciones que fijan este vector, que por lo tanto es un S^1. Por otro lado, como $J^{-1}(\mu) = \{ \ (q,p) \mid q \times p = \mu \ \}$, es sencillo ver que $J^{-1}(\mu)$ es topológicamente $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$, de modo que G_μ resulta ser topolgicamente un plano. Del teorema de Darboux se sigue entonces la existencia de una carta para M_μ donde la forma simpléctica es la usual.

Sin embargo, es posible obtener una descripción más explícita e interesante del espacio reducido como sigue:

Tomemos $\mu = \mathrm{k} = (0,0,1)$, entonces

$$J^{-1}(\mathrm{k}) = \{ \ (q,p) \mid q_3 = p_3 \text{ y } q_1p_2 - p_2q_1 = 1 \ \}$$

de modo que $J^{-1}(\mathrm{k}) \equiv SL(2,\mathbb{R})$ —lo que en particular nos muestra que, en efecto, la estructura toplógica de $J^{-1}(\mu)$ es la mencionada antes—.

El subgrupo de isotropía de k, G_{k}, es entonces el subgrupo de rotaciones alrededor del eje z, que tomamos como el subgrupo compacto maximal de $SL(2,\mathbb{R})$. Utilizando ahora, por ejemplo, la descomposición de Iwasawa, cada $B \in SL(2,\mathbb{R})$ se puede escribir como RA, donde $R \in G_{\mathrm{k}}$ y A se puede escribir en la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & na^{-1} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{R}\,;\ a > 0.$$

de modo que el espacio cociente M_{k} es el conjunto de estas matrices.

Ahora bien, las matrices de esta forma, pensadas como transformaciones fraccionales lineales, pueden a su vez identificarse con el semiplano $\mathcal{H} = \{\ (x,y) \mid y > 0\ \}$, y la identificación está dada explícitamente por

$$\Phi^{-1}(A) = (n, a^2)$$

y utilizaremos esta identificación de M_{k} con $\mathcal{H}$. Notemos asimismo que Φ determina entonces una sección de la proyección natural $\pi_{\mathrm{k}} : J^{-1}(\mathrm{k}) \to M_{\mathrm{k}}$, dada explícitamente por

$$\Phi(x,y) = (y, xy^{-1/2}, 0, y^{-1/2}, 0, 0).$$

Puesto que ω_{k} satisface la relación $\pi_{\mathrm{k}}^*\omega_{\mathrm{k}} = i_{\mathrm{k}}^*\omega_0$, utilizando Φ para hacer el pullback de ω_0 a M_{k} y un cálculo directo muestra que

$$\Phi^*\omega_0 = -y^{-1/2}(dx \wedge dy),$$

de modo que bajo nuestras idebtificaciones M_{k} es precisamente el plano de Poincaré.

Para terminar el análisis de este ejemplo, notemos que $0 \in \mathbb{R}^3$ no es un valor regular de J, de modo que no se aplica la reducción. De hecho, es fácil ver que $J^{-1}(0)$ es una variedad de dimensión 4, en tanto que $G_0 = SO(3)$ tiene dimensión 3, de modo que el cociente tiene dimensión 1 y no puede tener estructura simpléctica.

9. Algunas extensiones del teorema de reducción simpléctica.

El teorema de reducción puede modificarse para abarcar algunas situaciones diferentes a las descritas aquí, mencionaremos tres de ellas, que son importantes en particular para el estudio de los moduli de conexiones que aparecen en relación con las ecuaciones de Yang-Mills en superficies de Riemann:

(1) En el caso de dimensión finita, la no degeneración de ω automáticamente implica que ω_p determina un isomorfismo de T_pM en T_p^*M. Para dimensión infinita, por ejemplo en variedades de Banach o de Hilbert, la condición equivalente sólo determina una inyección, cuyo rango no necesariamente es cerrado, condición que

también se satisface automáticamente en dimensión finita; para tener reducción simpléctica hay que agregar esta hipótesis.

(2) Por otro lado, podemos suprimir la condición global de que el cociente $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ sea una variedad: si la acción es localmente libre, aún se tiene una versión local del teorema de reducción.

(3) Finalmente, una modificación más o menos directa de las construcciones nos permite establecer una versión holomorfa de la reducción simpléctica.

REFERENCIAS

1. Abraham, R. and J.E. Marsden., *Foundations of Mechanics*, 2^{nd} *Edition*, Benjamin/Cummings, 1978.
2. Hitchin, N.J., *The Self-Duality Equations on a Riemann Surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987).
3. Kobayashi, S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Iwanami Shoten/Princeton Univ. Press, 1987.