¿Hay geometrías sin paralelas 62

62

Ricardo F. Vila Freyer
1987

¿HAY GEOMETRIA SIN PARALELAS?

Por

Ricardo F. Vila Freyer
CIMAT
Apartado Postal 402
Gunajuato, Gto. 36000

§ 1. SIGNIFICADO DE LA GEOMETRIA

Desde la antigüedad los hombres tenían necesidad de medir. Era necesario conocer los lotes donde cultivaban, era importante conocer las estaciones del año para saber períodos de cultivo y de cosecha, así poco a poco, se fue volviendo relevante entender formas y medidas de objetos en la tierra, de la tierra y de su posición en el universo. De esta forma, la humanidad aprende por ejemplo a calcular áreas. Por ejemplo, en el valle del Nilo inundaciones periódicas cubrían los fértiles terrenos, después, especialistas en medir superficies tenían que redistribuir las áreas de cultivo. Poco a poco se fue desarrollando la Geometría ($\gamma\varepsilon o s$. $\mu\varepsilon\tau\rho o s$) en forma empírica. Este conocimiento pasó a la civilización griega, que con su gran tradición filosófica trató de abstraer la parte fundamental y de desarrollar un esquema lógico en el que se pudieran obtener los principios fundamentales, que generaran todas las propiedades geométricas.

La culminación de este proceso fue la obra de Euclides "Los elementos", en la que a partir de unos cuantos axiomas y cinco postulados adicionales, se deducen todos los principios geométricos. Este libro es un compendio del conocimiento geométrico de su época, y una de las obras matemáticas más importantes.

§ 2. POSTULADO DE EUCLIDES

Los axiomas son los principios más fundamentales de todos, luego los postulados que son las verdades evidentes, que no se pueden demostrar, y de éstas se deben poder deducir todas las propiedades geométricas.

Siguiendo a Coxeter [C1], listamos a continuación los postulados de Euclides:

I. Se puede trazar una recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

II. Se puede prolongar continuamente una recta finita en linea recta.

III. Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y cualquier radio.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

V. Si una recta corta a otras dos de manera que los dos ángulos internos en cada uno de sus lados sean menores que dos ángulos rectos, si se prolongan indefinidamente, se cortarán en el mismo lado del plano en el que los ángulos son menores que dos rectas. (Fig. 2.1)

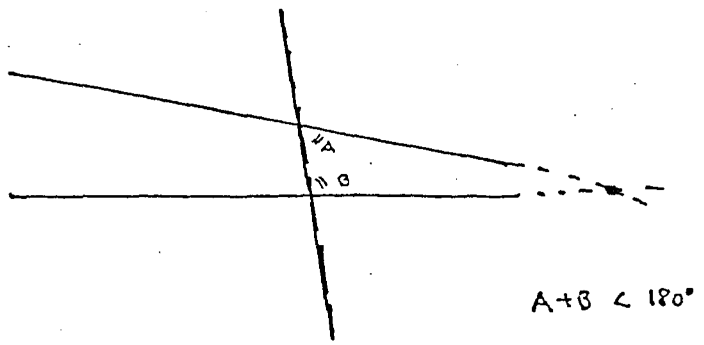
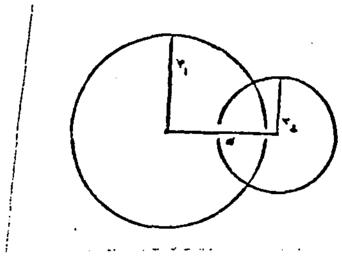


Fig. 2.1.

Estos postulados aparecen publicados aproximadamente en el año 300 a. c. en "Los Elementos" de Euclides, y han sido una de las piedras fundamentales de la Matemática. Por muchos años se les consideró como algo insusperable, y fundamento de la "verdad", aunque hoy día ya no es el caso. De los axiomas de Euclides no se puede demostrar, por ejemplo, que círculos cuyos radios sean mayores a la distancia de su centro se cortan en dos puntos (Fig. 2.2) Resultado que Euclides utiliza alguna vez.



$d < r_1+r_2$

No fue sino hasta finales del siglo pasado o principios de éste, en que se dió una serie de axiomas que deben satisfacer objetos abstractos llamados puntos, rectas, etc., que se ha logrado una fundamentación, que para nosotros es satisfactoria, de los principios de la geometría. (Listamos estos axiomas, propuestos por Hilbert en un apéndice al final, para que el lector curioso los pueda leer).

De cualquier forma, vale decir que el mismo Euclides no parecía muy satisfecho con el V postulado. En manuscritos antiguos se ve que este postulado hace su aparición algo tarde, y sólo cuando es estrictamente necesario para demostrar el teorema que le seguía. ¿Habrá pensado Euclides en la posibilidad de que este postulado era consecuencia de los otros cuatro, y al no poderlo demostrar se vio forzado a incluirlo?

Esta última es una pregunta que se han planteado los matemáticos a través de la historia: ¿Es el V postulado consecuencia de los demás? Para entender un poco por qué, demos una versión más sencilla del postulado:

V'. Dadas una recta y un punto fuera de la linea recta, por este punto pasa una y sólo una recta que es paralela a la recta original (Fig. 2.3).

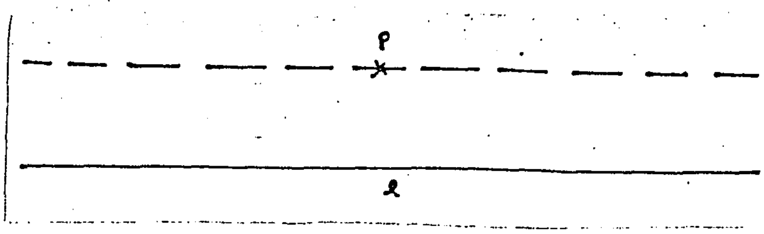


Fig. 2.3.

Vamos a decir que dos rectas son paralelas si éstas no se cortan, no importa cuánto las prolonguemos.

§ 3. INTENTOS POR PROBAR EL POSTULADO DE LAS PARALELAS

La versión modificada del último postulado (V') ahora tiene una redacción que lo hace parecer muy obvio.

Proclus (alrededor de 450 d.c.) narra un poco la historia de la Geometría griega, y cita varios intentos en vano por deducir el axioma de las paralelas a partir de los otros, además de dar una crítica a estos intentos. El mismo cree dar una demostración también.

De esta forma, a partir de entonces, muchos matemáticos hacen el esfuerzo para llegar a demostraciones equivalentes o, en el mejor de los casos, reemplazar el postulado de las paralelas por un postulado que es lógicamente equivalente.

D'Alambert se indigna tanto que escribe que "la imposibiidad de probar el postulado de las paralelas era el escándalo de la geometría elemental" todavía a finales del siglo XVII.

En 1733, un sacerdote jesuita, Saccheri publica un trabajo llamado "Euclides ab omni Naevo Vindicatus" (Euclides reivindicado de toda falta), en el que da la idea clave para tratar con el problema del

postulado de las paralelas: suponer que es falso, y usar su negación y los demás postulados para construir otra geometría. De esta forma, se podría llegar a una contradicción, lo que probaría que el V postulado depende de los cuatro restantes. Su trabajo resulta fundamental para el desarrollo de la geometría no-Euclideana. Desafortunadamente al final, con una definición poco rigurosa de linea recta, o de sus propiedades, Saccheri cree haber encontrado la contradicción que buscaba. ¡Lástima!

§ 4. BOLYAI, LOBACHEVSKI, GAUSS ...

Y como suele ocurrir en la historia de las matemáticas, casi simultáneamente aparecen dos trabajos en donde se logra dar una respuesta satisfactoria al problema de las paralelas.

Bolyai (húngaro) en 1823 le escribe a su padre, también matemático, que tiene unos resultados muy importantes que dan una solución final y definitiva al problema de las paralelas. Lobachevski (ruso), en 1825 escribe su primer trabajo de geometría no-Euclideana. La idea de ambos es análoga a la de Saccheri, negar el V postulado, y construir una geometría a partir de los cuatro primeros postulados y la negación del quinto. Ambos demuestran que la Geometría que construyen es tan consistente lógicamente, como la de Euclides, y viceversa, que la Geometría Euclideana tiene la misma validez lógica como la de ellos. Es decir que si en una Geometría se pudiera llegar a un teorema que fuera verdadero y falso a la vez, lo mismo se podría obtener en la otra geometría. Más adelante diremos brevemente cómo se logra esto, con ayuda de modelos para representar la Geometría no Euclideana.

Mencionamos brevemente que Gauss estuvo al tanto de los avances de ambos científicos y que, además, él había llegado a conclusiones similares con un poco de anterioridad, pero no se atrevió a enfrentar la disputa que desataría con los filósofos de su época, que pensaban que las únicas verdades incontrovertibles eran las verdades matemáticas.

§ 5. MODELOS DE BELTRAMI Y POINCARÉ

Para veriricar que la Geometría no-Euclideana es tan consistente como la Euclideana, lo que se puede hacer es que en un mundo cualquiera, digamos en el mundo en el que vale el axioma de Euclides, construir un modelo en el que podamos verificar los axiomas que proponen Bolyai o Lobachevski:

Nuevo postulado de las paralelas

Por un punto dado fuera de una linea recta pasan al menos dos rectas distintas paralelas ambas a la recta dada (Fig. 5.1).

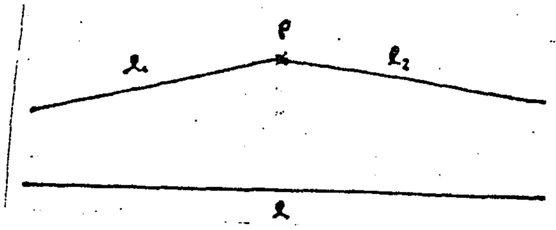
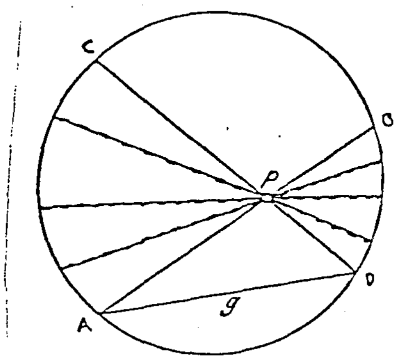


Fig. 5.1.

Beltrami construye un modelo muy fácil de entender, en el que se verifican casi todos los axiomas de forma inmediata: fija una circunferencia en un plano euclideano, y su plano no-Euclideano consiste del interior de la circunferencia, excluyendo los puntos de la misma circunferencia. Los puntos interiores corresponden a puntos y los segmentos de recta que están en el interior son las lineas rectas. Entonces como en la figura 5.2., es fácil ver que dada la recta g y el punto P, por P pasan al menos dos paralelas: AP y DP, y que, además, cualquier recta que esté enmedio será paralela a g.

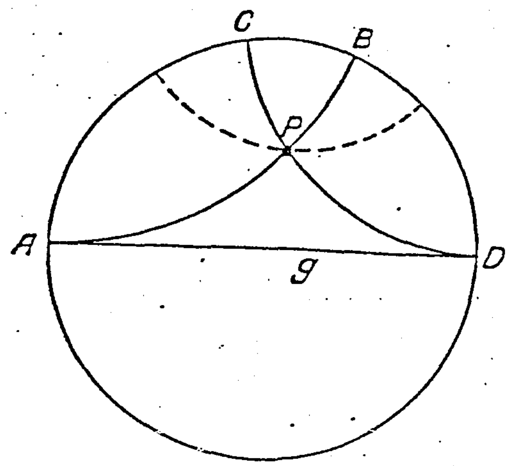


Modelo de Beltrami (Fig. 5.2)

Entonces es fácil verificar los axiomas de Hilbert, dos puntos determinan una recta, existen tres puntos no colineales, etc.

Podemos dar una medida de distancia en este modelo, que nos comprueba que las rectas aquí tienen longitud infinita, pero como esto es más fácil en el modelo de Poincaré, describimos éste.

Poincaré propone como modelo el mismo círculo, y como puntos los puntos del plano interiores al círculo. Ahora sus rectas consisten en lineas rectas que pasan por el centro, y en segmentos de circunferencia que intesectan a la frontera en forma ortogonal (Fig. 5.2). Podemos verificar fácilmente que existen al menos dos paralelas a una recta fija por un punto dado fuera de ella, como se ve en la figura 5.3.



Modelo de Poincaré (Fig. 5.3)

La recta AP y PD son paralelas a g. Al igual que la recta punteada.

La ventaja del modelo de Poincaré es que lo podemos pensar como un objeto del plano complejo $\mathbb{C}$ con coordenadas $(x,y) = x+iy$, y usar algo de transformaciones complejas para entender propiedades geométricas. (Véase Pedoe [P]). Por ejemplo, usando coordenadas complejas, podemos definir distancia en forma muy fácil. (Fig. 5.4).

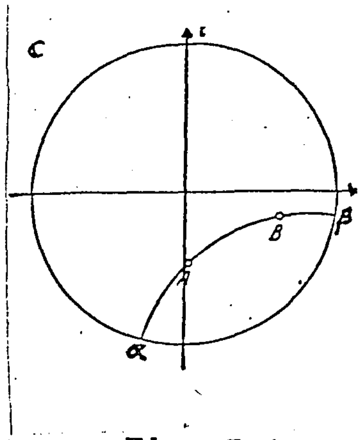


Fig. 5.4.

En la figura 5.4, si $\alpha = \alpha_1+i\alpha_2$, $\beta = \beta_1+i\beta_2$, $A = A_1+iA_2$, $B = B_1+iB_2$ son las coordenadas complejas, y el círculo es de radio igual a 1. La distancia entre los puntos A y B, d(A,B) está dada por:

$$d(A,B) = \left| \log \frac{(\alpha-A)/(\alpha-B)}{(\beta-A)/(\beta-B)} \right|$$

(Que es el valor absoluto del logaritmo de la razón cruzada de los cuatro puntos $(\alpha\beta,AB)$).

Nótese que los puntos α y β no son parte del plano no Euclideano por no estar en el interior del círculo.

Obsérvese también que las rectas son de longitud infinita, pues si hacemos A tender a α (es decir, acercarse a la frontera), el cociente tiende a 0, y su logaritmo a $-\infty$. Es decir $d(A,B) \rightarrow \infty$.

Para entender un poco las propiedades simétricas, veamos un dibujo del artista holandés M. C. Escher, que logró obras muy bonitas usando este modelo; Véase la figura 5.5. En ésta, los fantasmas se mueven por lineas "rectas" y todos tienen la misma altura. Es decir, que como los vemos, se "encogen" conforme se acercan a la frontera, pero desde su punto de vista, ellos miden exactamente lo mismo.

Concluímos además que es posible hacer arte la geometría no euclideana

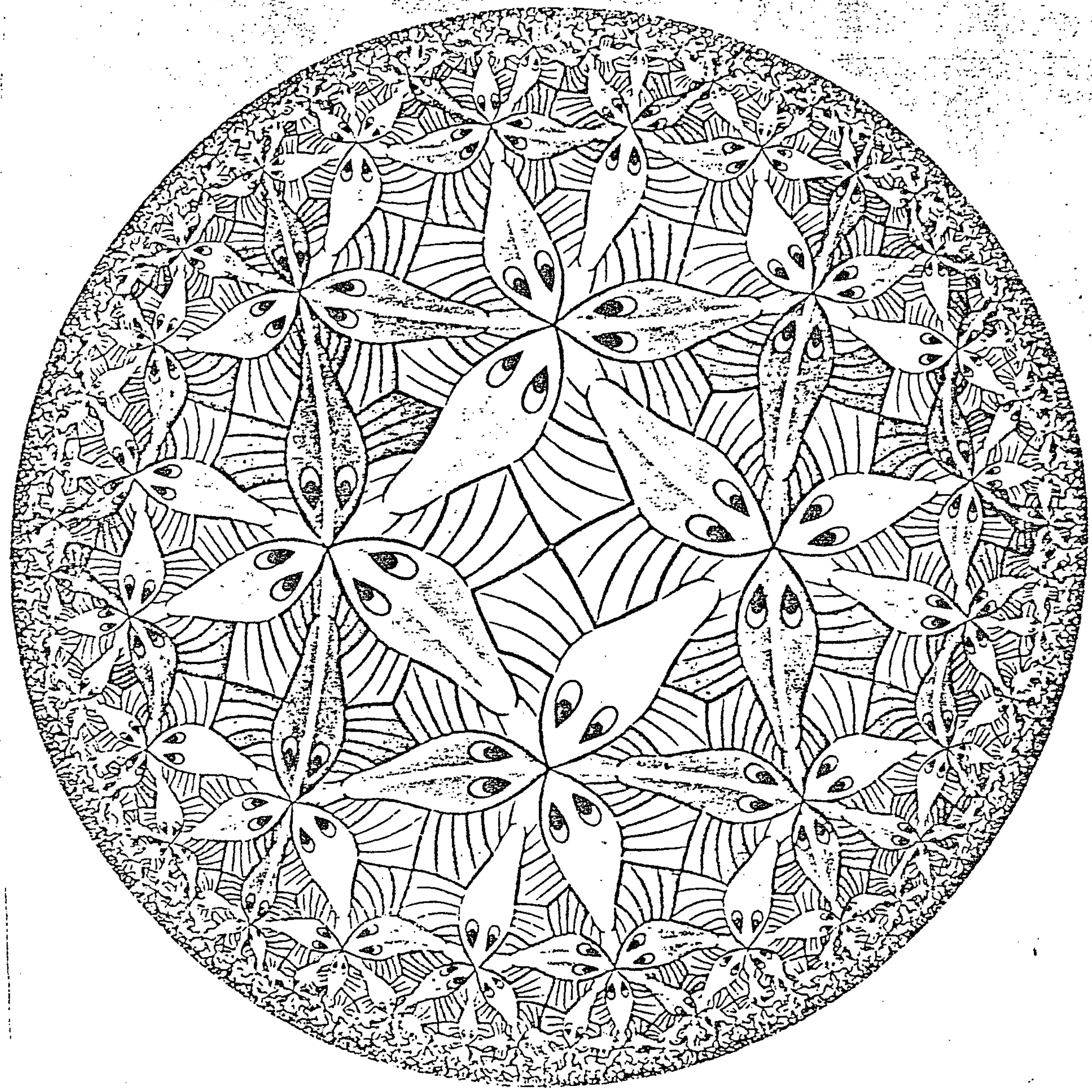


Fig. 5.5.

Como el modelo de Poincaré está en un plano y es posible también verificar todos los axiomas, y al construir geometría, se puede ver que si seguimos sólo los axiomas complementarios al de las paralelas, podemos hacer lo mismo en este modelo que en el plano Euclideano. Por lo tanto, ambas geometrías tienen la misma consistencia lógica.

Lo más sorprendente es que si hacemos girar el plano de Poincaré y obtenemos la esfera, ésta será un modelo del espacio no Euclideano, y aquí dentro podremos construir un modelo de la geometría plana de Euclides. Para esto, véase Coxeter [C2]. Una horoesfera será una esfera en el espacio no Euclideano, tangente a la esfera límite:

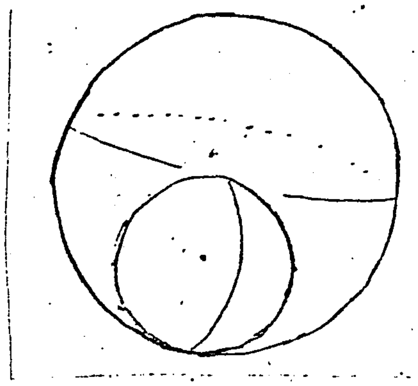


Fig. 5.6.

En la horoesfera, la curva que minimiza distancias corresponde a la linea recta, y se verifican los cinco postulados de Euclides, es decir que en la geometría no Euclideana también podemos dar un modelo de la geometría Euclideana.

Finalmente, en la siguiente figura se ilustra cómo, usando proyecciones, obtenemos una equivalencia entre los modelos de Beltrami y de Poincaré. (Fig. 5.7.)

§ 6. ANGULO DE PARALELISMO $\Pi(\ell)$

Surge entonces la pregunta ¿cómo es el universo en el que vivimos?, ¿Las paralelas son únicas, hay una infinidad o no hay?. Nótese que en los modelos no-Euclideanos que dimos, teníamos dos paralelas especiales que "encerraban", en cierta forma, todas las demás paralelas, éstas son paralelas asintóticas, puesto que en el infinito, tocan a la recta dada. Y que el concepto de ángulo entre dos rectas es idéntico al ángulo euclideano. Usando esto, podemos definir lo siguiente.

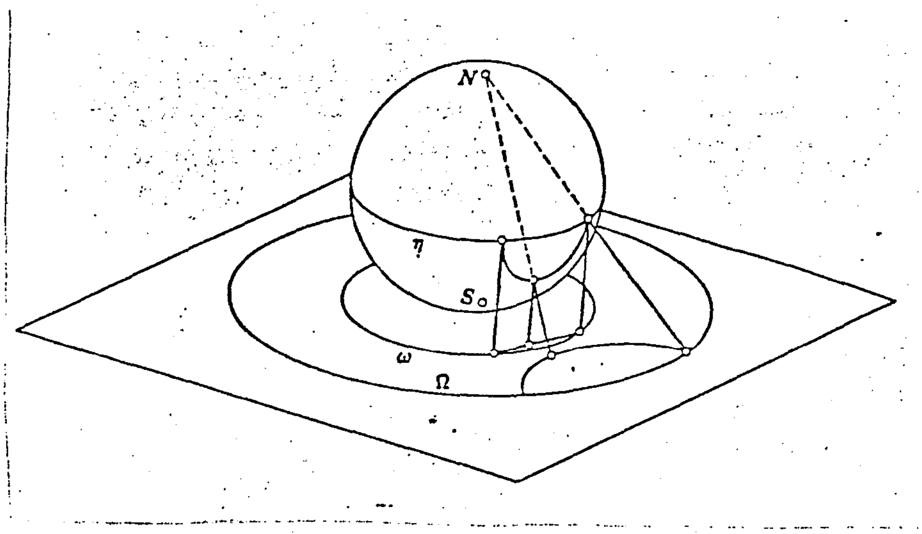


Fig. 5.7.

Si ℓ es un segmento de recta perpendicular a la recta g, por el extremo opuesto de ℓ pasan las dos paralelas asintóticas, éstas forman un ángulo ℓ. llamado el ángulo de paralelismo $\pi(\ell)$. (Fig. 6.1.).

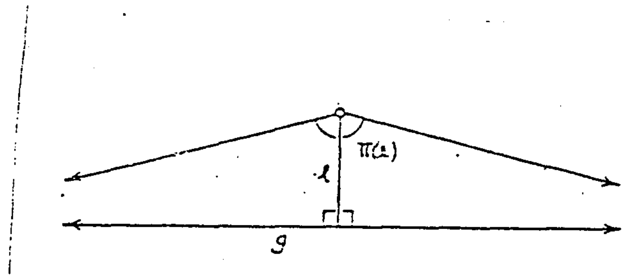


Fig. 6.1.

Es claro que $\pi(\ell) = 90^{\circ}$ para cualquier segmento, implicaría que las paralelas son únicas y que estamos en el modelo Euclideano, pero en el modelo de Beltrami, o de Poincaré, $\pi(\ell) < 90^{\circ}$.

Si quisiéramos una prueba de que nuestro universo es Euclideano o no, podemos usar la medida $\pi(\ell)$, como sigue:

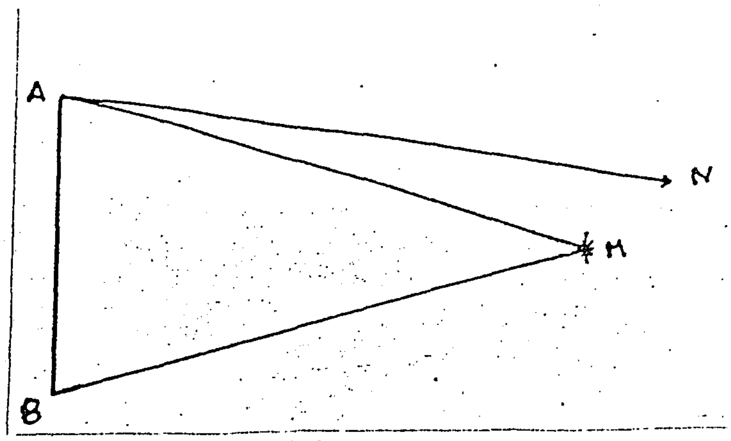


Fig. 6.2.

Si M es una estrella, mientras que A y C representan a la tierra en dos posiciones opuestas en su órbita alrededor del sol, escogidos de tal forma que los ángulos A y C son iguales. Entonces el paralaje $90^\circ - \langle BAM$ es mayor que $90^\circ - \pi(AB)$ (donde AN es la paralela asintótica de BM, y por lo tanto $\pi(AB) = \langle NAB$). Entonces debería existir una cota positiva para todos los paralajes. Pero ésta no se ha observado todavía; lo cual dice, que si el espacio es no Euclideano, entonces nosotros vivimos en un espacio tan pequeño que no se nota.

Es algo así como la creencia antigua de que la tierra es plana, que la humanidad se movía en una superficie tan pequeña que no se notaba que la tierra se curvaba.

§ 7. OTRAS GEOMETRIAS

Otra forma de negar el axioma de las paralelas es:

No existen lineas paralelas: cualesquiera dos rectas se cortan en al menos un punto.

Este axioma necesita que modifiquemos algún axioma preciso: es necesario suponer ahora que las rectas pueden tener longitud finita, no importa cuánto se prolonguen.

Con esta modificación, también se puede ver que la geometría que se construye es tan consistente como la Euclidena.

Un modelo para ésta es simple, pues es en el que vivimos: considérese una esfera, esta superficie será nuestro "plano"; los puntos de ella corresponden a los puntos de la geometría y, finalmente, las "lineas rectas" son los arcos de longitud máxima, es decir, aquéllos que parten la esfera en dos hemisferios iguales: (Fig. 7.1).

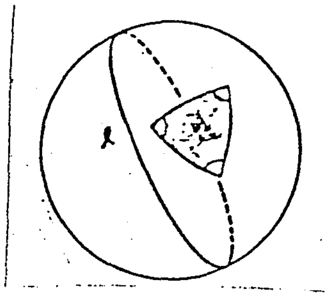


Fig. 7.1.

§ 8. OTRO EXPERIMENTO

La geometría en la que existe un número infinito de paralelas se llama hiperbólica; aquélla en la que no existen paralelas se llama elíptica. Sabemos entonces [C2] que si tomamos un triángulo cualquiera ΔABC, si la suma de los ángulos:

$$A+B+C \text{ es } \left\{\begin{array}{l}\text{mayor que}\\ \text{igual a}\\ \text{menor que}\end{array}\right\} 180^\circ\text{, entonces la geometria es } \left\{\begin{array}{l}\text{elíptica}\\ \text{Euclideana}\\ \text{hiperbólica}\end{array}\right\}$$

Entonces, podemos repetir el experimento anterior, con la tierra en dos posiciones: A, C y una estrella M, (Fig. 8.1)

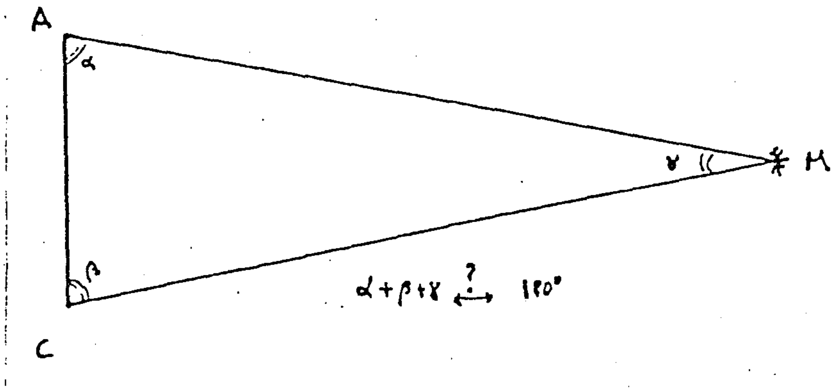


Fig. 8.1.

y simplemente medir la suma de los ángulos que se forman. Obtenemos la misma conclusión: en las distancias que podemos manejar, la variación es tan pequeña, que no podemos decidir si en el universo hay paralelas o no.

Para concluir, no se nos olvide que los físicos de hoy día han desarrollado teorías (la Teoría de la Relatividad) que les dice que el espacio se curva, aunque no necesariamente en forma uniforme. Esta forma de curvarse afecta la geometría y por lo tanto, las propiedades de paralelismo. De cualquier forma, las teorías dicen que cerca del Sistema Solar (al menos) la curvatura es casi cero [W].

Bibliografía

[C1] Coxeter, Fundamentos de Geometría. Wiley, 1971.

[C2] Coxeter, Non Euclidean Geometry. U. Toronto Press, 1978.

[E] The Art of M. C. Escher.

[H] Hilbert, Cohn Vossen. Geometry and the Imagination. Chelsea, 1979.

[P] Pedoe, Circles: A Mathematical View. Dover, 1952.

[W] Wald, Espacio, tiempo y Materia. Breviarios del Fondo de Cultura Económica.

§ APENDICE. LOS AXIOMAS DE HILBERT [H].

I. Axiomas de Incidencia:

1. Dos puntos tienen una y sólo una recta en común.
2. Cualquier linea recta contiene al menos dos puntos.
3. Hay al menos tres puntos que no están contenidos en una sola recta.

II. Axiomas de Orden.

1. De cualquiera tres puntos en una recta, uno y sólo uno se encuentra comprendido entre los otros dos.
2. Si A y B son dos puntos, hay al menos un punto C tal que B está entre A y C.
3. Cualquier linea recta intersectando un lado de un triángulo, o bien pasa por el vértice opuesto, o bien intersecta otro lado.

III. Axiomas de Congruencia.

1. En una linea recta, un segmento dado se puede colocar de cualquier lado de un punto. El segmento se llamará congruente al original.
2. Si dos segmentos son congruentes a un tercero, entonces son congruentes entre sí.
3. Si los segmentos AB y A'B' son congruentes, y C está en el segmento AB, C' en A'B' son tales que uno de los segmentos formados por C y algún extremo de AB es congruente a uno de los segmentos formados por C' y algún extremo de A'B', entonces los segmentos que quedan son también congruentes.
4. Dado un ángulo, éste se puede colocar en cualquier lado de una semirecta.
5. Si dos lados de un triángulo son iguales a dos lados de otro triángulo, y si los ángulos incluídos entre ellos también coinciden, entonces los triángulos son congruentes.

IV. Axioma de las Paralelas. (Nuestro postulado V').

V. Axiomas de Continuidad.

1. Cualquier segmento de recta se puede medir con cualquier otro segmento de recta.
2. Cualquier sucesión infinita de segmentos anidados tiene un punto en común.