GEOMETRÍA Y FÍSICA.

58

FAUSTO ONGAY

Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, Guanajuato, Gto. 36000

58

I. INTRODUCCIÓN.

El propósito de esta nota es asomarnos a algunos aspectos de la fascinante relación que existe entre la física y la geometría, siguiendo, en un plano muy modesto desde luego, el espíritu que animó a uno de los más grandes genios: Albert Einstein.

Desde principios de este siglo, a raíz de la formulación de la teoría de la relatividad por Einstein, que es sin duda uno de los grandes momentos de la historia de la ciencia y que propició un cambio radical en nuestra concepción del Universo, ha habido un interés creciente por estudiar el papel que desempeña la geometría dentro de la física.

Últimamente, sin embargo, el punto de vista opuesto —es decir, el papel que la física desempeña dentro de nuestra concepción de la geometría— también se ha visto sujeto a más y más estudios: el descubrimiento de nuevas y profundas relaciones entre teorías desarrolladas independientemente por físicos y matemáticos hace pensar en la existencia de una relación muy íntima entre ambas disciplinas. Quizá fue ésta la visión premonitoria de Einstein.

Desafortunadamente, cuando hablamos aquí de geometría, pensamos no en la geometría clásica, de regla y compás, sino en la llamada geometría diferencial, la que requiere de conocimientos de cálculo, lo que hace un poco más difícil de explicar y comprender los puntos finos de estas teorías. Por ello, aunque supondremos que el lector tiene conocimientos de las ideas fundamentales del cálculo, en esta nota nos limitaremos a discutir tan sólo algunos de los aspectos más simples del problema.

La organización del trabajo es como sigue:

Primeramente, y con la intención de ubicar el problema, en las secciones II y III haremos un repaso rápido de la evolución de la geometría y de la física, de su divorcio como disciplinas intelectuales y de su reunión en la concepción einsteiniana del universo.

En seguida discutiremos en las secciones IV y V algunas ideas que ilustran el camino hacia la relatividad y a la concepción geométrica del universo. Es en esta parte, en especial en la sección IV, que aparecen los argumentos más técnicos del trabajo, pero los detalles

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

de éstos pueden omitirse, sin perjuicio para la comprensión de lo que sigue; basta tan sólo con entender las ideas geométricas comprendidas en las primeras dos figuras.

Finalmente, en la sección V, describiremos brevemente algunas de las notables consecuencias que se desprenden de la teoría de la relatividad.

II. La Geometría, antes y después de Euclides, o la física detrás de la geometría euclideana.

Antes de la Grecia clásica la geometría, como ciencia, era casi inexistente. Sin menoscabo de su importancia para la evolución de nuestra civilización, entre los pueblos egipcios y babilonios la geometría se reducía prácticamente a una actividad casi empírica: era un conjunto de reglas o fórmulas sencillas, con frecuencia tan sólo aproximadas, y sin mayor relación entre sí, que se aplicaban a la solución de problemas cotidianos; por ejemplo, el cálculo de áreas de terrenos o volúmenes de recipientes, con frecuencia para fines de impuestos. Pero en cualquier caso, la geometría estaba fuertemente ligada al proceso **físico** de medir, y de ahí deriva su nombre.

Con la madurez cultural del pueblo griego, se presenta un cambio radical en el desarrollo de la geometría, con el advenimiento de la **abstracción**. (Vale la pena insistir en que este cambio no se presenta en los inicios de la civilización griega, sino que es consecuencia de un clima especial, propicio para el desarrollo de actividades estrictamente intelectuales; un fenómeno semejante se presentará en el renacimiento.) Esta tendencia a la abstracción comienza alrededor del siglo VI A.C., entre los discípulos de Tales de Mileto pero, sobre todo, dentro de la escuela pitagórica de Crotona; la relación de las ideas geométricas con el mundo (el geos) cambia entonces por completo, y la geometría empieza a convertirse en una disciplina **formal**. Este proceso de abstracción alcanza su máxima expresión entre los griegos con el tratado de 'Los Elementos' de Euclides, escrito en su mayor parte hacia el siglo III A.C.

Sin embargo, aun en este clima de formalismo casi místico pueden encontrarse relaciones profundas entre la geometría y nuestra concepción del mundo físico. Un ejemplo notable se encuentra en Aristóteles, quien afirmaba que los axiomas se obtienen de la observación del mundo físico (y deben ser por consiguiente autoevidentes) en tanto que los postulados deben verificarse **de acuerdo a sus consecuencias**, es decir de acuerdo a su concordancia con la realidad. Esta distinción, un tanto sutil, entre ambos conceptos, se fue diluyendo con el correr del tiempo, tanto entre los filósofos como entre los matemáticos, para desaparecer en matemáticas hacia fines del siglo XIX, al afirmarse las geometrías no euclideanas.

Aún más importante desde nuestra perspectiva son las definiciones iniciales de Los Elementos. En efecto, ni para Euclides ni para sus seguidores era claro el hecho que las teorías formales deben tener una serie de elementos indefinidos (primitivos) —lo que no es de sorprender, pues este hecho no fue reconocido sino hasta muy recientemente— de modo que, de manera un tanto ingenua, trataron de definir los objetos geométricos usando sus "características físicas": 'un punto es aquello que no tiene dimensiones', etc. Asimismo, en muchas de las demostraciones de Euclides se utilizan **traslaciones** de las figuras como método para probar que dos de ellas son congruentes. Euclides tenía conciencia de que este es un argumento físico y no formal, pero no encontró manera alguna de formalizarlo. Y sin embargo, el suponer que las traslaciones no alteran las propiedades geométricas de los objetos es, en efecto, una fuerte suposición acerca de las propiedades del espacio.

Sin embargo, comoquiera que sea, lla geometría empezó a verse desligada de su contexto métrico, y por lo tanto físico, situación que, como hemos mencionado, llegó a su clímax durante el siglo XIX con el advenimiento de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky y, sobre todo, con la geometría intrínseca en dimensiones arbitrarias de Riemann, donde la relación con el universo físico parece haber desaparecido por completo aunque, curiosamente, Riemann pensaba que sus métodos debían aplicarse al problema de decidir cual es la **verdadera geometría** del mundo físico. Esta revolución conceptual se materializa a principios de este siglo con la geometría axiomática de Hilbert.

Por otro lado, para ese entonces el uso de coordenadas introducido por Descartes y, sobre todo, el notable desarrollo del cálculo diferencial, creado por Newton y Leibniz, habían modificado casi completamente los razonamientos empleados en la geometría: la geometría, como parte activa de las matemáticas, se había convertido en cierto modo en una rama del análisis (geometría diferencial).

III. La Física, antes y después de Einstein, o la geometría detrás de la Relatividad.

La física, por su parte, tuvo un desarrollo completamente diferente e independiente, pero igualmente fascinante.

En la antigüedad, salvo por notables excepciones como es el caso de Arquímedes, la física, como ciencia independiente, era prácticamente inexistente y el primer físico digno de ese título es tal vez Galileo. Con él se inicia el llamado periodo mecánico, que se consolidó con la notable personalidad de Newton.

La tesis fundamental de este periodo era que los fenómenos físicos pueden describirse mediante interacciones de tipo mecánico, regidas por las leyes de Newton, entre las "partículas" que componen los objetos (lo que, sin embargo, no debe interpretarse como una teoría atómica en el sentido moderno).

En esta época los argumentos geométricos eran secundarios en la solución de los problemas físicos —aunque, también curiosamente, Newton solía utilizarlos en sus escritos— y la herramienta fundamental era el cálculo. Esta visión mecánica del universo alcanza su máximo desarrollo en la época analítica, representada principalmente por la escuela francesa de Laplace, Lagrange, Poisson, etc., para terminar hacia la segunda mitad del siglo pasado, cuando la llamada teoría de campos modifica radicalmente las ideas que se tenían acerca de la descripción de los fenómenos físicos.

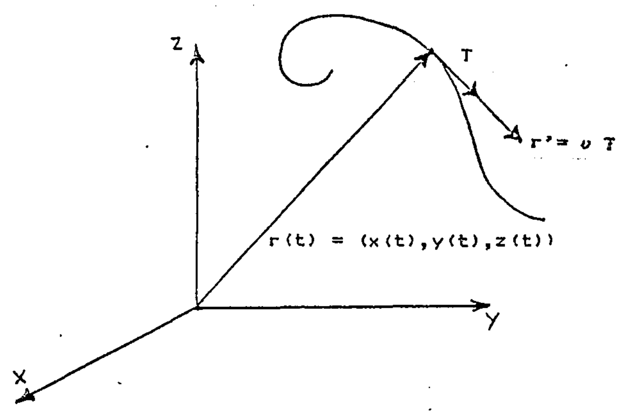
El papel que representaba la geometría dentro de la física se había reducido sin embargo a su mínima expresión, al grado que Lagrange, en su tratado 'Mecánica Analítica', se jacta de poder prescindir por completo de figuras e imágenes.

Hacia finales del siglo pasado, sin embargo, las técnicas experimentales habían alcanzado un desarrollo tal que las deficiencias en las teorías físicas, que hasta entonces se habían considerado prácticamente inmutables, empezaron a quedar al descubierto. Esto abrió el camino para las dos grandes revoluciones conceptuales de la física de este siglo: la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad.

En particular para Einstein, quien conocía y apreciaba los trabajos de los geómetras de finales del siglo pasado, las leyes de la física debían desligarse de la noción de sistemas de referencia privilegiados, y el medio para lograrlo era escribirlas en términos de nociones geométricas intrínsecas. Describir con detalle estas ideas en unas cuantas páginas sería imposible pero, en cualquier caso, la teoría de la relatividad de Einstein es una teoría geométrica, y la convicción de Einstein de que la geometría era el camino para representar las teorías físicas era tan profunda que hasta el fin de sus días estuvo trabajando, infructuosamente, en una teoría más general que él llamó **teoría del campo unificado.** (Una relato fascinante de estas ideas es el libro del propio Einstein, junto con L. Infeld, 'The Evolution of Physics'.)

IV. Aceleración y Curvatura.

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m, que se mueve en el espacio de coordenadas (x, y, z). A cada instante de tiempo t, la posición de la partícula se determina por una función $\mathrm{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, como se ilustra en la siguiente figura.



Trayectoria de una partícula

Las leyes de Newton nos dicen entonces que el movimiento de esta partícula se rige por la segunda ley, la que escribimos:

$$\mathrm{f} = m\mathrm{a}$$

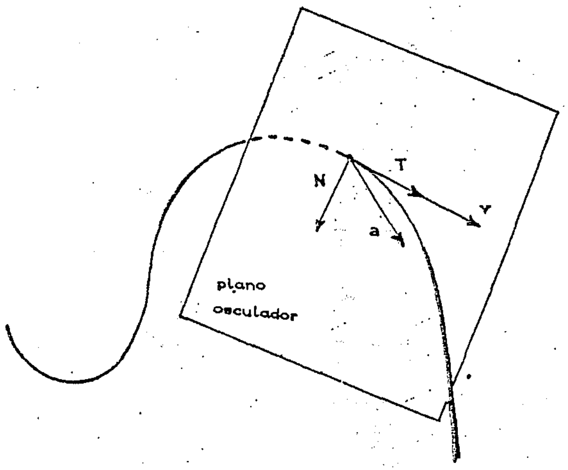
donde las cantidades vectoriales a y f son la aceleración de la partícula y la fuerza que se ejerce sobre ella, respectivamente, y recordemos que la aceleración está dada por la segunda derivada de r con respecto a t:

$$\mathrm{a}(t) = \mathrm{v}'(t) = \mathrm{r}''(t).$$

La segunda ley de Newton nos muestra, en particular, que la aceleración y la fuerza apuntan en la misma dirección. Así, si una fuerza empuja a una partícula **haciéndola cambiar de dirección**, la aceleración nos señalará también la dirección de este cambio; entre mayor sea la componente de la fuerza en la dirección normal a la trayectoria, mayor es el cambio de dirección, y la trayectoria se aleja más de una trayectoria rectlínea.

¡Pero esto claramente ya es geometría! Una trayectoria que no es una recta es porque está curveada, y esta noción se cuantifica en matemáticas por la **curvatura**. Vemos así que curvatura y aceleración están íntimamente ligadas.

De hecho, ambas cantidades están conectadas por una fórmula sencilla, que describiremos a continuación. Para ello, recordemos primero que el vector de velocidad de la partícula, v, es tangencial a la trayectoria de ésta y apunta en la dirección en que ocurre el movimiento. Podemos entonces definir al **vector tangente unitario** por medio de la ecuación $\mathrm{v} = v\mathrm{T}$, en donde v es la magnitud o **norma** de la velocidad, llamada a veces la **rapidez** de la partícula. Si T y a no son colineales, éstos generan un plano, el llamado **plano osculador** de la curva. Podemos sin embargo generar este mismo plano con dos vectores perpendiculares de norma 1, y por conveniencia escogemos a T como uno de ellos; el otro, que llamamos **vector normal unitario** y denotamos por N, lo escogemos de modo que la componente de la aceleración en la dirección de N sea positiva (véase la figura).



Geometría de la aceleración

Entonces se tiene la siguiente relación:

$$\mathrm{a}(t) = v'(t)\mathrm{T}(t) + (v(t))^2 K(t)\mathrm{N}(t),$$

donde la cantidad $K(t)$, que como muestra la fórmula anterior es una medida de cuanto se aleja la curva de una trayectoria rectilínea, es la **curvatura** de la curva. Podemos darnos una idea más geométrica de lo que significa la curvatura si reescribimos esta ecuación en la siguiente forma:

$$\mathrm{a} = v'\mathrm{T} + v^2/\rho\mathrm{N}.$$

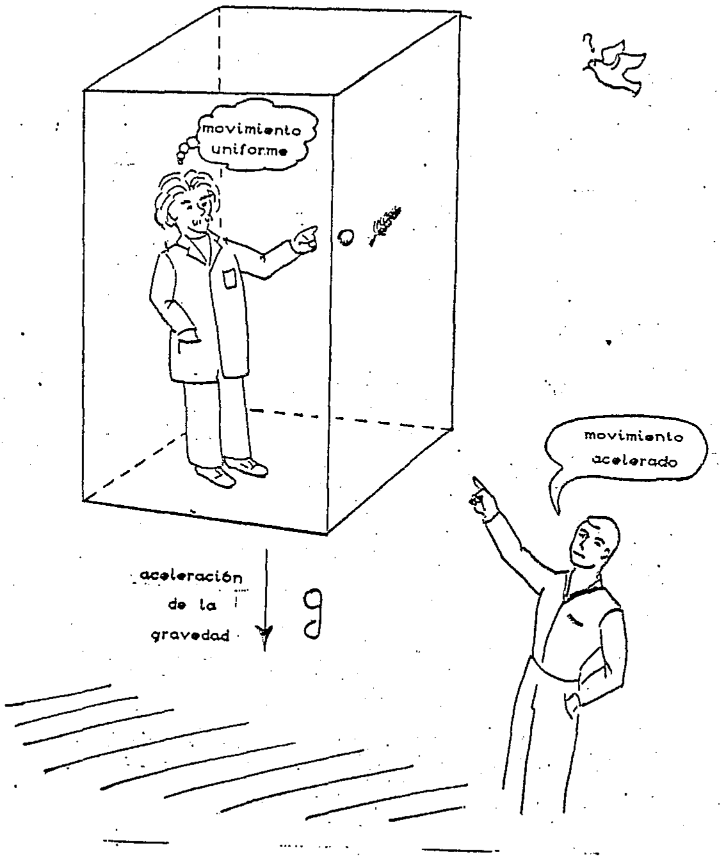
La cantidad $\rho = 1/K$ se llama **radio de curvatura** y tiene el siguiente significado geométrico: si consideramos una curva cualquiera y cerca de un punto dado tratamos de aproximar la forma de ésta por la curva 'más simple', la mejor aproximación la obtenemos utilizando el círculo contenido en el plano osculador, cuyo centro se encuentre sobre la recta determinada por N y cuyo radio sea ρ; este círculo se llama **círculo de curvatura**. Conviene observar que si la curva es ella misma un círculo, entonces su curvatura es constante e igual al recíproco de su radio y, de hecho, la curva coincide con su círculo de curvatura. Por otro lado, si pensamos en el caso particular del movimiento circular uniforme, donde la rapidez es constante, de modo que $v'(t) \equiv 0$, esta fórmula coincide con la expresión usual que encontramos en los textos elementales de física.

La curvatura de una curva es una noción **intrínseca**, es decir, sólo depende de la forma de la curva y no de la rapidez con la que la recorremos. Dicho de otro modo, siempre podemos escoger una manera de recorrer la curva de modo que la rapidez sea constante e igual a 1, de modo que la componente en la dirección de T no aparezca en la fórmula anterior, pero nunca podemos eliminar del todo el término en la dirección de N, a menos que la curvatura sea cero, en cuyo caso la curva es una recta. Puesto esto en términos físicos, siempre es posible "ajustar" nuestro reloj para que nuestra rapidez sea 1 y no haya aceleración tangencial, ¡pero no hay ajuste posible que haga desaparecer la aceleración normal!

V. Curvatura y Relatividad.

Ahora bien, no todas las aceleraciones son igualmente "forzadas". En efecto, si pensamos en nuestra propia experiencia, sería concebible pensar que podríamos vivir casi sin percatarnos de la existencia de prácticamente cualquier tipo de fuerzas (y por lo tanto de aceleraciones), como las fuerzas eléctricas o mecánicas, pero nunca podremos dejar de sentir la fuerza de la gravedad. Por supuesto, no quiero decir con esto que estas fuerzas no existan, simplemente que la fuerza de gravedad tiene características especiales, que hacen que sus efectos no se puedan anular, al menos hasta donde sabemos.

Einstein propuso un interesante "Gedankenexperiment" (experimento mental), que pone de manifiesto este carácter especial de la gravedad, como fuerza 'mínima', el llamado experimento del elevador, que ilustramos en la figura de la página siguiente. En esta figura, un observador aislado dentro de un elevador que cae libremente, es decir, únicamente bajo los efectos de la fuerza de gravedad de la Tierra, deja caer objetos y observa su movimiento (¡imaginemos también que una mano salvadora detendrá su caida justo antes de tocar tierra!). Para este observador, los objetos permanecerán en reposo, o se moverán con la velocidad inicial que él les imprima, de modo que, en principio, él no aprecia ninguna fuerza. Sin embargo, para otro observador fuera del elevador, el movimiento del primer observador, así como el de los objetos será un movimiento acelerado, de modo que para este nuevo observador sí hay una fuerza presente; es en parte para resolver este tipo de aparentes contradicciones que Einstein desarrolla su teoría de la relatividad.

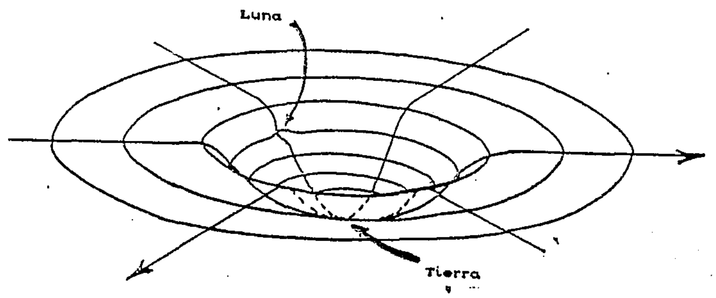


El experimento del elevador

De manera semejante, no todas las curvaturas son de la misma naturaleza; por ejemplo, si suponemos que una curva "vive" sobre la superficie de una esfera, entonces ésta tendrá que curvearse al menos tanto como la esfera misma; un segmento de recta, por ejemplo, no puede estar contenido en la superficie de una esfera. Se requirió del genio de Einstein para atar ambos cabos: incorporar a la física una curvatura que diera cuenta de la aceleración de la gravedad.

(Aunque no fue ésta la motivación original de Einstein, él estaba interesado en una característica única de la ley de gravitación de Newton, la igualdad entre las masas gravitacionales e inerciales, donde por masa inercial se entiende a la constante que multiplica a la aceleración en la segunda ley de Newton, en tanto que la masa gravitacional es un parámetro que aparece dentro de la ley de fuerzas específica de la gravitación.)

La curvatura propuesta por Einstein ocurre sin embargo en un espacio de 4 dimensiones, el famoso **espaciotiempo**, de modo que no es fácil de visualizar; pero podemos darnos una idea de la manera en que la geometría describe a la gravitación si consideramos una versión simplificada e idealizada en dos dimensiones. Para ello, imaginamos al espaciotiempo como una superficie, que es plana en ausencia de objetos masivos, pero que se curvea dondequiera que hay uno de éstos; que tanto se curvea depende de que tanta sea la masa del objeto, como se muestra en la siguiente figura.



El sistema Tierra Luna en la teoría de Einstein

(Versión bidimensional)

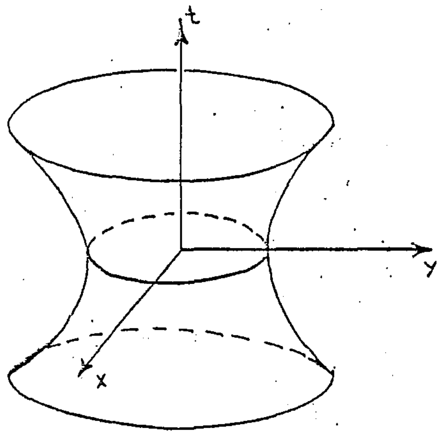
La trayectoria de un cuerpo celeste sujeto sólo a atracciones gravitacionales, que podríamos imaginar como la trayectoria de un balín que se mueve sobre la superficie del espacio tiempo, será entonces rectilínea lejos de los objetos masivos, pero se curveará cuando pase cerca de alguno de éstos.

Podemos sin embargo tomar el punto de vista opuesto, es decir, si conocemos que tanto se curvea el espaciotiempo, sabemos que tan grande es la masa que ocasiona la curvatura. De esta forma, podríamos en principio suprimir la noción de masa de nuestra descripción de la gravedad para describir esta fuerza únicamente en términos geométricos.

VI. ¿Se puede medir la geometría?

La geometría de la relatividad no es sin embargo igual a la geometría euclideana (ni aun si pensamos en el análogo de ésta en 4 dimensiones), y presenta aspectos muy interesantes y muy distintos de los de la geometría euclideana. Esta geometría fue propuesta, antes de la formulación de la relatividad, por Minkowski y Lorentz, y por ello usualmente se le llama al espaciotiempo **espacio de Minkowski** y la "distancia" en esta geometría se mide por medio de la **métrica de Lorentz**. Basados en las ideas de Riemann, Minkowski, un matemático, y Lorentz, un físico, introdujeron esta geometría en sus estudios sobre el electromagnetismo, y fue éste el marco apropiado para la teoría de Einstein.

Obviamente no es posible dar aquí una descripción detallada de esta geometría, pero si podemos señalar algunas de sus diferencias más notables con la geometría euclideana: por ejemplo, dentro de esta geometría existen puntos que no coinciden, pero cuya "distancia" es cero. Otra diferencia notable es la forma de las "esferas" dentro de esta geometría, es decir, de los conjuntos de puntos que equidistan de un punto fijo, que es el centro de la esfera. Para poderlas visualizar, en la siguiente figura describimos una esfera lorentziana en 3 dimensiones, en donde los ejes horizontales corresponden a las direcciones espaciales y el eje vertical a la dirección del tiempo.



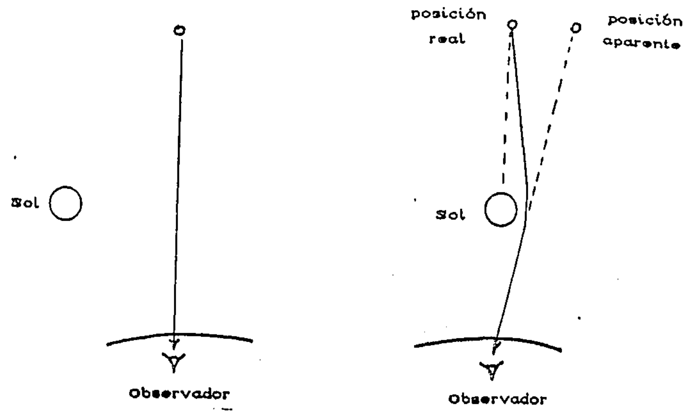
Una esfera Lorentziana en dimensión 3

Esto nos lleva ineluctablemente a una pregunta de carácter experimental, que a su vez nos regresa a los orígenes de la geometría: ¿se puede medir la geometría del universo físico? Y si es así ¿cómo?

Por supuesto, estas preguntas no son triviales y no resulta probable que se les pueda dar una respuesta completa y definitiva, ni siquiera a largo plazo, aunque la teoría de la relatividad ciertamente apunta en la dirección correcta.

No obstante, si pensamos por un momento como lo hizo Galileo y suponemos que aislamos a una partícula lo más posible de todas las influencias externas, entonces ésta deberá moverse en la trayectoria más recta que le sea posible; este tipo de curvas reciben en geometría el nombre de **geodésicas**. Ahora bien, intuitivamente es natural pensar que los candidatos idóneos a escapar a las influencias externas sean objetos muy pequeños moviéndose a gran velocidad y, en efecto, dentro de la relatividad, los rayos de luz, que en la física contemporánea se interpretan como las trayectorias de ciertas partículas elementales, los fotones, se mueven a lo largo de geodésicas. (Resulta además interesante observar que la forma práctica, utilizada desde siempre, para trazar rectas, utiliza precisamente esta propiedad de los rayos de luz.)

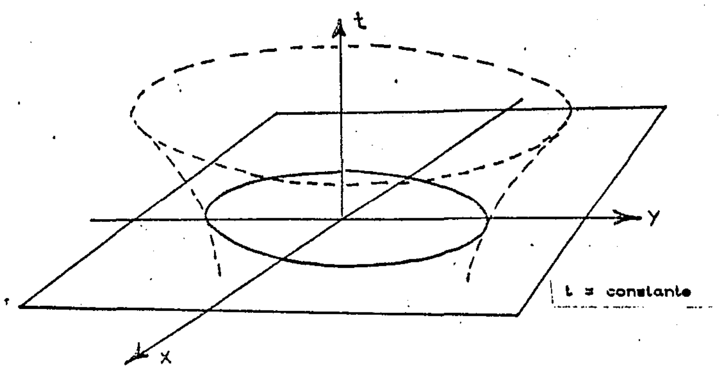
Pero como ya hemos dicho, la fuerza de gravedad es de una naturaleza especial, y en particular, afecta directamente a la geometría del espaciotiempo; ¿cuál es entonces el tipo de geodésica que autoriza la presencia de objetos masivos, como una estrella, cuya presencia no podemos evitar? Un notable "experimento astronómico", que describimos en la siguiente figura muestra que efectivamente, las trayectorias de los rayos de luz se desvían de una trayectoria rectilínea al pasar cerca de un objeto con masa elevada —y por consiguiente con un elevado campo gravitacional—, como es el caso del Sol.



Desviación de los rayos de luz por un objeto pesado

Este experimento es una de las más notables confirmaciones recibidas por la relatividad y muestra en particular que la geometría no puede ser euclideana en presencia de objetos masivos. ¿Cómo es entonces posible que durante tanto tiempo se haya tenido la idea equivocada de que la geometría que *realmente* rige al Universo sea la geometría euclideana?

Para intentar responder a esta pregunta, regresemos a la figura que muestra las esferas relativistas lorentzianas. Si nos fijamos en la figura que resulta al fijar un instante de tiempo, que es geométricamente la intersección de la esfera con un plano horizontal, vemos que esta figura es ¡el equivalente de una esfera euclideana en una dimensión menos!



Esferas euclideanas a tiempo constante

Esto lo que significa es que para un instante de tiempo fijo la geometría es, al menos localmente, euclideana. De este modo, si el tiempo que se requiere para captar una imagen geométrica es muy breve, no hay razón para pensar que la geometría no sea euclideana. Podemos pues concluir que la razón principal por la que la geometría relativista pasó desapercibida tanto tiempo fue la dificultad para lidiar experimentalmente con la enorme velocidad de la luz.

VII. Epílogo.

Muchas otras pruebas de lo acertado que es el enfoque geométrico de la relatividad existen: la precesión del perihelio de Mercurio, la detección de mesones μ a nivel de la superficie de la Tierra o el efecto Cerenkov, por citar sólo algunos de los más clásicos y famosos. Sin embargo, para el propósito de esta nota, quizá lo más importante es que este enfoque geométrico de la física, y este revivir de la relación entre física y geometría a los que Einstein dio, por así decirlo, vida, han dado y siguen dando frutos, no sólo para la física sino también para las matemáticas: Un ejemplo notable lo tenemos en el desarrollo de las modernas teorías de norma (gauge theories), que han valido premios Nobel a grandes físicos, como Salam y Weinberg, y medallas Fields a geniales matemáticos, como Simon Donaldson, y que, al menos en parte, tienen su origen en los trabajos de Einstein.