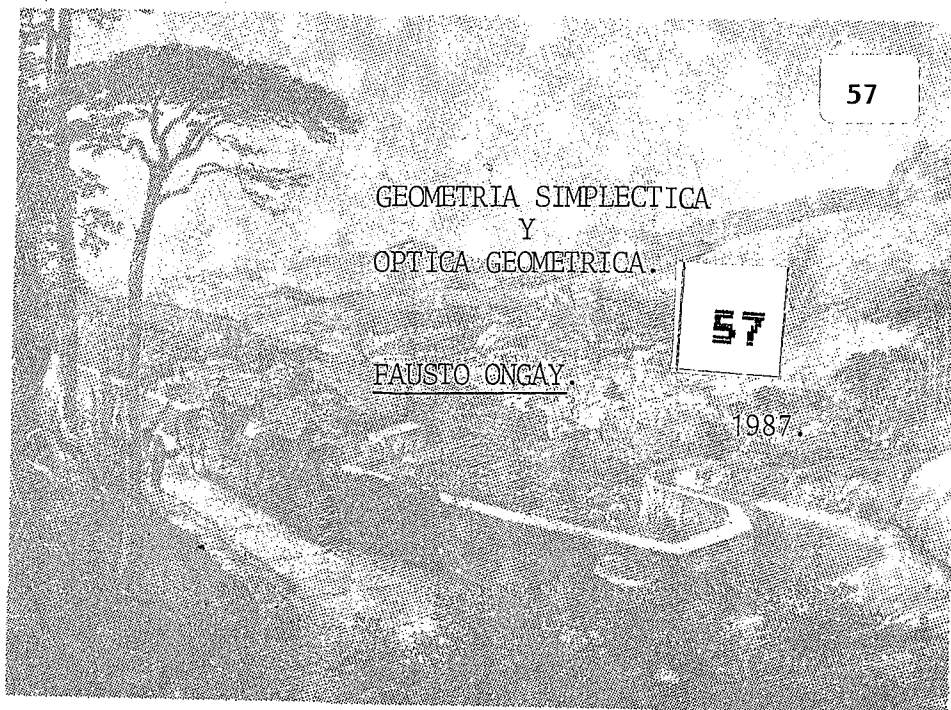


# COMUNICACIONES DEL CIMAT



## CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402

Guanajuato, Gto.

México

Tels. (473) 2-25-50

2-02-58



## GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y ÓPTICA GEOMÉTRICA.

### I. Introducción.

Cuando se quiere hacer un estudio formal de la óptica geométrica, utilizando como herramienta matemática a la geometría diferencial y como principio físico básico al principio de Fermat, aparecen de manera natural la geometrías simpléctica y de contacto; de hecho, es en el estudio de la óptica geométrica que W. R. Hamilton creó la geometría simpléctica, cuyo origen se remonta a sus primeros trabajos, a principios del siglo pasado. En este trabajo daremos una versión relativamente simple de estas ideas, utilizando sin embargo el lenguaje de la geometría diferencial moderna: veremos así que una gran cantidad de construcciones geométricas, que describiremos en su oportunidad, aparecen en este contexto.

Es importante subrayar que el interés básico de estas notas es la geometría más que la óptica; esta última nos servirá principalmente como motivación. Por esta razón haremos ciertas simplificaciones en las hipótesis físicas, que obedecen más a su conveniencia en la presentación de las ideas matemáticas, que a las ventajas que pudieran obtenerse en la comprensión de la física involucrada. Sin embargo, resulta natural esperar que la óptica geométrica sea una buena manera de motivar los conceptos geométricos y es precisamente en esa interrelación de ideas que basaremos nuestra presentación.



Podemos también agregar que este enfoque geométrico es el que parece más natural para una teoría formal de la óptica geométrica, análoga a los tratamientos de la mecánica clásica de Abraham y Marsden, Arnold o Godbillon ([1], [2] y [4]).

Para cerrar esta introducción señalemos que aunque supondremos que el lector tiene cierta familiaridad con las ideas básicas de la geometría diferencial, como son las nociones de campo vectorial, forma diferencial o haz tangente, trataremos de mantener nuestro tratamiento a un nivel relativamente elemental, sin pretender lograr la mayor generalidad posible y efectuando cálculos en coordenadas locales donde ello facilite la presentación. Tratamientos más detallados de los conceptos que utilizaremos aquí pueden encontrarse en las referencias [1], [4], [6] ó [7], y para aplicaciones de la geometría simpléctica a muchas otras partes de la física matemática puede consultarse [5].

## II. Notaciones y conceptos básicos.

Convengamos en las siguientes notaciones, tomadas esencialmente de [1]:

Las letras  $M$ ,  $N$  y  $Q$  denotarán variedades diferenciales sin restricciones especiales. Si  $M$  es una variedad y  $m \in M$ ,  $T_m M$  (resp.  $T_m^* M$ ) denotará al espacio tangente a  $M$  en  $m$  (resp. espacio cotangente) y  $TM$  (resp.  $T^*M$ ) a la unión de éstos es decir al haz tangente a  $M$  (resp. haz cotangente), con su estructura natural de variedad diferenciable. Todas las variedades y funciones aquí consideradas serán de clase  $C^\infty$ ; aunque muchos de los argumentos son válidos bajo condiciones más generales.

Al conjunto de campos vectoriales en  $M$  lo denotaremos por  $\mathcal{X}(M)$ , en tanto que  $\Omega^p(M)$  denotará al conjunto de  $p$ -formas diferenciales. La diferencial exterior será denotada por  $d$ . Asimismo, para simplificar algunas fórmulas, si tenemos un sistema de coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  escribiremos  $\partial_i$  en vez de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  para la base local de vectores tangentes asociada a estas coordenadas.



Recordemos finalmente dos importantes operadores inducidos en las formas diferenciales por un campo vectorial dado  $X \in \mathcal{X}(M)$ . En primer lugar, dado  $\xi \in \Omega^p(M)$  se define el producto interior de  $X$  y  $\xi$  como la  $(p-1)$ -forma  $i(X)\xi$  definida por

$$(1) \quad i(X)\xi(X_1, \dots, X_{p-1}) = \xi(X, X_1, \dots, X_{p-1})$$

(de modo que el producto interior corresponde a una contracción tensorial).

Con ayuda del producto interior definimos ahora la derivada de Lie de la  $p$ -forma  $\xi$  como la  $p$ -forma  $\mathcal{L}_X \xi$  dada por la fórmula

$$(2) \quad \mathcal{L}_X \xi = d(i(X)\xi) + i(X)d\xi$$

La derivada de Lie es en cierto sentido una generalización de la idea de derivada direccional a las formas diferenciales y decimos que una forma  $\xi$  es invariante bajo un campo  $X$  (o más precisamente bajo el flujo asociado al campo  $X$ ) si  $\mathcal{L}_X \xi = 0$ .

### III. Descripción geométrica de la óptica geométrica.

Dentro de la óptica geométrica los rayos de luz se describen por curvas en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , sujetas a ciertas restricciones que describiremos a continuación. Daremos primero una descripción intuitiva de los rayos y posteriormente haremos una abstracción de esta descripción, introduciendo en el camino las nociones de geometría diferencial pertinentes.

Convengamos entonces en fijar una dirección en  $\mathbb{R}^3$ , a la que llamaremos eje óptico y que parametrizaremos con la variable  $x$ . Para tener una imagen concreta podemos pensar en el eje de simetría de algún instrumento óptico, como una cámara fotográfica o un telescopio. Un rayo virtual será una curva en el espacio que pueda ser parametrizada por la variable  $x$ , en otras palabras, es una curva cuya proyección sobre el eje óptico es un difeomorfismo sobre algún subintervalo del eje óptico. Así, si  $\gamma$  es una curva que representa un rayo virtual,  $\gamma$  puede escribirse como  $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$  y en cada punto  $(x, y, z)$  sobre la curva el vector tangente a la curva en ese punto queda





determinado por 5 parámetros:  $(x, y, z, y', z')$  (ya que el vector tangente a la curva es simplemente  $(1, y', z')$ ). Aquí la " ' " simboliza la derivada con respecto a  $x$ , pero  $y'$  y  $z'$  deben interpretarse como parámetros independientes, ya que por un mismo punto pueden pasar una infinidad de rayos. Las restricciones que hemos impuesto a los rayos virtuales no son realmente indispensables, pero facilitarán los cálculos en coordenadas locales; por otra parte, el calificativo virtual refleja el hecho que no toda curva de este tipo corresponde a un rayo de luz.

Podemos ahora dar una descripción más técnica, pero más precisa de la situación anterior como sigue: pensemos a  $\mathbb{R}^3$  como el "haz trivial sobre  $\mathbb{R}$ ",  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , y llamemos sección local de  $E$  a toda función  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$ , donde  $I$  es un subintervalo abierto (o más en general un abierto arbitrario) de  $\mathbb{R}$ , que tiene la forma  $\gamma(x) = (x, \gamma_1(x), \gamma_2(x))$ ; un rayo virtual es entonces simplemente una sección local de  $E$ .

Esta descripción de rayo virtual que hemos dado, así como las nociones de campo vectorial y forma diferencial, pueden verse como casos particulares de una teoría más general: la de haces vectoriales y sus secciones locales. Dado que estas estructuras aparecerán sistemáticamente en lo que sigue, daremos una breve descripción de los aspectos básicos de esta teoría.

Sean entonces  $M$  y  $Q$  dos variedades y  $\pi: M \rightarrow Q$  una función suprayectiva; decimos que  $M$  (o más precisamente, la terna  $(M, \pi, Q)$ ), es un haz vectorial (real) de rango  $n$  sobre  $Q$  si:

a) Para cada  $q \in Q$  la imagen inversa de  $q$ ,  $\pi^{-1}(q)$ , es un espacio vectorial real de dimensión  $n$ .

b) Para cada  $q \in Q$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $q$  y un difeomorfismo  $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  tal que las restricciones

$$(3) \quad \phi|_{\pi^{-1}(x)}: \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \quad ; \quad x \in U$$

son isomorfismos de espacios vectoriales.



En lo sucesivo "haz" significará haz vectorial. Al espacio  $Q$  se le llama la base del haz y a  $M$  el espacio total (y como hemos indicado, para abreviar usualmente decimos que  $M$  es el haz). A cada imagen inversa  $\pi^{-1}(q)$  se le llama la fibra del haz sobre el punto  $q$  y la denotamos por  $M_q$  y éstas, en virtud de (3), se pueden identificar con  $\mathbb{R}^n$ .

Por otra parte, la condición (b) se expresa diciendo que el haz es localmente trivial y al difeomorfismo  $\phi$  se le llama una trivialización local del haz  $M$ . Cuando es posible escoger a todo  $M$  como dominio de una trivialización local decimos que el haz es (globalmente) trivial; pero no todos los haces son triviales. En efecto, intuitivamente los haces son "productos torcidos" de la base  $Q$  por la "fibra tipo"  $\mathbb{R}^n$  y quizá el ejemplo más sencillo de un haz no trivial sea la banda de Möbius, la que se puede pensar como un haz de rango 1 sobre un círculo, como se muestra en la figura siguiente.

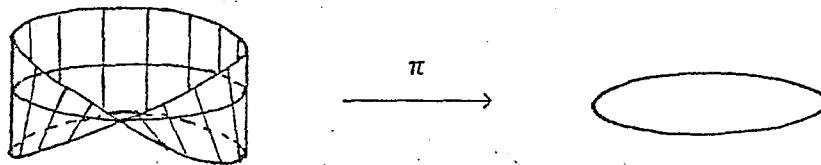


Fig. 1 Ejemplo de un haz no trivial: la banda de Möbius.

Por otro lado, un ejemplo de un haz que sí es trivial es el haz tangente a  $\mathbb{R}^n$ ; de hecho, de manera natural,  $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Dado el haz  $\pi: M \rightarrow Q$  decimos que una función  $s: U \subseteq Q \rightarrow M$ , donde  $U$  es un abierto de  $Q$ , es una sección local de  $M$  si para cada  $q \in U$  se tiene que  $\pi(s(q)) = q$ , en otras palabras, si la imagen de  $q$  bajo  $s$  está en la fibra sobre  $q$ ,  $M_q$ . Al conjunto de secciones locales se le denota por  $\Gamma(U, M)$ ; cuando  $U = Q$  decimos que la sección es global y al conjunto de éstas se le denota simplemente  $\Gamma(M)$ , de modo que por ejemplo,  $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$ . En este trabajo, cuando el dominio de las secciones locales no sea importante para la discusión, usaremos la notación  $\Gamma(M)$  para denotar secciones locales sobre algún abierto  $U \subseteq Q$ .



Regresando a la óptica geométrica, introducimos el haz (trivial) sobre  $E$ ,  $V = E \times \mathbb{R}^2$ , al que llamaremos haz vertical; la razón de esta terminología es que conviene pensar a  $V$  como un subconjunto, de hecho un subhaz, (en un sentido que no es difícil de imaginar) de  $\mathbb{R}^6 = TE$ , cuyas fibras son tangentes a los planos verticales  $x = \text{cte.}$  en la imagen usual de  $\mathbb{R}^3$ . Asimismo,  $V$  puede identificarse de manera obvia con  $\mathbb{R} \times T\mathbb{R}^2$  y pensarse entonces como un haz sobre el eje óptico, identificación que usaremos sistemáticamente en lo sucesivo.

Un hecho importante es que cada rayo virtual  $\gamma \in \Gamma(E)$  define una sección  $\gamma' \in \Gamma(V)$ , definida por la ecuación

$$(4) \quad \gamma'(x) = \left[ x, \gamma_1(x), \gamma_2(x), \frac{d\gamma_1}{dx}(x), \frac{d\gamma_2}{dx}(x) \right]$$

que levanta a  $\gamma$ , en el sentido que  $\pi \circ \gamma' = \gamma$ , donde  $\pi$  denota la proyección de  $V$  en  $E$ , como se muestra en el diagrama siguiente:

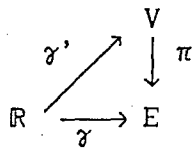


Fig. 2 Levantamiento de los rayos virtuales.

y este tipo de "levantamiento de estructuras" de  $E$  hacia  $V$  aparecerá con cierta frecuencia en lo que sigue.

A las fibras de  $E$ , y por extensión a las fibras de  $V$ , las llamaremos planos de referencia y cada plano de referencia está por tanto determinado por un punto en la base, es decir, en el eje óptico. Los planos de referencia (en  $E$ ) es en donde "viven" las imágenes, como sucede por ejemplo en una placa fotográfica. De manera formal, una imagen es un subconjunto de un plano de referencia en  $E$ , que satisface ciertas condiciones de regularidad (suficientes como para aplicar el teorema de Stokes, por ejemplo). De manera análoga, una imagen completa es un subconjunto de algún plano de referencia de  $V$ ; para justificar esta terminología, notemos que para la percepción de las imágenes



es importante no sólo la forma de la imagen sino también la dirección de que proceden los rayos provenientes de la imagen que se está observando.

La información óptica se resume esencialmente en una función (que, siguiendo con nuestra convención, supondremos de clase  $C^\infty$ )  $n: E \rightarrow (0, \infty)$ , llamada índice de refracción. Desde un punto de vista físico, la presencia de un índice de refracción no constante (en cuyo caso la óptica es trivial, pues los rayos corresponden a segmentos de recta) equivale a la presencia de instrumentos ópticos, cuya finalidad es modificar las trayectorias de los rayos para obtener efectos especiales, como ampliaciones o deformaciones de imágenes o concentración de rayos en puntos focales. Pero por supuesto, estamos haciendo simplificaciones importantes desde un punto de vista físico:

Por una parte, el suponer que  $n$  toma valores escalares implica que el medio es isotrópico, esto es, que el índice de refracción es igual en todas direcciones, lo que no siempre es el caso; por ejemplo, en los llamados materiales birrefringentes, como el celofán, esto no sucede. Por otra parte, un índice de refracción diferenciable implica que no existen superficies refractantes, lo que *a priori* puede parecer contrario a la intuición; sin embargo, como se ilustra en la figura siguiente, las superficies refractantes corresponden a (o si se prefiere, pueden ser simuladas por) cambios rápidos en  $n$

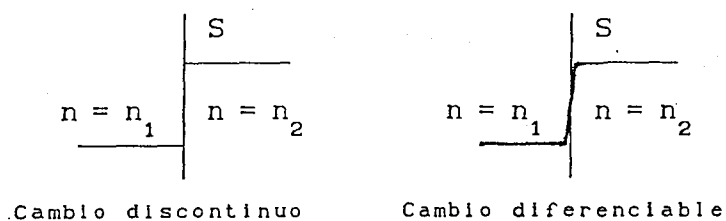


Fig. 3. Variación del índice de refracción en una superficie refractante S





Finalmente, es preciso señalar que nuestra descripción excluye, por la definición misma de rayo virtual que hemos dado, a los espejos como instrumentos ópticos.

Desde un punto de vista geométrico el índice de refracción puede pensarse como una modificación a la métrica (riemanniana) euclidiana usual en  $E = \mathbb{R}^3$ , como se describe a continuación: recordemos primero que la métrica euclidiana se define, en base al teorema de Pitágoras, por el "elemento de arco"

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donde la fórmula anterior significa que la longitud de un vector tangente en un punto  $(x, y, z)$  expresado como

$$a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$$

es simplemente  $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ . El índice de refracción  $n$  define entonces una nueva métrica multiplicando  $ds^2$  por  $n^2$ . Esta nueva métrica es conformemente equivalente a la métrica euclidiana en el sentido que los ángulos, y en particular la noción de perpendicularidad, coinciden para ambas métricas.

Para definir ahora los rayos reales apelamos al principio de Fermat, que en términos abstractos dice que los rayos reales corresponden a las geodésicas de la métrica definida por el índice de refracción. Puesto en lenguaje variacional, que podríamos pensar como más cercano al lenguaje de la física, si consideramos un rayo virtual  $\gamma \in \Gamma(E)$  y su levantamiento  $\gamma'$ , que escribimos como

$$\gamma' = (x, y, z, y', z')$$

definimos el lagrangiano

$$(5) \quad L(x, y, z, y', z') = n(x, y, z) (1 + (y')^2 + (z')^2)^{1/2}$$

y el camino óptico de  $\gamma$  entre  $x = a$  y  $x = b$  por

$$(6) \quad J(\gamma) = \int_a^b L(\gamma'(x)) dx$$

y los rayos reales corresponden a los extremales de la funcional  $J$  (por esta



razón usualmente se dice que los rayos reales minimizan el camino óptico, aunque esta afirmación sólo tiene validez local).

Finalmente, necesitamos describir cómo se transforman las imágenes al pasar de un plano de referencia a otro, proceso que usualmente se llama formación de imágenes. Este admite una descripción dinámica muy elegante: dada una imagen completa "objeto"  $U$ , contenida en el plano de referencia  $V_1$ , la imagen transformada de  $U$  en el plano de referencia  $V_2$  se obtiene como sigue:

Llamemos  $E_1$  y  $E_2$  a las proyecciones de  $V_1$  y  $V_2$  en  $E$ . Dado un punto  $m \in U$ , éste determina dos cosas; por una parte el punto  $\pi(m) \in E_1$  y por la otra un vector tangente a  $E$  en  $\pi(m)$  y, por consiguiente la única geodésica por  $\pi(m)$  que tiene ese vector tangente. La intersección de esta geodésica con  $E_2$  (si es que ésta existe) determina entonces un punto de  $E_2$  y un vector tangente a  $E$  por este punto, lo que en conjunto determina un punto en  $V_2$ , al que denotamos  $T(m)$ . Repitiendo este proceso para cada punto de  $U$  obtenemos la imagen transformada  $T(U)$  en el plano  $V_2$ .

En términos de las coordenadas locales naturales de  $E$  y  $V$ , si  $m = (x_1, y_1, z_1, y'_1, z'_1)$ , y  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  es la única geodésica en  $E$  cuyo vector tangente en  $\pi(m) = (x_1, y_1, z_1)$  es  $(1, y'_1, z'_1)$ , entonces  $T(m)$  es el punto de  $V_2$  definido por (véase la ecuación (4)):

$$T(m) = \left[ x_2, \gamma_2(x_2), \gamma_3(x_2), \frac{d\gamma_2}{dx}(x_2), \frac{d\gamma_3}{dx}(x_2) \right]$$

en donde  $x_2$  es la coordenada en el eje óptico que determina a  $E_2$ .

A las transformaciones así obtenidas (construidas con ayuda de un importante objeto de la geometría riemanniana: el llamado flujo geodésico) les llamaremos transformaciones ópticas entre los planos  $E_1$  y  $E_2$  y uno de nuestros objetivos será caracterizar a estas transformaciones.



#### IV. El principio de Fermat y el método de Hamilton.

Como explicamos en la sección anterior, el problema de encontrar las trayectorias de los rayos reales se reduce, en virtud del principio de Fermat, a un problema estándar del cálculo de variaciones, cuya solución se obtiene resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano  $L$ . Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de 2° orden y el método de Hamilton, que describiremos a continuación, permite trasladar este sistema a uno de primer orden; es precisamente aquí que se encuentra el germen de la geometría simpléctica.

Para ello, recordemos cómo son las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano  $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , y que determinan los extremales de la funcional

$$(7) \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \int_a^b L(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') dt$$

donde  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  son funciones vectoriales de la variable real  $t$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben entonces

$$(8) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial x'_i} \right] = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Mediante la sustitución  $p_i = \frac{\partial L}{\partial x'_i}$  y la introducción de la función

$$(9) \quad h = \sum_i p_i x'_i - L$$

que hoy día llamamos hamiltoniano del sistema, Hamilton trasladó el problema de resolver las  $n$  ecuaciones de 2° orden de Euler-Lagrange en el sistema de  $2n$  ecuaciones de primer orden

$$(10) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

que se conocen como ecuaciones de Hamilton para el problema variacional.

Regresando al caso particular de la óptica geométrica, el método de Hamilton nos lleva a introducir las variables



$$(11) \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{ny'}{(1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} ;$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{nz'}{(1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}$$

así como el hamiltoniano

$$(12) \quad H = p_y y' + p_z z' - L$$

En este punto cabe hacer las siguientes observaciones:

Por una parte,  $p_y/n$  y  $p_z/n$  pueden pensarse como "senos directores" para los rayos virtuales, de modo que desde un punto de vista físico, reemplazar  $y'$ ,  $z'$  por  $p_y$  y  $p_z$  es una manera de hacer intrínseca la ley de Snell, que es la que gobierna el fenómeno de la refracción.

Por otro lado, desde el punto de vista de la geometría diferencial,  $p_y$  y  $p_z$  deben pensarse en términos de formas diferenciales y no en términos de vectores tangentes, ya que se obtienen a partir de  $y'$  y  $z'$  vía la dualidad inducida por la métrica definida por el índice de refracción. Esta observación desempeña un papel fundamental en toda la discusión que sigue, ya que es precisamente la estructura geométrica del haz cotangente la que nos permitirá caracterizar a las transformaciones ópticas.

Reescribamos ahora lo anterior en el contexto geométrico de la sección III :

Si denotamos por  $V^*$  al haz  $\mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^2$ , el paso de  $y'$ ,  $z'$  a  $p_y$ ,  $p_z$  define una transformación  $\Phi : V \rightarrow V^*$ , dada en coordenadas por:

$$(13) \quad \Phi(x, y, z, y', z') = (x, q_y, q_z, p_y, p_z)$$

en donde hemos escrito  $q_y$  y  $q_z$  en vez de  $y$  y  $z$  para enfatizar que hemos cambiado de  $T\mathbb{R}^2$  a  $T^*\mathbb{R}^2$ . Cabe hacer notar que la imagen de  $\Phi$  no es todo  $V^*$  pues se tiene la desigualdad  $n^2 > p_y^2 + p_z^2$ , pero módulo esta restricción,  $\Phi^{-1}$  se calcula fácilmente; de hecho:

$$(14) \quad y' = \frac{p_y}{(n^2 - p_y^2 - p_z^2)^{1/2}} ; \quad z' = \frac{p_z}{(n^2 - p_y^2 - p_z^2)^{1/2}}$$





Via  $\Phi$  podemos pensar a  $x, y, J$ , etc., como funciones definidas en  $V^*$ , en particular, se tiene la siguiente expresión para el hamiltoniano  $H$ :

$$(15) \quad H = -(n^2 - p_y^2 - p_z^2)^{1/2}.$$

Nótese que, debido a la presencia del término  $n^2$ ,  $H$  no es una función homogénea de las variables  $p$ ; este hecho será importante más adelante. Por último, mediante  $\Phi$ , consideraremos a las transformaciones ópticas como funciones definidas en las fibras de  $V^*$ .

#### V. Estructuras simplécticas y de contacto.

El haz cotangente a una variedad  $Q$ ,  $M = T^*Q$ , posee una 1-forma diferencial canónica  $\theta_0 \in \Omega^1(M)$ , la cual, heurísticamente hablando, nos recuerda que los puntos en  $T^*Q$  son ellos mismos "formas diferenciales sobre  $Q$ ". Intuitivamente  $\theta_0$  se construye como sigue: si  $m \in M$  y  $X \in T_m(M)$  es un vector tangente a  $M$  en  $m$ ,  $X$  se descompone en dos componentes  $X = X_q + X_p$ , donde  $X_q$  es "tangente a la base" y  $X_p$  es "tangente a la fibra" (aunque en realidad sólo  $X_p$  está intrínsecamente determinada) y definimos  $\theta_0(X) = m(X_q)$ . En términos de una carta de coordenadas locales para  $M$  alrededor de  $m$ , cada  $n$  en el dominio de esa carta se escribe  $n = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , de modo que podemos escribir  $p = \sum_1 p_i dq_i$ , con  $dq_i$  la base dual a  $\partial/\partial q_i$ . Así, si escribimos a  $X$  como:

$$(16) \quad X = \sum_1 a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_1 b_i \frac{\partial}{\partial p_i} = X_q + X_p$$

entonces se tiene

$$(17) \quad \theta_0(X) = \sum_1 p_i a_i.$$

Por ello, la 1-forma canónica suele escribirse como

$$(18) \quad \theta_0 = \sum_1 p_i dq_i.$$

No es difícil verificar que esta expresión está bien definida, independientemente de la carta local que se haya usado para su definición, pero podemos hacer algo mejor: dar una expresión intrínseca para  $\theta_0$ . Para



ello, recordemos un importante concepto, el de imagen recíproca (o como se suele decir, pullback, usando el término en inglés) de una p-forma diferencial bajo una función.

Sean entonces  $Q$  y  $N$  dos variedades y  $f: Q \rightarrow N$  una función. Dado  $q \in Q$  la derivada de  $f$  en  $q$ , escrita  $Df_q$ , es una transformación lineal entre los espacios vectoriales  $T_q Q$  y  $T_{f(q)} N$ ; por dualidad se obtiene una aplicación  $f^*|_q$  entre  $T_{f(q)}^* N$  y  $T_q^* Q$ , dada por

$$(19) \quad f^*|_q(\eta)(X) = \eta(Df_q X) \quad ; \quad \eta \in T_{f(q)}^* N \quad , \quad X \in T_q Q \quad ;$$

y ésta se extiende de la manera natural a las funcionales p-lineales alternantes:

$$(20) \quad f^*|_q(\eta)(X_1, \dots, X_p) = \eta(Df_q X_1, \dots, Df_q X_p) \quad ;$$

para  $\eta \in \Lambda^p T_{f(q)}^* N$ ,  $X_1, \dots, X_p \in T_q Q$ . Si permitimos que  $q$  varíe obtenemos entonces una transformación

$$(21) \quad f^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(Q) \quad ,$$

que define el pullback de las formas diferenciales. Obsérvese que  $f^*$  opera en sentido recíproco que  $f$  (de ahí la terminología pullback).

Una importante propiedad del pullback es que conmuta con la diferencial exterior

$$(22) \quad f^* d\xi = d(f^* \xi) \quad ; \quad \xi \in \Omega^p(N) \quad .$$

Como referencia para uso futuro, vamos asimismo a describir el pullback en coordenadas locales: si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son cartas locales alrededor de  $q$  y  $f(q)$  respectivamente y

$$(23) \quad \eta = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p}(y) dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$$

es una p-forma en  $N$  escrita en esas coordenadas, el pullback de  $\eta$  por  $f$  se escribe

$$(24) \quad f^*(\eta) = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p} \circ f(x) dy_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dy_{i_p}(x)$$

fórmula que usaremos más adelante.



Regresando a la 1-forma canónica, si  $\pi$  denota la proyección natural de  $M = T^*Q$  en  $Q$ ,  $m \in M$  y  $X \in T_m(M)$ ,  $\theta_0$  queda definida por la ecuación

$$(25) \quad \theta_0|_m(X) = m(D\pi_m X)$$

equivalentemente,  $\theta_0$  queda definida por el hecho que para cada 1-forma  $\xi \in \Omega^1(Q)$

$$(26) \quad \xi^* \theta_0 = \xi$$

(recuérdese que  $\xi$  es una función de  $Q$  en  $T^*Q$ ).

La diferencial de  $\theta_0$ , que denotamos por  $\omega_0$ , se llama la forma simpléctica canónica de  $T^*Q$  y también desempeñará un papel muy importante en lo que sigue. La 2-forma  $\omega_0$  así definida posee varias propiedades muy especiales; en particular,  $\omega_0$  es una forma cerrada (de hecho exacta, por su misma definición) y es no degenerada, lo que quiere decir que si  $\iota(X)\omega_0 = 0$  entonces  $X = 0$ . Estas propiedades, que definen lo que se llama una forma (o estructura) simpléctica, se verifican fácilmente si notamos que la escritura local de  $\omega_0$  es

$$(27) \quad \omega_0 = \sum_1 dp_1 \wedge dq_1$$

La existencia de una forma simpléctica en una variedad impone fuertes restricciones en la variedad; por ejemplo, las variedades simplécticas son automáticamente de dimensión par y orientables. En definitiva, podemos decir que la existencia de una estructura simpléctica da una estructura rígida, pero de una gran riqueza.

Analizemos ahora el papel que desempeñan las construcciones anteriores dentro de la óptica geométrica; las notaciones serán las de la sección anterior:

En primer lugar, en vista de la identificación  $V^* = \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^2$ , cada fibra de  $V^*$  es una variedad simpléctica. Pero por otro lado, si bien en un haz vectorial en general no existe *a priori* ninguna relación entre las distintas fibras y en particular, no tiene por que haber maneras privilegiadas de pasar de una fibra a otra, en el caso del haz  $V^*$  de la óptica geométrica, las



trayectorias de los rayos reales determinan una "conexión" privilegiada entre las distintas fibras. Esta conexión es una estructura geométrica determinada por la estructura simpléctica de las fibras y nos dará una caracterización de las transformaciones ópticas.

Aunque la idea intuitiva y la expresión final de la conexión son bastante simples, la construcción precisa es un tanto compleja, ya que intervienen simultáneamente  $E$ ,  $V$ ,  $V^*$  así como sus respectivos haces tangentes: en efecto, si  $m \in V_1^*$  es un punto en una fibra de  $V^*$ ,  $m$  determina una única geodésica que pasa por su proyección en  $E$  y ésta se levanta, primero a una sección de  $V$  y luego, vía  $\Phi$ , a una sección de  $V^*$  que es la que determina la conexión entre  $m$  y las fibras cercanas a  $V_1^*$ . Por lo anterior, conviene guardar en mente el diagrama de los levantamientos de la sección II (figura 2).

A nivel infinitesimal (es decir, en términos de campos vectoriales y formas diferenciales en  $V^*$ ) el proceso de conexión se ve como sigue: dado el punto  $m \in V^*$  y la geodésica  $\gamma \in \Gamma(E)$  que ésta determina, denotemos por  $v$  al vector tangente a  $\gamma$  en  $x = \pi(m)$ . El plano ortogonal a  $v$  en  $T_x E$ , que denotamos por  $E_0$ , determina a su vez un subespacio  $V_0$  de  $T_m V$  de dimensión 4, es decir, de codimensión 1 en  $T_m V$ , que son simplemente los vectores en  $T_m V$  que se proyectan a  $E_0$ . Utilizando ahora a  $\Phi$  obtenemos un subespacio de  $T_m V^*$  también de codimensión 1, al que denotaremos  $\hat{V}_m$ . De esta forma, obtenemos un haz de rango 4 sobre  $V^*$ , al que denotaremos  $\hat{V}$ , que podemos pensar como un subhaz de  $TV^*$ .

La estructura de  $\hat{V}$  es relativamente complicada, pero puede describirse globalmente de una manera muy concisa, utilizando un método inspirado directamente del álgebra lineal, a saber, describir un subespacio de codimensión 1 de un espacio vectorial como el núcleo (o kernel) de una funcional lineal. La versión global de esta construcción, en la teoría de variedades diferenciales, es describir un subhaz de codimensión 1 del haz





tangente a una variedad como el kernel de una 1-forma diferencial  $\eta$ ; esto es, como aquellos vectores tangentes que satisfacen la ecuación  $i(X)\eta = 0$ .

En el caso de la óptica geométrica, la forma de conexión que resulta es

$$(28) \quad \eta_0 = p_y dq_y + p_z dq_z - H dx,$$

pero antes de demostrar esto, hagamos las siguientes dos observaciones:

i) En primer lugar, nótese que los dos primeros términos de  $\eta_0$  no son otra cosa que la 1-forma fundamental en cada fibra de  $V^*$ , lo que muestra el papel central que desempeña la estructura geométrica de  $V^*$ .

ii) Por otro lado, la forma de contacto es lo que se llama una forma semibásica, lo que intuitivamente significa que sólo aparecen diferenciales de las coordenadas de la base  $E$  (pensando, de acuerdo a nuestras convenciones, a esta variedad como base del haz  $V^*$ ). Dicho de manera formal esto significa que si llamamos  $j$  a la inclusión natural de  $E$  en  $V^*$  usando (24) se tiene

$$(29) \quad j^*(\eta_0) = p_y dy + p_z dz - H dx$$

en donde  $p_y$ ,  $p_z$  y  $H$  se consideran, vía  $j$  como funciones en  $E$ . En esta expresión se observa la propiedad importante de las formas semibásicas:  $\eta_0$  y  $j^*(\eta_0)$  tienen esencialmente la misma expresión (recuérdese la ecuación (13)).

La forma  $\eta_0$  determina una descomposición de  $TV^*$  en el subhaz  $\hat{V}$  descrito arriba y un subhaz de  $TV^*$  de rango 1, complementario a  $\hat{V}$ , el que de hecho corresponde al kernel de la diferencial de  $\eta_0$ . Convengamos entonces en llamar a un vector tangente  $X$   $\eta_0$ -vertical si  $i(X)\eta_0 = 0$  y  $\eta_0$ -horizontal si  $i(X)d\eta_0 = 0$ . Notemos que estas condiciones son mutuamente excluyentes. (Este tipo de descomposición horizontal-vertical mediante una 1-forma sólo es posible en dimensión impar y es lo que se llama una estructura de contacto.)

(Desde un punto de vista físico, la forma  $\eta_0$  tiene también un significado importante ya que si  $\gamma$  es un rayo virtual y  $\tilde{\gamma}$  denota su levantamiento a  $V^*$ , el pullback de  $\eta_0$  por  $\tilde{\gamma}$  es

$$(\tilde{\gamma})^*(\eta_0) = (p_y y' + p_z z' - H) dx$$



y comparando esta expresión con las fórmulas (5) y (12) vemos que  $(\tilde{\gamma})^*(\eta_0)$  es el "elemento de arco" del rayo virtual  $\gamma$ . Es precisamente en este sentido que  $\eta_0$  es la forma natural de conexión en  $V^*$ .)

La afirmación hecha arriba sobre la construcción de  $\eta_0$  es ahora consecuencia inmediata del siguiente resultado fundamental en óptica geométrica y que, como hemos mencionado, se encuentra implícitamente en los trabajos de Hamilton:

TEOREMA 1. *Un rayo virtual  $\gamma$  es un rayo real si y sólo si los vectores tangentes al levantamiento  $\tilde{\gamma}$  son  $\eta_0$ -horizontales.*

*Demostración:* En virtud de lo dicho en la sección III, basta con demostrar que un campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(V^*)$  es  $\eta_0$ -horizontal si y sólo si satisface las ecuaciones de Hamilton. Pero si

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial q_y} + c \frac{\partial}{\partial q_z} + d \frac{\partial}{\partial p_y} + e \frac{\partial}{\partial p_z}$$

es un campo vectorial  $\eta_0$ -horizontal, entonces  $\iota(X)\eta_0 \neq 0$  implica

$$aH - p_y b - p_z c \neq 0$$

Combinando esto con la no homogeneidad de  $H$  en las variables  $p$  (ecuación (12)), el teorema de Euler implica  $a \neq 0$  y, ya que sólo nos interesan vectores tangentes a rayos virtuales, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $a = 1$ . De aquí resulta inmediatamente que la ecuación  $\iota(X)d\eta_0 = 0$  equivale al sistema

$$d = - \frac{\partial H}{\partial q_y} \qquad e = - \frac{\partial H}{\partial q_z}$$

$$b = \frac{\partial H}{\partial p_y} \qquad c = \frac{\partial H}{\partial p_z}$$

que son precisamente las ecuaciones de Hamilton. Como este argumento evidentemente se puede leer en la otra dirección esto prueba el teorema.



## VI. Transformaciones ópticas y symplectomorfismos.

Para cerrar el círculo de ideas, en esta última sección veremos cómo las transformaciones ópticas pueden caracterizarse como aquellas transformaciones que respetan la estructura simpléctica de las fibras de  $V^*$ ; es decir, como aquellas transformaciones  $T : V_1^* \rightarrow V_2^*$  que satisfacen

$$(30) \quad T^* \omega_2 = \omega_1,$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  denotan las formas simplécticas de  $V_1^*$  y  $V_2^*$  respectivamente. En la literatura de física a estas transformaciones se les ha llamado tradicionalmente transformaciones canónicas, pero en matemáticas, motivados por la teoría de categorías, se les llama symplectomorfismos.

Con el fin de ilustrar las técnicas de la geometría simpléctica daremos dos demostraciones del siguiente resultado, que caracteriza a las transformaciones ópticas:

**TEOREMA 2:** Sean  $E_1$  y  $E_2$  fibras de  $E$  y  $V_1^*$  y  $V_2^*$  las correspondientes fibras de  $V^*$ . Una transformación  $T : V_1^* \rightarrow V_2^*$  define una transformación óptica entre  $E_1$  y  $E_2$  si y sólo si es un symplectomorfismo de  $V_1^*$  a  $V_2^*$ .

*Demostración 1:* Sea  $X$  el campo vectorial que define a  $T$ . En virtud del teorema 1,  $X$  es  $\eta_0$ -horizontal, esto es  $i(X)d\eta_0 = 0$ . Por consiguiente  $d\eta_0$  es invariante bajo  $X$ , ya que en efecto, de (2)

$$\mathcal{L}_X d\eta_0 = i(X)d^2\eta_0 + d(i(X)d\eta_0) = 0$$

ya que ambos sumandos se anulan. Pero la restricción de  $d\eta_0$  a cada fibra  $V_1^*$  es precisamente  $\omega_1$  y esto completa la primera demostración.

*Demostración 2:* Esta demostración está adaptada de [5], cuyo argumento requiere sin embargo de una pequeña modificación.

Consideremos una imagen  $U \subseteq V_1^*$  y sea  $\Omega$  su proyección en  $E_1$  y llamemos  $T\Omega$  a la imagen de  $\Omega$  en  $E_2$ . Sea ahora  $Q$  el sólido (tridimensional) en  $E$  generado



por  $\Omega$ ,  $T\Omega$  y todas las geodésicas entre estas dos superficies, que se usan para la definición de  $T$ . La frontera de  $Q$ ,  $\partial Q$ , es entonces una superficie contenida en  $E$ . Aplicando el teorema de Stokes a  $j^*(d\eta_0)$  y  $j^*(d^2\eta_0)$  se obtiene

$$\int_{\partial Q} j^*(d\eta_0) = \int_Q j^*(d^2\eta_0) = 0$$

pero por la construcción de  $Q$

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} j^*(d\eta_0) &= \int_{T\Omega} j^*(d\eta_0) - \int_{\Omega} j^*(d\eta_0) \\ &= \int_{T\Omega} j^*(\omega_2) - \int_{\Omega} j^*(\omega_1) \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{T\Omega} j^*(\omega_2) = \int_{\Omega} j^*(\omega_1)$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} j^*T^*(\omega_2) = \int_{\Omega} j^*(\omega_1)$$

y como esto sucede para toda región  $\Omega$  se sigue que

$$j^*T^*(\omega_2) = j^*(\omega_1)$$

y, puesto que  $\eta_0$  es semibásica, esto equivale a  $T^*(\omega_2) = (\omega_1)$ , que es la conclusión deseada. (La modificación a la prueba de [5] consiste precisamente en argumentar con los pullbacks bajo  $j$  de las formas en  $V^*$ , modificación necesaria porque las imágenes completas son de dimensión 4, de modo que no se aplica directamente el teorema de Stokes a la 2-forma  $d\eta_0$ .)

AGRADECIMIENTOS: Agradezco a mis colegas del CIMAT y de la UAM Iztapalapa por algunas interesantes discusiones relacionadas con estos temas.





REFERENCIAS:

1. Abraham, R. & J. Marsden. "Foundations of Mechanics" 2<sup>nd</sup> edition, Addison-Wesley, Nueva York, 1978.
2. Arnold, V. I. "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Graduate Texts in Mathematics Vol. 60, Springer Verlag, Nueva York, 1978.
3. Elsgoltz, L. "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional", MIR, Moscú, 1969.
4. Godbillon, C. "Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique" Hermann, París, 1969.
5. Guillemin, V. & S. Sternberg. "Symplectic Techniques in Physics", Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1984.
6. Malliavin, P. "Géométrie Différentielle Intrinsèque" Hermann, París, 1972.
7. Loomis, L. H. & S. Sternberg. "Advanced Calculus", Addison-Wesley, Nueva York, 1968.

Fausto Ongay  
Centro de Investigación  
en Matemáticas (CIMAT)  
Apdo. Postal 402  
Guanajuato, Gto. 35000

