COMENTARIOS SOBRE LA CONSTRUCCION DE BEILINSON-BERNSTEIN

Se describe en esta nota una construcción, dada por A. Beilinson y J. Bernstein en [2], de una categoría que permite "reproducir", en la categoría de álgebras de Lie reductivas, los argumentos de la teoría de localización del álgebra conmutativa clásica. Dado lo condensado del árticulo original, parece útil detallar y comentar algunos puntos sobre la construcción misma, aun sin entrar en el estudio de los resultados de ese trabajo, a los que sólo se hará una breve alusión.

En lo que sigue tomaremos como campo base a $\mathbb{C}$, aunque casi todas las construcciones se extienden inmediatamente al caso de un campo algebraicamente cerrado de característica 0 . Asimismo, solamente consideraremos el caso de álgebras de Lie semisimples, aunque los argumentos se pueden extender, *mutatis mutandis*, a álgebras de Lie reductivas.

1. Raíces y pesos. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan, $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}^*$ un sistema de raíces, $\mathcal{R}_\pm$ las raíces positivas (resp. negativas) con respecto a alguna base, y sean $\mathfrak{g}^\alpha$ (= $\{ v \in \mathfrak{g} \; ; \; [h,v] = \alpha(h)v \}$) $\alpha \in \mathcal{R}$, los espacios radicales correspondientes. El álgebra $\mathfrak{g}$ se puede entonces descomponer como suma directa de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}} \mathfrak{g}^\alpha$$

Introducimos ahora la siguiente notación:

$$\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}_\pm} \mathfrak{g}^{\alpha\alpha}$$

de modo que podemos escribir:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{n}_+$$

A las subálgebras de $\mathfrak{g}$ del tipo $\mathfrak{b}_\pm$ se les llama subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$; éstas pueden definirse abstractamente como las subálgebras solubles maximales de $\mathfrak{g}$.

Por otra parte, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, denotaremos su álgebra envolvente por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo (equivalentemente, una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V); decimos que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es un peso de ($\mathfrak{h}$ en) V si

$$V^\lambda = \{ v \in V \ ; \ h \cdot v = \lambda(h)v \ , \ h \in \mathfrak{h} \} \neq 0$$

donde $h \cdot v$ denota la acción del elemento h en v ; siguiendo con nuestra convención escribiremos también $\rho(h)v$. Por ejemplo, si tomamos a $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{g}$-módulo vía la representación adjunta, los pesos de $\mathfrak{g}$ son simplemente las raíces de $\mathfrak{g}$.

Los espacios V^λ son sumandos directos de V (es decir satisfacen $V^\lambda \cap V^\mu = 0$, si $\lambda \neq \mu$), de modo que si definimos

$$V' = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V^\lambda \subseteq V$$

V' es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V . Si V es de dimensión finita, entonces sólo un número finito de los V^λ son distintos de 0 y $V' = V$.

Recordemos asimismo que hay una correspondencia biyectiva y natural entre $\mathfrak{g}$-módulos y $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos.

Por último, se dice que el peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es máximo si

$$\rho|_{\mathfrak{g}^\alpha}(v) = 0 \ , \ \alpha \in \mathcal{R}_+ \ , \ v \in V^\lambda \ .$$

2. <u>Módulos de Verma</u>. Sea $\mathfrak{b}_+$ una subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ se puede construir un $\mathfrak{g}$-módulo que tiene a λ como peso máximo como sigue: escribamos $D_\lambda = \mathbb{C}v$, de modo que D_λ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1, y hagamos de D_λ un $\mathfrak{b}_+$-módulo vía la acción:

$$(h+n)\cdot v = h\cdot v = \lambda(h)v \ ; \ h \in \mathfrak{h} \ , \ n \in \mathfrak{n}_+ \ .$$

Extendiendo la acción al álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{b}_+)$ podemos definir el $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo (que por lo dicho anteriormente es también un $\mathfrak{g}$-módulo)

$$M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b}_+)} D_\lambda$$

al que llamamos el <u>módulo de Verma</u> ([3]) asociado a λ . $M(\lambda)$ así definido tiene a λ como peso máximo. Notemos también que en ocasiones se construye $M(\lambda)$ con $\lambda - \delta$ en vez de λ , donde

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \alpha \quad .$$

Los módulos de Verma tienen muchas propiedades interesantes, en particular, son ejempos relativamente simples de módulos de Harish-Chandra relativos a toros maximales.

Por otro lado, $M(\lambda)$ puede construirse mediante generadores y relaciones en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: Si denotamos por $I(\lambda)$ al ideal generado por

$\mathfrak{n}_-$ y por los elementos de la forma $h - \lambda(h)\cdot 1$, $h \in \mathfrak{h}$, se tiene la relación ([4])

$$M(\lambda) \cong {}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}/_{I(\lambda)}$$

Esta descripción es análoga a la construcción de representaciones torcidas, con forma de torsión λ, de Dixmier ([3]), .

3. La construcción de Beilinson-Bernstein. Los módulos de Verma sirven de modelo local para la construcción, debida a Beilinson y Bernstein ([2]).

Si G es un grupo de Lie conexo, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces G actúa transitivamente en el conjunto de subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$ ([4]). La variedad algebraica homogénea que resulta es la variedad de banderas (completas) de $\mathfrak{g}$, y será denotada por X .

Sea $\mathcal{O}$ la gavilla estructural de X , es decir, la gavilla de gérmenes de funciones holomorfas en X , y sea $\mathcal{T}$ la gavilla tangente a X , es decir, la gavilla de gérmenes de campos vectoriales. Cada $v \in \mathfrak{g}$ define, pasando al cociente, una sección holomorfa de $\mathcal{T}$, y la aplicación $\mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{T})$ así definida será denotada por τ . $\Gamma(\mathcal{T})$ posee una estructura natural de álgebra de Lie (dada por el paréntesis de Lie de campos vectoriales), y no es difícil verificar que, por construcción, τ resulta un morfismo de álgebras de Lie.

Escribamos $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, y consideremos las "versiones globales" de $\mathfrak{g}$ y $\mathcal{U}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ y $\mathcal{U}_0 = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}$. $\mathfrak{g}_0$ es simplemente la gavilla de secciones del haz trivial $X \times \mathfrak{g}$, en tanto que $\mathcal{U}_0$ admite una única estructura de gavilla de $\mathcal{U}$-álgebras tal que

$$[1 \otimes v , f \otimes 1] = (\tau(v))(f) \otimes 1 \quad ; \quad v \in \mathfrak{g} , f \in \mathcal{O} \ .$$

La versión global apropiada de las subálgebras de Borel es la gavilla de secciones del subhaz tautológico sobre X (i. e., el sub- haz que a $x \in X$ le asocia x mismo, pensado como subálgebra de $\mathfrak{g}$), el que será denotado $\mathfrak{b}_0$. No es difícil demostrar que $\mathfrak{b}_0$ es el kernel de la aplicación inducida por τ en $\mathfrak{g}_0$.

Podemos ahora describir la construcción de Beilinson y Bernstein:

Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ y una subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$, λ se extiende a $\mathfrak{b}$ definiendo $\lambda(h + n) = \lambda(h)$ y de esta manera determina un morfismo $\lambda_0 : \mathfrak{b}_0 \longrightarrow \mathcal{O}$. Consideramos ahora el ideal $I(\lambda)$ de $\mathcal{U}_0$, generado por

$$\xi - \lambda_0(\xi) \quad , \quad \xi \text{ sección local de } \mathfrak{b}_0 \; ,$$

y definimos la gavilla de Beilinson-Bernstein por:

$$\mathcal{D}_l = \mathcal{U}_0 / I(\lambda) \quad .$$

4. Algunas observaciones. Para concluir esta nota haremos algunos comentarios sobre la construcción de Beilinson-Bernstein.

a) Por construcción, para cada $x \in X$, la fibra (stack) de $\mathcal{D}_\lambda$, $\mathcal{D}_{\lambda_x}$, es un módulo de Verma asociado a λ. Esto sugiere *ipso facto* que las gavillas de Beilinson-Bernstein pueden ser de gran utilidad en el estudio de los módulos de Harish-Chandra y, de hecho, en [2] se da una clasificación de los módulos de Harish-Chandra irreducibles en términos de esta construcción.

b) Vía τ, cada sección local de la gavilla $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{b}_0$ se identifica con un campo vectorial sobre la variedad X. Resulta entonces del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que cada sección local de $\mathcal{D}_\lambda$ se identifica con un operador diferencial (local) sobre X. De esta forma obtenemos una demostración sencilla del hecho que $\mathcal{D}_\lambda$ es un anillo torcido de operadores diferenciales (t. d. o.), en la terminología de [2], así como una representación de las secciones locales de las gavillas de Beilinson-Bernstein.

c) El resultado central de [2] da una fuerte restricción sobre la estructura de $\mathcal{D}_\lambda$ y sobre la cohomología de X con coeficientes en gavillas de $\mathcal{D}_\lambda$-módulos, para el caso en que el peso λ es dominante y regular (fuertemente dominante en la terminología de [4]). Puesto en lenguaje un poco más sencillo, este resultado nos dice que el funtor secciones globales, Γ, tiene propiedades análogas al funtor de localización del álgebra conmutativa (véase por ejemplo [1]), con el álgebra $\mathfrak{g}$ (o, equivalentemente, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$) remplazando a un anillo conmutativo A, la variedad algebraica X remplazando a Spec(A), $\mathfrak{b}_x$ jugando el papel de ideal primo y el stack $\mathcal{D}_{\lambda_x}$ el de módulo localizado en $\mathfrak{b}_x$. La importancia de la construcción reside en el hecho de que muchas propiedades de la localización se preservan, pese a que el anillo de base no es conmutativo.

REFERENCIAS:

1. Atiyah, M. F. & I. G. Mc. Donald "Commutative Algebra",

Addison-Wesley, 1969.

2. Beilinson, A. & J. Bernstein "Localisation de $\mathfrak{g}$-modules" C. R. Acad. Sc. Paris, 292, enero 1981.

3. Dixmier, J. "Enveloping Algebras", North Holland, 1977

4. Humphreys, J. E. "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory" , Springer-Verlag, N. Y. 1972.

Fausto Ongay
Centro de Investigación
en Matemáticas (CIMAT)
Apdo. Postal 402
Gto. Gto. 36000.