COMUNICACIONES DEL CIMAT

AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES COMPACTAS COMPLEJAS

Ricardo F. Vila Freyer

1986

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto.
México
Tels. (473) 2-25-50
2-02-58

AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES COMPACTAS COMPLEJAS.

Por: Ricardo Francisco Vila Freyer

Reporte de Investigación

1. INTRODUCCION. Nuestro objetivo es estudiar el grupo de transformaciones bianalíticas de superficies complejas compactas, que denotamos por Aut(S).

Siguiendo la clasificación de Enriques y Kodaira [K2], y tomando en cuenta las propiedades específicas de cada tipo de superficies damos una descripción del grupo Aut(S) en varios casos.

Sabemos que si X es una variedad compleja compacta, Aut(X) es un grupo de Lie y su algebra de Lie está formada por los campos vectoriales holomorfos (Kobayashi [Ko]). Si denotamos por $Aut^{\circ}(X)$ a la componente conexa de Aut(X), y X es además una variedad de Kähler, entonces Fujiki [F] demuestra que $Aut^{\circ}(X)$ tiene una estructura de "grupo meromorfo", que existe un único grupo meromorfo L(X) que es bimeromorfo a un grupo lineal algebraico y que el cociente $T(X)=Aut^{\circ}(X)/L(X)$ es un toro complejo. Es decir, tenemos la siguiente sucesión exacta de transformaciones meromorfas:

$$0 \to L(X) \to Aut^{\circ}(X) \to T(X) \to 0.$$

Basados en esta descripción estudiamos en varios casos los automorfismos de las superficies complejas.

Finalmente quiero decir que este trabajo resume los resultados publicados en mi Tesis Doctoral [V] bajo la supervisión de S. Kobayashi.

2. CLASIFICACION DE SUPERFICIES.

Kodaira da la siguiente lista de los distintos tipos de superficies complejas compactas ([K2] teorema 55):

i) Superficies regladas y el plano proyectivo;

ii) Las superficies K3;

iii) Los toros complejos;

iv) Las superficies elípticas mínimas con $b_1 \equiv 0 \pmod 2$, $P_{12} > 0$, y haz canónico no trivial;

v) Las superficies algebraicas mínimas con $P_2 > 0$, y $c_1^2 > 0$;

vi) Las superficies elípticas mínimas con $b_1 \equiv 1 \pmod 2$, y $P_{12} = 0$;

vii) Las superficies mínimas con $b_1 = 1$, $P_{12} = 0$.

A continuación se describe lo que se sabe del grupo de automorfismos de los distintos tipos de superficies.

3. LAS SUPERFICIES Y SUS AUTOMORFISMOS.

3.1 SUPERFICIES DE TIPO GENERAL. Son las superficies de clase v). Para éstas se sabe que el grupo de automorfismos es un grupo finito (Kobayashi [Ko] Secc 3.1).

3.2 SUPERFICIES RACIONALES. Son las superficies birracionales a $\mathbb{P}^2$. Incluyen a $\mathbb{P}^2$ y se obtienen de explociones (blow-ups) o colapsos (blow-downs) de las superficies de Hirzebruch F_n. Las superficies de Hirzebruch F_n se obtienen de proyectivizar el haz vectorial sobre $\mathbb{P}^1$ de rango dos: $H^n \oplus 1$; donde denotamos por 1 al haz trivial y por H al haz de hiperplanos de $\mathbb{P}^1$. Entonces tenemos una fibración:

$$F_n = \mathbb{P}(H^n \oplus 1) \dashrightarrow \mathbb{P}^1,$$

donde cada fibra es una curva racional. Tenemos:

TEOREMA:

1) $\underline{Aut(\mathbb{P}^2) \cong PGL(2,\mathbb{C})}$.

2) $\underline{F_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$, y $\underline{Aut(F_0) \cong PGL(1) \times PGL(1) \times \mathbb{Z}_2}$.

3) <u>Si $n \geq 1$, tenemos la sucesión exacta:</u>

$$0 \dashrightarrow T \dashrightarrow Aut(F_n) \dashrightarrow PGL(1) \dashrightarrow 0.$$

<u>Donde T está dado por $T = H^0(\mathbb{P}^1, \Omega(H^n)) * \mathbb{C}^*$, con $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, y $*$ denota el producto semidirecto de $\mathbb{C}^*$ con $H^0(\mathbb{P}^1, \Omega(H^n))$, $\mathbb{C}^*$ actuando multiplicativamente.</u>∎

La demostración usa el hecho de que la fibración para $n \geq 1$ es única, y entonces tenemos los automorfismos inducidos por los automorfismos en la curva base, y los inducidos por aquellos que actúan en las fibras. Este resultado es ya bien conocido. (Maruyama [M]). Estas superficies pertenecen a la clase i) de la clasificación.

3.3 SUPERFICIES REGLADAS. Una superficie es reglada si existe $f: S \dashrightarrow C$, con C una curva compleja compacta cuyas fibras son todas curvas racionales. Cuando $C \cong \mathbb{P}^1$ tenemos el caso anterior, así que supondremos que el género de C es mayor que cero.

Al igual que las anteriores, estas superficies pertenecen a la clase i).

Para estas superficies, Maruyama [M] demuestra que si Bir(S) denota el grupo de transformaciones birracionales de S y M(C) es el campo de funciones meromorfas de la curva C, entonces:

TEOREMA: <u>Se tiene la siguiente sucesión exacta:</u>

$$0 \dashrightarrow PGL(2,M(C)) \dashrightarrow Bir(S) \dashrightarrow Aut(C) \dashrightarrow 0.\blacksquare$$

3.4 TOROS COMPLEJOS. Supongamos que T es un toro complejo de cualquier dimensión. Este se obtiene como $\mathbb{C}^n/\Lambda$, donde Λ es un reticulado de $\mathbb{C}^n$ de rango máximo. Como un toro complejo es un grupo de Lie abeliano, $Aut^o(T)\cong T$. El único problema es calcular las componentes conexas de Aut(T). Si normalizamos T lo podemos escribir como $T=\mathbb{C}^n/[I,\Omega]$, donde $[I,\Omega]$ tiene como vectores columna los generadores del reticulado de rango 2n en $\mathbb{C}^n$, I denota la matriz identidad.

Entonces el grupo de isotropía de la identidad $e\in T$ es:

$$I_e=\{\ M\in Sl(2n,\mathbb{Z})\ :\ \Omega=(a_{11}\Omega+a_{12})(a_{21}\Omega+a_{22})^{-1},\ y\ M=(a_{ij})\ \}.$$

Los toros complejos de dimensión 2 son las superficies de clase iii) en la clasificación de Kodaira.

3.5 SUPERFICIES K3. Una superficie compleja compacta es de tipo K3 si es simplemente conexa y su haz canónico es trivial. En la clasificación de Kodaira son las de clase ii). Como su primera clase de Chern se anula, esto implica que cualquier campo vectorial es paralelo y de Kobayashi [Ko] Secc. 3.8, Teorema 8.3; concluimos que Aut(S) es un grupo discreto; y este puede ser finito o infinito. Se conocen ejemplos de superficies en ambos casos.

Lo que se sabe sobre los automorfismos de superficies K3 es trabajo de Nikulin, Shafarevich y otros (ver la bibliografía en [N]).

3.6 SUPERFICIES ELIPTICAS. Recordamos que S es una superficie elíptica si existe una función analítica $f:S \dashrightarrow C$, con C una curva cuyas fibras son curvas elípticas excepto posiblemente por un número finito de ellas. Estas pertenecen en la clasificación de Kodaira a clases iv), vi), ii) iii) y vii); aunque en las últimas tres clases también hay superficies que no son elípticas.

Para todas las superficies elípticas, excepto algunas superficies abelianas, K3 algebraicas, y superficies que se obtengan de éstas; los automorfismos se describen por su acción en la curva base. Por lo tanto Aut(S) está en una sucesión exacta que se describe mas adelante.

Una superficie elíptica queda clasificada por los tipos de fibras singulares (aquéllas que no son curvas elípticas de multiplicidad uno). Todas aquellas superficies que no tengan fibras múltiples y tengan el mismo número y tipo de fibras singulares se obtienen a partir de una superficie $\pi:B \dashrightarrow C$, que es única con la propiedad de que admite una sección $o:C \dashrightarrow B$. Si $B^{\#}$ denota el subconjunto de B formado por todas las fibras regulares mas las componentes de fibras singulares de multiplicidad uno (quitando además los puntos múltiples), entonces $B^{\#}$ tiene una estructura de fibrado de grupos de Lie sobre C, y $\Omega(B^{\#})$ es la gavilla de secciones analíticas de C en $B^{\#}$. (Para notación y detalles ver Kodaira [K1]). Entonces se tiene:

TEOREMA: <u>Sea S una superficie elíptica. Si S no tiene fibras múltiples, no es una superficie abeliana ni una superficie K3 algebraica, ni se obtiene de éstas; entonces tenemos la sucesión exacta:</u>

$$0 \longrightarrow H^{0}(C,\Omega(B^{\#})) \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

<u>donde $H \subset \mathrm{Aut}(C)$.</u>■

Si S tiene fibras múltiples, S tiene como cubriente ramificado a una superficie elíptica sin fibras múltiples con curva base una curva que es cubriente ramificada de la curva base de S. Entonces se puede obtener una descripción similar para el grupo de automorfismos de S en este caso. Tenemos también:

TEOREMA: <u>Si una superficie elíptica tiene fibras singulares, entonces Aut(S) es un grupo de dimensión cero.</u>■

3.7 SUPERFICIES DE HOPF. Una superficie S es de Hopf si su cubriente universal es $W=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Estas superficies o bien son elípticas o no admiten ninguna función meromorfa no constante; y pertenecen a la clase de Kodaira vii).

Si denotamos por G al grupo fundamental de S, que actúa propia y discontinuamente en W, entonces $S = W/G$. Si S no es elíptica, entonces $G \cong Z \oplus Z_d$ con Z generado por una transformación de tipo:

$$f(z,w) = (\alpha z+\lambda w^{m},\beta w);\ \text{donde } 0<\|\alpha\|\leq\|\beta\|<1,\ \text{y } (\alpha-\beta^{m})\lambda=0.$$

Y Z_d es un grupo de orden d generado por:

$$g(z,w) = (\varepsilon_1 z,\varepsilon_2 w),\ \text{donde } (\varepsilon_1-\varepsilon_2^{m})\lambda=0.$$

y ε_1, ε_2 son raíces d-ésimas de la unidad. (Para detalles ver Kodaira [K2]).

TEOREMA:

1) Si S es una superficie de Hopf no elíptica entonces:

$$\mathrm{Aut}(S) = \{\phi:\mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2 \ : \ \phi(z,w)=(Az+\mu w^m, Bw)\}$$

con A, B $\in \mathbb{C}-\{0\}$, y $B^m=A$ cuando $\lambda\neq 0$, y $\mu=0$ cuando $\lambda=0$.

2) Si S es de Hopf y elíptica, entonces:

a) Aut(S) = { $f\in GL(2,\mathbb{C})$: f conmuta con los elementos de G }, cuando G es abeliano; y

b) Aut(S) es el normalizador de $G \subset GL(2,\mathbb{C})$, cuando G es no abeliano.∎

3.8 SUPERFICIES DE INOUE. Estas superficies tienen como cubriente universal a $\mathbb{C}\times H$, donde H denota al semiplano superior de $\mathbb{C}$. Inoue[I] describe tres tipos de éstas. Todas son de clase vii). No daremos las descripciones aquí por ser muy largas, sólo damos el resultado:

TEOREMA:

1) Las superficies S_M y $S^{(-)}_{N,p,q,r.}$ no tienen automorfismos distintos de la identidad.

2) Las superficies de tipo $S^{(+)}_{N,p,q,r,t.}$ tienen como grupo de automorfismos a un grupo isomorfo al grupo aditivo de los números complejos.∎

BIBLIOGRAFIA

[F] Fujiki, A., On the automorphism groups of compact Kähler surfaces. Inv. Math. 44 (1978) 225-258.

[I] Inoue, M., On surfaces of class VIIo. Inv. Math. 24 (1974) 269-310.

[K1] Kodaira, K., On compact complex analytic surfaces, I, II y III. Ann. of Math. 71 (1960), 77 (1963) y 78 (1963).

[K2] Kodaira, K., On the structure of compact complex analytic surfaces, I, II, III y IV. Amer. J. of Math. 86 (1964), 88 (1966) y 90 (1968).

[Ko] Kobayashi, S., Transformation groups in Differential Geometry. Ergebnisse der Math. Vol. 70 Springer Verlag (1972).

[M] Maruyama, M., On automorphism groups of ruled surfaces. J. Math. Kyoto Univ. 11-1 (1971) 89-112.

[N] Nikulin, V. V., Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces. (Por publicarse).

[V] Vila Freyer, R., On automorphism groups of compact complex surfaces. Berkeley thesis 1986.

CENTRO DE INVESTIGACION DE MATEMATICAS.
Apdo. Postal 402
Guanajuato. Gto. (36000)
MEXICO.