ESTRUCTURAS DE CONTACTO EN OPTICA GEOMETRICA.

Fausto Ongay 1986.

ESTRUCTURAS DE CONTACTO EN OPTICA GEOMETRICA.

I. INTRODUCCION.

La geometría simpléctica nació a principios del siglo XIX con la descripción de W. R. Hamilton de la óptica geométrica y no fue sino varios años después que el formalismo hamiltoniano se aplicó a la mecánica. Sin embargo, muchos de los sistemas ópticos que aparecen en la práctica, como telescopios o cámaras fotográficas, poseen un eje óptico y, debido a esta simetría, el espacio fase natural para estos sistemas resulta ser una variedad de dimensión 5 , la que por supuesto no admite una estructura simpléctica.

Por otro lado, para las variedades de dimensión impar se pueden definir estructuras estrechamente relacionadas con las estructuras simplécticas, las llamadas estructuras de contacto. Así pues, resulta natural intentar una descripción de la óptica geométrica en términos de estas estructuras.

II. EL MARCO GEOMETRICO DE LA OPTICA GEOMETRICA.

Daremos ahora una breve descripción de la óptica geométrica. Tratamientos más detallados pueden encontrarse en [G-S] o [O].

Denotemos por E al espacio de configuración, $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ que consideraremos como un haz vectorial sobre el primer factor. A la base de este haz la llamaremos *eje óptico* y a las fibras *planos de referencia* . Al subhaz de TE cuyas fibras son tangentes a los planos de referencia le llamaremos *haz vertical* y le denotaremos por $\mathcal{V}$. Este haz se identifica de manera natural con el haz $\mathbb{R} \times T\mathbb{R}^2$, identificación que usaremos sistemáticamente en todo este trabajo. Este haz tiene una carta global evidente, y denotaremos a estas coordenadas por $(x, y, z, y' z')$. Aún más importante es el subhaz dual $\mathscr{V}^* = \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^2$ al que llamaremos *haz vertical dual*. En este haz también consideraremos una carta especial que describiremos más adelante.

Un *sistema óptico* en el espacio de configuración se determina especificando una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ y estrictamente positiva, que denotaremos por n , llamada *índice de refracción*. El índice de refracción define una métrica g en E conforme a la métrica euclideana, la n siendo precisamente el factor de homotecia. Mediante esta métrica podemos definir relaciones entre $\mathscr{V}$ y $\mathscr{V}^*$, que nos permitirán dar descripciones alternativas de los fenómenos ópticos. En particular, podemos considerar el lagrangiano definido por n , $\mathscr{L} = n\,(1 + (y')^2 + (z')^2)^{1/2}$, así como la transformación de Legendre Φ definida por n y dada por

$$\Phi(x, y, z, y', z') = (x, q_y, q_z, p_y, p_z)$$

donde $q_y = y$, $q_z = z$, $p_y = \partial\mathscr{L}/\partial y'$ y $p_z = \partial\mathscr{L}/\partial z'$, y esto define una carta (local) en $\mathscr{V}^*$.

El hamiltoniano asociado a este lagrangiano, escrito en la carta que acabamos de describir, toma la forma toma la forma

$$\mathscr{H} = \left(n^2 - p_y^2 - p_z^2 \right)^{1/2}$$

Un *rayo virtual* en E es una sección de E y un *rayo real* es un rayo virtual que es además una geodésica en la métrica g ; éste es el llamado pricipio de Fermat. Cada rayo virtual γ se levanta a $\mathscr{V}$ y, vía Φ , a $\mathscr{V}^*$; estos levantamientos serán denotados γ' y $\gamma^\sim$ respectivamente.

Las *imágenes* se representan por subconjuntos acotados de los planos de referencia, cuyas fronteras cumplen condiciones de regularidad suficientes para aplicar el teorema de Stokes. Ahora bien, para incluir los elementos necesarios para describir la formación de imágenes, introducimos la noción de *imagen completa*; Estas corresponden a subconjuntos acotados de las fibras de los haces verticales, cuyas proyecciones en E definen imágenes.

La formación de imágenes está determinada por el flujo geodésico en E. Si consideramos una imagen $\mathscr{I}$ en un plano de referencia, digamos E_1, las posibles imágenes transformadas de $\mathscr{I}$ en el plano de referencia E_2 se obtienen como sigue: sea Ω una imagen completa en $\mathscr{V}_1$ que se proyecta sobre $\mathscr{I}$, Ω determina entonces una familia de geodésicas que pasan por los puntos de $\mathscr{I}$, y la intersección de éstas con E_2 determina la imagen transformada de $\mathscr{I}$. Esta construcción muestra que una manera formal de dscribir la formación de imágenes es a través de transformaciones del espacio fase; es decir, de transformaciones de los haces verticales.

III. FORMULACION DE CONTACTO DE LA OPTICA GEOMETRICA.

Recordemos ahora la definición de estructura de contacto (veáse [G]).

DEFINICION 1. Sea M una variedad de dimensión $2n+1$. Una *estructura de contacto* en M es una 1-forma diferencial η de rango máximo; esto es, tal que $\eta\wedge(d\eta)^n$ sea una forma de volumen en M.

Un teorema clásico de Darboux garantiza la existencia de cartas locales en la variedad M, $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,t)$, en las que la forma de contacto se escribe

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i \, dx_i + dt$$

A la variable t se le llama a veces parámetro de contacto y permite, en cierto modo, visualizar a las estructuras de contacto como sistemas dinámicos.

Una estructura de contacto η determina una descomposición del haz tangente a la variedad como suma directa de dos subhaces, correspondientes a $\ker \eta$ y $\ker d\eta$, a los que llamaremos subhaz *η-vertical* y *η-horizontal*, respectivamente.

Nota. Aquí hemos invertido la terminología usual de la teoría de formas de contacto; esto lo hacemos para conformarnos a la terminología usual en la teoría de haces vectoriales.

DEFINICION 2. Sean M y N dos variedades de contacto con formas de contacto η y ξ, respectivamente, y sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Decimos que f es una *transformación de contacto* si existe una función $g : N \longrightarrow (0,\infty)$ tal que

$$f^{*}\xi = g\eta$$

Decimos que f es una transformación de contacto *estricta* si $g \equiv 1$.

Consideremos ahora un sistema óptico con índice de refracción n y el correspondiente hamiltoniano $\mathcal{H}$ e introduzcamos la siguiente definición:

DEFINICION 3. La *forma de contacto óptica* en $\mathcal{V}^{*}$ asociada al hamiltoniano $\mathcal{H}$ es

$$\eta_o = p_y\, dq_y + p_z\, dq_z - \mathcal{H}\, dx.$$

Verificar que η_o define una forma de contacto es un cálculo directo, y es consecuencia de la inhomegeneidad de $\mathcal{H}$ con respecto a las variables p.

Con las definiciones anteriores podemos reformular la óptica gemétrica en el lenguaje de la geometría de contacto; en esta nota nos limitaremos sin embargo a dar la caracterización de contacto de los resultados centrales de la óptica geométrica.

La siguiente proposición expresa el principio de Fermat:

PROPOSICION 1. *Un rayo virtual* γ *es un rayo real si y sólo si los vectores tangentes al levantamiento* $\gamma^{\sim}$ *son* η_0*-horizontales*.

En cuanto a la formación de imágenes, éstas quedan caracterizadas por la siguiente proposición:

PROPOSICION 2. *Una transformación* $f : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{V}^*$ *determina una transformación óptica en* E *si y sólo si* f *es estrictamente de contacto*.

Finalmente, un corolario inmediato de la proposición anterior es que las transformaciones ópticas corresponden a aquellas transformaciones de $\mathcal{V}^*$ en sí mismo cuya restricción a las fibras induce simplectomorfismos. De esta forma se recupera la formulación hamiltoniana usual de la óptica geométrica (veáse [G-S]), pero además la demostración de este resultado es mucho más directa usando la geometría de contacto.

BIBLIOGRAFIA.

1. Godbillon, C. "Géométrie différentielle et mecanique analyitique" Hermann , París 1969.

2. Guillemin, V. & S, Sternberg "Symplectic Techniques in Physics" Cambridge University Press, 1984.

3. Ongay, F. "Geometría simpléctica y óptica geométrica" por aparecer en Miscelánea Matemática.

Fausto Ongay
Centro de Investigación
en Matemáticas.
Apdo. Postal 402
Guanajuato, Gto. 36000