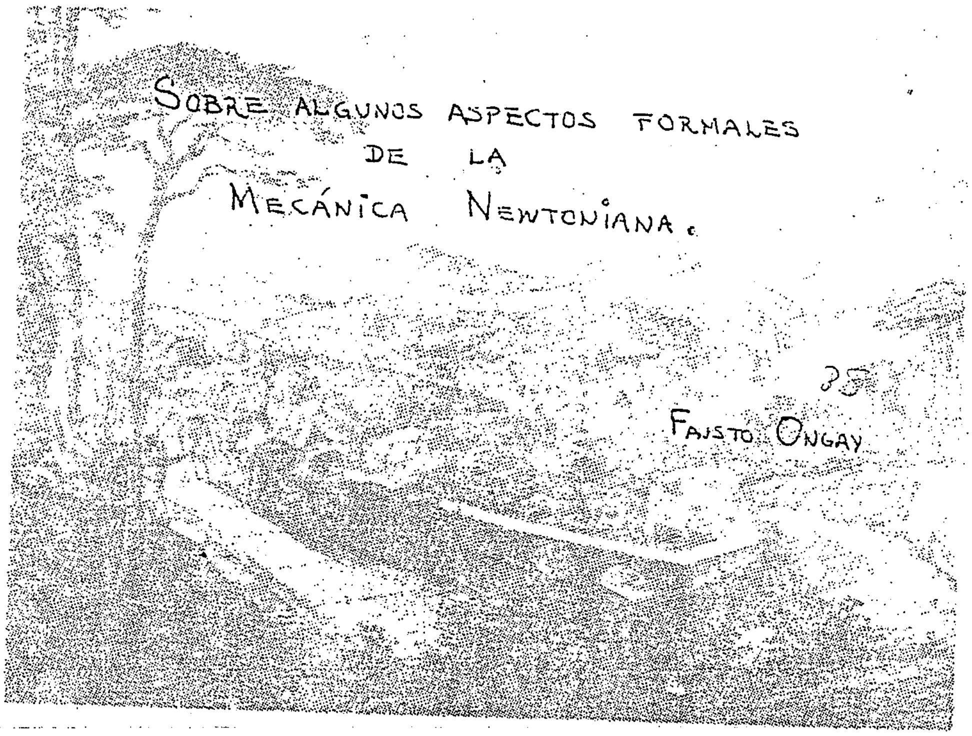
20

Sobre algunos aspectos formales de la mecánica newtoniana

20

Fausto Ongay
1985

COMUNICACIONES DEL CIMAT



CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto.
México
Tels. (473) 2-25-50
2-02-58

Sobre algunos aspectos formales de las mecanica newtoniana.

Fausto Ongay[1]

El propósito de este artículo es analizar algunos de los aspectos de la relación que existe entre la mecánica newtoniana y el formalismo matemático subyacente, basados en la convicción de que la relación entre la física y las matemáticas opera en ambas direcciones, y es actuando en ambos sentidos que resulta más fructífera.

El artículo consta de tres partes: en la primera se discute el marco global de la mecánica newtoniana y su conexión con el formalismo matemático; en la segunda se hacen algunos comentarios sobre la mecánica newtoniana como teoría formal, haciendo un paralelo con algunas teorías matemáticas y, finalmente en la tercera parte se discuten alunos aspectos formales de las leyes de Newton.

1. El problema fundamental de la mecánica.

Etimológicamente mecánica significa "estudio del movimiento de los cuerpos y de las causas de éste". Aparentemente entonces la definición de mecánica está completamente dada; sin embargo, desde un punto de vista más formal, precisar lo que es el movimiento, e incluso, a un nivel más básico, definir lo que se entiende por un cuerpo en el sentido de la mecánica, no es un problema del todo trivial.

Podemos enmarcar un poco mejor la discusión diciendo que el movimiento es el cambio de la posición de los cuerpos con respecto al tiempo. Esto nos sitúa de manera automática dentro del terreno de las funciones de la variable "tiempo", lo que nos permite además definir operacionalmente a este último como un parámetro real, que nos ayuda a describir el movimiento.

Ahora bien, antes de definir lo que entendemos por posición de un cuerpo, necesitamos decir que es un "cuerpo", noción que está lejos de estar perfectamente determinada: baste con recordar la visión geométrica del universo de Einstein, donde las masas se

[1] Centro de Investigación en Matemáticas. (CIMAT).
Apdo. Postal 402 , Guanajuato, Gto. 36000

asocian con deformaciones en la geometría del espacio-tiempo. Por ello, es conveniente adoptar una posición pragmática, de manera semejante a lo que se hace en la teoría de conjuntos cuando se trata de definir "conjunto": se toma como base la idea intuitiva que se tiene del objeto que se desea definir, y se procede a definirlo operacionalmente, esto es, dando su comportamiento bajo las operaciones de interés dentro de la teoría (las que, de una manera esquemática y de acuerdo a lo dicho arriba, consisten básicamente en encontrar funciones de la variable real tiempo).

Aún esto no es completamente trivial, sin embargo, el llamado "Teorema de Helmholtz" ([1]), nos da una manera elegante de romper el círculo vicioso: este "teorema" afirma, en efecto, que el movimiento de cualquier cuerpo material se puede descomponer en tres aspectos:

a) Una traslación del objeto, descrita como la trayectoria de un punto de referencia, que hay que escoger de manera apropiada para cada problema y que por lo general, aunque no siempre, coincide con el centro de masa del objeto.

b) Una rotación del objeto con respecto a algún eje, que en general pasa por el punto de referencia y que puede ser variable en el tiempo.

c) Una deformación del objeto con respecto al punto de referencia.

Aceptando este resultado, que sería lo que en matemáticas se llama un metateorema, más que un teorema bona fide (lo que en nuestro caso significa que es un resultado de tipo metafísico más bien que mecánico), aparece claramente que la mecánica puede realizarse en etapas sucesivas, analizando primero las traslaciones de los puntos materiales, que es la llamada mecánica de partículas; enseguida las rotaciones sin deformación, con lo que se tiene la macánica de cuerpos rígidos, y finalmente las deformaciones de los objetos. Este último aspecto suele separarse de los anteriores, pues es ciertamente el que presenta mayores complejidades, y constituye de hecho una disciplina aparte, la llamada mecánica del medio continuo. Las definiciones de partícula y cuerpo rígido son más sencillas y, por ende, más fáciles de formalizar.

Así por ejemplo, podemos definir un punto material como un punto de $\mathbb{R}^3$ o, más generalmente de $\mathbb{R}^n$, si queremos estudiar sistemas finitos de partículas, con algunas características adicionales, como carga o masa, las que podríamos incluir en nuestra descripción utilizando tal vez pares ordenados de vectores. Para no complicar innecesariamente la discusión nos basta con tomar esta información adicional como parámetros auxiliares, pero es pertinente señalar que puede ser necesario incorporar información mucho más complicada, como grupos de simetría en el estudio de partículas elementales, etc.. Ahora bien, con esta defineión de partícula, el problema fundamental de la mecánica de partículas se puede reinterpretar de manera sencilla, pero a la vez formal, en el lenguaje geométrico de curvas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, y entonces aprovechar toda la herramienta del cálculo. Definiciones análogas para los cuerpos rígidos, en términos de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son posibles, aunque evidentemente se presentan problemas técnicos más complejos.

2. El formalismo newtoniano.

Las leyes de Newton constituyen la base para una descripción formal de la mecánica clásica. Esto significa que podemos interpretar estas leyes como postulados que definen una teoría, de una manera semejante a como los postulados de Euclides definen a la geometría euclidiana. Adoptar este punto de vista tiene sus implicaciones filosóficas, pues la validez física de los postulados pasa a ocupar un segundo plano: es perfectamente posible hacer mecánica newtoniana independientemente de si ésta refleja o no la realidad.

Por supuesto, pensar que la mecánica newtoniana es tan sólo un ejercicio mental sería tan absurdo como (y quizá más que) pensar que la geometría euclidiana no guarda ninguna relación con el mundo en que vivimos. Sin embargo, una vez que estamos dentro del modelo formal, abstracto, las manipulaciones que se hagan deben hacerse siguiendo las reglas vigentes dentro del modelo, reglas que son en este caso las de las matemáticas. En particular, la validez o la corrección de un argumento no deben de verificarse a priori, aludiendo a la intuición, sino a posteriori, recurriendo al experimento. Esta regla, en apariencia inocua y evidente, suele sin embargo pasarse por alto, con frecuencia con resultados adversos.

Esta observación es particularmente importante cuando se hacen manipulaciones en distintos niveles de abstracción, por ejemplo al efectuar analogías entre diversos fenómenos; éstas en efecto, no corresponden en general a resultados que queden justificados por la mecánica misma y conducen fácilmente a extrapolaciones inválidas de los resultados. Como una ilustración muy sencilla de este punto, consideremos el caso de dos osciladores armónicos, el ángulo de apertura de un péndulo sujeto a oscilaciones pequeñas y un resorte que obedece a la ley de Hooke, por ejemplo. Las ecuaciones de movimiento de ambos son idénticas, por lo tanto su comportamiento debe ser idéntico, pero es claro que si forzamos un poco la situación, el compartamiento de los dos sistemas puede ser muy distinto. Sin embargo el comportamiento de los osciladores armónicos está perfectamente determinado, las diferencias entre los dos sistemas no se encuentran en la ley de fuerzas que a priori los rige, sino a un nivel distinto. Que en este caso las diferencias puedan ser descritas también con argumentos mecánicos, es fortuito, el hecho es que si se presentan estas diferencias no es por una deficiencia del modelo, sino de la interpretación que nosotros hacemos del modelo.

Trabajar un problema físico con mucho rigor puede parecer un tanto chocante pero, además de ser más seguro como método deductivo, en ocasiones resulta altamente fructífero, permitiendo obtener resultados que escapan a la intuición. Un ejemplo sencillo del tipo de resultados que no son intuitivamente obvios, pero que se obtienen fácilmente de una manipulación juicicosa de las ecuaciones, es la existencia de una velocidad límite en la caída de objetos sujetos a la fricción del aire.

Por lo demás, como es bien sabido, el que la mecánica newtoniana no refleje la realidad completamente no es un defecto privativo de esta teoría: cualquier modelo que hagamos del universo físico será tan sólo una aproximación, y sólo en la medida en que nos restrinjamos al rango de validez de nuestro modelo cabe esperar concordancia entre teoría y experimento. Con esta reserva, la mecánica newtoniana es un excelente modelo para la mayor parte de los fenómenos que se observan en la experiencia cotidiana.

Finalmente, quisiera hacer una observación de tipo semántico: aunque la mecánica newtoniana puede construirse como una teoría de un rigor formal comparable al de la geometría euclidiana, como se hace por ejemplo en el libro de Arnold [2], los elementos metafísicos y metamatemáticos que en ella intervienen son diferentes; por ejemplo la idea de "observador" no tiene un paralelo dentro de la geometría euclidiana. Por esta razón, el lector con una fuerte inclinación lógica debe interpretar términos como "formal", "lógico" o "equivalente" con cierta cautela.

3. Las leyes de Newton.

Como sabemos, basándose en un argumento de tipo inductivo, Newton resumió el conocimiento que había en su época sobre la mecánica bajo la forma de tres "leyes" o "principios" que supuso tenian validez universal. Podemos enunciar estos principios como sigue:

a) Principio de inercia de Galileo, que afirma que "en ausencia de agentes externos (esto es, fuerzas) los cuerpos mantienen su estado de movimiento (es decir, su momento lineal permanece constante)".

b) Segunda ley de Newton. Este principio afirma que el movimiento de un objeto puede encontrarse resolviendo una ecuación diferencial apropiada: "el cambio en el estado de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que se aplica sobre éste". Es decir, la fuerza es igual a la derivada con respecto al tiempo del momento lineal. Nótese además que la fuerza es un agente causal; este aspecto se aclara y refina en el siguiente postulado.

c) Principio de "acción y reacción". El último principio enunciado por Newton, que es de importancia fundamental en la práctica, indica la forma en que actúan las fuerzas báicas de la naturaleza: "a toda acción corresponde una reacción de igual intensidad y de sentido contrario". De manera más explícita, si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro objeto éste ejercerá sobre áquel otra fuerza, de igual intensidad y de sentido contrario, que además se aplica sobre la "línea que une" a los dos objetos.

Ahora bien, desde un punto de vista formal, la segunda ley es muy diferente de los otro dos principios; sería tal vez más apropiado llamarla "esquema", ya que es de hecho la forma de <u>definir</u> los sistemas mecánicos clásicos (dentro de la mecánica newtoniana, por supuesto, ya que existen otras definiciones posibles, por ejemplo a través de la energía). Dicho en otras palabras, cada sistema tiene una "ley" ~~de fuerzas~~ que lo define como objeto específico: su ley de fuerzas. Las fuerzas, por su parte quedan como objetos "primitivos" de la teoría (al mismo nivel que los "cuerpos") y matemáticamente se representan por funciones vectoriales del tiempo, la posición y la velocidad, todos ellos objetos ya definidos.

Este aspecto de la segunda ley es muy importante, pues es la base del mecanismo inductivo que permite generalizar los resultados y es lo que hace útil a la teoría; por ejemplo, desde el punto de vista de la teoría todos los osciladores armónicos son idénticos y por lo tanto, las conclusiones que se extraigan del movimiento de uno se aplican, ipso facto, a todos ellos.

Por otra parte, aparentemente la segunda ley es un principio más general que los otros dos, y existen "demostraciones" de que éstos son implicados por aquélla. Sin embargo, estos dos principios son lógicamente <u>independientes</u> de la segunda ley, y sólo pueden concluirse a partir de ésta si se suponen hipótesis adicionales, que son lógicamente <u>equivalentes</u> a dichos principios:

Por una parte, uno de los conceptos más importantes subyacentes a la mecánica newtoniana es el de la relatividad galileana pues, de hecho, toda la mecánica reposa sobre la posibilidad de definir un sistema inercial. Puesto en otros términos, un análisis detallado de la primera ley de Newton muestra que ésta postula la existencia de una clase privilegiada de sistemas de referencia, llamados inerciales, que son aquellos donde es válida, estrictamente hablando, la segunda ley: la penalización por referir el movimiento a un sistema no inercial es la necesidad de introducir fuerzas ficticias. En este punto es crucial la "cuarta" ley básica de la mecánica enunciada por Newton, la ley de gravitación universal, que es la que da la posibilidad práctica de obtener sistemas inerciales. Otro hecho muy importante ligado a la primera ley es que, al señalar a las rectas como trayectorias preferenciales, implícitamente postula que el universo es euclidiano. Ninguna de estas hipótesis está contenida dentro de la segunda ley.

Por otro lado, es importante notar que en la tercera ley de

Newton, las fuerzas de acción y reacción se aplican en <u>diferentes</u> objetos. Este principio tiene por tanto profundas implicaciones filosóficas pues, además de restringir fuertemente la forma en que se aplican las fuerzas, implica la imposibilidad de tener una dinámica no trivial para un objeto aislado: si un cuerpo experimenta una fuerza, automáticamente se tiene otro cuerpo involucrado en el problema, como agente causal de dicha fuerza. Esta posición filosófica, claramente establecida por Newton en sus "Principia", tampoco es consecuencia formal de la segunda ley.

El tipo de consideraciones que se han presentado aquí suelen quedar implícitas dentro de la enseñanza de la mecánica, por lo que, desafortunadamente en mi opinión, no siempre se tiene conciencia de estos aspectos de la mecánica (y de la física en general). Sin embargo, el punto que me gustaría recalcar es el siguiente: confiar la solidez de nuestros resultados únicamente a la intuición física presenta graves riesgos, especialmente en el caso de gente cuya experiencia es limitada, como ocurre en general con los estudiantes; es conveniente por lo tanto que, sin perjuicio del desarrollo de la intuición física, se utilize de manera correcta el lenguaje matemático.

REFERENCIAS.

1. J. B. de Oyarzábal. "Mecánica Clásica" , notas manuscritas editadas por la Facultad de Ciencias.

2. V. I. Arnold. "Classical Mechanics" , Springer Verlag.