



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Estrategias Óptimas de Inspección
para Pruebas de Vida con Datos
Agrupados:

Familia de Log-Localización-Escala

Tesis

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Probabilidad y Estadística

PRESENTA:

Mauricio Álvarez Niño

Guanajuato, Gto., México
Junio del 2007

*Por innumerables
razones este trabajo
está dedicado a mi
madre*

Olivia Niño Morales

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a mi familia, amigos y a todas aquellas personas que directa e indirectamente contribuyeron en la realización de este trabajo de tesis.

En particular los Drs. Enrique R. Villa Diharce y Luis A. Escobar Restrepo merecen un especial agradecimiento por su invaluable apoyo durante todo el proyecto más allá del aspecto académico.

Quiero a agradecer también a los Drs. Wayne Nelson y William Q. Meeker por facilitarme los artículos que sirvieron como base para el desarrollo del tema.

Finalmente agradezco al CONACyT, pero sobre todo al CIMAT, A. C. por apoyarme económicamente y ofrecerme las condiciones necesarias para realizar exitosamente mis estudios de maestría.

Estrategias Óptimas de Inspección para Pruebas de Vida con Datos Agrupados:

Familia de Log-Localización-Escala

Mauricio Álvarez Niño

Resumen

En Confiabilidad las pruebas de vida son una herramienta fundamental para hacer inferencia sobre la distribución de los tiempos a la falla de algún producto de interés. En algunas de estas pruebas los tiempos a la falla no pueden conocerse con exactitud, por lo que es necesario trabajar con datos censurados como resultado de inspeccionar periódicamente la muestra. La estrategia de inspección equiespaciada es la que regularmente se utiliza en estos casos, sin embargo, bajo ciertas condiciones en la prueba, esta estrategia resulta ineficiente. En este trabajo se propone una estrategia de inspección alternativa, construida bajo cierto criterio de optimalidad, que permite un diseño de prueba más eficiente y mejores resultados.

Aprobado por:

Dr. Enrique Raúl Villa Diharce
Director de Tesis

En representación del jurado calificador

Índice

1. Introducción	3
1.1. Breve historia de la Confiabilidad	3
1.2. Motivación de la tesis	4
1.3. Estructura de la tesis	6
2. Marco Teórico	8
2.1. Conceptos básicos de Confiabilidad	8
2.2. Tiempo a la falla	10
2.2.1. Funciones características de tiempos a la falla	11
2.3. Distribuciones de log-localización-escala	14
2.3.1. Distribución Weibull	16
2.3.2. Distribución lognormal	18
2.3.3. Distribución loglogística	18
2.4. Pruebas de vida	21
2.4.1. Datos censurados	24
2.4.2. Pruebas de vida con datos agrupados	25
2.5. Herramientas de inferencia	27
2.5.1. Estimación vía verosimilitud	27
2.5.2. Información observada de Fisher e información esperada de Fisher	30

3. Planeación de estrategias de inspección en pruebas de vida con datos agrupados	34
3.1. Antecedentes	34
3.1.1. Estrategias de inspección existentes	35
3.2. Estrategia de inspección propuesta	38
3.2.1. Estrategia óptima para la distribución exponencial . . .	39
3.2.2. Generalización a la familia de log-localización-escala . .	50
3.3. Propiedades de la estrategia propuesta	59
3.3.1. Invarianza ante reparametrización	59
3.3.2. Sensibilidad de Λ_α al error en α	71
3.4. Comparación de estrategias	76
4. Conclusiones y trabajos futuros	95
5. Apéndice	100
5.1. Existencia de una solución óptima	100
5.2. Más propiedades de la estrategia óptima	108
5.3. Algoritmo para encontrar el argumento que maximiza Λ para algunas distribuciones	115
5.3.1. Distribución Weibull	115
5.3.2. Distribución Loglogística	118

1. Introducción

1.1. Breve historia de la Confiabilidad

La confiabilidad, en la forma que la conocemos actualmente, es un concepto muy reciente de no más de 70 años. Surge con un significado tecnológico justo después de la primera guerra mundial. En esa época fue usada para comparar el nivel de seguridad entre aviones con diferentes sistemas de motor. La confiabilidad fue medida entonces como el número de accidentes por horas de vuelo.

En los inicios de 1930 Walter Shewhart, Harold F. Dodge y Harry G. Romig establecieron las bases teóricas para utilizar métodos estadísticos en el control de calidad de la industria. Estos métodos no fueron usados de manera importante sino hasta los inicios de la segunda guerra mundial. Productos que tenían muchas componentes frecuentemente no tenían una buena calidad a pesar de que cada una de sus partes individualmente sí la tuvieran.

Durante la segunda guerra mundial un grupo en Alemania trabajó en el desarrollo del misil V-1. Después de la guerra se reportó que los primeros veinte misiles habían sido un fracaso a pesar de que sus partes eran de alta calidad y su construcción minuciosa. El matemático Robert Lusser fue consultado para analizar el sistema de los misiles, quien rápidamente concluyó que la confiabilidad de un sistema con cierta estructura es igual al producto de las confiabilidades de sus componentes individuales. Si un sistema está formado por un número grande de componentes su confiabilidad será baja aún cuando los componentes individuales tengan confiabilidades altas.

En los Estados Unidos hubo varios esfuerzos para compensar un sistema con baja confiabilidad por medio de la mejora en la calidad de los componentes individuales, mejores materiales y mejores diseños en los productos. Se obtuvo un sistema de alta confiabilidad, pero un análisis sistemático del problema probablemente no era algo obvio por hacer.

Después de la segunda guerra mundial el desarrollo continuó a través del mundo, se producían cada vez productos más complicados compuestos por una gran cantidad de componentes (televisiones, computadoras, etc.). Con la

automatización, la necesidad de un mayor control y el desarrollo de sistemas más seguros empezó a ser cada vez más necesaria.

Hacia finales de 1950 e inicios de 1960, el interés de los Estados Unidos se concentró en el desarrollo de misiles intercontinentales y la investigación espacial en la carrera contra la entonces Unión Soviética en poner al primer hombre en la Luna. Este hecho fue un impulso importante en materia de confiabilidad y el lanzamiento de una nave espacial fue todo un logro. Se creó una asociación de ingenieros muy enfocada a plantear y resolver cuestiones de confiabilidad y en 1963 surge el primer Journal dedicado al tema, *IEEE-Transactions in reliability*. Varios libros de texto fueron publicados en los 60's.

En los 70's el interés en el tema de riesgo y aspectos de seguridad conectados con la construcción y operación de plantas nucleares creció en varias partes del mundo. En Estados Unidos un gran comité de investigación liderado por Norman Rasmussen empezó a analizar el problema, resultando en un proyecto multimillonario que llamaron reporte Rasmussen, WASH-1400. A pesar de su debilidad, este reporte representó el primer estudio serio en cuanto a seguridad de un sistema complicado como es el caso de una planta nuclear. Un trabajo similar se desarrolló en Europa y Asia, en la mayoría de las industrias se desarrollaron muchos esfuerzos en cuanto a seguridad y confiabilidad se refiere. Un ejemplo importante es el de la industria del petróleo en Noruega, ya que la presencia de energéticos en el Mar del norte se observa en aguas cada vez más profundas y hostiles. La importancia de la confiabilidad de los sistemas submarinos es en muchos aspectos similar a la confiabilidad espacial.

Una descripción más detallada de la historia de la Confiabilidad es presentada por Knight(1991) y Villemeur (1992).

1.2. Motivación de la tesis

Gradualmente, la Confiabilidad se ha ido posicionando como una herramienta más en la búsqueda de las empresas por alcanzar un alto nivel de competitividad y posición en el mercado. Debido a esto, dicha área ha tenido grandes avances en los últimos años tanto a nivel de ingeniería como

de modelación matemática y quizá sobra decir que, aunado a algunos gobiernos, son las grandes empresas transnacionales las que dan la pauta y están dando a dicha área de estudio el rumbo que ellas necesitan.

Actualmente, la Confiabilidad se encuentra en un punto en que su evolución se está dando principalmente a través de grandes avances ingenieriles (mejores dispositivos de prueba, cámaras generadoras de factores de esfuerzo, etc.). Por su parte, la modelación matemática está reaccionando ante esta demanda y podría pensarse que esta situación ha llevado al descuido de algunos fenómenos básicos de la confiabilidad como el que se estudia en esta tesis y que a continuación se detalla.

En muchas pruebas de vida es difícil conocer con exactitud los tiempos a la falla, por lo tanto, es muy común trabajar con datos censurados como resultado de inspeccionar periódicamente las unidades en prueba hasta finalizar el experimento (existe una basta literatura enfocada al estudio de datos censurados donde Kulldorff es uno de los investigadores pioneros). La forma en como tradicionalmente se han llevado a cabo estas inspecciones es repartiéndolas equidistantemente en el tiempo a lo largo de toda la prueba. El objetivo de este estudio, como su título lo señala, es buscar estrategias de inspección que permitan una muestra con la mayor información posible, dicho de otra manera, queremos ver si cambiando los tiempos de inspección se pueden obtener “datos de mejor calidad” que lleven a mejores estimaciones.

Este proyecto fue motivado por una estancia personal realizada en los laboratorios de Confiabilidad de Mabe, S. de R.L. de C.V., donde se encontró que al llevar a cabo la estrategia de inspección tradicional referente al párrafo anterior en las pruebas de vida, frecuentemente ocurría una gran cantidad de fallas, digamos un 80 % ó 90 %, dentro de uno o dos intervalos, es decir, entre dos o tres inspecciones consecutivas, lo cual podría interpretarse como una muestra con poca información. Este fenómeno se da principalmente cuando los tiempos a la falla tienen una variación pequeña en comparación con la longitud de los intervalos de censura (tiempo entre inspecciones). Por otro lado, en este tipo de inspección la longitud de los intervalos es igual a la duración de la prueba dividida entre el número de inspecciones, de manera que una opción inmediata para evitar el problema de poca información en la muestra es disminuir la longitud de los intervalos aumentando el número de inspecciones, sin embargo, en algunos casos las inspecciones son muy costosas en tiempo, dinero o esfuerzo, por lo que esta opción se vuelve muy poco viable.

Existen algunos trabajos enfocados al problema de estimar la distribución del tiempo a la falla de un producto bajo restricción en la cantidad de inspecciones. Kurlldorf (1961) propuso estrategias de inspección óptimas para estimar parámetros de interés bajo los modelos normal y lognormal. Ehrenfeld (1962) discutió los problemas de diseño relacionados con la selección del número y la ubicación de los tiempos de inspección bajo el modelo exponencial. Posteriormente Nelson (1977) extiende el trabajo de Kurlldorf para la distribución exponencial. Meeker (1986) se enfoca en el estudio y comparación de 5 estrategias de inspección para estimar un cuantil de interés bajo el modelo Weibull.

En esta obra proponemos estrategias de inspección bajo un criterio de optimalidad para los modelos cuya distribución de probabilidad pertenece a la familia de log-localización-escala (por ser estos los más empleados para describir tiempos a la falla), asumiendo conocido el parámetro de forma. Nos concentraremos principalmente en las distribuciones Weibull, lognormal y loglogística, aunque los resultados aquí mostrados pueden fácilmente extenderse a otras distribuciones de log-localización-escala.

1.3. Estructura de la tesis

A excepción del último capítulo, el contenido de este trabajo está al alcance de cualquier persona con conocimientos matemáticos y estadísticos a nivel de ingeniería. Este capítulo introductorio sirve como panorama muy general del tema a tratar que permite al lector una primera impresión del objetivo general de la tesis. El Capítulo 2 es una recopilación de manera muy concisa y enfocada de todos los fundamentos teóricos utilizados directa o indirectamente en los siguientes capítulos, por lo que no se requiere ningún conocimiento extra sobre estos temas para asimilar las ideas centrales de la tesis. Aún para estadísticos e ingenieros de Confiabilidad es recomendable hacer una revisión de este capítulo ya que lleva inmersas apreciaciones sobre las características del problema que permiten un mejor entendimiento de la línea seguida en el estudio del tema. En el Capítulo 3, el cual representa la principal aportación de la tesis, se describen las estrategias de inspección propuestas asentando los supuestos y el criterio de optimalidad utilizados en su construcción así como algunas de sus propiedades. De igual forma, este

capítulo incluye un método numérico para la obtención de estas estrategias y un estudio comparativo con las estrategias de inspección tradicionalmente utilizadas mostrando los alcances de cada una bajo diferentes situaciones. El Capítulo 4 contiene las conclusiones generales de este trabajo y algunas ideas para complementarlo y ampliarlo con estudios posteriores. Por último, el Capítulo 5 es un apéndice de resultados que soportan matemáticamente gran parte de la teoría presentada a lo largo de toda la obra.

2. Marco Teórico

2.1. Conceptos básicos de Confiabilidad

Aunque ya se trabajaba el concepto de confiabilidad, por mucho tiempo no se tuvo una definición concreta de éste. Como se menciona en la introducción, la primera forma en que se midió dicho concepto fue contando el número de fallas por horas de uso. Posteriormente su medición se manejó en términos probabilísticos, de donde surge la definición que se manejó hasta 1960:

La confiabilidad de un producto era considerada entonces como la probabilidad de que dicho producto desarrollara una función requerida bajo ciertas condiciones por un periodo de tiempo establecido.

La definición de confiabilidad ha evolucionado a un concepto más general dado en estándares como ISO 8402 y British Standard BS 4778:

La confiabilidad es la capacidad que tiene un producto de desarrollar una función requerida bajo ciertas condiciones ambientales y de operación por un periodo de tiempo establecido.

Ambas definiciones manejan el término "producto", el cual hace referencia a cualquier objeto, material, componente, subsistema, sistema, o cualquier otra cosa que pueda ser considerada como un ente (regularmente utilizado por el hombre en beneficio propio). Con un abuso del término esta interpretación será estándar a lo largo de todo el trabajo de tesis.

Por cuestiones de simplicidad es frecuente conceptualizar la confiabilidad de un producto como la calidad de éste a través del tiempo.

La Confiabilidad vista como un área de estudio tiene importantes aplicaciones, Hoyland y Rausand (1994) hacen la siguiente clasificación de las principales áreas de aplicación:

- Análisis de seguridad/riesgo.
- Protección ambiental

- Calidad
- Optimización de mantenimiento y operación
- Diseño industrial
- Verificación de la calidad/confiabilidad

En cada una de estas áreas el objetivo final de la Confiabilidad es o lleva inmerso la prevención fallas. De acuerdo a la definición de los estándares BS 4778:

La falla del producto ocurre con el término de su capacidad para desarrollar una función requerida.

Las fallas pueden clasificarse en modos de falla. Según la EuReDatA (1983):

Un modo de falla es el efecto por el cual se observa una falla en el producto.

Muchos productos son diseñados para cubrir más de una función, en tal caso un modo de falla será la incapacidad de llevar a cabo alguna de esas funciones.

A su vez los modos de falla han sido clasificados por EuReDatA (1983) en 2 tipos :

- (a) Aquellos que provocan que el producto no realice la acción requerida
- (b) Aquellos que provocan que el producto realice la acción requerida de manera no aceptable para el usuario.

Algunas otras clasificaciones interesantes de modos de falla que presentan Hoyland y Rausand (1994) son las siguientes:

- De acuerdo a la forma de aparición
 1. Fallas instantáneas: la calidad del producto se reduce de un instante a otro.

2. Fallas graduales: la calidad del producto decrece gradualmente.
- De acuerdo a la forma en que se manifiesta
 1. Fallas de detección instantánea: la aparición de la falla es evidente.
 2. Fallas de detección tardía: se requiere la inspección del producto para detectar la falla.
 - De acuerdo a las consecuencias que provoca
 1. Fallas críticas: la falla provoca que el producto no pueda cumplir con su función fundamental.
 2. Fallas de degradación: la falla provoca que el producto no pueda cumplir con funciones secundarias comprometiendo su función fundamental.
 3. Fallas incipientes: la falla no provoca directamente una deficiencia, pero aumenta el riesgo de fallas críticas o de degradación.
 - De acuerdo a la severidad (listadas en orden decreciente de severidad)
 1. Fallas catastróficas
 2. Fallas críticas
 3. Fallas marginales
 4. Fallas despreciables

2.2. Tiempo a la falla

Por tiempo a la falla entenderemos lo siguiente:

El tiempo a la falla de un producto es el tiempo que transcurre desde que la unidad en cuestión es puesta en operación hasta que falla por primera vez.

Suponga el lector que como consumidor de repente pudiera conocer con exactitud el tiempo y el modo de falla de cada producto que existe a la venta y de cada producto que tiene en casa, esto como resultado particular de las condiciones en que cada uno de ellos fue creado y bajo las condiciones en que cada uno pudiera operar durante su vida útil. Considere esta situación por un momento. Evidentemente usted reaccionaría ante este conocimiento (cambiando sus decisiones en cuanto a qué comprar y cómo utilizar lo ya comprado), sin embargo, la forma en como lo utilizaría exactamente dependería de sus intereses personales, de su creatividad y de su capacidad para procesar dicha información. De cualquier forma, es claro que ante esta situación tomaría mejores decisiones en la búsqueda de sus objetivos de consumo que las que tomaría sin tal conocimiento.

Como usted, toda empresa desearía poder conocer los modos y tiempos a la falla de todas las unidades de su producto y de productos de competencia, y sin duda, cualquiera de ellas sería capaz de sacar provecho de esa situación en su búsqueda por dominar el mercado. Sabemos que esto es prácticamente imposible, sin embargo, las empresas buscan alternativas que les permitan obtener la mayor información posible sobre los tiempos a la falla de sus productos. La Confiabilidad se ha encargado de estudiar esas alternativas modelando el comportamiento de dichos tiempos a la falla y el uso que se le ha dado al conocimiento obtenido de tal modelación se encuentra principalmente en la áreas de aplicación citadas en la sección anterior.

2.2.1. Funciones características de tiempos a la falla

Para fines de modelación es natural considerar el tiempo a la falla como una variable aleatoria T , de tal forma que si fijamos $t_0 = 0$ como el instante inicial de puesta en operación, la distribución de probabilidad de T podrá caracterizarse mediante cualquiera de las siguientes funciones:

- (a) La función de distribución acumulada (o simplemente función de distribución), definida como

$$F(t) = P(T \leq t), \quad t > 0$$

representa la proporción esperada de unidades que fallarán antes del tiempo t dentro de una población suficientemente grande.

(b) La función de densidad, la cual definiremos como

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad t > 0$$

se utiliza para medir la frecuencia relativa de los tiempos a la falla, de manera que $f(t_1)/f(t_2) = r$ estaría indicando que en una vecindad de t_1 se esperan aproximadamente r veces la cantidad de fallas que se esperan en una vecindad de t_2 de igual longitud.

(c) La función de confiabilidad (también llamada función de supervivencia), cuya definición está dada por

$$C(t) = P(T > t), \quad t > 0$$

es el complemento de la función de distribución, pues representa la proporción esperada de unidades que sobrevivirán al tiempo t (y entonces su falla ocurrirá después de t).

(d) La función de riesgo (también llamada tasa de fallas), se define como

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}, \quad t > 0$$

y da una medida relativa de la propensión de que un producto que ha funcionado hasta el tiempo t falle en el instante inmediato. Se dice que es relativa en el sentido de que su interpretación surge cuando se comparan dos puntos en el tiempo tal como se hace con la función de densidad. La función de riesgo, a diferencia de las anteriores, es de particular interés en Confiabilidad, ya que la propensión de que un producto que ha funcionado hasta el tiempo t falle en el instante inmediato, es una caracterización sencilla pero muy útil de la calidad que mantiene el producto en ese instante, por lo tanto, dicha función refleja el comportamiento de la confiabilidad del producto cuando nos referimos a ésta como "la calidad a través del tiempo".

Como ya se mencionó, las cuatro funciones caracterizan la variable aleatoria T , esto es porque todas ellas contienen toda la información acerca de la

variable. La diferencia radica entonces solo en la forma en que cada función expresa dicha información, de ahí que su interpretación sea diferente. Debido a esto se puede trabajar indistintamente con cualquiera de ellas y obtener una a partir de otra. La Tabla 1 muestra la relación entre ellas.

	$F(t)$	$f(t)$	$C(t)$	$h(t)$
$F(t) =$	$-$	$\int_0^t f(u) du$	$1 - C(t)$	$1 - \exp\left[-\int_0^t h(u) du\right]$
$f(t) =$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$-$	$-\frac{d}{dt}C(t)$	$h(t) \exp\left[-\int_0^t h(u) du\right]$
$C(t) =$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(u) du$	$-$	$\exp\left[-\int_0^t h(u) du\right]$
$h(t) =$	$\frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u) du}$	$-\frac{d}{dt} \ln C(t)$	$-$

Tabla 1: Relación matemática entre las funciones características.

Con un enfoque matemático estricto debería cuestionarse la existencia de la función de densidad y la función de riesgo, pero este tema no será abordado ya que las distribuciones comúnmente utilizadas en Confiabilidad son bien comportadas y no presentan ningún problema al respecto. Existe una basta literatura estadística en la cual puede profundizarse sobre las propiedades de cada una de estas funciones, aunque la función de confiabilidad y la función de riesgo son más características del área de Confiabilidad.

Algo que es importante hacer notar es que el tiempo a la falla no siempre se mide en escala de tiempo, puede medirse también mediante otros conceptos que reflejen la duración de vida del producto, por ejemplo: ciclos de operación, distancia recorrida, cantidad de producción, etc., dependiendo de la naturaleza del producto. Las unidades de medición de algunos de estos conceptos pueden llevar a que la variable aleatoria sea discreta, tal es el caso de los ciclos de operación, a pesar de esto, la mayoría de las veces podrá utilizarse una aproximación continua.

Bajo ciertas circunstancias puede ser deseable trabajar los tiempos a la falla a través de variables aleatorias discretas, sin embargo, estos casos quedan fuera de los intereses de esta tesis.

2.3. Distribuciones de log-localización-escala

Modelar los tiempos a la falla, vistos como variables aleatorias, equivaldrá para nosotros a asignarles una distribución de probabilidad o al menos restringirlos a un conjunto pequeño de distribuciones de probabilidad que describa aceptablemente las grandes tendencias de falla del producto. Existe una familia de distribuciones que posee propiedades que son deseables tanto matemáticamente como dentro del contexto de modelación de los tiempos a la falla, por tal razón a sido muy utilizada en Confiabilidad e históricamente ha dado buenos resultados. Ésta es la familia de log-localización-escala y su definición dentro de la literatura estadística frecuentemente se encuentra de la siguiente manera:

Definición 1 *Una variable aleatoria T pertenece a la familia de distribuciones de log-localización-escala si $Y = \ln(T)$ es un miembro de la familia de localización-escala.*

Esta definición se completa con la definición de una distribución de la familia de localización-escala.

Definición 2 *Una variable aleatoria Y pertenece a la familia de distribuciones de localización-escala si su función de distribución acumulada puede expresarse como*

$$P(Y \leq y) = F(y; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right),$$

donde $-\infty < y < \infty$; $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ y Φ no depende de ningún parámetro desconocido.

En este caso μ es un parámetro de localización y σ es un parámetro de escala. Notemos que Φ es la función de distribución acumulada de Y cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. En general Φ es la función de distribución acumulada de

$Z = (Y - \mu)/\sigma$, debido a esto, la distribución de Z es conocida como *la distribución estándar* de la familia paramétrica correspondiente a Y .

Introduciendo la definición de distribución de localización-escala a la definición de distribución de log-localización-escala y manteniendo la notación previa se obtiene la siguiente definición, la cual consideraremos en adelante.

Definición 3 *Una variable aleatoria T pertenece a la familia de log-localización-escala si su función de distribución puede ser expresada como*

$$P(T \leq t) = F(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)$$

donde $t > 0$; $\alpha, \beta > 0$ y Φ no depende de ningún parámetro desconocido.

En este caso $\alpha = \exp(\mu)$ es un parámetro de escala y $\beta = 1/\sigma$ es un parámetro de forma. Notemos ahora que Φ es la función de distribución acumulada de $\ln T$ cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. De manera general, Φ es la función de distribución acumulada de $Z = \beta \ln(T/\alpha)$.

De estas definiciones podemos observar que cada distribución de probabilidad perteneciente a la familia de log-localización-escala tiene asociada una distribución de la familia de localización-escala y las dos pueden caracterizarse mediante Φ , por tal motivo nos referiremos a ella como *la función generadora* de ambas distribuciones. En particular para la distribución de log-localización-escala correspondiente, de acuerdo a la Tabla 1 y a la Definición 3, las funciones características de tiempo a la falla pueden obtenerse a partir de Φ como sigue:

Sea T una v.a. de log-localización-escala con función generadora Φ y parámetros α, β , entonces

$$\begin{aligned} F(t; \alpha, \beta) &= \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \\ f(t; \alpha, \beta) &= \frac{\beta}{t} \Phi'\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \\ C(t; \alpha, \beta) &= 1 - \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \\ h(t; \alpha, \beta) &= \frac{\beta}{t} \frac{\Phi'\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)}{1 - \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Más aún, el cuantil p está dado por

$$t_p = \alpha \exp\left[\frac{\Phi^{-1}(p)}{\beta}\right]$$

y representa el tiempo en el cual se espera que exactamente una proporción p de productos de la población total ya hayan fallado.

A continuación detallaremos un poco sobre algunas distribuciones de especial interés en nuestro estudio.

2.3.1. Distribución Weibull

La distribución de localización-escala asociada a la distribución Weibull es la Gumbel, que por sus aplicaciones en otras áreas es también llamada de valores extremos para mínimos (SEV por sus siglas en inglés). La función generadora que le corresponde es la función de distribución acumulada Gumbel estándar:

$$\Phi(z) = 1 - \exp[-\exp(z)]$$

Explícitamente, las funciones propias de la distribución Weibull son:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \\
 f(t) &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \\
 C(t) &= \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \\
 h(t) &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}
 \end{aligned}$$

Esta distribución es muy útil por su gran versatilidad para describir tiempos a la falla de naturaleza muy variada. Con $\beta > 1$ la Weibull tiene tasa de fallas creciente, propiedad esencial para describir modos de falla relacionados con desgaste: corrosión, agrietamiento, deformación, etc. Cuando $\beta < 1$ su tasa de fallas es decreciente y puede utilizarse para modelar fallas de diseño, o bien, fallas que ocurren dentro del proceso de maduración que algunos productos requieren para que sus componentes se moldeen y se adapten a la demanda a la cual serán sometidos durante su vida útil.

El caso $\beta = 1$ es de especial interés ya que la distribución Weibull se transforma en la distribución exponencial, cuya tasa de fallas es constante y por lo tanto se considera que los productos modelados bajo esta distribución no envejecen o que tienen pérdida de memoria, es decir, sus fallas ocurren de forma totalmente aleatoria, tal es el caso de algunos componentes electrónicos de alta calidad. Puede demostrarse que la distribución exponencial es la única distribución continua con la propiedad de pérdida de memoria, por tal razón, su aplicación es inmensa y la literatura al respecto es muy vasta. En general, si T se distribuye Weibull con parámetros α , β , entonces T^β se distribuirá exponencialmente con parámetro $\alpha^\beta = E(T^\beta)$.

Como vemos, la distribución Weibull es muy flexible y puede usarse para modelar distribuciones de vida con tasa de fallas constante, creciente y decreciente. Ha sido ampliamente usada en análisis de confiabilidad de semiconductores, rodamientos, turbinas y organismos biológicos. Particularmente en la Weibull, el parámetro $\alpha = t_p$ con $p \approx 0,635$, es conocido como la vida

característica del producto. La Figura 1 muestra el comportamiento de las funciones características de la distribución Weibull.

2.3.2. Distribución lognormal

La distribución lognormal tiene asociada la distribución normal, sin duda la distribución más popular. Consecuentemente su función generadora es la función de distribución acumulada normal estándar, la cual se expresa mediante una integral como sigue:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

La distribución lognormal es un modelo común para los tiempos de falla. Siguiendo con el teorema central del límite, la aplicación de la distribución lognormal puede ser justificada para una variable que proviene de un producto de varias cantidades aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El comportamiento de su función de riesgo es monótonamente decreciente y asintótico al cero después de llegar a un máximo, razón por la cual puede usarse para modelar materiales o componentes que se robustecen con el paso del tiempo, tal es el caso del concreto. La distribución lognormal también es ampliamente usada para describir fallas ocasionadas por el crecimiento de una fractura debido a la fatiga de metales, y en general, para describir procesos de degradación. Debido a la simetría de la normal $\alpha = t_{0.5}$. La Figura 2 muestra el comportamiento de las funciones características de la distribución lognormal.

2.3.3. Distribución loglogística

La distribución loglogística está asociada a la distribución logística y por lo tanto su función generadora es la función de distribución acumulada logística estándar:

$$\Phi(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$$

La distribución loglogística es muy parecida a la lognormal, propiedad heredada de la similitud de la logística con la normal, además tiene la ventaja

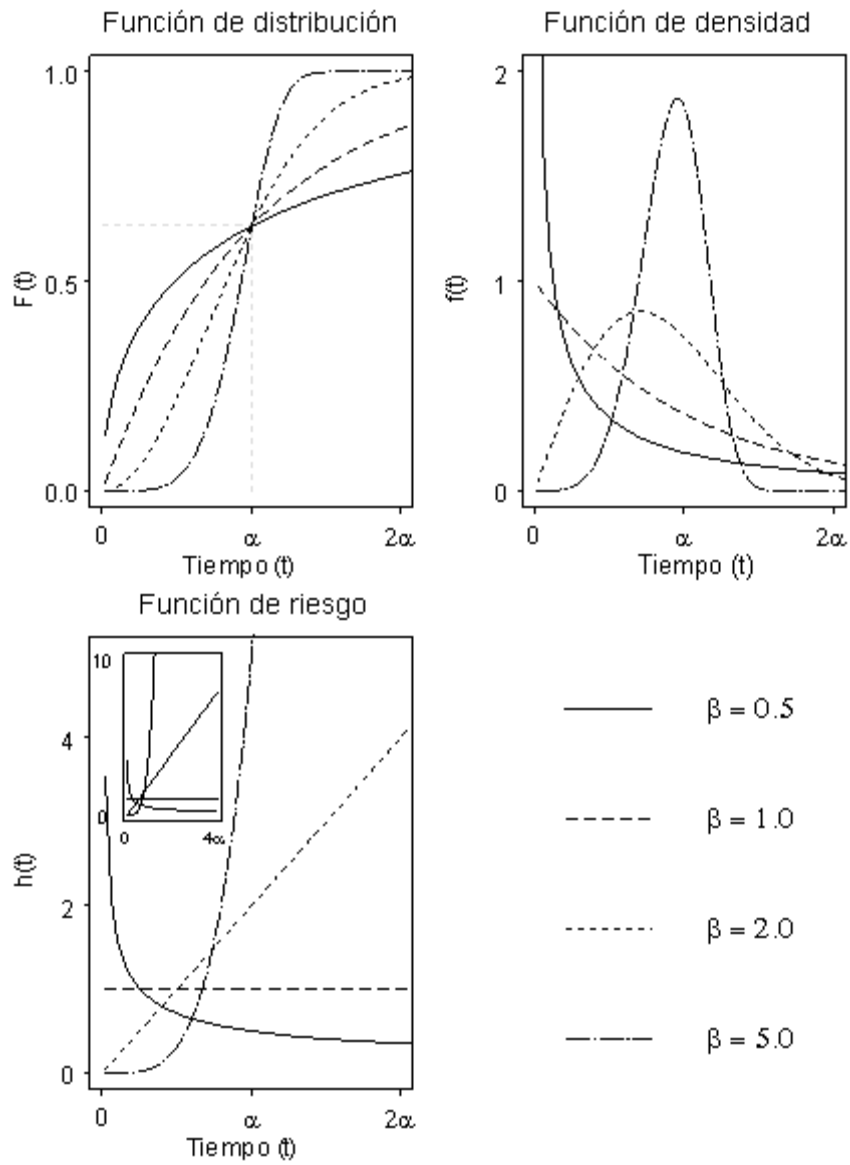


Figura 1: Funciones características bajo el modelo Weibull.

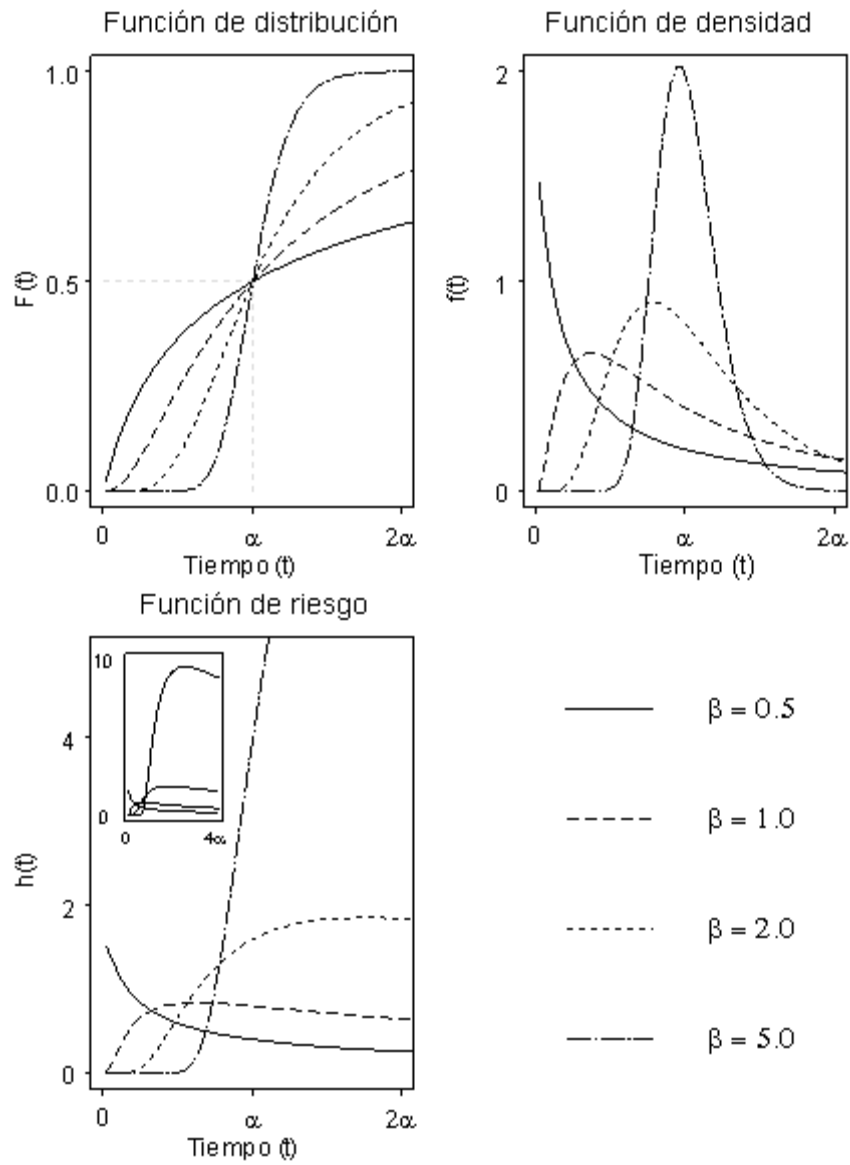


Figura 2: Funciones características bajo el modelo lognormal.

de manejar expresiones cerradas, de ahí su aplicación. La diferencia entre ambas radica principalmente en que la loglogística tiene colas un poco más pesadas que la lognormal. Por la simetría de la logística $\alpha = t_{0,5}$, tal y como ocurre con la lognormal. La Figura 3 muestra el comportamiento de las funciones características de la distribución loglogística.

2.4. Pruebas de vida

Como ya se ha mencionado a lo largo de este capítulo, uno de los objetivos básicos en Confiabilidad es modelar la distribución de los tiempos a la falla de algún producto de interés. Desde luego, más que cualquier información a priori, la información más representativa sería la que arroje el mismo producto si éste es puesto en funcionamiento y su comportamiento de falla es estudiado. Por tal motivo se recurre a las pruebas de vida:

Una prueba de vida consiste en poner en operación una muestra de algún producto de interés durante un cierto periodo de tiempo bajo condiciones ambientales y de operación controladas para obtener información relacionada con los tiempos a la falla de las unidades en prueba. Todo esto con el objetivo de modelar el comportamiento de los tiempos a la falla del producto.

Nótese como el texto anterior no habla explícitamente de obtener los tiempos a la falla de las unidades. Esto se debe a que en algunos casos puede utilizarse información relacionada que permita dar un estimado del tiempo a la falla de cada unidad, a estos tiempos estimados se les llama pseudotiempo a la falla y son la base de las pruebas de degradación, un tipo de prueba muy particular al igual que las pruebas de vida aceleradas. Meeker y Escobar (1998) presentan en su libro una buena descripción de ambos tipos de pruebas.

Las pruebas de vida son la principal fuente de información en los estudios de confiabilidad y por tal motivo es importante mencionar algunos aspectos a considerar en cuanto su diseño.

El primer elemento que se debe cuidar es la *repetibilidad*. Sería absurdo tratar de estudiar todas las unidades del producto, por lo cual el estudio se

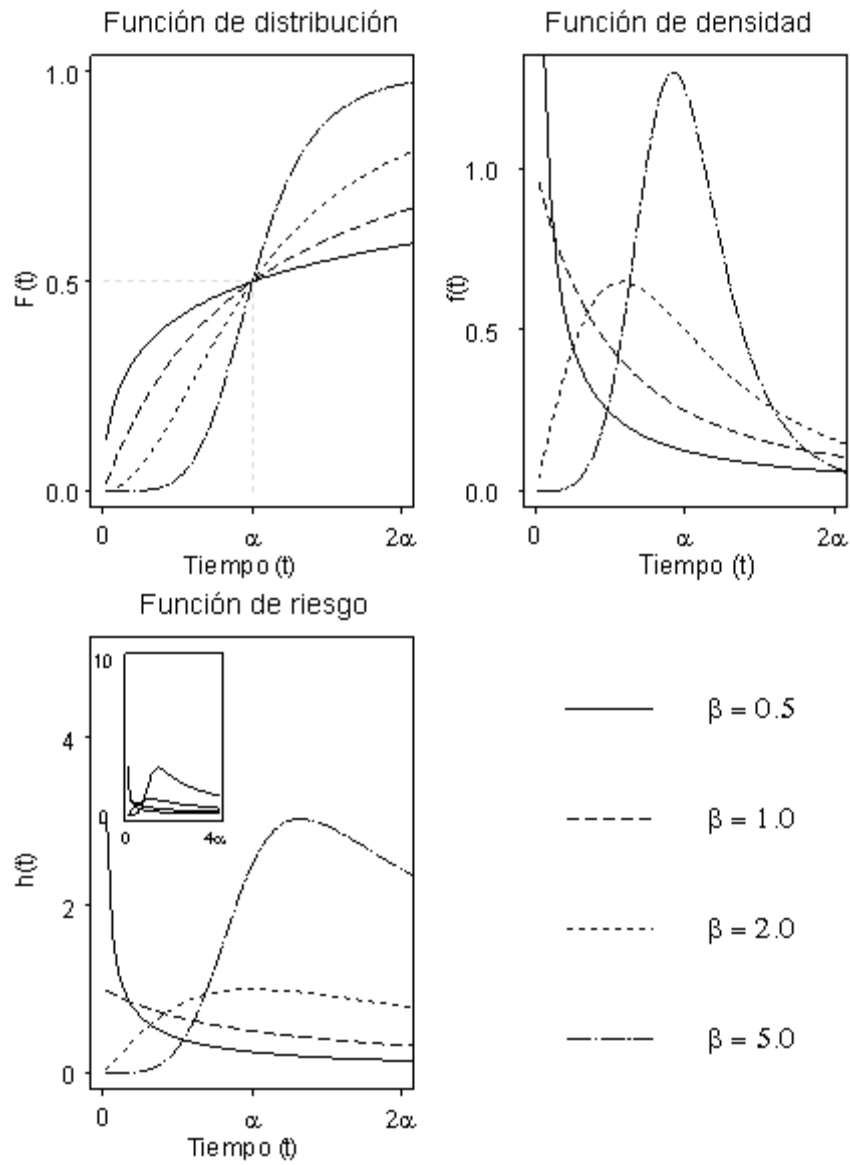


Figura 3: Funciones características bajo el modelo loglogístico.

limita a una muestra y entonces deberá buscarse que ésta sea *representativa*, es decir, que las grandes tendencias de lo que ocurra en la muestra se repitan en el resto de la población, de lo contrario la información obtenida no será útil. Para lograr esto, más allá de una muestra totalmente aleatoria, se necesitará reproducir, para dicha muestra, las condiciones en que operará el resto de la población. Este es un problema principalmente ingenieril que inicia desde el momento de establecer qué debe entenderse por "las condiciones en que operará el resto de la población".

Sin duda no siempre es fácil concretar cuáles son las condiciones de uso de algunos productos, piénsese por ejemplo en una estufa. Su funcionamiento dependerá de las condiciones climáticas donde opere: temperatura, humedad, presión atmosférica, etc., de las condiciones de operación: frecuencia y cultura de manejo del usuario, y algunos otros detalles como el traslado, la correcta instalación, etc. El problema podría resolverse, como suele hacerse estadísticamente, aleatorizando tanto como sea posible los factores de ruido involucrados, en este caso, distribuyendo la muestra en diferentes regiones geográficas, asignando las unidades a diferentes tipos de usuario, etc. Sin embargo, otro problema con el que hay que lidiar es el tiempo. Gran cantidad de productos, como las estufas, tienen un esperado de vida muy largo, de tal forma que una prueba de vida de este estilo requeriría años y sus resultados serían prácticamente obsoletos debido a los tiempos de proyecto que se manejan hoy en día.

Por lo anterior, las pruebas de vida suelen realizarse en laboratorios, bajo condiciones de esfuerzo que acorten los tiempos de vida, pero que de algún modo sean comparables con las condiciones reales de uso. Como puede observarse, esta es una parte muy importante del diseño de la prueba, ya que de ella depende que la información que ésta arroje sea representativa.

El segundo gran problema a considerar es en principio poder garantizar que la información que se obtenga de la prueba sea suficiente para los objetivos previamente establecidos y secundariamente que se obtenga la mayor información posible sin aumentar los costos de prueba. Si no existiera ninguna restricción en costos o tiempo la solución sería inmediata, pues intuitivamente entre más unidades se prueben y entre más tiempo dure la prueba la información que de ella se obtenga será mayor, sin embargo, la mayoría de las veces existe una restricción en estos dos factores, y aunque no la haya explícitamente, siempre se buscará la manera de reducir los costos y la duración

de prueba. En esta parte del diseño es donde entra fuertemente el trabajo estadístico. Para lograr tales objetivos, es muy importante que el modelador estadístico cuente con información a priori que le permita anticipar el resultado de la prueba. Las principales fuentes que aportan dicha información son: las especificaciones de diseño del producto, la opinión de expertos, la experiencia previa con productos similares y el resultado de pruebas piloto.

Como puede observarse, ambos tipos de problema deben ser resueltos para poder tener una prueba de vida verdaderamente útil, lo cual requerirá del esfuerzo conjunto de ingenieros y estadísticos. Si por ejemplo, el primer problema no es resuelto satisfactoriamente, la información que se obtenga de la prueba, por mucha que sea, será incorrecta y llevará a conclusiones equivocadas. Por el contrario, si el segundo problema no es bien resuelto, las conclusiones que se obtengan como resultado de la prueba estarán débilmente sustentadas y carecerán de la contundencia necesaria para tomar decisiones a partir de ellas.

Hasta ahora hemos dado un panorama muy general de lo que son las pruebas de vida, de su importancia y del tipo de problemas que representan sin entrar en situaciones concretas y mucho menos en la forma como típicamente se resuelven. Libros como el de Lall-Pecht-Hakim (1997), Hobbs (2000) y Chan-Englert (2001) se concentran en problemas específicos de pruebas de vida. A continuación abordaremos un caso concreto referente al segundo tipo de problema.

2.4.1. Datos censurados

Es muy frecuente encontrar que por alguna razón no se conoce el tiempo a la falla exacto de una unidad en prueba, pero se sabe que este tiempo está contenido en un intervalo. A esta pérdida de información se le conoce como *censura* y la cantidad de información perdida será directamente proporcional al tamaño del intervalo. Dos tipos de censura particulares son:

- Censura por la izquierda. Solo se puede dar una cota superior del tiempo a la falla, por lo que el intervalo de censura donde se asegura que ocurrió la falla es de la forma $(0, t_c)$, con $t_c > 0$.

- Censura por la derecha. Solo se puede dar una cota inferior, es decir, únicamente se asegura que el tiempo a la falla está contenido en un intervalo de la forma (t_c, ∞) , con $t_c > 0$.

Un caso muy común de censura por la derecha es el que se da cuando concluye la prueba de vida y algunas unidades sobreviven, en este caso no se puede decir en que momento fallarán éstas, pero sin duda su falla ocurrirá en (t_r, ∞) , donde t_r representa el tiempo de duración de la prueba.

Tradicionalmente existen dos criterios para concluir una prueba de vida:

- Censura por tiempo (o censura tipo I): La prueba concluye transcurrido un periodo de tiempo inicialmente fijado. Regularmente se utiliza este criterio cuando los resultados de la prueba son requeridos antes de una cierta fecha. Este es el criterio más usado por necesidad, sin embargo, si la duración de prueba es muy corta existe el riesgo de que la información obtenida sea insuficiente. Por tal razón, debe ponerse especial cuidado en el número de unidades a probar de manera que la cantidad de información sea compensada.
- Censura por fallas (o censura tipo II): La prueba concluye una vez observada una cierta cantidad de fallas inicialmente fijada. Este criterio solo puede emplearse cuando no hay restricción de tiempo y tiene la ventaja de asegurar que la prueba arroje la suficiente información.

2.4.2. Pruebas de vida con datos agrupados

En muchos casos puede conocerse de forma exacta el tiempo en que falla cada unidad en una prueba de vida, sobre todo cuando la falla involucra alguna respuesta física que pueda ser detectada por medio de sensores, tal es el caso de productos de naturaleza eléctrica o electrónica, o bien, productos cuya falla representa un importante cambio de temperatura en alguna de sus partes. A través de contadores también suele registrarse con exactitud el tiempo a la falla de productos que trabajan por ciclos.

En muchos otros casos, cuando las fallas se dan por desgaste y éste es observable, las unidades pueden inspeccionarse con detalle cuando su falla

se percibe cerca, de esta manera podrán obtenerse intervalos relativamente pequeños para los tiempos a la falla, incluso al grado de considerarlos puntuales.

Un tercer caso, el cual es de especial interés en nuestro trabajo, es cuando la única manera de conocer los tiempos a la falla es estando al frente de la prueba de inicio a fin (este proceder generalmente no es conveniente pues eleva mucho los costos de prueba), o bien, cuando las fallas son de detección tardía y se requiere de una inspección minuciosa para detectarlas. Una alternativa ante esta situación es manejar estratégicamente la censura, es decir, trabajar con datos censurados como resultado de inspeccionar las unidades en ciertos puntos de la prueba y detectar en cada inspección cuántas unidades han fallado entre la inspección actual y la anterior. Con este procedimiento se pierde información pero se reducen mucho los costos de prueba, de cualquier forma si se necesita que la prueba aporte más información, estudiando las debidas repercusiones en costos, puede incrementarse el número de inspecciones al grado de que la pérdida de información producida por la censura sea despreciable. A estas pruebas se les conoce como *pruebas de vida con datos agrupados* ya que la información que resulta de dichas pruebas es el número de unidades que han fallado en cada intervalo dado por dos inspecciones consecutivas, es decir, para una prueba con m inspecciones nombremos como t_i , con $i = 1, 2, \dots, m$ al tiempo en que se efectúa la i -ésima inspección (y entonces $t_i < t_{i+1}$ para todo i), la información que se obtenga de la prueba estará dada por n_i , el número de fallas ocurridas en (t_{i-1}, t_i) , para $i = 1, 2, \dots, m + 1$. En este caso $t_0 = 0$ respresenta el inicio de la prueba y n_{m+1} representa el número de unidades que sobreviven a la prueba (la falla de éstos se considera por lo tanto en $(t_m, t_{m+1} = \infty)$). Esta notación será estándar en los siguientes capítulos.

Podemos apreciar intuitivamente que para las pruebas de vida con datos agrupados la cantidad de información que se obtenga de ella dependerá como siempre de la duración de prueba y del tamaño de muestra, pero ahora también del número de inspecciones.

2.5. Herramientas de inferencia

En la Sección 2.3 se mencionó el tipo de distribuciones paramétricas utilizadas comúnmente para modelar los tiempos a la falla. La elección de una distribución para modelar un producto específico es un problema en el que se involucran los conocimientos teóricos de los ingenieros de diseño, la opinión de expertos, los resultados estadísticos en productos de naturaleza semejante y la información de pruebas piloto. Sin embargo, este tema no es objeto de nuestro estudio, por lo tanto, trabajaremos siempre bajo el supuesto de que ya se tiene una distribución, con al menos un parámetro desconocido, que describe aceptablemente el comportamiento del producto en cuestión. Para fines prácticos nos expresaremos hipotéticamente como si el tiempo a la falla del producto siguiera esa distribución sin perder el concepto de que éste es solo un modelo y no la realidad.

El siguiente paso será entonces estimar los parámetros desconocidos de la distribución del producto, para ello se necesitarán los datos provenientes de una prueba de vida y una herramienta de estimación. La herramienta estadística que se utilizará es la función de verosimilitud. Una de las principales ventajas de esta herramienta es que tiene una estructura muy flexible que permite trabajar simultáneamente con datos puntuales y censurados. En esta sección sentaremos de forma general las ideas básicas para hacer estimación vía verosimilitud.

2.5.1. Estimación vía verosimilitud

Supongamos que se tiene un modelo de probabilidad paramétrico, cuyo parámetro k -dimensional $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ es desconocido, para describir los posibles resultados de un experimento. El experimento se lleva a cabo y de él se obtiene un conjunto de datos, es decir, un resultado. Nos interesará entonces utilizar estos datos para estimar el valor del parámetro del modelo. Para esto construiremos una función que mida, a la luz de los datos, la plausibilidad de todos los posibles valores del parámetro.

Los datos observados en el experimento pueden ser vistos como un evento E dentro del espacio de posibles resultados. La probabilidad de E puede determinarse a partir del modelo, la cual quedará en términos del parámetro

desconocido, esto es, si llamamos θ al parámetro del modelo, la probabilidad de E estará dada por $P(E; \theta)$. Dicha probabilidad, como función del parámetro, puede considerarse como una medida de qué tan bien explica el modelo el resultado del experimento con cada valor de θ . Por ejemplo, si bajo θ_1 la probabilidad de que ocurra el resultado obtenido en el experimento es mayor que bajo θ_2 , de manera natural se le otorgaría mas credibilidad a θ_1 sobre θ_2 de ser el “verdadero” valor del parámetro. En este sentido, una estimación puntual del parámetro será aquel valor de θ que maximice la probabilidad de E . En general, el estimador de máxima verosimilitud (EMV) será aquella función de los datos que maximice $P(E; \theta)$. Este estimador, que usualmente es denotado acentuando el parámetro a estimar con un acento circunflejo (en nuestro caso $\hat{\theta}$), es consistente fuerte, asintóticamente normal e invariante ante reparametrizaciones del modelo. Por otro lado, en algunos casos puede no existir, o bien, no ser único. Existe una basta literatura que trata las propiedades del EMV.

Dado lo anterior, definimos la función de verosimilitud como

$$L(\theta) = cP(E; \theta),$$

donde c es una constante positiva que puede ser función de los datos mas nunca del parámetro. Esta constante tiene como único objetivo simplificar la forma de $P(E; \theta)$ sin robarle la interpretación antes descrita. Algunas veces los resultados del experimento involucran resultados de variables aleatorias continuas de manera que $P(E; \theta) = 0$ para todo E bajo cualquier valor de θ . En estos casos la probabilidad como tal no es útil para medir la verosimilitud de los posibles valores del parámetro una vez dados los datos, a pesar de eso, la función de verosimilitud puede definirse, sin perder su esencia, haciendo uso de las funciones de densidad de las variables continuas involucradas.

Regularmente la función de verosimilitud estará construida mediante el producto de probabilidades, por lo tanto, en general será más fácil trabajar con logaritmos. Con base en esto, definimos la función de log-verosimilitud como

$$l(\theta) = \ln L(\theta).$$

El valor de θ que maximice $P(E; \theta)$ también maximizará $L(\theta)$ y $l(\theta)$, y entonces el EMV podrá obtenerse a partir de cualquiera de las tres funciones. En la mayoría de los casos será mas conveniente trabajar con $l(\theta)$.

Consideremos el caso en que existe la matrix Hessiana (o matrix de segundas derivadas) de $l(\boldsymbol{\theta})$ y el EMV existe y es único. Si definimos las funciones

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I(\boldsymbol{\theta}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k^2} \end{bmatrix},$$

de la teoría de cálculo vectorial sabemos que el EMV, por ser un máximo local, debe satisfacer

$$S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad x^T I(\hat{\boldsymbol{\theta}}) x > 0 \quad \forall x.$$

En particular cuando $\boldsymbol{\theta}$ es unidimensional dichas funciones se reducen a

$$S(\theta) = l'(\theta), \quad I(\theta) = -S'(\theta) = -l''(\theta)$$

y entonces

$$S(\hat{\theta}) = 0 \quad \text{e} \quad I(\hat{\theta}) > 0.$$

Por lo anterior, estas funciones conocidas como la *función score* y la *función de información de Fisher* respectivamente, en principio facilitarán la obtención del EMV de $\boldsymbol{\theta}$.

Una propiedad interesante de la función score es que $E[S(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \mathbf{0}$. Por su parte, la función de información de Fisher tiene propiedades que son muy importantes para nuestro tema de estudio y por lo tanto se revisarán con mas detalle en la Sección 2.5.2.

Sería deseable que la función de verosimilitud estuviera en una escala estándar de manera que la interpretación de la plausibilidad de un valor particular del parámetro no dependiera de la naturaleza del experimento. Con esa intención se define la función de verosimilitud relativa como

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta})}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

que no es más que una estandarización entre 0 y 1 de la función de verosimilitud. A su vez, de ésta se obtiene la función de log-verosimilitud relativa como

$$r(\boldsymbol{\theta}) = \ln R(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Nótese que R y r solo pueden obtenerse una vez determinado $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Intervalos de verosimilitud La estimación de un parámetro no necesariamente significa asignarle un valor puntual. Una estimación más conservadora es considerar un intervalo en vez de un valor único, un conjunto donde todos sus elementos sean una opción a considerar. A este tipo de estimación se le conoce como *estimación por intervalos*. Cuando se trabaja con la función de verosimilitud los intervalos de estimación que se obtienen se conocen como intervalos de verosimilitud, los cuales son de la forma

$$IV_c = \{\boldsymbol{\theta} | R(\boldsymbol{\theta}) \geq c\}, \quad 0 < c < 1,$$

es decir, son intervalos que contienen todos los valores posibles del parámetro que a la luz de los datos tienen una plausibilidad estandarizada mayor a un nivel c . De esta manera, un intervalo de verosimilitud de nivel c cercano a uno será estricto y se limitará a considerar pocos valores del espacio paramétrico, mientras que un intervalo de nivel c cercano a cero será muy conservador e incluirá casi todos los posibles valores del parámetro. Tradicionalmente se consideran plausibles aquellos valores contenidos en el intervalo de verosimilitud de nivel $c = 0,1$ y muy plausibles los correspondiente a $c = 0,5$. La Figura 4 muestra el comportamiento típico de una función de verosimilitud, el EMV y el tipo de intervalos de estimación que se obtienen a partir de ella.

2.5.2. Información observada de Fisher e información esperada de Fisher

Consideremos en lo siguiente un modelo con parámetro unidimensional bajo el supuesto de que el EMV existe y es único. La función de información de Fisher evaluada en un cierto valor θ_0 , retomando algunos conceptos básicos de cálculo, permite medir la concavidad de l en θ_0 , así, entre más grande sea

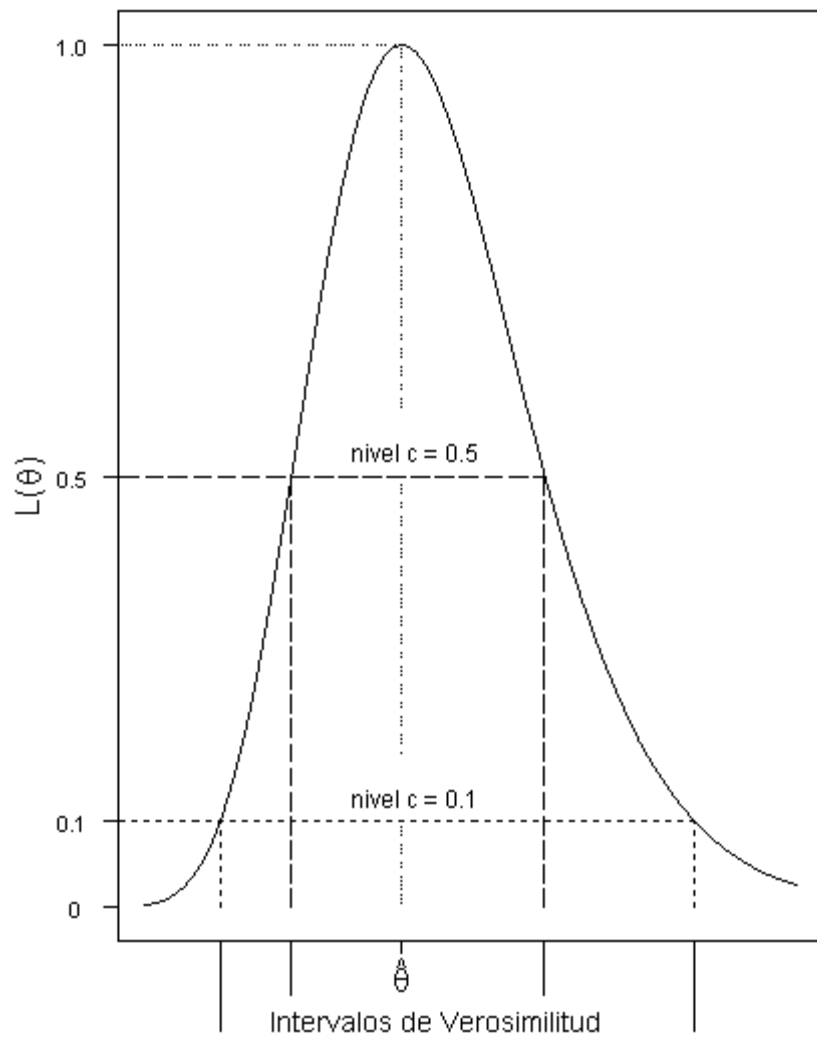


Figura 4: Función de verosimilitud.

$|I(\theta_0)|$ más puntiaguda (o menos aplanada) será l en θ_0 . En particular para $\theta_0 = \hat{\theta}$

$$\begin{aligned} I(\hat{\theta}) &= -\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{L(\theta)} \frac{d^2 L(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\hat{\theta}} + \frac{1}{L(\theta)} \frac{dl(\theta)}{d\theta} \Big|_{\hat{\theta}} \\ &= \frac{1}{L(\hat{\theta})} \left[\frac{d^2 L(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\hat{\theta}} \right] = -\frac{d^2 R(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\hat{\theta}}. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que $I(\hat{\theta})$ es también una medida de la curvatura de R en $\hat{\theta}$. Intuitivamente, entre más grande sea $I(\hat{\theta})$ más puntiaguda y cerrada se espera que sea R y por lo tanto que los intervalos de verosimilitud sean más pequeños, lo cual se traduce como más información en la muestra. En este sentido $I(\hat{\theta})$, propuesta por Fisher, representa una medida de la cantidad de información en la muestra, de aquí que a $I(\theta)$ se le conozca como la función de información de Fisher y a su vez $I(\hat{\theta})$, por estar basada totalmente en los datos, es llamada la *información observada de Fisher*.

Sería deseable poder planear el experimento (que bajo nuestro contexto en Confiabilidad no es más que una prueba de vida) de tal forma que $I(\hat{\theta})$ sea lo más grande posible, pero dado que este valor solo podrá conocerse una vez obtenido el resultado del experimento, uno puede analizar alternativamente la *información esperada de Fisher*, es decir,

$$I_E(\theta) = E[I(\theta)].$$

La información esperada de Fisher es entonces una medida de la precisión promedio que se obtendría después de una gran cantidad de repeticiones del experimento, considerando el argumento de la función como el "verdadero" valor del parámetro. Por tal razón, esta herramienta es muy útil para la planeación de experimentos, no obstante, una vez que el experimento se ha llevado a cabo, la información esperada pierde significado, ya que la precisión propia de esta realización será medida con la información observada.

Algunos resultados muy importantes que de alguna forma justifican la interpretación descrita de $I(\hat{\theta})$ y $I_E(\theta)$ para tamaños de muestra grande, bajo ciertas condiciones de regularidad en el modelo de probabilidad, es que cuando n , el tamaño de muestra, tiende a infinito

$$I(\hat{\theta}) \cdot \text{Var}(\hat{\theta}), \quad I_E(\theta) \cdot \text{Var}(\hat{\theta}) \quad \text{y} \quad \frac{|IV_c|}{2\sqrt{-2\text{Var}(\hat{\theta}) \ln c}}$$

convergen en probabilidad a 1. En este caso $|IV_c|$ representa la longitud del correspondiente intervalo de verosimilitud de nivel c . Estos resultados y algunas de las propiedades comentadas al inicio de esta sección acerca del EMV pueden revisarse en literatura de teoría asintótica como Serfling (1980).

La consecuencia de estos resultados es que para una muestra suficientemente grande entre mayor sea $I_E(\theta)$ (antes del experimento) ó $I(\hat{\theta})$ (después del experimento) menor será la varianza de $\hat{\theta}$, y en consecuencia será un mejor estimador puntual de θ . A su vez, los intervalos de verosimilitud serán más pequeños independientemente del valor de c .

Generalización multidimensional Para el caso en que θ es de dimensión mayor a uno la interpretación de $I(\hat{\theta})$ se complica por ser ahora una matriz, sin embargo, para evadir este problema, la información de dicha matriz suele resumirse en un número que de alguna manera conserve la interpretación del caso unidimensional. Con estos fines frecuente se recurre al determinante o la traza de $I(\hat{\theta})$. De manera similar, en la planeación de experimentos frecuentemente se busca maximizar el determinante o la traza de $I_E(\theta)$ en la búsqueda de mejores estimadores puntuales y por intervalo. Sin embargo, estos casos no forman parte del problema estudiado en esta tesis.

3. Planeación de estrategias de inspección en pruebas de vida con datos agrupados

3.1. Antecedentes

Como se menciona en la introducción, este estudio es motivado en los laboratorios de Mabe México S. de R.L. de C.V. La estrategia que ellos utilizan en las pruebas de vida con datos agrupados, debido a las ventajas administrativas que brinda, es la estrategia tradicional, la cual se menciona en la Sección 1.2 y se define con más detalle en la Sección 3.1.1. En la mayoría de las pruebas, el costo de realizar una inspección es mínimo, por lo que la prueba se diseña con bastante holgura para que la pérdida de información debida a la censura sea despreciable, es decir, se establecen muchas inspecciones y la duración de prueba es alargada tanto como sea posible buscando que la mayoría de las unidades en prueba fallen (sin violar cualquier restricción en tiempo si tal es el caso). Esta forma de proceder regularmente permite obtener información suficiente, y por lo tanto buenas estimaciones, sin depender mucho de la información a priori del producto.

Sin embargo, comúnmente surgen pruebas de vida cuyas inspecciones son costosas en tiempo, dinero y/o esfuerzo. Por ejemplo, una prueba en la cual la muestra del producto de interés necesita ser montada en un dispositivo y estudiada a altas temperaturas dentro de una cámara generadora de esfuerzo. Ante esta situación, la forma en que típicamente se detectan las fallas en el producto es reduciendo la temperatura dentro de la cámara hasta igualarla con la temperatura ambiente y esperar a que el dispositivo se enfríe para entonces retirarlo de la cámara, desmontar las unidades y finalmente realizar las inspecciones. Posteriormente, las unidades sobrevivientes deben ser nuevamente montadas en el dispositivo y, una vez dentro de la cámara, su temperatura debe ser elevada hasta estabilizarla con base en las especificaciones del diseño de la prueba para que ésta pueda continuar. Este es un proceso muy lento y laborioso (lo cual pudiera traducirse en términos monetarios), más aún, bajo cierto contexto sería considerable pensar que cada inspección introduce ruido en la prueba al no tener control o conocimiento de las consecuencias que impliquen los correspondientes cambios de temperatura. Debido a esta situación existe una fuerte limitación en cuanto al número de inspecciones realizables.

Cuando se implementa la estrategia tradicional en situaciones como ésta, con mucha frecuencia encontramos que las estimaciones basadas en la prueba resultan prácticamente no informativas, ya que la longitud de los intervalos de estimación son considerablemente más grandes de lo deseable. En algunos casos esto podría resolverse aumentando la cantidad de unidades en prueba, pero en muchos otros esto no será viable ya sea porque no se cuenta con más unidades o porque el costo de incluirlas es muy elevado, también podría suceder que el costo de cada inspección aumente a medida que se incremente el número de unidades a inspeccionar. En nuestro ejemplo se tiene además el problema de cupo, esto es, la cámara generadora de esfuerzo, por cuestiones de espacio, no puede soportar más que una cierta cantidad de unidades, por lo que de ser necesario, la prueba deberá realizarse por partes. Como consecuencia de esto, un aumento en el tamaño de muestra implicará también un aumento en la duración de prueba y en el número de inspecciones.

Podría pensarse también en aumentar la duración de la prueba, sin embargo en algunos casos, lejos de una ganancia se produce una pérdida de información (este fenómeno se explicará en la Sección 3.2.1). En muchos otros casos la restricción en tiempo será tal que esta opción no podrá ser considerada.

Por todo lo anterior, la solución al problema de poca información en la muestra no siempre puede ser resuelto con el aumento en la cantidad de inspecciones, el tamaño de muestra y/o la duración de prueba, de manera que la estrategia de inspección utilizada debe ser considerada como un elemento más en juego.

3.1.1. Estrategias de inspección existentes

La planeación de estrategias de inspección en pruebas de vida con datos agrupados es un tema que ya se ha analizado mucho tiempo antes. De estos estudios surgen principalmente las estrategias descritas a continuación, propuestas en su mayoría por Meeker (1986), todas ellas basadas en un número de inspecciones previamente fijado. Para ello retomaremos la notación de pruebas de vidas de la Sección 2.4.2.

Estrategia equiespaciada (EEE) Ésta es la estrategia más antigua y usada en la práctica debido a su sencillez, por tal motivo nos hemos referido a ella en las secciones anteriores como la estrategia tradicional. Puede ser utilizada prácticamente con cualquier modelo (no necesariamente de la familia de log-localización-escala), aunque con esta estrategia no se tiene mucho control de los resultados. La estrategia consiste en repartir las inspecciones de tal forma que el tiempo entre inspecciones sea siempre el mismo, esto es,

$$t_i - t_{i-1} = \frac{t_m}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

La forma usual de establecer esta estrategia es determinando la duración de prueba t_m basándose principalmente en la restricción de tiempo cuando ésta existe. Sin tal restricción, la duración de prueba puede establecerse también pensando en términos de la proporción deseable de unidades sobrevivientes, pero para esto se requerirá de información a priori sobre el producto.

Bajo el modelo Weibull con ambos parámetros desconocidos, se ha propuesto utilizar la duración de prueba que minimice la traza de la matriz de varianzas y covarianzas del EMV de los parámetros. Para ello se utilizan los resultados asintóticos mencionados en la Sección 2.5.2 extendidos al caso multidimensional. Este criterio, a diferencia del anterior, requiere conocer todos los parámetros de la distribución, precisamente el objetivo de la prueba. Por tal motivo, a los parámetros desconocidos se les asignan valores tentativos conocidos como valores de planeación, basándose de igual forma en información a priori.

El segundo criterio, propuesto por Ahmad Abu-Taleb, M. Bhaskara Rao y Haimeng Zhang (2003), es más poderoso, sin embargo, a diferencia del primero, difícilmente podrá replicarse con otras distribuciones. Más aún, éste último requiere más información sobre el producto, pues hacer supuestos sobre cada parámetro es mucho más fuerte que suponer sobre un cuantil, como ocurre con el primer criterio.

Estrategia equiprobable (EEP) La estrategia equiprobable se diseña de manera que el número esperado de fallas sea el mismo para todos los intervalos de inspección, y entonces, cuando no hay restricción en la duración de prueba

$$P(t_{i-1} < T \leq t_i) = \frac{1}{m+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1.$$

En caso de que sí exista restricción en la duración de prueba y ésta impida llevar a cabo la estrategia con la condición de la ecuación anterior, entonces se determina primero la duración de la prueba y con ella se establece el resto de las inspecciones, ahora con la condición

$$P(t_{i-1} < T \leq t_i) = \frac{P(T \leq t_m)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Esta estrategia también puede utilizarse prácticamente con cualquier modelo y regularmente proporciona más información que la EEE, sin embargo requiere un poco más de cálculo, pero sobre todo siempre requiere valores tentativos de los parámetros desconocidos y es más sensible a estos supuestos.

Estrategia log-equiespaciada (ELE) Esta estrategia está pensada para distribuciones de la familia de log-localización-escala y consiste en replicar la EEE considerando el tiempo en la escala logarítmica. Esto equivale a aplicar la EEE sobre la distribución de localización-escala asociada al modelo, con la diferencia de que en esta ocasión, además de la duración de prueba, será necesario determinar el tiempo de la primera inspección. Esto se debe a que en la escala logarítmica el soporte de la distribución es toda la recta real y no solo la parte positiva. Una vez definidos t_1 y t_m la ELE estará dada bajo la condición

$$\ln t_i - \ln t_{i-1} = \frac{\ln t_m - \ln t_1}{m-1}, \quad i = 2, \dots, m.$$

Al igual que en la EEE, t_1 y t_m pueden establecerse en términos de la proporción deseada de fallas antes de la primera inspección y la proporción de unidades sobrevivientes, o en su caso, mediante la restricción del tiempo de prueba.

Estrategia óptima para cuantiles (EOC) Esta es una estrategia particular para la distribución Weibull con ambos parámetros desconocidos, aunque bien pudiera replicarse para algunas otras distribuciones. La EOC consiste en determinar los tiempos de inspección que minimizan la varianza del EMV de algún cuantil de interés basándose en resultados asintóticos. Desde luego esta estrategia es la óptima cuando se trata de estimar algún cuantil, a pesar de eso tiene algunas desventajas: no necesariamente puede

aplicarse con otros modelos, está basada en resultados asintóticos y consecuentemente requiere tamaños de muestra grande, el criterio de optimalidad es muy específico y por lo tanto la estrategia puede no ser buena para estimar otros parámetros incluyendo otros cuantiles, por último, también requiere de supuestos sobre los parámetros y es muy sensible a éstos.

3.2. Estrategia de inspección propuesta

Todas las estrategias citadas en la sección anterior han sido construidas bajo supuestos y con objetivos diferentes aunque no muy distantes. Los supuestos que nosotros consideraremos para desarrollar una estrategia que bajo ciertos intereses sea óptima serán los siguientes:

- Prueba de vida con datos agrupados y una cantidad fija de inspecciones.
- Distribución de los tiempos a la falla perteneciente a la familia de log-localización-escala.
- Distribución y parámetro de forma especificados.

Ya se ha dicho suficiente acerca del primer y el segundo supuesto, ahora justificaremos un poco el tercer supuesto.

En la práctica es frecuente encontrar que productos semejantes (por ejemplo, componentes que realizan la misma función pero que son de diferentes marcas o están fabricados con materiales diferentes o bajo diferentes procesos, etc.) mantengan algunas características en común en cuanto al comportamiento probabilístico de sus tiempos a la falla. Esto se debe a que están sometidos a condiciones de desgaste muy similares y son propensos a los mismos modos de falla. Las características que en ellos se conservan regularmente permiten modelar aceptablemente todos estos productos bajo la misma distribución de log-localización-escala y el mismo parámetro de forma, por lo tanto, éstos pueden ser establecidos fácilmente como resultado de la experiencia. Parte de las aportaciones en los laboratorios de Mabe, fue dar las bases para asociar una distribución de log-localización-escala con un cierto parámetro de forma a algunas líneas de productos mediante resultados de pruebas antes realizadas en productos de la línea. Esta información se

vuelve mucho muy valiosa en situaciones como la descrita en la Sección 3.1, ya que la censura es una limitante muy fuerte para la estimación de ambos parámetros y no así para el de escala únicamente.

En caso de contar con una distribución con parámetro de forma conocido, las pruebas de vida tienen el objetivo de estimar solamente el parámetro restante α (que es como hemos nombrado al parámetro de escala). Nuestro objetivo será entonces estimarlo de la mejor manera posible y para ello nos apoyaremos en la información esperada de Fisher, que por los argumentos dados en la Sección 2.5.2, representa un buen indicador de los alcances de una estrategia de inspección determinada. En particular, dado que el parámetro a estimar es unidimensional, consideraremos que la mejor estrategia de inspección, desde el punto de vista estadístico, será aquella que maximice la información esperada de Fisher.

3.2.1. Estrategia óptima para la distribución exponencial

En esta sección se obtendrá la estrategia óptima, que de acuerdo a nuestro criterio será aquella que maximice la información esperada de Fisher, para el caso en que los tiempos a la falla tienen distribución exponencial con $E(T) = \alpha$ (y entonces $F_T(t; \alpha) = 1 - \exp(-t/\alpha)$). Esta estrategia fue propuesta anteriormente por Nelson (1977), con la diferencia de que él trabaja conceptualmente en términos de la desviación estándar asintótica de $\hat{\alpha}$ y en cuyo caso el objetivo es minimizarla.

Sea una prueba de vida bajo un esquema de m inspecciones donde t_i denota el tiempo en que se efectúa la i -ésima inspección para $i = 1, 2, \dots, m$ y n_i denota el número de fallas ocurridas en (t_{i-1}, t_i) para $i = 1, 2, \dots, m + 1$. Recordemos que bajo este contexto $t_0 = 0$ representa el inicio de la prueba y n_{m+1} representa el número de unidades que sobreviven a la prueba, de ahí que la falla de éstos se considere en $(t_m, t_{m+1} = \infty)$. La función de verosimilitud, bajo cualquier distribución de los tiempos a la falla con parámetro unidimensional θ , estará dada entonces por

$$L(\theta) = \left\{ \prod_{i=1}^m [F_T(t_i; \theta) - F_T(t_{i-1}; \theta)]^{n_i} \right\} [1 - F_T(t_m; \theta)]^{n_{m+1}}$$

Por convención entenderemos que $F_T(t_{m+1} = \infty; \theta) = 1$, por lo que escribiremos

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{m+1} [F_T(t_i; \theta) - F_T(t_{i-1}; \theta)]^{n_i}.$$

Si definimos

$$\pi_i(\theta) = F_T(t_i; \theta) - F_T(t_{i-1}; \theta) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m+1,$$

entonces

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{m+1} \pi_i^{n_i}(\theta) \\ l(\theta) &= \ln[L(\theta)] = \sum_{i=1}^{m+1} n_i \ln[\pi_i(\theta)] \\ l'(\theta) &= \sum_{i=1}^{m+1} n_i \frac{\pi_i'(\theta)}{\pi_i(\theta)} \\ l''(\theta) &= \sum_{i=1}^{m+1} n_i \left\{ \frac{\pi_i''(\theta)}{\pi_i(\theta)} - \left[\frac{\pi_i'(\theta)}{\pi_i(\theta)} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} I_\theta &= -E_\theta[l''(\theta)] \\ &= -\sum_{i=1}^{m+1} E_\theta(n_i) \left\{ \frac{\pi_i''(\theta)}{\pi_i(\theta)} - \left[\frac{\pi_i'(\theta)}{\pi_i(\theta)} \right]^2 \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^{m+1} n \pi_i(\theta) \left\{ \frac{\pi_i''(\theta)}{\pi_i(\theta)} - \left[\frac{\pi_i'(\theta)}{\pi_i(\theta)} \right]^2 \right\} \\ &= -n \sum_{i=1}^{m+1} \left\{ \pi_i''(\theta) - \frac{[\pi_i'(\theta)]^2}{\pi_i(\theta)} \right\}, \end{aligned}$$

donde $n = \sum_{i=1}^{m+1} n_i$ representa el total de componentes en prueba. Observe-

mos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1} \pi_i(\theta) &= \sum_{i=1}^{m+1} [F_T(t_i; \theta) - F_T(t_{i-1}; \theta)] \\
&= F_T(t_{m+1}; \theta) - F_T(t_0; \theta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{m+1} \pi_i^{(k)}(\theta) = \frac{d^k \sum_{i=1}^{m+1} \pi_i(\theta)}{d\theta^k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nota 1 *Resultado de esto es que*

$$\begin{aligned}
E[S(\theta)] &= E[l'(\theta)] = E\left(\sum_{i=1}^{m+1} n_i \frac{\pi'_i}{\pi_i}\right) = \sum_{i=1}^{m+1} E(n_i) \frac{\pi'_i}{\pi_i} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} n \pi_i \frac{\pi'_i}{\pi_i} = n \sum_{i=1}^{m+1} \pi'_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

De esta manera, la información esperada se reduce a

$$I_\theta = n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\pi'_i(\theta)]^2}{\pi_i(\theta)} = n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left[\frac{d}{d\theta} F_T(t_i; \theta) - \frac{d}{d\theta} F_T(t_{i-1}; \theta) \right]^2}{F_T(t_i; \theta) - F_T(t_{i-1}; \theta)}.$$

Tomando las debidas consideraciones en la notación como consecuencia de la convención $F_T(t_{m+1} = \infty; \theta) = 1$ y de que $F_T(t_0 = 0; \theta) = 0$, lo desarrollado hasta este punto es válido para estrategias de inspección contenidas en el soporte de cualquier distribución de los tiempos a la falla con parámetro

unidimensional θ . En particular para el caso exponencial

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left\{ \frac{d}{d\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\alpha}\right) \right] - \frac{d}{d\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{i-1}}{\alpha}\right) \right] \right\}^2}{\left[1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\alpha}\right) \right] - \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{i-1}}{\alpha}\right) \right]} \\
&= n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left[\frac{t_{i-1}}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{t_{i-1}}{\alpha}\right) - \frac{t_i}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{t_i}{\alpha}\right) \right]^2}{\exp\left(-\frac{t_{i-1}}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{t_i}{\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

En esta expresión puede apreciarse que la información esperada de Fisher es directamente proporcional al tamaño de muestra, lo cual hace sentido con lo mencionado en secciones anteriores. Por otro lado, lo que a nosotros nos interesa es ver a I_α únicamente como función de los tiempos de inspección (con n y α constantes) y entonces maximizarla. Por la forma de I_α , la estrategia óptima será independiente del tamaño de muestra y quedará solo en términos de α .

Para facilitar los cálculos definiremos el vector $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{m+1})$, con $z_i = \ln t_i/\alpha$ para $i = 0, 1, \dots, m+1$, entendiendo $z_0 = -\infty$ y $z_{m+1} = \infty$. De esta manera, reescribiendo I_α en términos de \mathbf{z} resulta

$$I_\alpha = \frac{n}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left\{ \exp(z_{i-1}) \exp[-\exp(z_{i-1})] - \exp(z_i) \exp[-\exp(z_i)] \right\}^2}{\exp[-\exp(z_{i-1})] - \exp[-\exp(z_i)]},$$

y para maximizar esta expresión, vista como función de los tiempos de inspección estandarizados, bastará con maximizar la sumatoria, la cual es directamente proporcional a la información esperada de Fisher. Por tal motivo, utilizaremos

$$\Lambda_\alpha = \frac{\alpha^2}{n} I_\alpha$$

para medir la calidad de una estrategia estandarizada.

El procedimiento para determinar la estrategia de inspección óptima será encontrando \mathbf{z} que maximice Λ_α . A este vector se le llamará la estrategia óptima estandarizada denotándola por \mathbf{z}^* y a partir de ella se obtendrá la estrategia óptima en tiempo real \mathbf{t}^* mediante las ecuaciones

$$t_i^* = \alpha \exp(z_i^*), \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m.$$

Cuando no existe ninguna restricción en la duración de prueba, este método tiene la ventaja de que z^* no depende más que del número de inspecciones, en consecuencia, cualquier prueba bajo la distribución exponencial con el mismo número de inspecciones se basará en los mismos z_i^* 's independientemente del parámetro de la distribución.

La estrategia de inspección que hemos construido, como algunas de las ya mencionadas en la Sección 3.1.1, tiene la desventaja de estar en función del verdadero valor del parámetro, cosa que desde luego no tenemos, pues en tal caso la prueba no tendría motivo. Debido a esto, será necesario hacer supuestos sobre el valor de α y la calidad de nuestra estrategia dependerá mucho de tales supuestos. En general esta situación caracteriza a los problemas de diseño óptimo.

Observemos que el signo de cada z_i^* determina si la correspondiente inspección en escala real se hará por debajo o por arriba del α supuesto.

Método para maximizar Λ_α Bajo el modelo exponencial se puede asegurar que el máximo de Λ_α siempre existe y es único con o sin restricción de tiempo (ver el Apéndice 5.3.1). De cualquier manera, si se desea maximizar Λ_α a través de un método numérico, el costo computacional suele incrementarse exponencialmente a medida que se introducen más variables (en nuestro caso cada inspección representaría una variable), por tal motivo, debe ponerse especial cuidado en el método a utilizar. En caso de que no se tenga restricción de tiempo, la estrategia óptima estandarizada será aquella que satisfaga las ecuaciones

$$z_i^* = \ln \left(\sum_{j=1}^i \vartheta_j \right), \text{ con } i = 1, 2, \dots, m.$$

Los valores de los ϑ_j 's están dados en la Tabla 2.

$\vartheta_m = 1.5936$	$\vartheta_{m-1} = 1.0176$	$\vartheta_{m-2} = 0.7540$	$\vartheta_{m-3} = 0.6004$
$\vartheta_{m-4} = 0.4993$	$\vartheta_{m-5} = 0.4276$	$\vartheta_{m-6} = 0.3739$	$\vartheta_{m-7} = 0.3323$
$\vartheta_{m-8} = 0.2991$	$\vartheta_{m-9} = 0.2719$	$\vartheta_{m-10} = 0.2492$	$\vartheta_{m-11} = 0.2301$
$\vartheta_{m-12} = 0.2137$	$\vartheta_{m-13} = 0.1994$	$\vartheta_{m-14} = 0.1870$	$\vartheta_{m-15} = 0.1760$
$\vartheta_{m-16} = 0.1662$	$\vartheta_{m-17} = 0.1575$	$\vartheta_{m-18} = 0.1496$	$\vartheta_{m-19} = 0.1425$

Tabla 2: Valores para construir las estrategias óptimas bajo el modelo exponencial.

Por ejemplo, la estrategia óptima estandarizada para una prueba sin restricción de tiempo con $m = 2$ inspecciones será

$$\begin{aligned} z_1^* &= \ln \vartheta_1 = \ln \vartheta_{m-1} = \ln 1,0176 \\ z_2^* &= \ln (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \ln (\vartheta_{m-1} + \vartheta_m) = \ln 2,6112 \end{aligned}$$

mientras que para $m = 3$ será

$$\begin{aligned} z_1^* &= \ln \vartheta_1 = \ln \vartheta_{m-2} = \ln 0,7540 \\ z_2^* &= \ln (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \ln (\vartheta_{m-2} + \vartheta_{m-1}) = \ln 1,7716 \\ z_3^* &= \ln (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = \ln (\vartheta_{m-2} + \vartheta_{m-1} + \vartheta_m) = \ln 3,3652 \end{aligned}$$

En el Apéndice 5.3.1 se da la justificación matemática de éste método y el algoritmo para reproducir los valores de la Tabla 2, la cual permite obtener las estrategias óptimas estandarizadas desde 1 a 20 inspecciones (más de las necesarias para nuestro objetivo).

Por otra parte, bajo la consideración de que $\exp(z_0^*) = 0$, observemos que

$$t_i^* - t_{i-1}^* = \alpha \exp(z_i^*) - \alpha \exp(z_{i-1}^*) = \alpha \sum_{j=1}^i \vartheta_j - \alpha \sum_{j=1}^{i-1} \vartheta_j = \alpha \vartheta_i,$$

con $i = 1, 2, \dots, m$. Por lo tanto, los ϑ_j 's pueden interpretarse como la diferencia entre inspecciones en múltiplos de α tal y como se muestra en la Figura 5. Al fondo de la gráfica se muestra con una línea segmentada la función de densidad de los tiempos a la falla ampliada y desplazada en el eje y a través de una transformación lineal c . Nótese cómo las estrategias óptimas con menos inspecciones reproducen la cola de las estrategias con más inspecciones. Esto se debe a la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, es decir, en una prueba de vida planeada con una estrategia óptima de m inspecciones, las unidades que sobrevivan a las primeras m_0 inspecciones serán percibidas como nuevas y como las estrategias óptimas no dependen del número de productos en prueba, las restantes $m - m_0$ inspecciones equivaldrán a establecer una estrategia óptima de $m - m_0$ inspecciones considerando la inspección m_0 como punto inicial de prueba.

Estrategia óptima bajo restricción en la duración de prueba Cuando se tiene restricción de tiempo la obtención de una estrategia óptima estandarizada se complica, ya que los ϑ_i 's dependerán de tal restricción, la cual deberá introducirse al modelo a través de z_m y para ello se requerirá de los supuestos sobre los parámetros. Si la prueba de vida está restringida a una duración máxima t_r , la estrategia que se lleve a cabo debe satisfacer la condición $t_m \leq t_r$.

Como ya se ha mencionado antes, podría pensarse que entre más larga sea una prueba de vida mayor será la información que ésta arroje. Por tal motivo, ante una restricción de tiempo podría optarse por terminar la prueba en t_r esperando observar la mayor cantidad de fallas posible, es decir, se establecería la condición $t_m = t_r$ y entonces $z_m = \ln(t_r/\alpha)$. Con esta restricción la estrategia óptima estandarizada se obtendría simplemente fijando z_m y maximizando Λ_α con respecto al resto de los z_i 's.

La Figura 6 muestra el comportamiento de Λ_α como función de z_m para diferentes valores de m . Como puede verse en todas las curvas, Λ_α crece hasta llegar a un óptimo que corresponde a la estrategia óptima sin restricción de tiempo, posteriormente éste decrece monótonamente, lo cual indica que la estrategia óptima no es aquella que continúa hasta presenciar la falla de todas las unidades. Este comportamiento se debe a que la prueba está censurada por intervalos y el número de inspecciones es fijo, de esta manera, una mayor

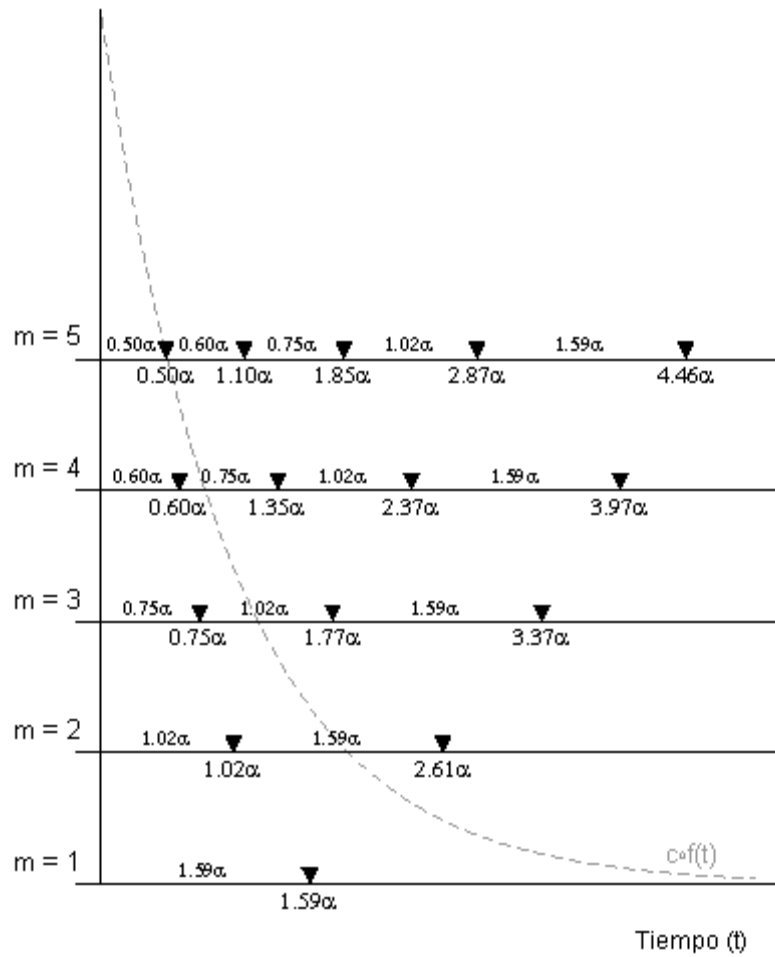


Figura 5: Estrategias de inspección sin restricción de tiempo bajo el modelo exponencial.

duración de prueba trae como consecuencia intervalos de censura más amplios que finalmente se traducen en pérdida de información. Este fenómeno desde luego no ocurre en pruebas de vida con datos no agrupados (pruebas sin censura) o pruebas de vida con datos agrupados donde el alargamiento de la prueba se hace a través de inspecciones extra, en tales casos la curva es estrictamente creciente pero convergente.

En el Apéndice 5.2, Lema 6 se muestra que ante la restricción $z_m = cte$ el límite cuando $z_m \rightarrow \infty$ de Λ_α , evaluado en la estrategia óptima de m inspecciones, converge a Λ_α evaluado en la estrategia óptima de $m - 1$ inspecciones sin restricción en z_m . El resultado es muy intuitivo, ya que cuando $z_m \rightarrow \infty$ también $t_m \rightarrow \infty$ independientemente de los parámetros de la distribución del tiempo a la falla del producto, y entonces, la probabilidad de que alguna unidad sobreviva a este instante tiende a 0, por lo tanto, la información que aporte la última inspección se vuelve despreciable. De igual forma la restricción $z_{m-1} < z_m$ tiende a desaparecer y como consecuencia la maximización se reduce a $m - 1$ inspecciones sin restricción de tiempo. Este comportamiento puede apreciarse en la Figura 7. En esta gráfica, la línea muy tenue que aparece punteada horizontalmente corresponde a la duración de prueba óptima, de igual forma, las líneas que aparecen verticalmente corresponden a los tiempos de inspección de la estrategia óptima sin restricción de tiempo con una inspección menos.

Por lo anterior, cuando la prueba de vida está limitada en su duración, el valor óptimo de z_m bajo el modelo exponencial será

$$z_m^* = \min \{ z_{opt}, z_r \},$$

donde z_{opt} representa la duración de prueba óptima sin restricción de tiempo y z_r la duración de prueba máxima permitida, ambas en escala estandarizada. Esta conclusión en general es válida bajo cualquier distribución que, como la distribución exponencial, asegure que no existe un máximo local de Λ_α para $z_m < z_{opt}$. Ver Lema 7.

Extensión a la distribución Weibull Como se menciona en la Sección 2.3.1, si un variable aleatoria T se distribuye Weibull con parámetros (α, β) , entonces T^β se distribuye exponencialmente con parámetro $\alpha^\beta = E(T^\beta)$.

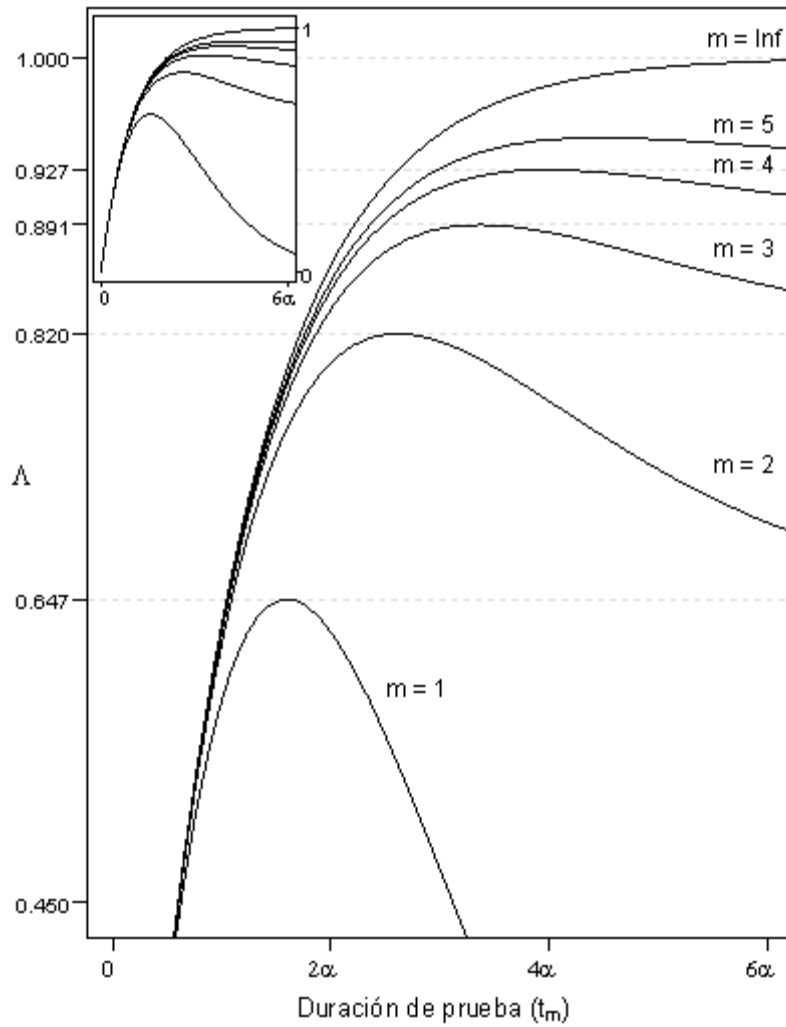


Figura 6: Comportamiento del indicador de calidad como función del tiempo de prueba bajo el modelo exponencial.

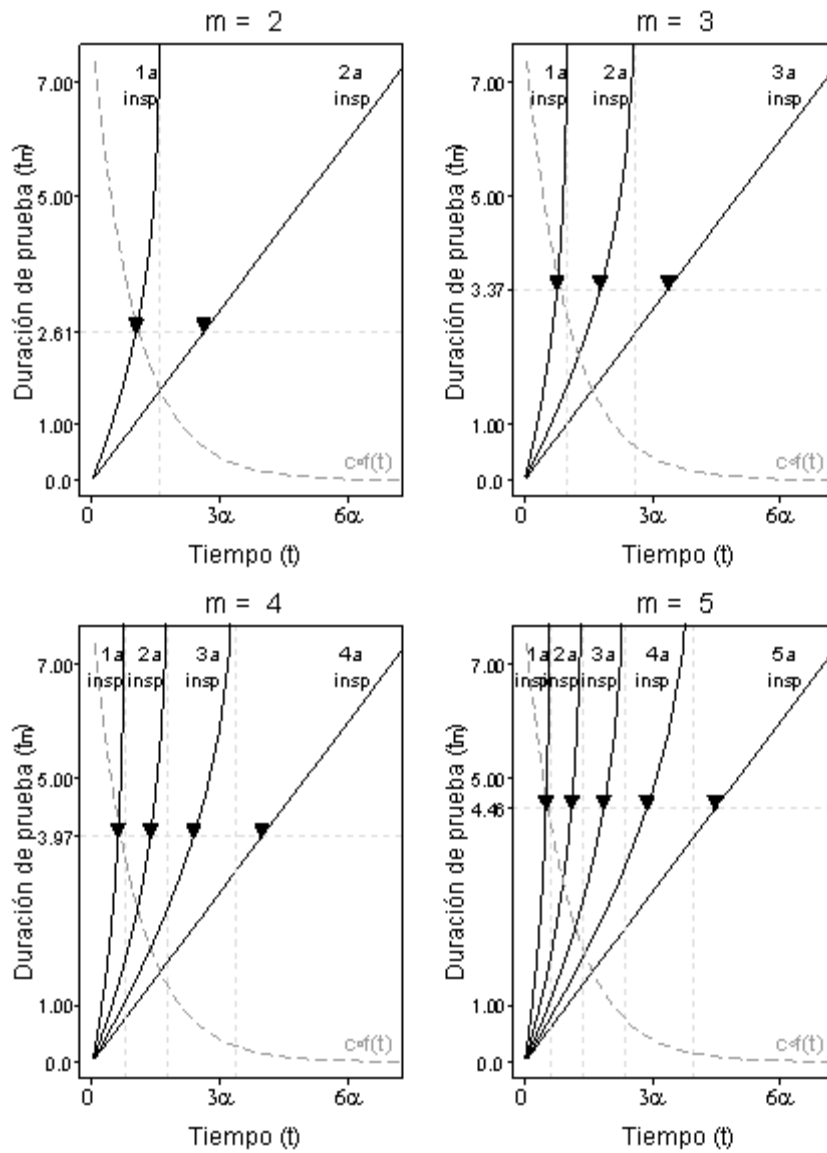


Figura 7: Comportamiento de las estrategias óptimas cuando se cambia la duración de prueba bajo el modelo exponencial.

Por lo tanto, cuando los tiempos a la falla se distribuyen Weibull, la estandarización $z_i = \ln(t_i^\beta / \alpha^\beta)$ en los tiempos de inspección reduce la forma de Λ_α al caso exponencial. En consecuencia, las estrategias de inspección óptimas estandarizadas bajo la distribución Weibull serán las mismas que bajo la distribución exponencial con y sin restricción en z_m , pero con la diferencia de que la transformación a la escala de tiempo real se hará mediante las ecuaciones

$$t_i = \alpha \exp \frac{z_i}{\beta}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, m.$$

En nuestro contexto se está suponiendo que el valor de β es conocido por lo que solo se tendrán que hacer supuestos sobre el valor de α . Por otra parte, para valores muy grandes de β los tiempos de inspección en escala real tienden a concentrarse más alrededor de α , mientras que para valores muy pequeños de β cada inspección tiende a alejarse de α ya sea en dirección a 0 ó en dirección a ∞ (dependiendo de su signo en la escala estandarizada). En ambos casos la estrategia en tiempo real tiende a diferenciarse más de la estrategia tradicional.

En general, la duración de prueba y el parámetro de forma serán muy importantes en el impacto que pueda tener una estrategia sobre otra. En la Sección 3.4 se hace un estudio más profundo al respecto comparando la estrategia óptima con la estrategia tradicional por ser ésta última la más empleada en la práctica.

Cabe resaltar que el procedimiento utilizado en esta sección para llegar a las estrategias óptimas bajo el modelo exponencial facilita el estudio de algunas de las propiedades aquí mencionadas que Nelson (1977) omite en su artículo, pero sobre todo, permite una fácil extensión a la familia de log-localización-escala.

3.2.2. Generalización a la familia de log-localización-escala

En la Sección 3.2.1 mostramos que para cualquier prueba de vida con datos agrupados

$$I_\theta = n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left[\frac{d}{d\theta} F_T(t_i; \theta) - \frac{d}{d\theta} F_T(t_{i-1}; \theta) \right]^2}{F_T(t_i; \theta) - F_T(t_{i-1}; \theta)},$$

donde F_T es la distribución de los tiempos a la falla y θ es un parámetro unidimensional. Consideremos ahora las distribuciones de log-localización-escala con parámetro de forma conocido, en tal caso, θ equivale al parámetro de escala y la información esperada puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left[\frac{d}{d\alpha} \Phi \left(\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right) - \frac{d}{d\alpha} \Phi \left(\beta \ln \frac{t_{i-1}}{\alpha} \right) \right]^2}{\Phi \left(\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right) - \Phi \left(\beta \ln \frac{t_{i-1}}{\alpha} \right)} \\
&= n \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left[\frac{\beta}{\alpha} \phi \left(\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \phi \left(\beta \ln \frac{t_{i-1}}{\alpha} \right) \right]^2}{\Phi \left(\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right) - \Phi \left(\beta \ln \frac{t_{i-1}}{\alpha} \right)} \\
&= n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})},
\end{aligned}$$

con $z_i = \beta \ln(t_i/\alpha)$ para todo i .

Al igual que para el caso exponencial, maximizar I_α como función de los tiempos de inspección estandarizados equivale simplemente a maximizar la parte correspondiente a la sumatoria, por lo que en general definimos

$$\Lambda_\alpha = \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 I_\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})}$$

como el índice de calidad para estrategias de inspección bajo distribuciones pertenecientes a la familia de log-localización-escala.

Método numérico para maximizar Λ_α En la búsqueda de estrategias óptimas, ya sea a través de métodos analíticos o métodos numéricos, es importante cuestionarnos acerca de la forma de Λ_α con el fin de asegurar que se cumplan nuestros objetivos, es decir, nos interesaría saber en principio si nuestro índice de calidad realmente puede ser maximizado. En tal caso, también nos interesaría que nuestros métodos de maximización nos lleven a un máximo global y no solamente a un máximo local. Finalmente también podría ser de interés saber si el máximo global se puede obtener con más de una estrategia de inspección. En caso de que Λ_α no pudiera maximizarse,

nuestro objetivo, y por lo tanto los métodos empleados, estarían encaminados a encontrar regiones (conjuntos de estrategias) de calidad alta.

Las distribuciones de log-localización-escala que regularmente se emplean en Confiabilidad son distribuciones muy bien comportadas, donde la función de densidad de la distribución de localización-escala asociada generalmente cumple los siguientes supuestos:

- $\phi \in C(\mathbb{R})$
- $\phi(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \phi'(z) = 0$

Cuando se tienen estas tres condiciones aunadas a los supuestos originales, el método que hemos construido permite evadir todos los cuestionamientos planteados en el párrafo anterior acerca de Λ_α en la búsqueda de una estrategia óptima (ya sea con o sin restricción de tiempo). Con este método se asegura que la estrategia obtenida corresponda a un máximo global y en caso de existir más de una estrategia óptima, el método arrojará aquella estrategia que resulte en una menor duración de prueba.

Algo que es importante hacer notar es que el supuesto $\phi(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ permite trabajar indistintamente cada estrategia de inspección en términos de proporciones esperadas de fallas en lugar de tiempos estandarizados, es decir, cualquier estrategia de inspección dada por $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{m+1})$, donde z_i representa una estandarización del instante real de la i -ésima inspección, podrá expresarse también como $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{m+1})$, con $p_0 = 0$, $p_{m+1} = 1$ y $p_i = \Phi(z_i)$ para $i = 1, 2, \dots, m$. De esta manera, p_i representa la proporción esperada de fallas desde el inicio de la prueba hasta el instante de la i -ésima inspección.

Si definimos $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$\rho(p) = \begin{cases} \phi \circ \Phi^{-1}(p) & \text{si } p \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } p \in \{0, 1\} \end{cases},$$

entonces nuestro índice de calidad para una estrategia determinada puede ser expresado en términos de \mathbf{p} como sigue

$$\Lambda_\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})]^2}{p_i - p_{i-1}}, \quad \text{con } p_0 = 0, p_{m+1} = 1.$$

Esta alternativa permite definir Λ_α en un conjunto acotado, lo cual facilita su estudio y el planteamiento del método de maximización mostrado a continuación. La notación será estandar en lo siguiente, por lo que no habrá necesidad de enfatizar cuando una estrategia sea expresada en términos de tiempos estandarizados y cuando sea a través proporciones esperadas de fallas.

Nuestro método de maximización se basa en el hecho de que la estrategia óptima que buscamos (\mathbf{p}^*) debe satisfacer la condición

$$\left[2\rho'(p_i) - \frac{\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}} - \frac{\rho(p_i) - \rho(p_{i+1})}{p_i - p_{i+1}} \right] \Big|_{\mathbf{p}^*} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m',$$

o equivalentemente

$$\rho'(p_i^*) = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho(p_i^*) - \rho(p_{i-1}^*)}{p_i^* - p_{i-1}^*} + \frac{\rho(p_i^*) - \rho(p_{i+1}^*)}{p_i^* - p_{i+1}^*} \right] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m',$$

donde m' es $m - 1$ si la prueba está restringida en su duración y m si no lo está. La justificación teórica de estas ecuaciones se da en el Apéndice 5.2.

Esta condición indica que si a la i -ésima inspección le asociamos una recta tangente a ρ (con punto de tangencia en p_i), una recta secante a ρ que llamaremos antecesora (con puntos de intersección en p_{i-1} y p_i) y otra recta secante a ρ que llamaremos sucesora (con puntos de intersección en p_i y p_{i+1}), entonces la estrategia óptima será aquella en la cual para cada inspección la pendiente de su recta tangente sea igual al promedio de las pendientes de sus rectas secantes antecesora y sucesora. En consecuencia, si se conoce la primera inspección correspondiente a una estrategia óptima se pueden obtener su recta secante antecesora y su recta tangente, y con ellas a su vez se puede obtener la recta secante sucesora asociada a la primera inspección que nos llevará a conocer la segunda inspección óptima. Una vez conocidas la primera y la segunda inspección óptimas estaremos en condiciones de encontrar la tercera inspección con el mismo procedimiento. Este proceso se repite hasta obtener la última inspección desconocida. En caso de que la primera inspección se haya escogido adecuadamente, es decir, que verdaderamente corresponda a una estrategia óptima, entonces la recta secante sucesora de la última inspección desconocida se intersectará con ρ en p_m cuando existe restricción en la duración de prueba (en este caso p_m estará establecido desde

un inicio a partir de p_r) y en $p_{m+1} = 1$ si no se tiene tal restricción. La Figura 8 muestra este comportamiento para una estrategia óptima de 3 inspecciones con y sin restricción de tiempo bajo el modelo lognormal.

El siguiente algoritmo consiste entonces en establecer \mathbf{p} como función de p_1 y encontrar p_1^* tal que

$$2\rho'(p_{m'}(p_1^*)) - \frac{\rho(p_{m'}(p_1^*)) - \rho(p_{m'-1}(p_1^*))}{p_{m'}(p_1^*) - p_{m'-1}(p_1^*)} - \frac{\rho(p_{m'}(p_1^*)) - \rho(p_{m'+1}(p_1^*))}{p_{m'}(p_1^*) - p_{m'+1}(p_1^*)} = 0.$$

Pseudocódigo del método de maximización de Λ_α

función: *estr.opt*

entrada: $m \in \mathbb{N}, p_r \in (0, 1]$

salida: vector con estrategia óptima estandarizada \mathbf{z}^* ,
vector de proporciones óptimas esperadas de fallas \mathbf{p}^* ,
valor máximo de Λ

sea el vector $\bar{x}_1 = \{x \mid \text{error}(x, m, p_r, 1) = 0\}$

si $p_r < 1$ entonces

 sea el vector $\bar{x}_2 = \{x \mid \text{error}(x, m, p_r, p_r) = 0\}$

si no entonces

$\bar{x}_2 = \text{nulo}$

sea $\bar{x}_0 =$ concatenación de \bar{x}_1 y \bar{x}_2

sea $dim_1 =$ longitud de \bar{x}_1

sea $dim_0 =$ longitud de \bar{x}_0

sea el vector \mathbf{p}_{aux} de longitud dim_0 , con $p_{aux[i]} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq dim_1 \\ p_r & \text{en otro caso} \end{cases}$

sea $A = \{i \mid \text{lambda}(\text{estrategia}(x_{0[i]}, m, p_r, p_{aux[i]})) = \text{máx lambda}(\text{estrategia}(x_{0[i]}, m, p_r, p_{aux[i]}))\}$

sea $i^* \in A$ tal que

$$\text{estrategia}(x_{0[i^*]}, m, p_r, p_{aux[i^*]})_{[m]} = \text{mín}_A \left\{ \text{estrategia}(x_{0[i]}, m, p_r, p_{aux[i]})_{[m]} \right\}$$

$\mathbf{p}^* = \text{estrategia}(x_{0[i^*]}, m, p_r, p_{aux[i^*]})$

$\Lambda = \text{lambda}(\mathbf{p}^*)$

sea \mathbf{z}^* un vector de dimensión m

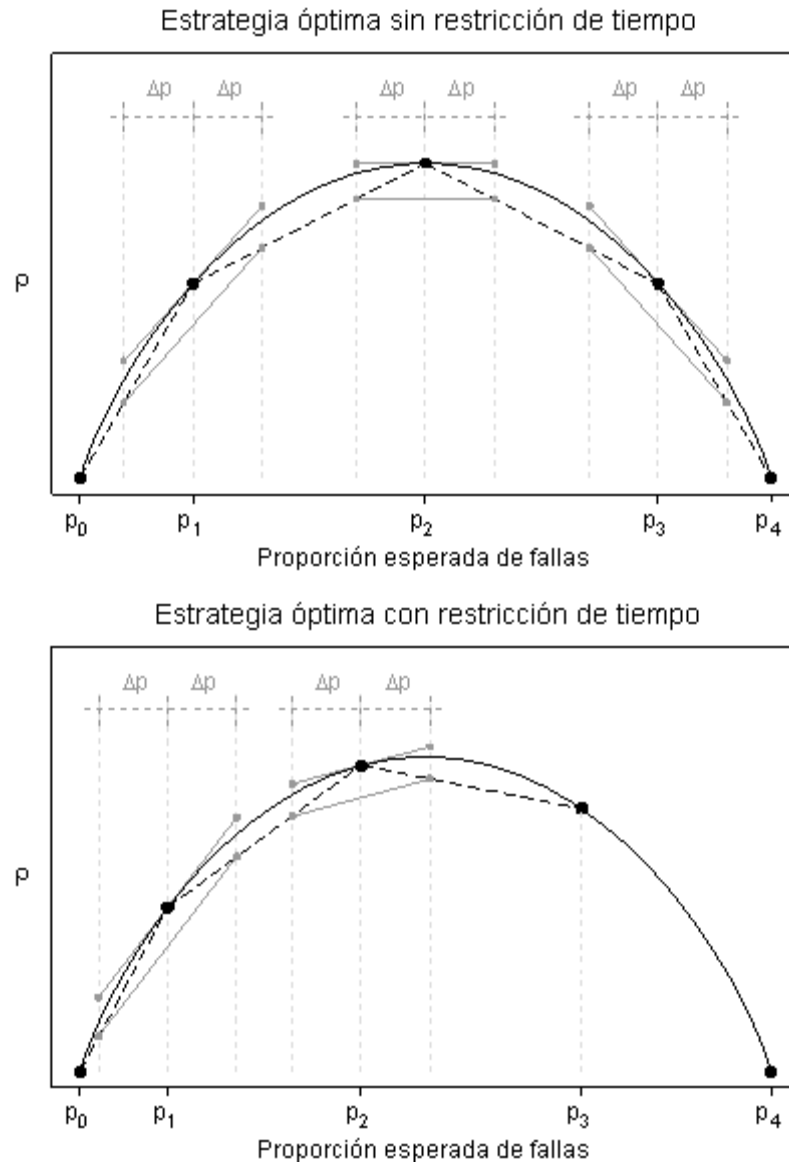


Figura 8: Comportamiento de la estrategia óptima sobre ρ .

para i desde 1 hasta m hacer

$$z_{[i]}^* = \Phi^{-1}(p_{[i]})$$

regresa $\mathbf{z}^*, \mathbf{p}^*, \Lambda$

función: *lambda*

entrada: vector de longitud variable \mathbf{p} , con $0 < p_{[i]} < p_{[i+1]} < 1 \quad \forall i$

salida: Λ

sea $m =$ longitud de \mathbf{p}

$$\text{sea } \Lambda = \frac{\rho(p_1)^2}{p_1} + \frac{\rho(p_{[m]})^2}{1 - p_{[m]}}$$

para i desde 1 hasta $m - 1$ hacer

$$\Lambda = \Lambda + \frac{[\rho(p_{i+1}) - \rho(p_i)]^2}{p_{i+1} - p_i}$$

fin

regresa Λ

función: *estrategia*

entrada: $x \in (0, 1), m \in \mathbb{N}, p_r \in (0, 1], p_{aux} \in (0, 1]$

salida: vector \mathbf{p} de longitud m

si $p_{aux} < 1$ entonces

$$m = m - 1$$

sean *padres, hijos, entrada* vectores de dimensión indefinida

$$hijos_{[0]} = 0$$

$$hijos_{[1]} = x$$

$$padres_{[1]} = 0$$

$$entrada_{[1]} = 1$$

sea $i = 1$

mientras ($i \leq$ longitud de *entrada*) y ($entrada_{[i]} < m$) hacer

$$\text{sea } \xi = 2\rho'(hijos_{[i]}) - \frac{\rho(hijos_{[i]}) - \rho(hijos_{[padres_{[i]}]})}{hijos_{[i]} - hijos_{[padres_{[i]}]}}$$

si $\xi \neq \rho'(hijos_{[i]})$ entonces

$$\text{sea } A = \left\{ \frac{\rho(y) - \rho(hijos_{[i]})}{y - hijos_{[i]}} \mid hijos_{[i]} < y \leq 1 \right\} \cup \{\rho'(hijos_{[i]})\}$$

si $\min A < \xi < \max A$ entonces

$$\text{sea el vector } aux = \left\{ y \in (hijos_{[i]}, 1) \left| \xi - \frac{\rho(y) - \rho(hijos_{[i]})}{y - hijos_{[i]}} = 0 \right. \right\}$$

aux_padres = vector de longitud igual a la longitud
de aux con cada entrada igual a i

$aux_entrada$ = vector de longitud igual a la longitud
de aux con cada entrada igual a $1+entrada_i$

$hijos$ = concatenación de $hijos$ y aux

$padres$ = concatenación de $padres$ y aux_padres

$entrada$ = concatenación de $entrada$ y $aux_entrada$

$i = i + 1$

fin

sea $A = \{i \mid entrada_{[i]} = m, hijos_{[i]} < p_r\}$

si A no es *nulo* entonces

$dim_entrada$ = longitud de $entrada$

sea e un vector de longitud $dim_entrada$

para i en A

$$e_{[i]} = \left| 2\rho'(hijos_{[i]}) - \frac{\rho(hijos_{[i]}) - \rho(hijos_{[padres_{[i]}}])}{hijos_{[i]} - hijos_{[padres_{[i]}}]} - \frac{\rho(p_{aux}) - \rho(hijos_{[i]})}{p_{aux} - hijos_{[i]}} \right|$$

fin

$A = \{k \in A \mid e_{[k]} = \min_A \{e_{[i]}\}\}$

si $|A| > 1$ entonces

sea P una matriz de dimensiones $dim_entrada$ x m

para i en A

sea $k = i$

para j desde m hasta 1

$$p_{[i,j]} = hijos_{[k]}$$

$$k = padres_{[k]}$$

fin

fin

$A = \{k \in A \mid \lambda(P_{[k,\cdot]}, m) = \max_A \{\lambda(P_{[i,\cdot]}, m)\}\}$

sea $k \in A$ tal que $hijos_{[k]} = \min_A \{hijos_{[i]}\}$

sea \mathbf{p} un vector de dimensión m

para i desde m hasta 1

$$p_i = hijos_{[k]}$$

$$k = padres_{[k]}$$

fin
 regresa \mathbf{p}
 si no entonces
 regresa *nulo*

función: *error*

entrada: $x \in (0, 1), m \in \mathbb{N}, p_r \in (0, 1], p_{aux} \in (0, 1]$
 salida: e
 sea $\mathbf{p} = \text{estrategia}(x, m, p_r, p_{aux})$
 si \mathbf{p} no es *nulo* entonces
 si $p_{aux} < 1$ entonces
 $m = m - 1$
 si $m = 1$ entonces
 sea $\xi_m = \frac{\rho(p_{[m]}) - \rho(p_{[m-1]})}{p_{[m]} - p_{[m-1]}}$
 si no entonces
 sea $\xi_m = \frac{\rho(p_{[m]})}{p_{[m]}}$
 sea $\xi_{m+1} = \frac{\rho(p_{aux}) - \rho(p_{[m]})}{p_{aux} - p_{[m]}}$
 sea $e = 2\rho'(p_{[m]}) - \xi_m - \xi_{m+1}$
 regresa e
 si no entonces
 resgresa *nulo*

Resultados gráficos para algunas distribuciones Las Figuras 10 y 11 muestran que para los modelos lognormal y loglogístico las estrategias óptimas estandarizadas sin restricción de tiempo son siempre simétricas alrededor del cero. Este comportamiento se da siempre que ϕ , la función de densidad de localización-escala asociada, es simétrica sobre el cero y el máximo de Λ_α es único, tal y como sucede con la distribución loglogística (ver el Apéndice 5.3.2), y por su parecido, es razonable pensar que también ocurra con la lognormal. (El estudio de ésta última se dificulta por tener una función generadora Φ expresada mediante una integral.) El hecho se debe a que Λ_α hereda la simetría de ϕ , es decir, $\Lambda_\alpha(z_0, z_1, \dots, z_{m+1}) = \Lambda_\alpha(-z_{m+1}, -z_m, \dots, -z_0)$ y

entonces que la estrategia óptima sea única implica que $z_i^* = -z_{m+1-i}^*$ para todo i . En especial para la distribución loglogística, es de llamar la atención que las estrategias óptimas coinciden con las estrategias equiprobables (ver el Apéndice 5.3.2). Con la distribución Weibull el comportamiento es distinto, en la Figura 9 puede apreciarse que la estrategia óptima tiende a buscar más información en la cola superior de la distribución de los tiempos a la falla.

En las Figuras 12, 13 y 14, al igual que para la distribución exponencial como caso particular de la distribución Weibull, se observa que el alargamiento de la prueba se traduce en una pérdida de información cuando se excede de un umbral, y en el límite, dicha pérdida de información corresponde a la pérdida de una inspección, lo cual se aprecia con más detalle en las Figuras 15, 16 y 17. En particular, la distribución Weibull es más sensible a tiempos largos de prueba ya que la convergencia de las estrategias a la estrategia óptima sin restricción de tiempo con una inspección menos se da considerablemente más rápido que con las otras dos distribuciones, esto se debe a que la distribución Weibull tiene la cola superior más ligera. Por su parte, la distribución loglogística es la que converge más lentamente por ser aquella con la cola superior más pesada de las tres.

En general, con los modelos lognormal y loglogístico se observan comportamientos similares. Esto es de esperarse por la similitud de las distribuciones, sin embargo, con la distribución lognormal se puede ver que las estrategias están más concentradas y el efecto de la última inspección se pierde más rápido cuando tiende a infinito, lo cual se debe a que la distribución normal tiene colas menos pesadas que la logística.

3.3. Propiedades de la estrategia propuesta

3.3.1. Invarianza ante reparametrización

En la práctica realmente no es de interés directo conocer el parámetro de escala de la distribución de los tiempos a la falla, ya que regularmente las decisiones se toman bajo el conocimiento de la confiabilidad del producto en diferentes instantes (por ejemplo al término de su periodo de garantía) o bajo el conocimiento de ciertos cuantiles (por ejemplo para definir o redefinir

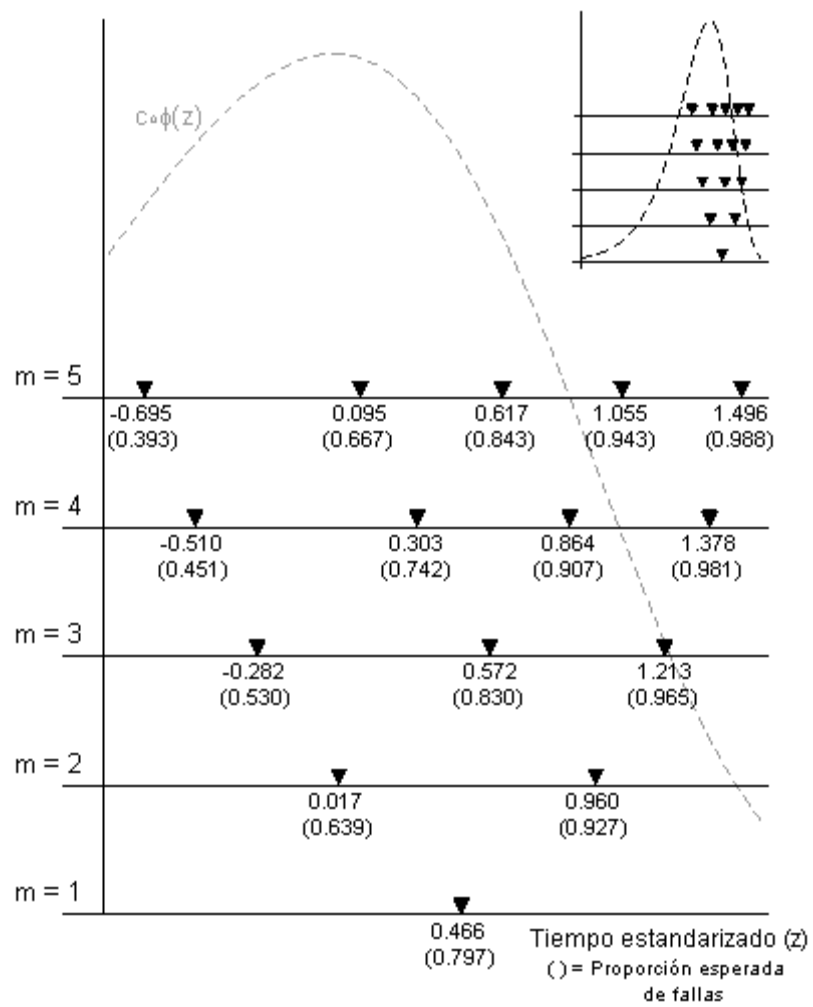


Figura 9: Estrategias óptimas sin restricción de tiempo bajo el modelo Weibull.

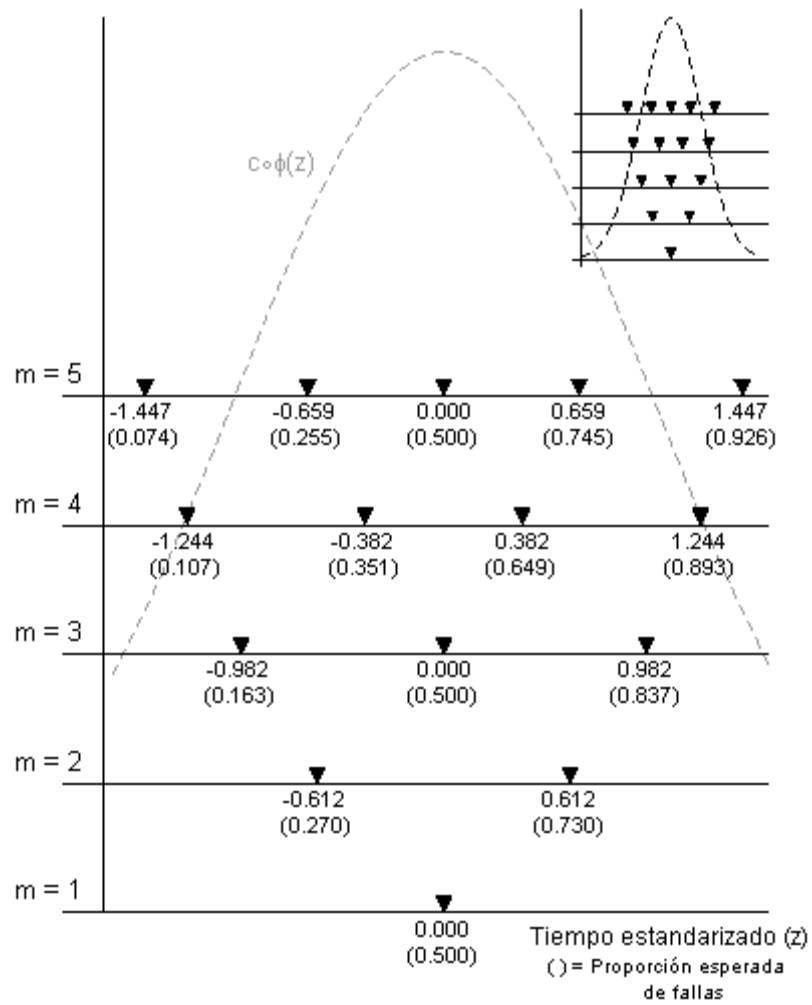


Figura 10: Estrategias óptimas sin restricción de tiempo bajo el modelo log-normal.

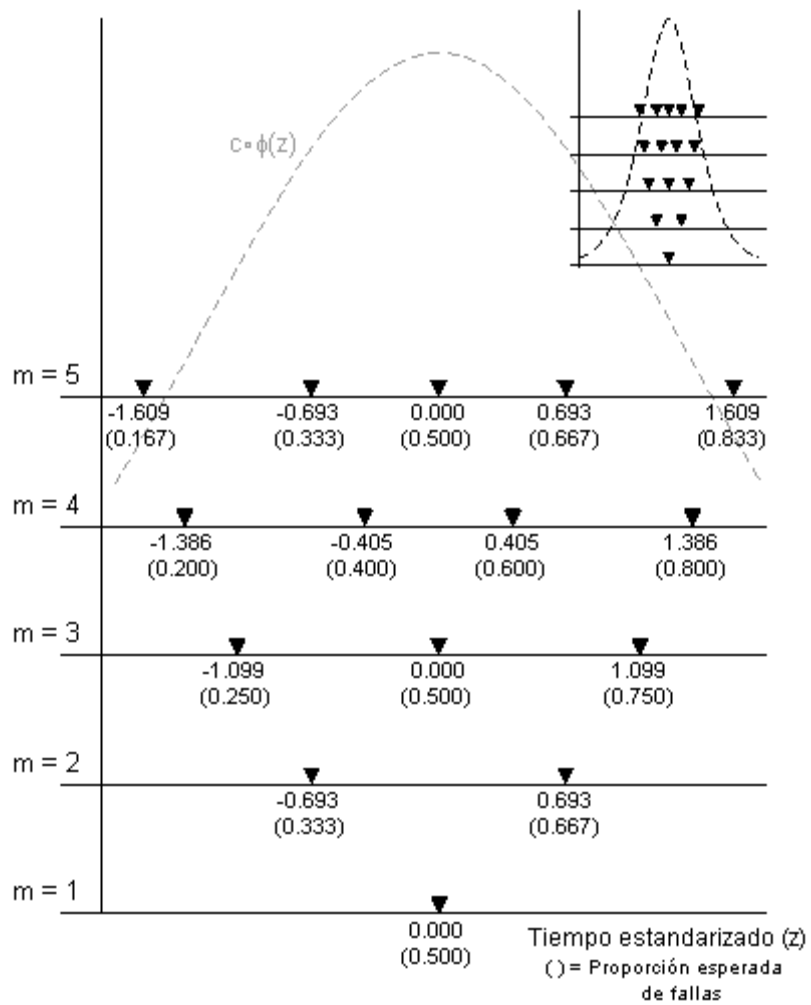


Figura 11: Estrategias óptimas sin restricción de tiempo bajo el modelo loglogístico.

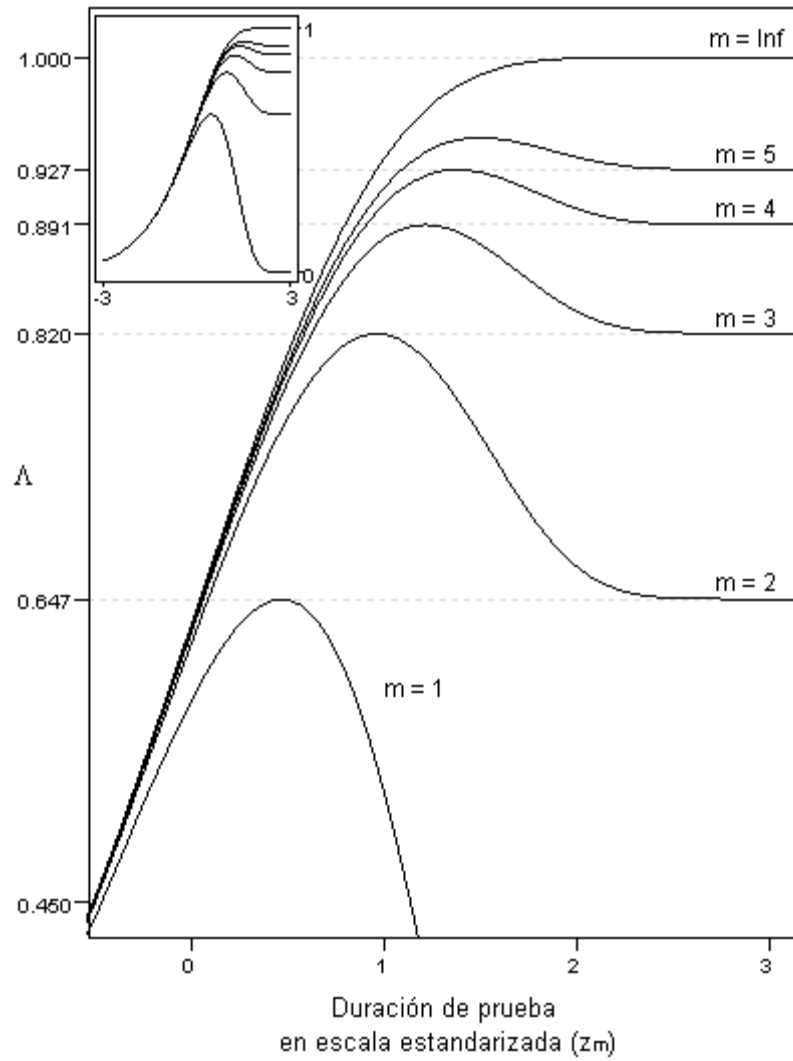


Figura 12: Comportamiento del indicador de calidad como función del tiempo de prueba bajo el modelo Weibull.

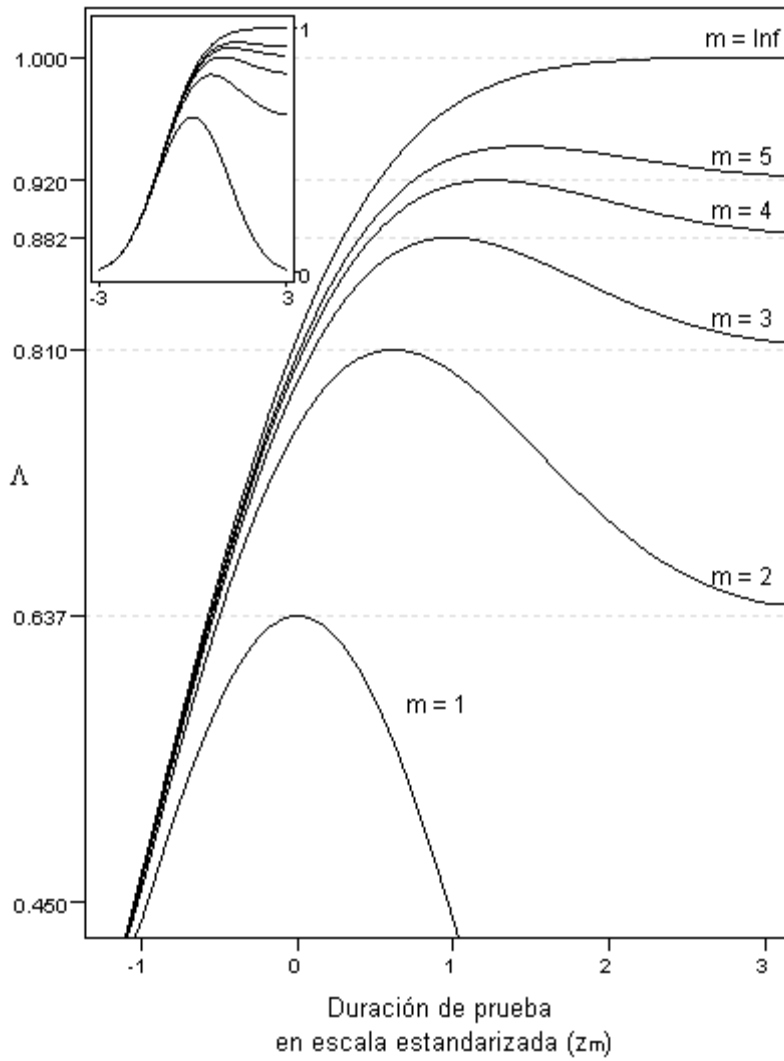


Figura 13: Comportamiento del indicador de calidad como función del tiempo de prueba bajo el modelo lognormal.

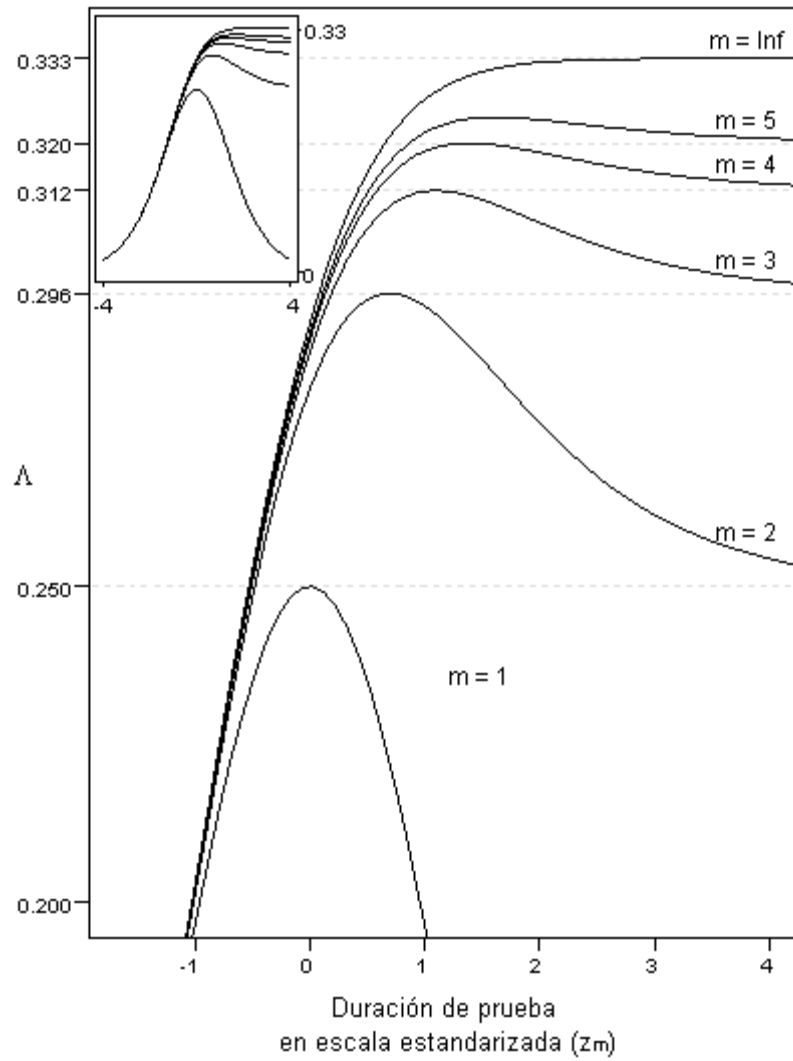


Figura 14: Comportamiento del indicador de calidad como función del tiempo de prueba bajo el modelo loglogístico.

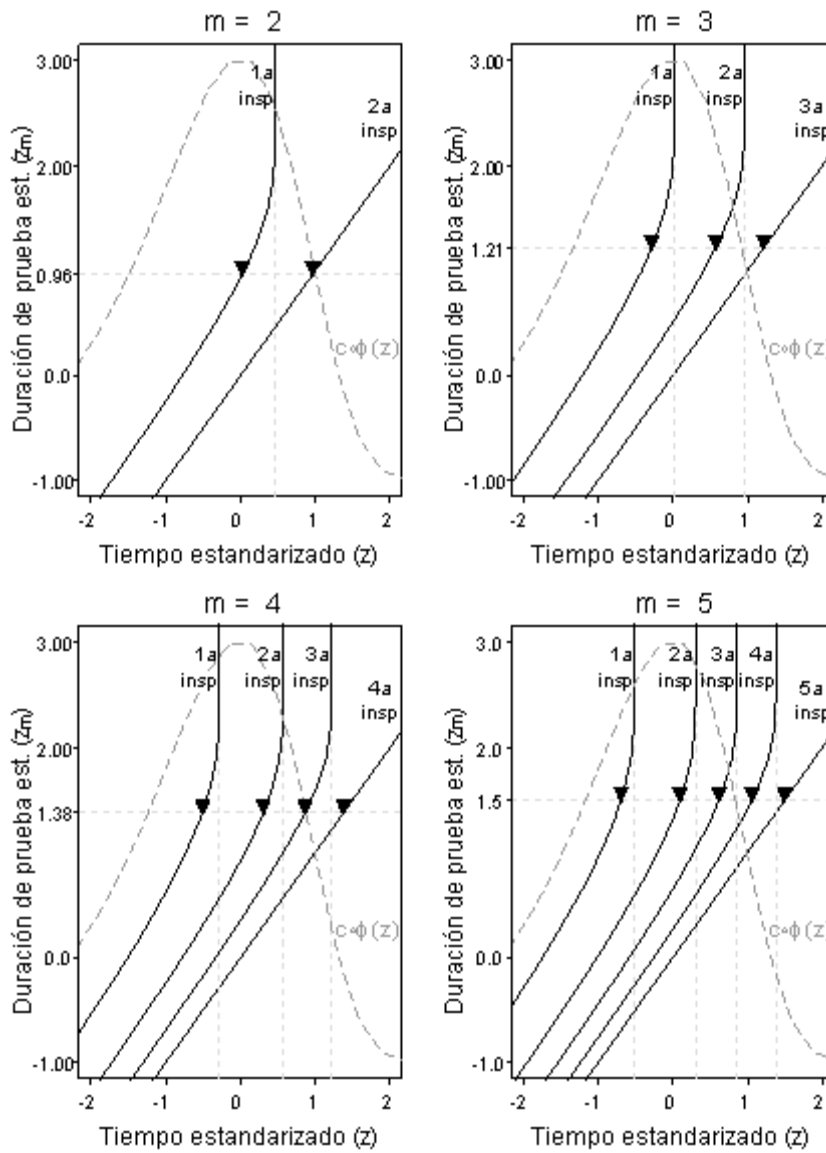


Figura 15: Comportamiento de la estrategia óptima con restricción de tiempo bajo el modelo Weibull.

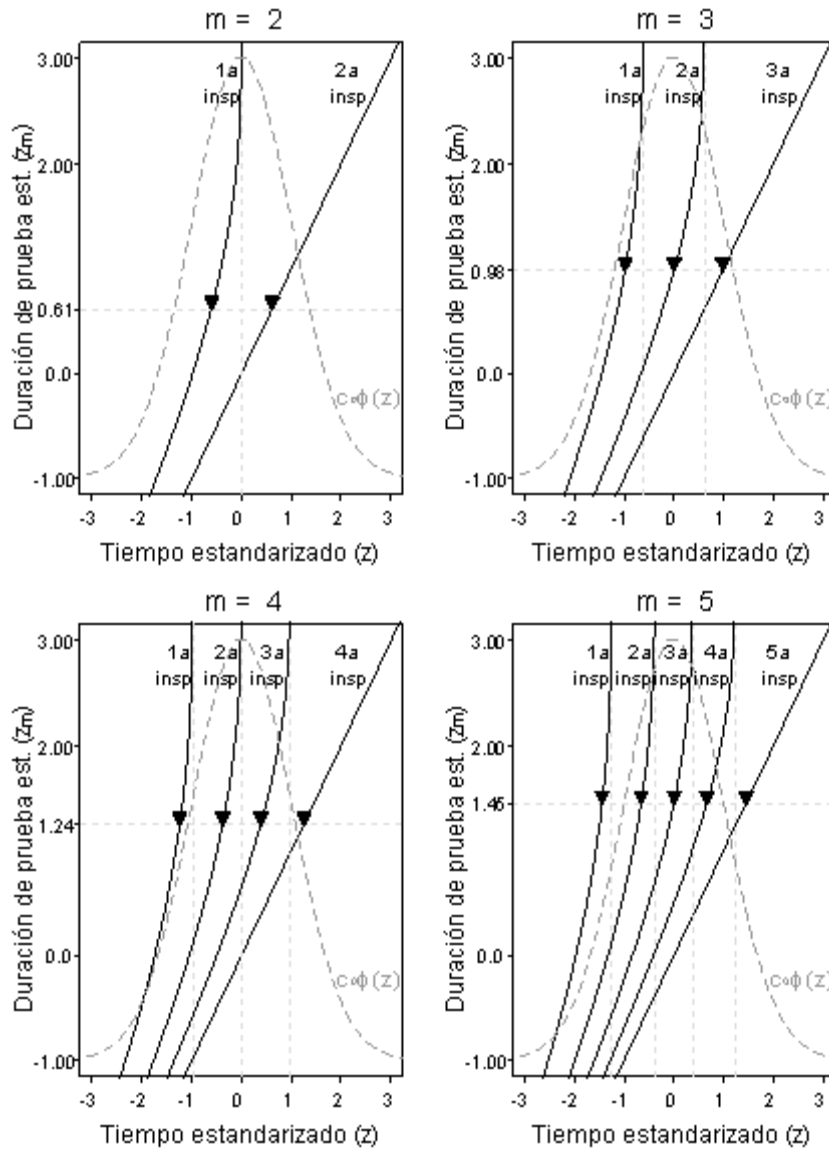


Figura 16: Comportamiento de la estrategia óptima con restricción de tiempo bajo el modelo lognormal.

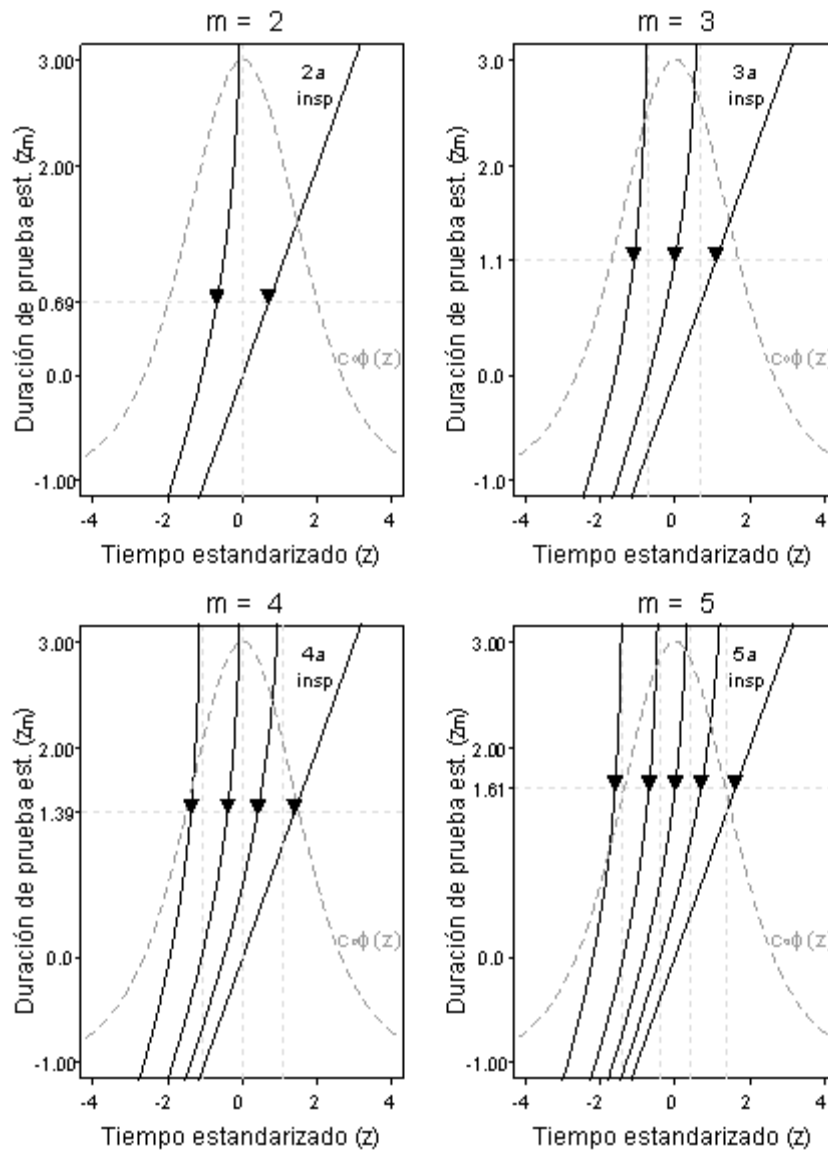


Figura 17: Comportamiento de la estrategia óptima con restricción de tiempo bajo el modelo Loglogístico.

dicho periodo de garantía). Ante esta situación se buscaría una estrategia de inspección que optimice para la estimación de estos parámetros independientemente de lo que suceda con la estimación de α .

Bajo el supuesto de que el parámetro de forma es conocido, estos parámetros son en realidad funciones del parámetro de escala y la pregunta que surge entonces es: ¿la estrategia óptima para estimar α es la estrategia óptima para estimar cualquier función de α ?

Lema 1 Sean θ un parámetro unidimensional de alguna distribución F y $g(\theta)$ una reparametrización derivable de F con $g'(\theta) \neq 0$ para todo θ , sean también I_θ e $I_{g(\theta)}$ las informaciones de Fisher correspondientes asociadas a una muestra censurada por intervalos. Entonces $I_{g(\theta)} \propto I_\theta$ como funciones de los tiempos de inspección.

Demostración. De la regla de la cadena

$$\frac{d^2 l(g(\theta))}{dg(\theta)} = \frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2} \frac{dg^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)} + \frac{dl(\theta)}{d\theta} \frac{d^2 g^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)^2},$$

donde $l(\theta)$ y $l(g(\theta))$ son las log-verosimilitudes de θ y $g(\theta)$ respectivamente, por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{g(\theta)} &= E \left[-\frac{d^2 l(g(\theta))}{dg(\theta)} \right] \\ &= E \left[-\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2} \right] \left[\frac{dg^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)} \right]^2 - E \left[\frac{dl(\theta)}{d\theta} \right] \frac{d^2 g^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)^2} \\ &= \left[\frac{dg^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)} \right]^2 I_\theta - \frac{d^2 g^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)^2} E[S(\theta)] \\ &= \left[\frac{dg^{-1}(g(\theta))}{dg(\theta)} \right]^2 I_\theta = \left[\frac{dg(\theta)}{d\theta} \right]^{-2} I_\theta. \end{aligned}$$

El resultado se obtiene notando que $[dg(\theta)/d\theta]^{-2}$ no depende de los tiempos de inspección. ■

En particular este lema aplica para α , por lo tanto maximizar $I_{g(\alpha)}$ equivale a maximizar I_α , de donde se concluye que la estrategia óptima para estimar α es la estrategia óptima para estimar cualquier otro parámetro que esté en función α bajo los supuestos mencionados.

Transformaciones de especial interés para α Como ya se mencionó en los párrafos anteriores, los parámetros que realmente son de interés en la industria son básicamente las confiabilidades de sus productos y sus correspondientes cuantiles. A continuación se presenta la forma de estos parámetros como función de α y su información esperada de Fisher bajo el supuesto de parámetro de forma conocido.

Confiabilidad al tiempo t La confiabilidad de un componente en el instante t queda expresada como

$$C_t(\alpha) = 1 - F(t; \alpha, \beta) = 1 - \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right),$$

y dado que

$$\frac{dC_t}{d\alpha} = -\frac{\partial\Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)}{\partial\alpha} = -\phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \frac{-\beta \ln \alpha}{\partial\alpha} = \phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha},$$

la información de Fisher de C_t resulta en

$$\begin{aligned} I_{C_t} &= \left[\phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha}\right]^{-2} I_\alpha \\ &= \left[\phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha}\right]^{-2} n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})} \\ &= n \left[\phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)\right]^{-2} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})}. \end{aligned}$$

Nótese que la información de Fisher de C_t aumenta conforme $t \rightarrow 0$ ó $t \rightarrow \infty$, ya que en ambos casos $\phi(\beta \ln t/\alpha) \rightarrow 0$. Esto nos indica que la estimación de la confiabilidad del producto, en términos absolutos, será más eficiente para tiempos muy pequeños o bien muy grandes.

Cuantil p A su vez, bajo la condición $\phi(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$, la expresión para cualquier cuantil es

$$t_p(\alpha) = \alpha \exp \frac{\Phi^{-1}(p)}{\beta},$$

y entonces, bajo el supuesto de parámetro de forma conocido

$$I_{t_p} = \frac{dt_p}{d\alpha} I_\alpha = n \left[\exp \frac{\Phi^{-1}(p)}{\beta} \right]^{-2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})}$$

Dado que Φ^{-1} es estrictamente creciente, la información de Fisher de t_p disminuye conforme p aumenta, es decir, los cuantiles pequeños son mejor estimados que los grandes en términos absolutos.

Parámetro de localización $\mu = \ln \alpha$ Como se vio en la Sección 2.3, $\mu = \ln \alpha$ es el parámetro de localización de la distribución del logaritmo de los tiempos a la falla. Por ser éste un parámetro de localización, I_μ no depende del verdadero valor de μ cuando se expresa en términos de estrategias de inspección en escala estandarizada. Explícitamente la información esperada de Fisher para éste está dada por

$$\begin{aligned} I_\mu &= \left(\frac{d\alpha}{d \ln \alpha} \right)^2 I_\alpha = \left(\frac{d \exp \mu}{d \mu} \right)^2 I_\alpha = (\exp^2 \mu) I_\alpha \\ &= \alpha^2 I_\alpha = \alpha^2 \left\{ n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(y_i) - \phi(y_{i-1})]^2}{\Phi(y_i) - \Phi(y_{i-1})} \right\} \\ &= n \beta^2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(y_i) - \phi(y_{i-1})]^2}{\Phi(y_i) - \Phi(y_{i-1})}. \end{aligned}$$

Esta última reparametrización permite adoptar toda la teoría aquí mostrada para establecer estrategias de inspección óptimas también bajo distribuciones de localización-escala con parámetro de escala conocido.

3.3.2. Sensibilidad de Λ_α al error en α

Como ya se ha mencionado, una complicación que regularmente se presenta en los problemas de diseño óptimo es la necesidad de contar con información sobre el fenómeno a estudiar que de alguna manera permita anticipar los resultados de la prueba o experimento cuyo diseño se desea optimizar. La información a priori que se tenga al respecto será por contexto insuficiente,

pues ese es el motivo que da lugar al experimento. Por tal razón, es muy importante hacer un análisis de las consecuencias que puede provocar la falta de información.

En nuestro caso, la obtención de estrategias óptimas, ya sea en escala de tiempo estandarizada o en términos de proporciones esperadas de falla, no representa mayor problema, sin embargo, para determinar dichas estrategias en tiempo real es necesario conocer el verdadero valor de α . Al no conocer este parámetro, la estrategia en tiempo real deberá construirse con un α supuesto que denotaremos por α_s . En consecuencia, la estrategia de inspección que se utilice en la prueba diferirá de la óptima en la medida que α_s difiera de α .

Sean \mathbf{z}^* la estrategia óptima estandarizada, \mathbf{t}^* la estrategia óptima en tiempo real y $\mathbf{t}|\alpha_s$ la estrategia en tiempo real basada en α_s , esto es,

$$\mathbf{z}^* = \arg \max (\Lambda_\alpha), t_i^* = \alpha \exp \frac{z_i^*}{\beta} \text{ y } t_i|\alpha_s = \alpha_s \exp \frac{z_i^*}{\beta}$$

(y entonces $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}|\alpha$). Por lo tanto,

$$t_i|\alpha_s = \alpha \frac{\alpha_s}{\alpha} \exp \frac{z_i^*}{\beta} = \alpha \exp(\varepsilon_s) \exp \frac{z_i^*}{\beta} = \alpha \exp \frac{z_i^* + \beta \varepsilon_s}{\beta}$$

con $\varepsilon_s = \ln \alpha_s - \ln \alpha$.

Esta última relación nos indica que a la estrategia $\mathbf{t}|\alpha_s$ le corresponde la estrategia con entradas $z_i^* + \beta \varepsilon_s$ para $i = 1, 2, \dots, m$ en la escala de tiempo estandarizada. Observemos que ε_s representa el error entre α_s y α en escala logarítmica, es decir, el error sobre el parámetro de localización μ asociado a α . Si denotamos por \mathbf{z}_δ al vector con entradas $z_i^* + \delta$ para $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$R(\delta) = \frac{\Lambda_\alpha(\mathbf{z}_\delta)}{\Lambda_\alpha(\mathbf{z}^*)}$$

indica, como se muestra en las Figuras 18, 19 y 20, la cantidad de información que se logra al aplicar una estrategia de inspección de la forma $\mathbf{t}|\alpha_s$ con α_s y β tal que $\beta \varepsilon_s = \delta$, esto en proporción a la cantidad de infomación máxima alcanzable con la misma cantidad de inspecciones. Notemos que para valores grandes de β será necesaria una mejor aproximación al verdadero valor de α para conseguir resultados importantes.

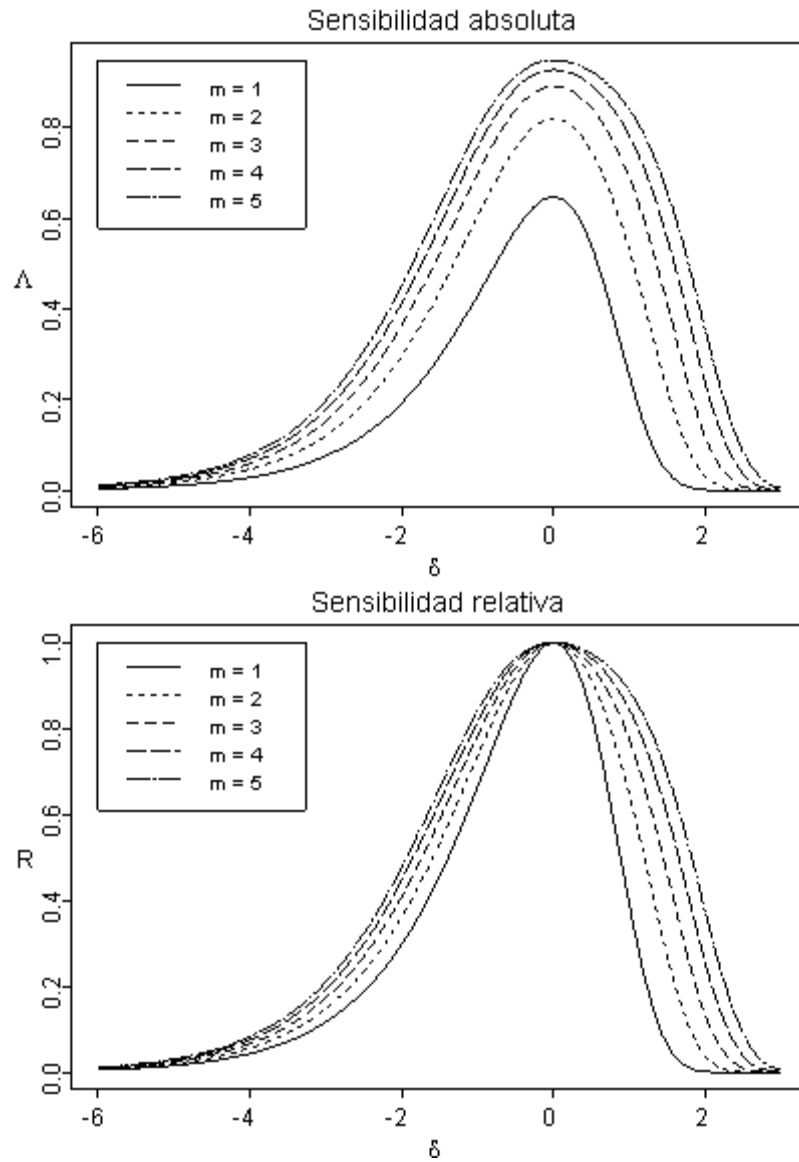


Figura 18: Sensibilidad de las estrategias óptimas al error en el supuesto sobre alfa bajo el modelo Weibull.

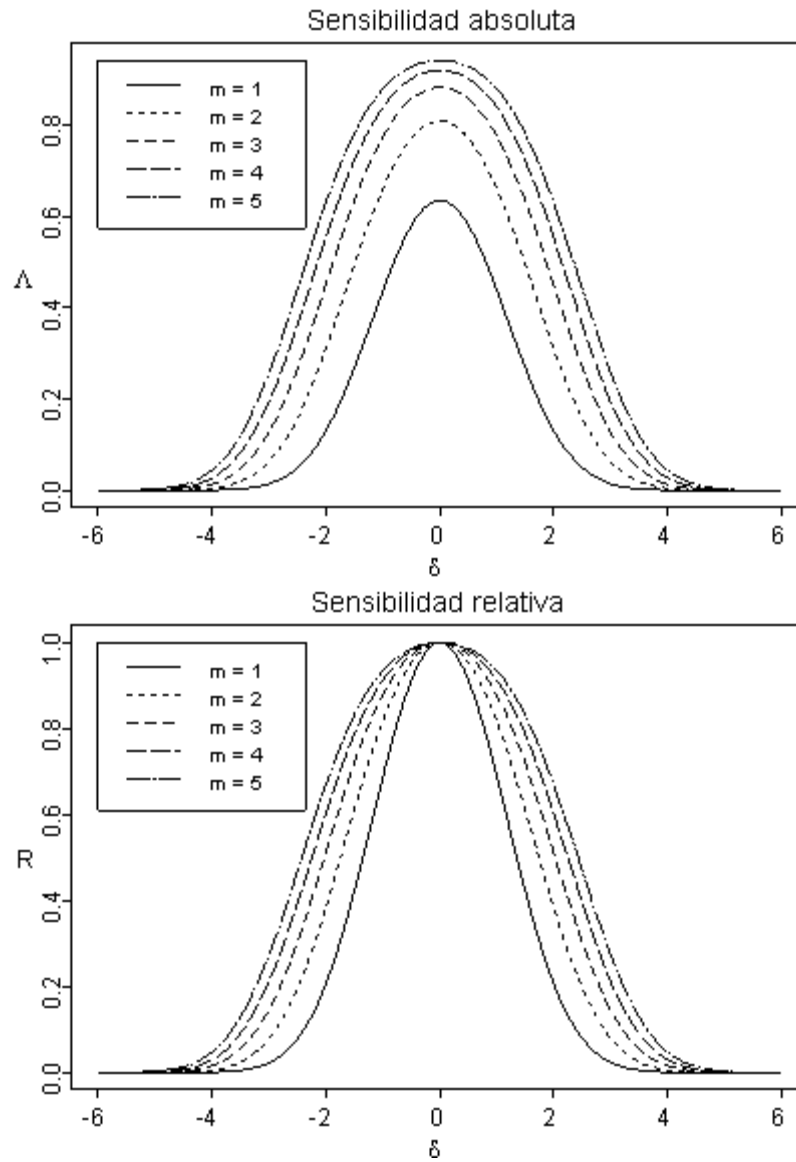


Figura 19: Sensibilidad de las estrategias óptimas al error en el supuesto sobre alfa bajo el modelo lognormal.

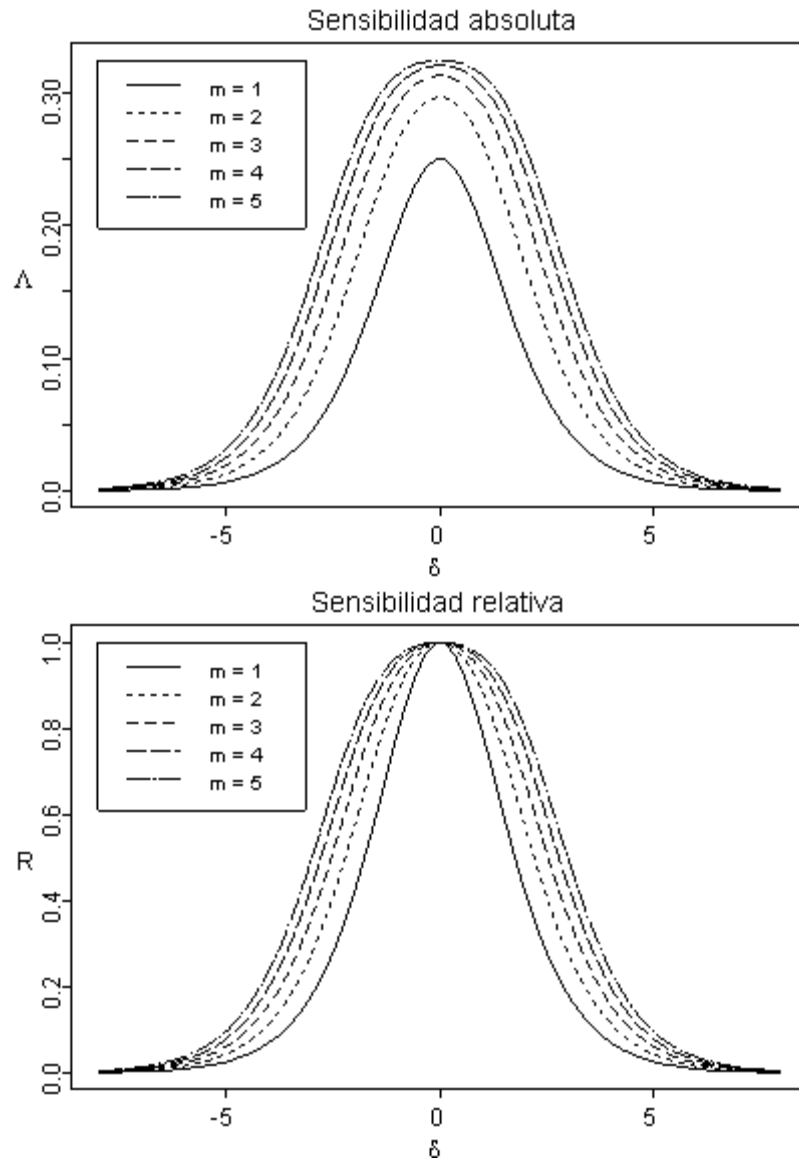


Figura 20: Sensibilidad de las estrategias óptimas al error en el supuesto sobre alfa bajo el modelo logístico.

En las Figuras 18, 19 y 20 se aprecia una vez más que el índice de calidad es más sensible cuando se trabaja con la distribución Weibull, sobre todo cuando se sobrestima la calidad del producto y se diseñan pruebas más largas de lo ideal.

Cabe decir que en algunos casos la elección de un α a priori surge de manera natural sin tener que realizar muchos supuestos acerca de él por la necesidad producto de la limitación del método. Veamos algunos ejemplos:

- Para algunos productos es muy complicado simular el envejecimiento que éstos suelen tener en campo, y por lo tanto, se vuelve importante saber si las pruebas de vida que se realizan en laboratorio realmente reflejan lo que ocurre en campo. Para esto se obtiene la estimación del parámetro α en laboratorio y, una vez que el producto es lanzado al mercado, se obtiene información de campo para verificar si la estimación de laboratorio es congruente con la realidad (o si es necesario calibrar la prueba de laboratorio) y quizá también para mejorar la estimación. La obtención de datos reales se realizará inspeccionando el producto directamente en campo. Por lo tanto, se propone diseñar una estrategia óptima de inspección a partir de la estimación de α obtenida en laboratorio. Esta estrategia tendrá más impacto en la medida que la situación impida realizar muchas inspecciones de las unidades en campo.

- Otro ejemplo que surge de manera natural, es cuando la prueba de vida se realiza mediante un dispositivo de cupo limitado (como el descrito en la Sección 3.1), de tal forma que para probar toda la muestra es necesario seccionarla y montarla por grupos en el dispositivo de prueba. Ante esta situación, una propuesta es inspeccionar el primer grupo aplicando una estrategia que bien pudiera ser óptima, tradicional o alguna otra y los subsecuentes grupos aplicando una estrategia óptima basada en la actualización de la estimación de α a partir de los grupos anteriores.

3.4. Comparación de estrategias

Para tener una idea más clara del comportamiento de la estrategia óptima que hemos construido, en esta sección presentamos un comparativo con la estrategia equiespaciada por ser ésta la más socorrida. Las Figuras 21, 22 y 23 muestran como cambia la distribución de las inspecciones conforme

cambiamos la duración de prueba para ambas estrategias bajo los modelos Weibull, lognormal y loglogístico. Las líneas continuas corresponden a la estrategia óptima mientras que las punteadas a la estrategia tradicional. Para complementar las gráficas, al fondo se muestra con una línea segmentada en color claro la función de densidad del tiempo a la falla ampliada en el eje y y con una línea punteada horizontal muy tenue la duración de prueba óptima sin restricción de tiempo correspondiente a la estrategia óptima. Observemos que la estrategia óptima tiende a concentrarse en la región de mayor probabilidad de falla siguiendo un poco el fundamento de la estrategia equiprobable. En este sentido la estrategia tradicional presenta problemas cuando el parámetro de forma es muy pequeño o muy grande, de aquí que muy frecuentemente se obtengan intervalos sin fallas al recurrir a ella.

Para estudiar el comparativo de los alcances con ambas estrategias definamos el índice

$$R_o^t = \frac{\Lambda_\alpha^t}{\Lambda_\alpha^o},$$

donde Λ_α^o representa el indicador de calidad de la estrategia óptima y Λ_α^t de la estrategia tradicional. Por su definición, R_o^t toma valores entre $[0, 1]$ y representa la proporción de información que se alcanza con la estrategia tradicional en relación a la óptima. Las Figuras 24, 25 y 26 muestran el comportamiento de R_o^t como función de la duración de prueba. Nuevamente al fondo se muestran la densidad del tiempo a la falla y muy tenue la duración de prueba óptima sin restricción de tiempo para la estrategia óptima. En estas figuras puede notarse el efecto de inspeccionar consecutivamente en regiones con poca probabilidad de falla, tal y como sucede con la estrategia tradicional ante valores extremos del parámetro de forma, ya sea muy pequeños o muy grandes.

La comparación de las Figuras 24, 25 y 26 no considera el efecto de optimizar la duración de prueba ya que ambas estrategias están basadas en la misma duración. Sin embargo, en la práctica es muy frecuente encontrar que la estrategia tradicional involucra un tiempo de prueba determinado por factores ajenos a la estimación, lo que puede resultar en un diseño muy desfavorable. Las Figuras 27, 28 y 29 muestran el comportamiento de R_o^t como función de la duración de prueba de la estrategia tradicional utilizando siempre la duración óptima sin restricción de tiempo en la estrategia óptima. Obsérvese el impacto de utilizar una duración de prueba no óptima en la

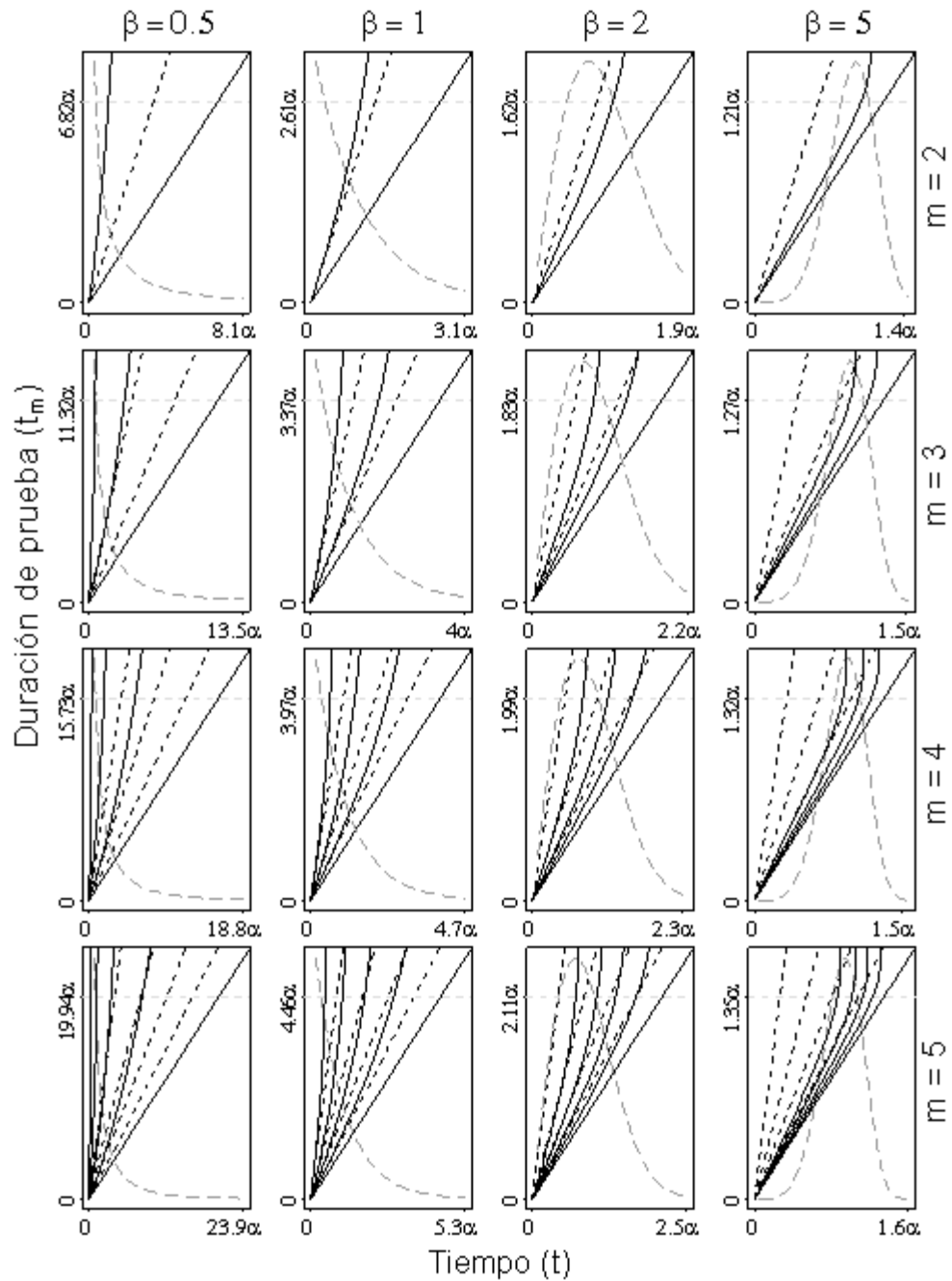


Figura 21: Comparación de las estrategias óptima y tradicional con restricción de tiempo bajo el modelo Weibull.

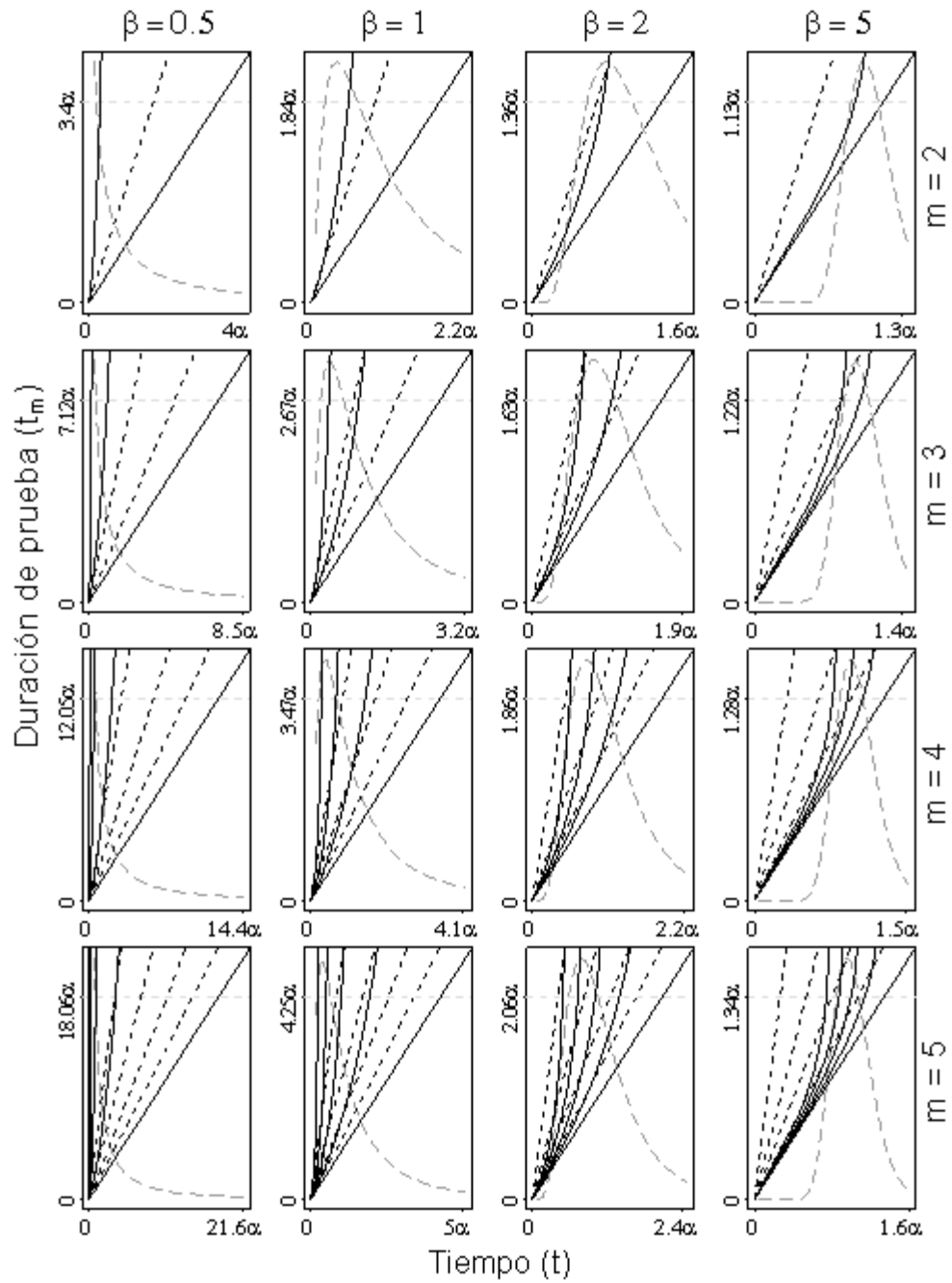


Figura 22: Comparación de las estrategias óptima y tradicional con restricción de tiempo bajo el modelo lognormal.

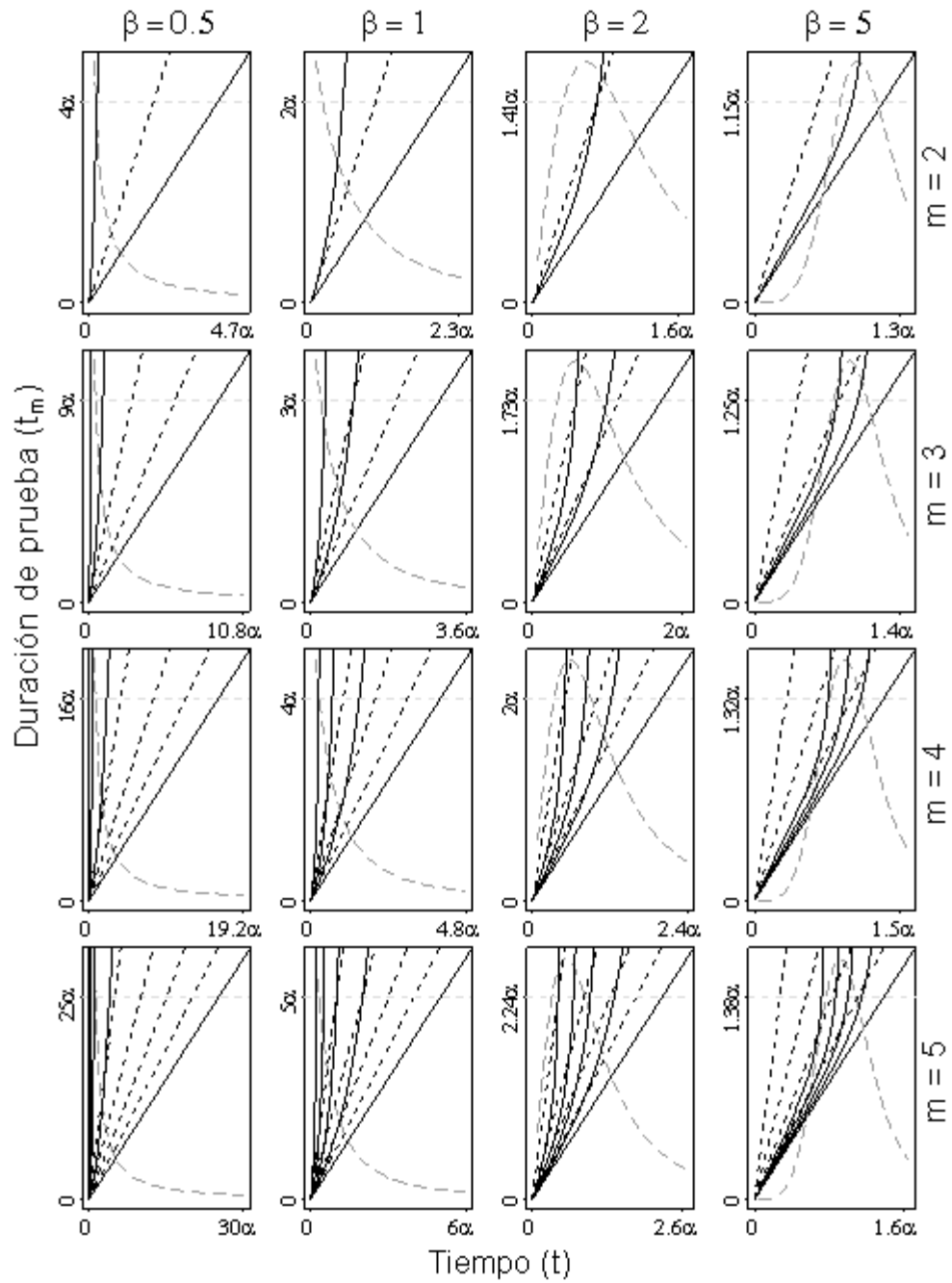


Figura 23: Comparación de las estrategias óptima y tradicional con restricción de tiempo bajo el modelo loglogístico.

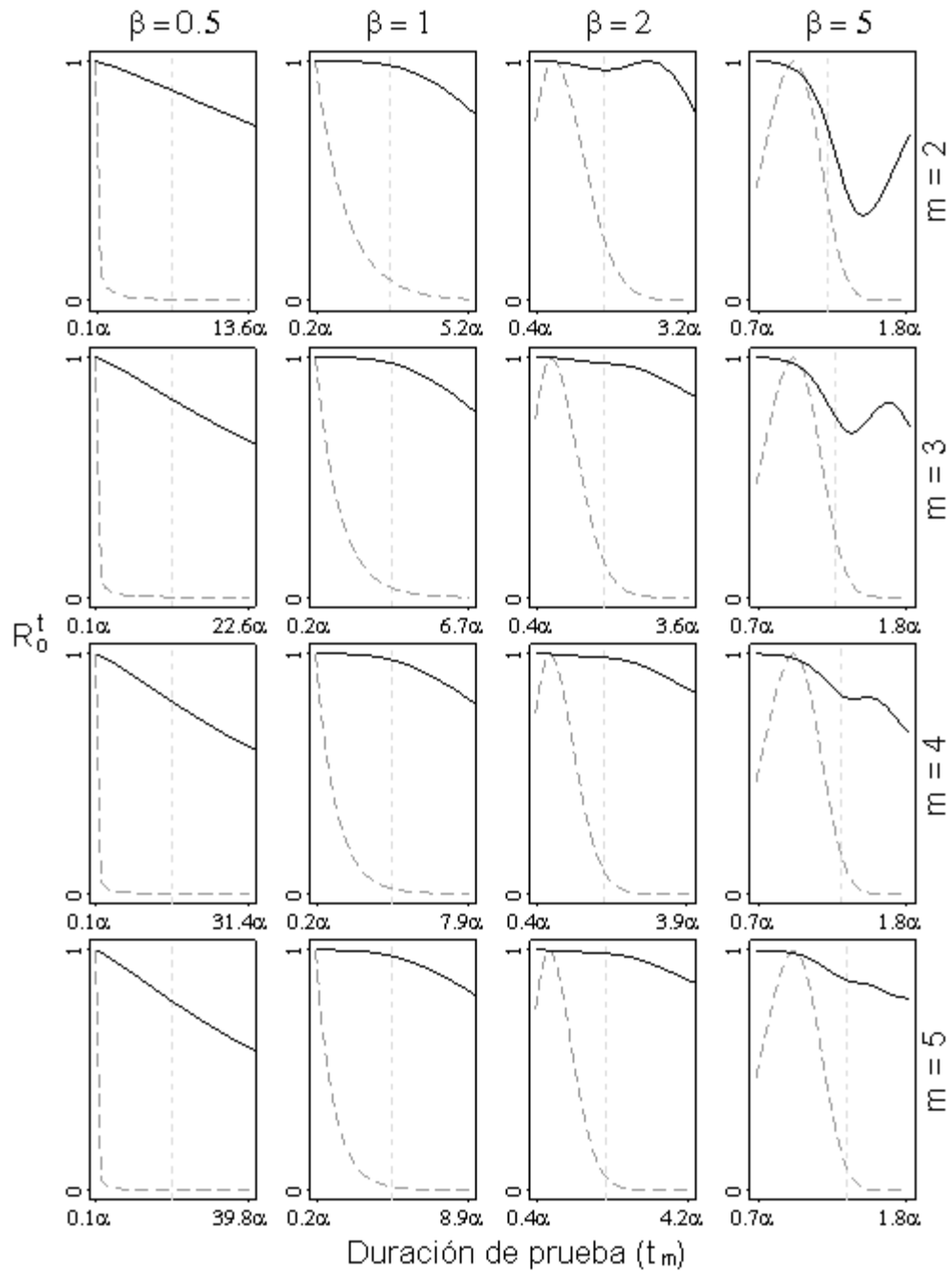


Figura 24: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional con la misma duración de prueba bajo el modelo Weibull.

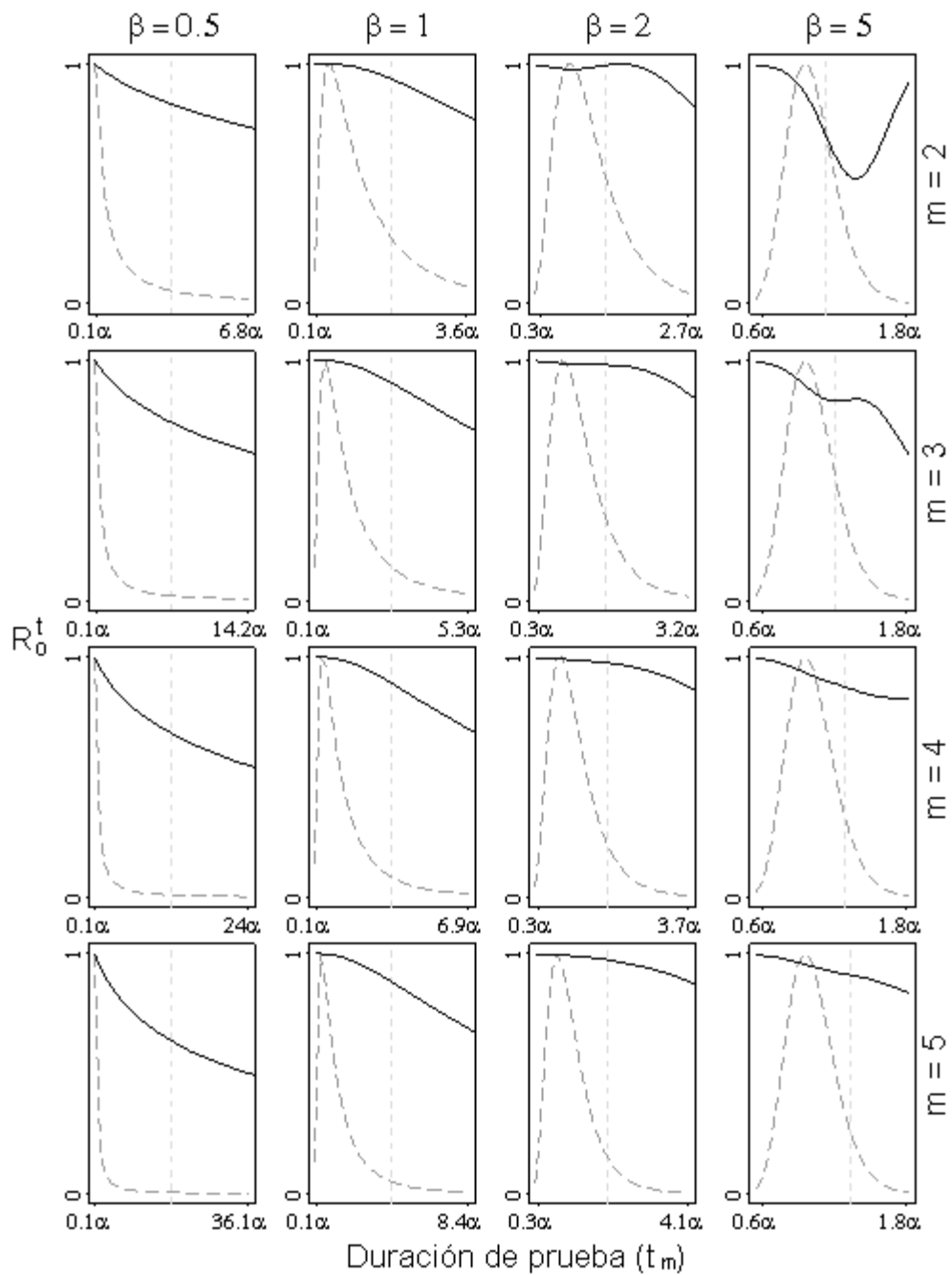


Figura 25: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional con la misma duración de prueba bajo el modelo lognormal.

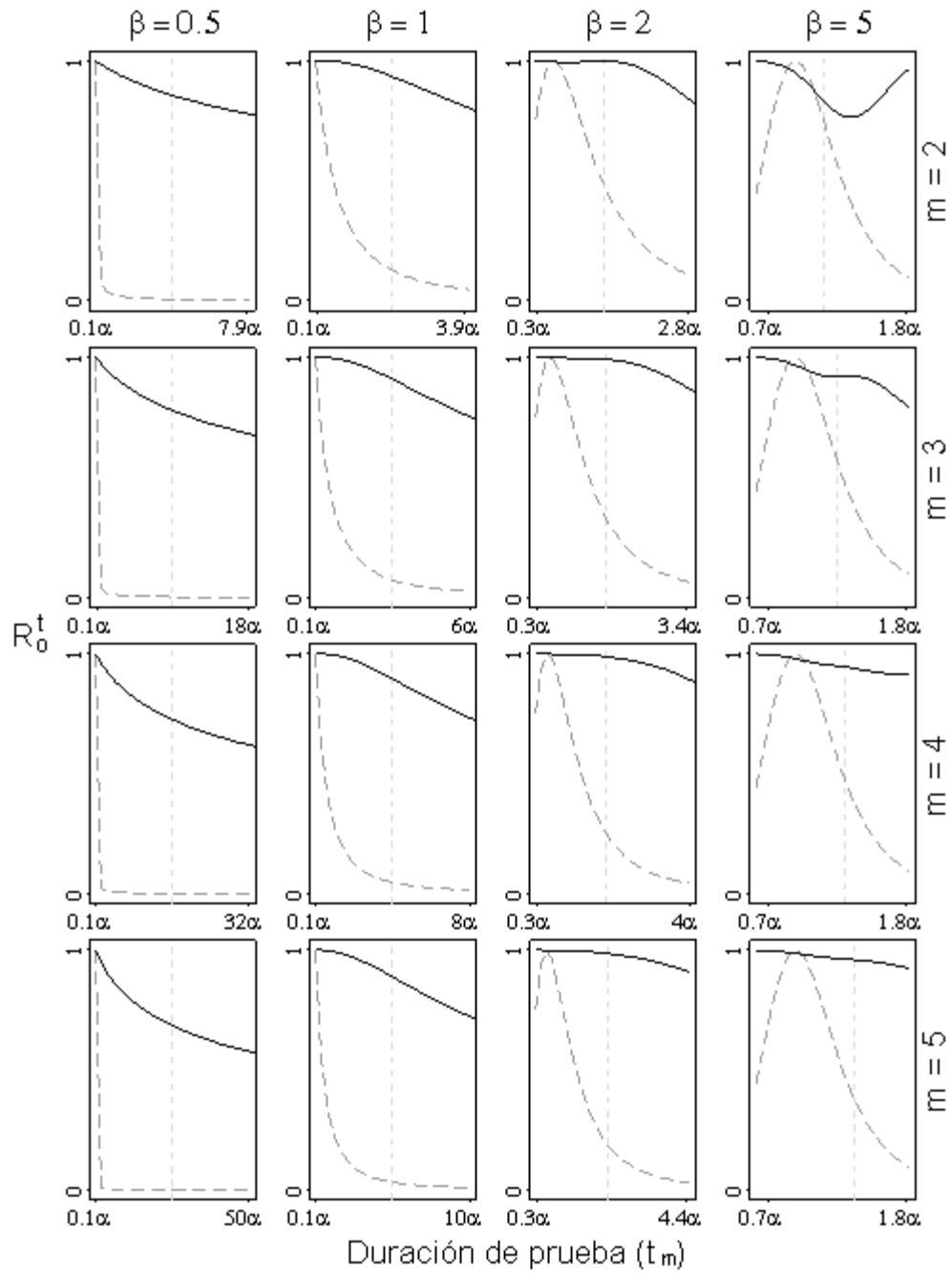


Figura 26: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional con la misma duración de prueba bajo el modelo loglogístico.

estrategia tradicional, la cual como puede notarse no coincide con la duración óptima de la estrategia óptima.

También puede estudiarse el comportamiento de los esquemas de inspección cuando cambiamos el valor del parámetro de forma, tal y como se muestra en las Figuras 30, 31 y 32, donde una vez más la estrategia óptima está representada por líneas continuas y la tradicional por líneas punteadas. En este caso, las líneas correspondientes a la estrategia tradicional aparecen verticalmente debido a que ésta no depende del parámetro de forma. Al fondo, la línea punteada horizontal muy tenue indica el valor característico de $\beta = 1$ y la segunda línea punteada, un poco más marcada, muestra la duración de prueba óptima correspondiente a cada valor del parámetro. En estas gráficas puede observarse la gran diferencia entre estrategias resaltando la fuerte concentración de las inspecciones en la estrategia óptima, sin embargo, para pruebas cortas puede verse cierta similitud entre ambos esquemas alrededor de $\beta = 1$. En particular, bajo el modelo Weibull con $t_m = 0,5\alpha$ la diferencia es casi imperceptible.

Por último, las Figuras 33, 34 y 35 muestran el comportamiento de R_o^t como función de β , ambas estrategias con la misma duración de prueba. La línea punteada vertical muy tenue corresponde a $\beta = 1$. Nuevamente se puede apreciar que una duración de prueba grande, un parámetro de forma grande y muy pocas inspecciones son situaciones que en combinación afectan mucho a una prueba con una estrategia de inspección tradicional.

Cabe mencionar que más allá de la interpretación inmediata del índice R_o^t , éste también puede verse con otro enfoque. Si comparamos la información de Fisher de una estrategia óptima (I_α^o) con una tradicional (I_α^t) aplicadas a una muestra del mismo tamaño, entonces

$$\frac{I_\alpha^t}{I_\alpha^o} = \frac{n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Lambda_\alpha^t}{n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Lambda_\alpha^o} = \frac{\Lambda_\alpha^t}{\Lambda_\alpha^o} = R_o^t,$$

sin embargo, si consideramos un tamaño de muestra n^o para la prueba con la estrategia óptima y un tamaño de muestra n^t para la prueba con la estrategia

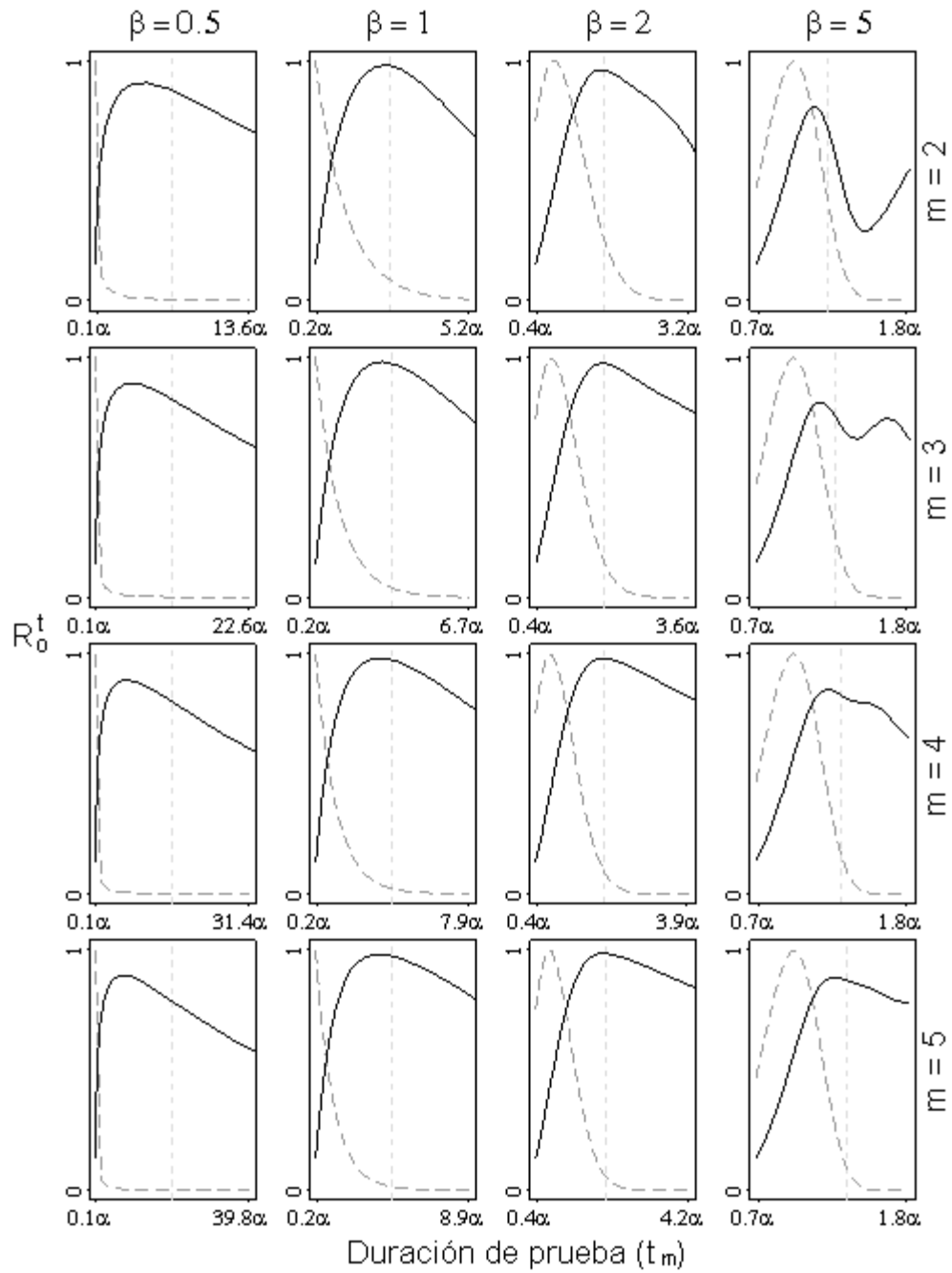


Figura 27: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional con diferente duración de prueba bajo el modelo Weibull.

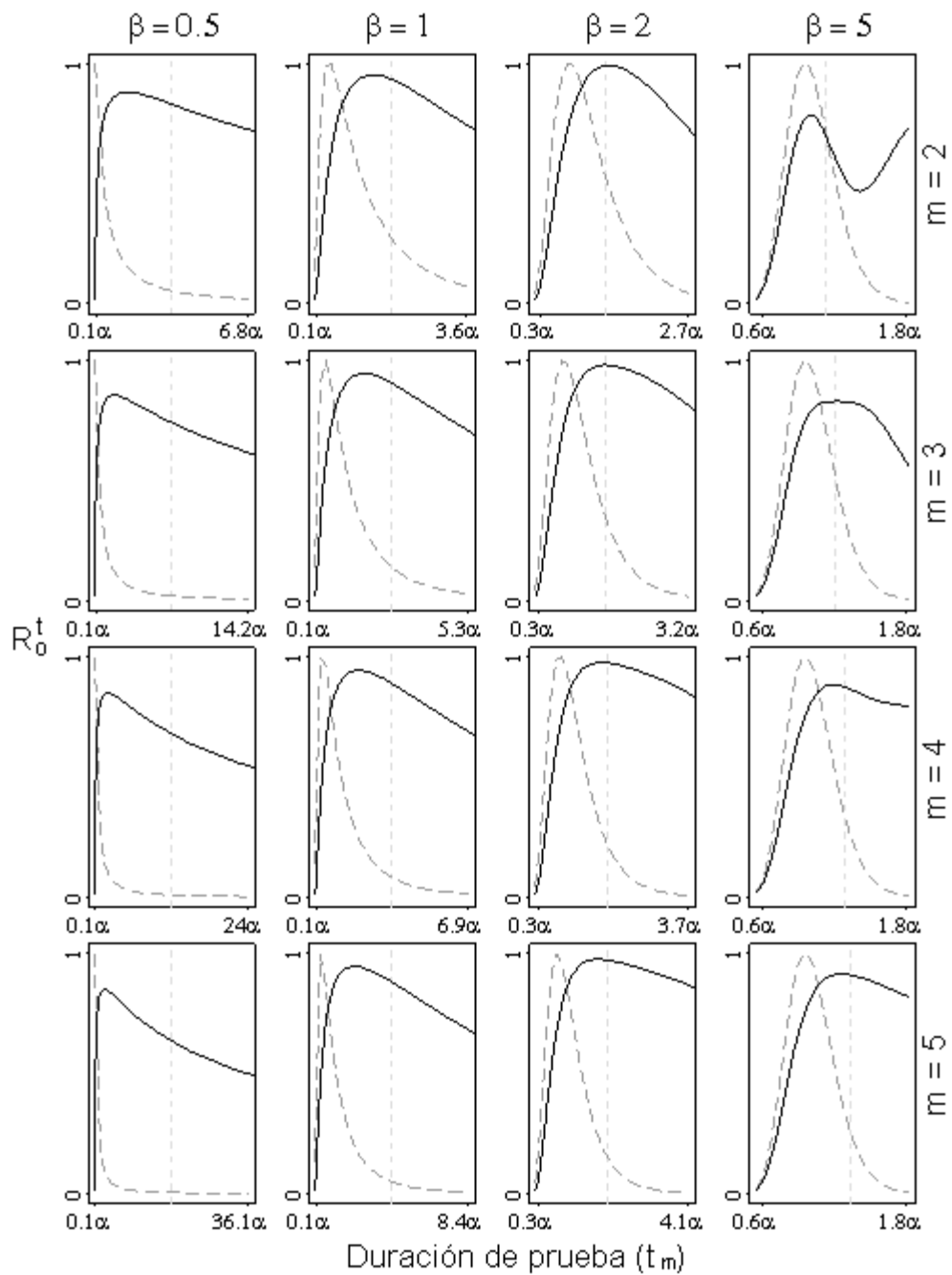


Figura 28: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional con diferente duración de prueba bajo el modelo lognormal.

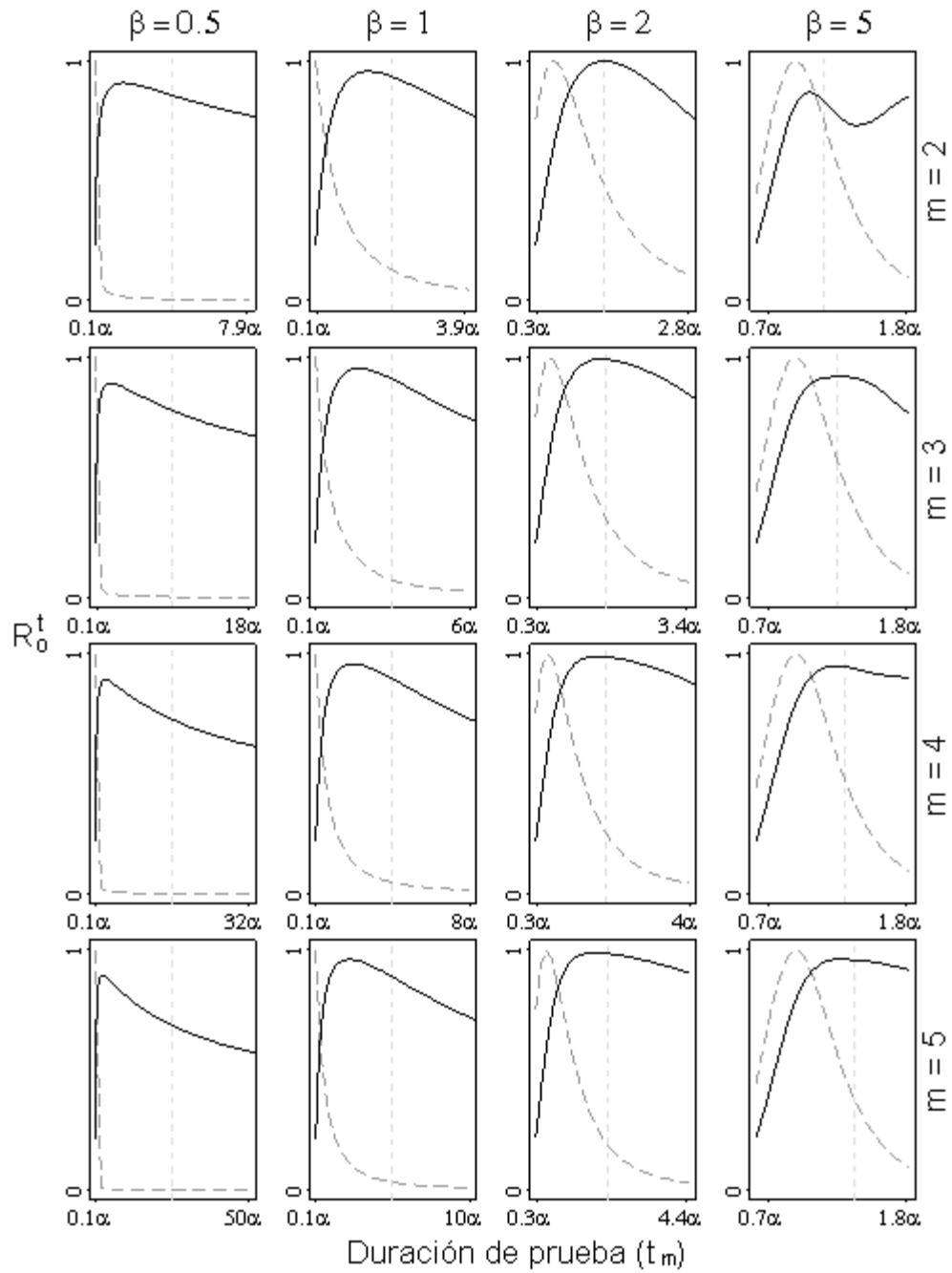


Figura 29: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional con diferente duración de prueba bajo el modelo loglogístico.

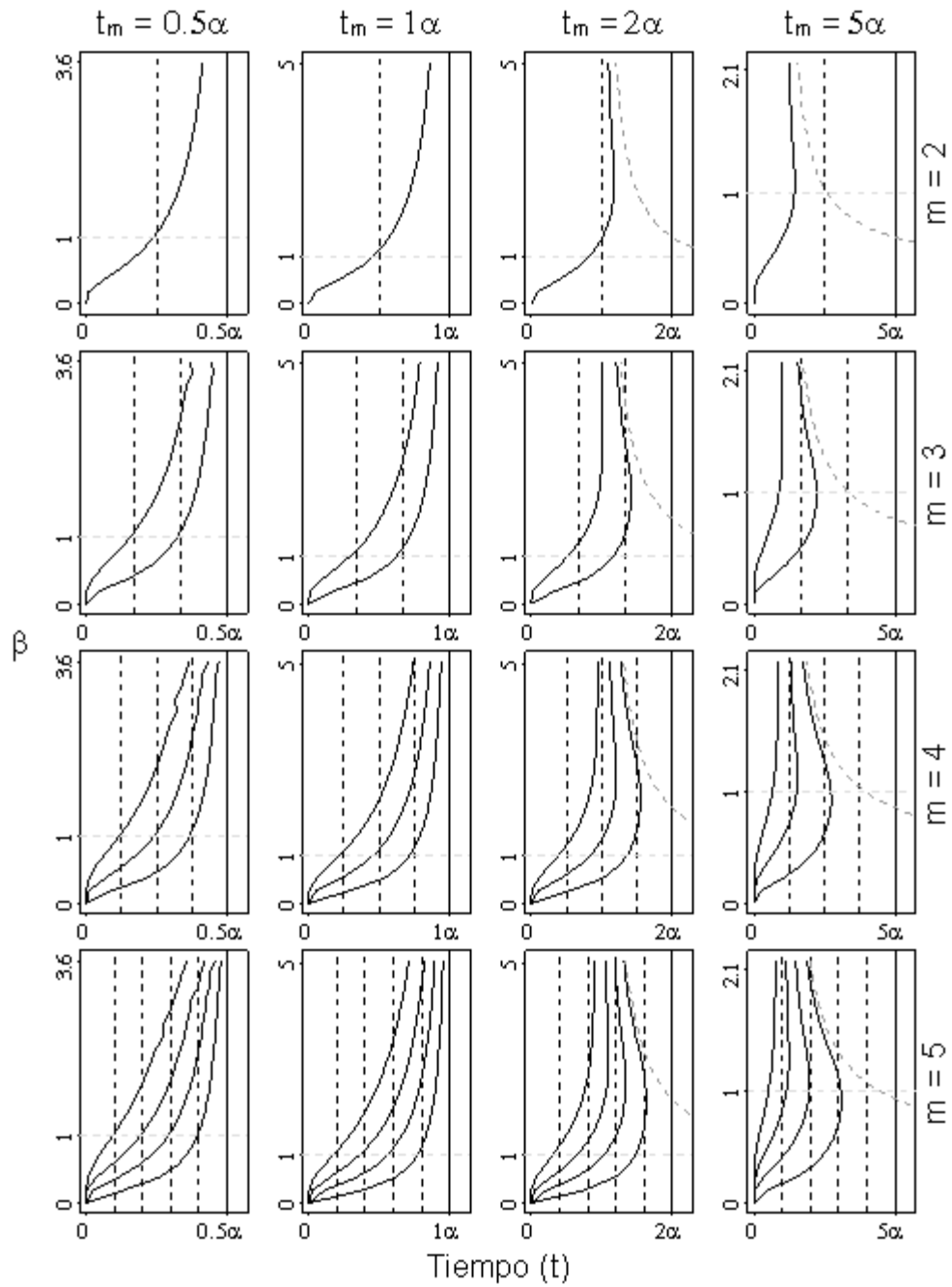


Figura 30: Comparación de las estrategias óptima y tradicional en función de beta bajo el modelo Weibull.

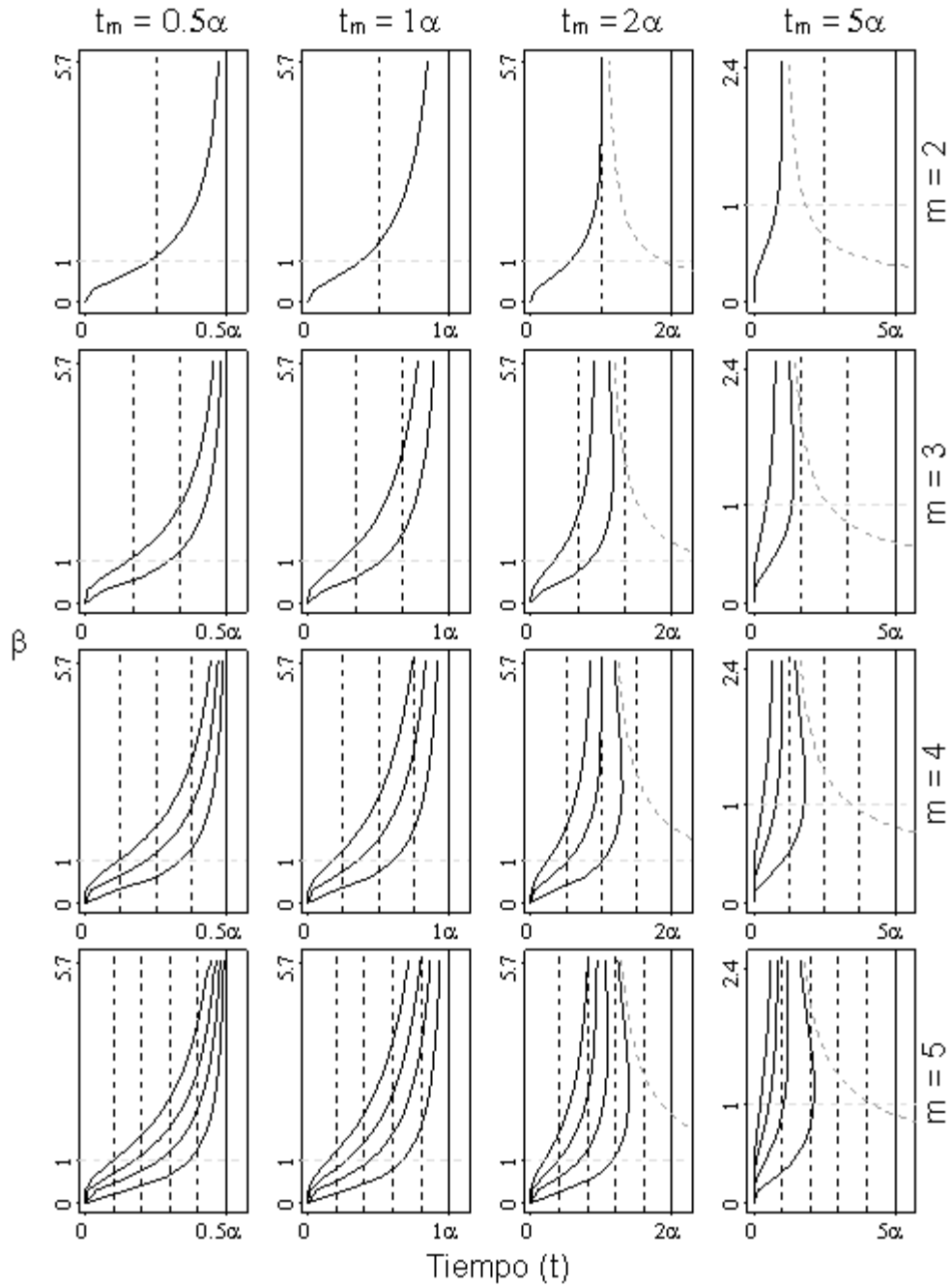


Figura 31: Comparación de las estrategias óptima y tradicional en función de beta bajo el modelo lognormal.

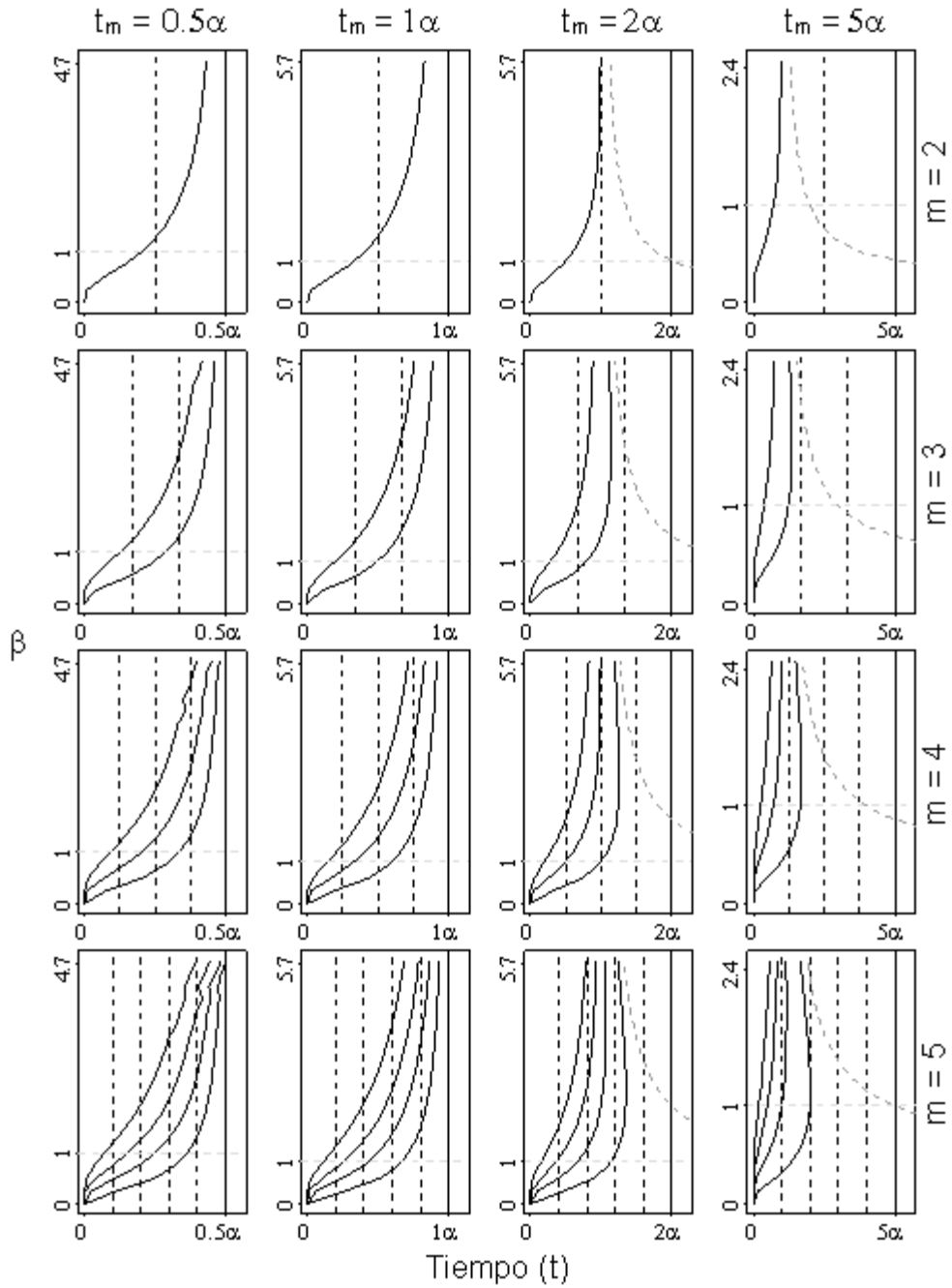


Figura 32: Comparación de las estrategias óptima y tradicional en función de beta bajo el modelo loglogístico.

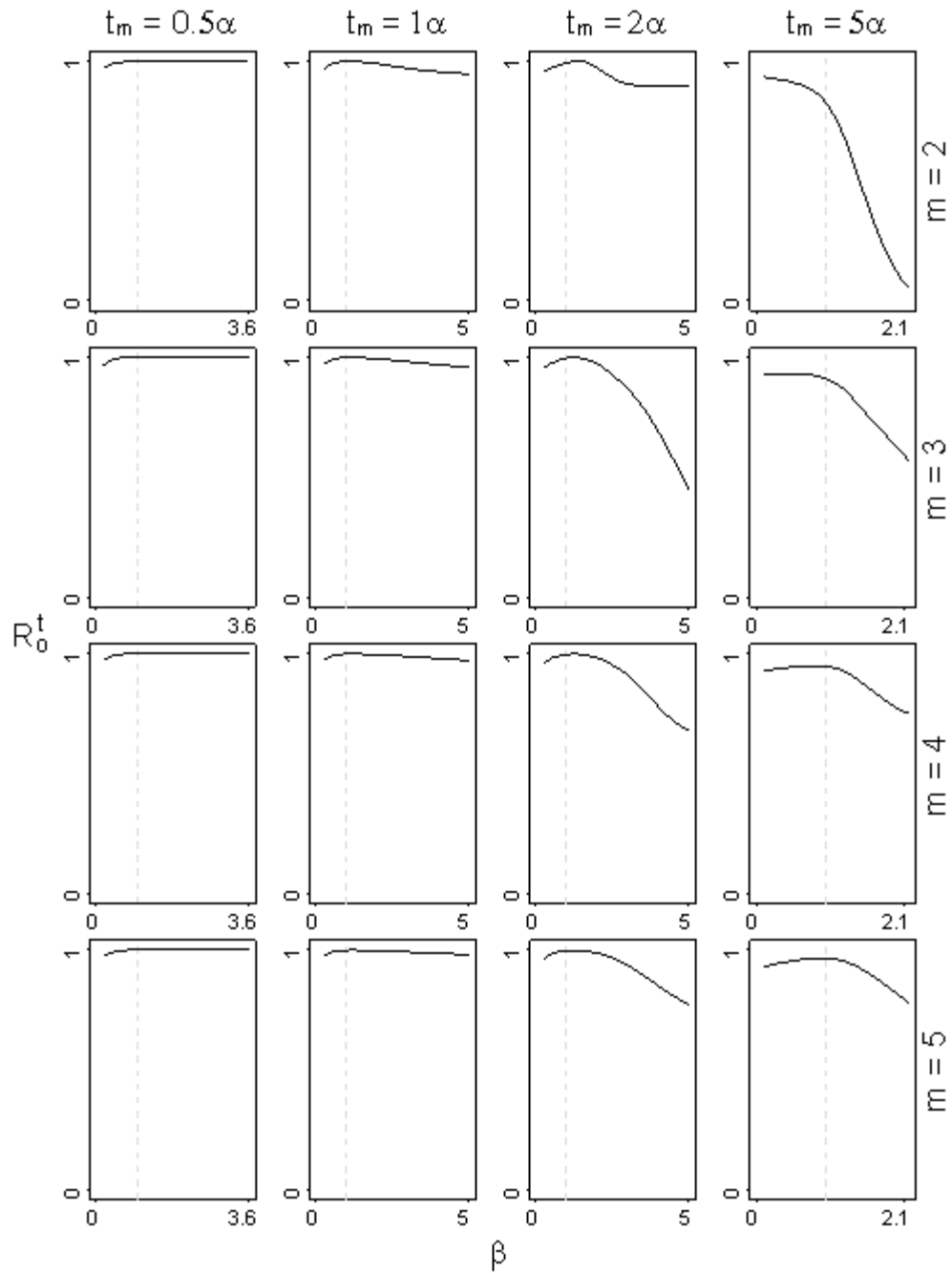


Figura 33: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional en función del parámetro de forma bajo el modelo Weibull.

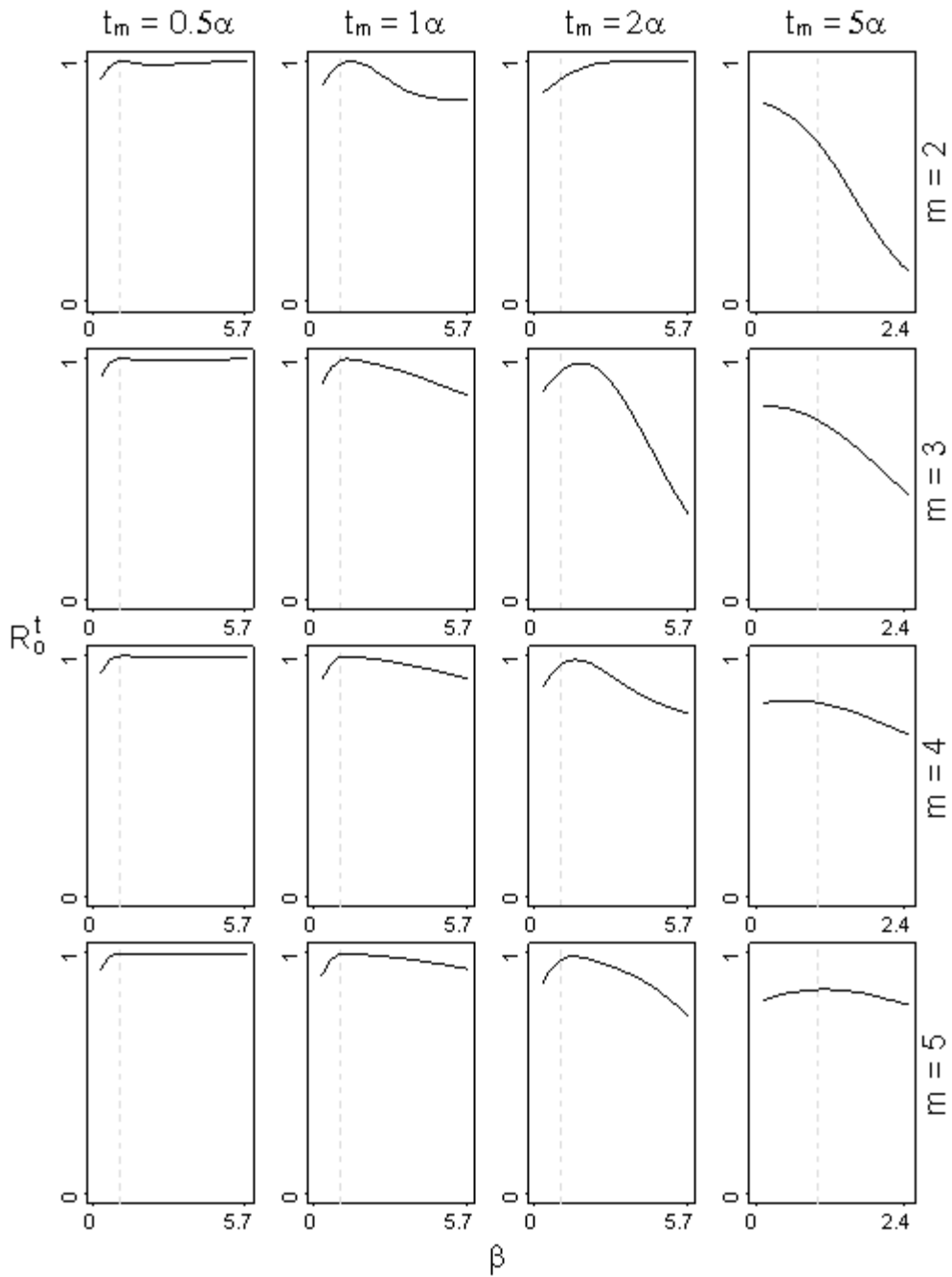


Figura 34: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional en función del parámetro de forma bajo el modelo lognormal.

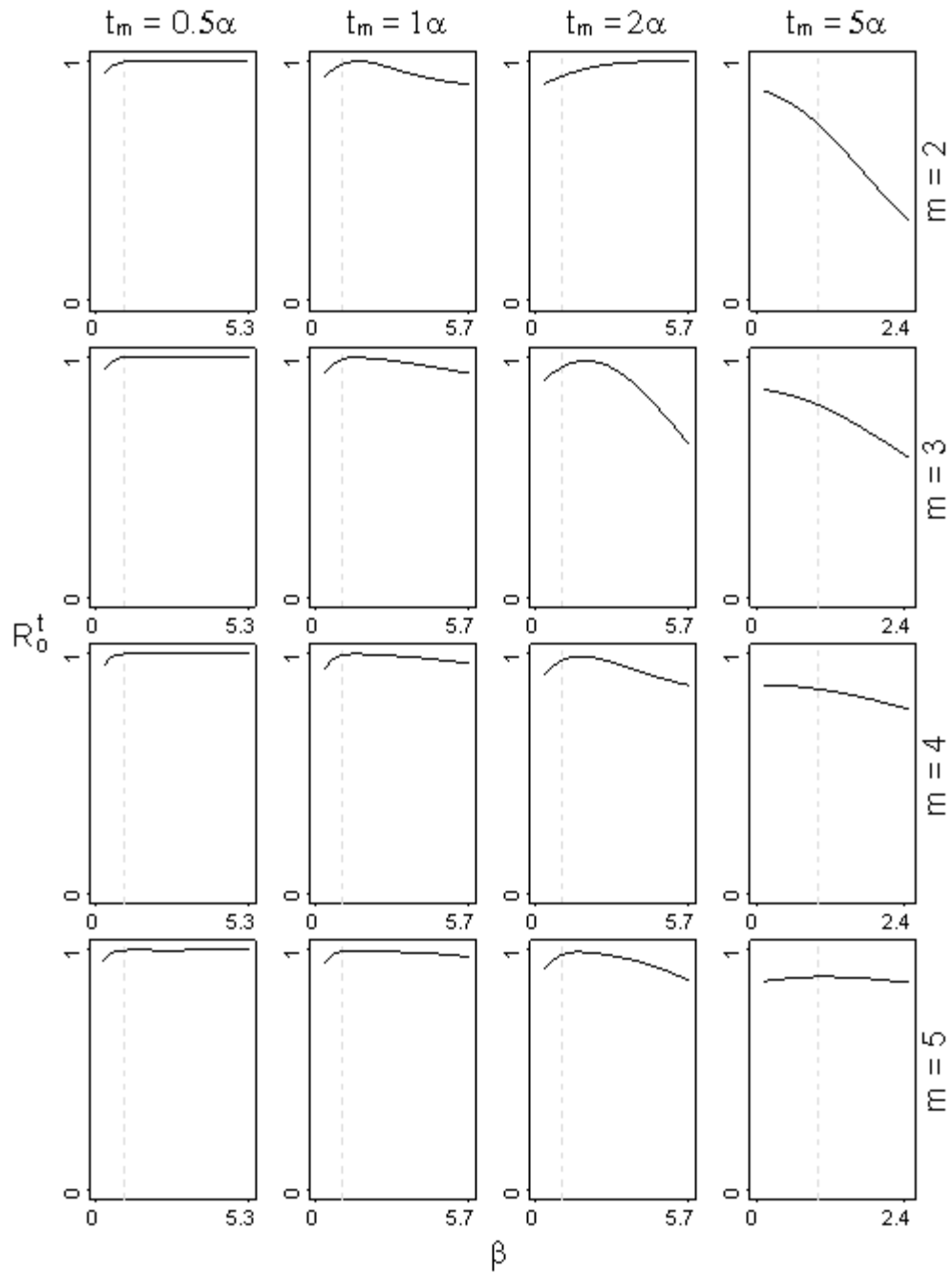


Figura 35: Comparación de los índices de calidad de las estrategias óptima y tradicional en función del parámetro de forma bajo el modelo loglogístico.

tradicional tal que $n^o/n^t = R_o^t$, entonces

$$\frac{I_\alpha^t}{I_\alpha^o} = \frac{n^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Lambda_\alpha^t}{n^o \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Lambda_\alpha^o} = \frac{\frac{\Lambda_\alpha^t}{n^o}}{\frac{\Lambda_\alpha^o}{n^t}} = \frac{R_o^t}{R_o^t} = 1.$$

Lo anterior sugiere que el índice R_o^t se puede interpretar como la proporción de muestra necesaria con una estrategia óptima para obtener la misma calidad que una prueba con estrategia tradicional. Alternativamente, $1/R_o^t$ indicaría el número de veces que el tamaño de muestra debe aumentarse en una prueba con estrategia tradicional para igualar la calidad de una prueba con estrategia óptima.

De aquí podemos concluir que aplicar una estrategia óptima nos permite reducir el tamaño de muestra sin reducir la calidad de la prueba, lo cual se traduce como una reducción de costos. Por otro lado, uno de los supuestos básicos del problema objetivo, como se describió en la introducción de este trabajo, es que las inspecciones son costosas en tiempo dinero o esfuerzo, y por lo tanto, estamos limitados a un pequeño número de inspecciones. En la mayoría de los casos el costo por inspección estará afectado por el número de productos a inspeccionar, por lo que reducir el tamaño de muestra nos lleva también a reducir el costo de cada inspección. Este hecho nos permitirá en algunos casos realizar más inspecciones, logrando con ello mayor información y mejores estimaciones.

4. Conclusiones y trabajos futuros

La estrategia de inspección surgida de este trabajo de tesis tiene como primer objetivo ampliar las opciones en la planeación y el diseño de pruebas de vida y como cualquier otra estrategia de inspección, sus alcances dependerán de las características de cada situación. Podemos decir que en general la planeación de una estrategia de inspección toma importancia en la medida que se tengan las siguientes condiciones:

- Pocas inspecciones. Ha medida que la prueba cuenta con más inspecciones, la pérdida de información debida a la censura se vuelve despreciable aún para estrategias de inspección poco planeadas.
- Parámetro de forma muy pequeño o muy grande. La concentración de fallas en intervalos de tiempo pequeños se da principalmente cuando el parámetro de forma es muy cercano a 0, o bien, cuando es considerablemente mayor a 1. Ante estos casos, una estrategia poco planeada puede llevar fácilmente al desperdicio de algunas inspecciones, es decir, a inspeccionar en regiones de tiempo en las cuales se espere que no ocurran fallas. Un ejemplo práctico de esto es una prueba en la cual todas las unidades hayan fallado antes de realizada la última inspección.
- Mucho tiempo para realizar la prueba. Contrario a lo que podría pensarse, una prueba con poca duración representa una prueba muy rígida en el sentido de que su planeación se limita a una búsqueda dentro de un conjunto muy pequeño de estrategias donde la forma del indicador de calidad definido en la Sección 3.2.2 es estable, y por lo tanto, los alcances de una estrategia bien planeada en general no varían mucho de los alcances de una estrategia poco planeada.
- Número de unidades en prueba insuficiente para conseguir la cantidad de información requerida. Evidentemente cuando se cuenta con un número sobrado de unidades en prueba para conseguir los objetivos deseados, la planeación de una estrategia de inspección tendrá menos importancia.

En particular la estrategia de inspección que aquí hemos planteado tiene las siguientes características:

- Es una extensión de la estrategia propuesta por Nelson (1977) a un conjunto importante de distribuciones de la familia de log-localización-escala (quizá todas las distribuciones dentro de esta familia que pudieran ser de interés en la práctica) así como para las distribuciones de la familia de localización-escala asociadas. Esto hace de nuestra estrategia de inspección una herramienta muy versátil aplicable en una gran cantidad de situaciones.
- El diseño que resulta de la prueba es localmente óptimo en términos de la información esperada de Fisher y asintóticamente óptimo en términos del error estándar. Su optimalidad es invariante al parámetro de interés, consecuentemente se espera que los datos que arroje una prueba bajo la estrategia que proponemos sean muy informativos para estimar diferentes parámetros de manera simultánea. Esta propiedad no se da con la estrategia propuesta por Meeker (1986) descrita en la Sección 3.1.1, ya que su optimalidad se reduce a un cuantil determinado, y por lo tanto, los datos que resulten de una prueba diseñada para un cuantil de interés pueden ser muy pobres para la estimación de otros parámetros potencialmente de interés después de realizada la prueba.
- Bajo un modelo de log-localización-escala su construcción requiere la especificación del parámetro de forma y un valor de planeación para el parámetro de escala. En caso de trabajar con una distribución de localización-escala se especifica el parámetro de escala y se utiliza un valor de planeación para el de localización. Esta es la principal diferencia entre la estrategia propuesta en esta tesis y la propuesta por Meeker (1986) para el modelo Weibull. La necesidad de especificar el parámetro de forma exige más conocimiento a priori del producto, pero a cambio permite la versatilidad de la primera propiedad y la invarianza de la segunda.

Lo estudiado en este trabajo de tesis es un análisis inicial de la planeación de estrategias de inspección que pudiera continuar con los siguientes estudios:

- La estrategia propuesta y los resultados presentados están basados en una visión verosimilitudista y aunque hay resultados asintóticos que justifican lo aquí realizado desde un punto de vista frecuentista para

tamaños de muestra grande, podría estudiarse el error estándar de la estimación puntual así como la longitud y probabilidad de cobertura de los intervalos de estimación al aplicar la estrategia óptima sobre la equidistante ante diferentes situaciones con tamaños de muestra pequeños.

- Se sospecha que la censura es una fuerte limitante para la estimación del parámetro de forma más que para la estimación del parámetro de escala, pensando en el caso hipotético de que se pudiera especificar el parámetro de escala para entonces estimar el de forma (lo cual muy difícilmente se da en la práctica). Bajo este contexto sería interesante conocer cuán fuerte es el impacto negativo que produce el desconocimiento del parámetro de forma en la estimación de algún parámetro de interés basada en una prueba con datos agrupados. Para tal efecto podría empezarse por comparar las estimaciones de diferentes cuantiles bajo el modelo Weibull con la estrategia óptima que proponemos (con el parámetro de forma dado) y con la estrategia óptima que propone Meeker (1986) (sin el parámetro de forma dado).
- En relación al punto anterior, podrían trabajarse los fundamentos que llevan a la construcción de nuestra estrategia de inspección quitando el supuesto de que el parámetro de forma es conocido, en cuyo caso la información esperada de Fisher estaría dada por una matriz 2x2 en lugar de un escalar. Esto de alguna forma representaría una extensión de la estrategia de Meeker (1986), considerando otras distribuciones para los tiempos a la falla (más allá de la distribución Weibull) e incluyendo otros parámetros como confiabilidades a diferentes tiempos de vida (más allá de solo cuantiles). El contexto en el cual se aplicaría una estrategia de inspección de este estilo en lugar de la estrategia propuesta en la tesis, sería aquel en el cual no se tenga conocimiento suficiente sobre el parámetro de forma y entonces se confíe más en lo que digan los datos acerca de él que en la correspondiente información a priori. Dicho de otra manera, para ambos tipos de estrategia se requerirá un valor de planeación tanto para α como para β , sin embargo, las estrategias de inspección que resulten en un caso u otro diferirán debido a que cada una de ellas estará construída con un objetivo diferente. El tipo de estrategias que hemos obtenido en esta obra buscan obtener datos con los cuales únicamente se hagan estimaciones sobre

el parámetro de escala (o bien, sobre otros parámetros a través de la estimación de α) desechando su valor de planeación, pero manteniendo el valor de planeación del parámetro de forma. Por su parte, el tipo de estrategias que se pretenden estudiar en este punto buscarían obtener datos con los cuales se desecharían los dos valores de planeación (no solo el correspondiente a α) y por lo tanto la estimación de cualquier otro parámetro se haría a través de la estimación de ambos, α y β .

- Restructurando algunas ideas mencionadas en el punto anterior, nuestra estrategia de inspección es construida bajo el contexto de que se tiene suficiente información a priori sobre el parámetro de forma, de manera que la información que arroje la prueba acerca de éste será despreciada y entonces la estrategia de inspección se enfocará únicamente en recolectar información acerca del parámetro de escala. De manera opuesta, la estrategia que se propone estudiar en ese punto se utilizaría bajo el contexto de que la información a priori sobre β es muy pobre, por lo que la prueba se diseñaría considerando de antemano que ésta información será despreciada una vez obtenidos los datos. Una estrategia de inspección intermedia podría resultar trabajando conceptos bayesianos, es decir, considerando en principio una distribución a priori informativa para β y una no informativa para α para entonces hacer optimización sobre la distribución a posteriori esperada en lugar de trabajar con la información esperada de Fisher. De esta manera, una vez que se obtengan los datos de la prueba (previamente diseñada para tales fines), la estimación de los parámetros de interés incluirán tanto información a priori de β como información de él proveniente de los datos. En la medida de cuán informativa sea la distribución a priori de β se espera que la estrategia de inspección obtenida se asimile a la estrategia de inspección propuesta en la tesis, o contrariamente, a la estrategia que resultaría con los criterios del punto anterior. Finalmente, bajo este enfoque y en contextos como los descritos al final de la Sección 3.3.2, podría considerarse introducir también una distribución a priori informativa para α .
- Todas las estrategias de inspección que aquí se mencionan (Sección 3.1.1) están basadas en una cantidad de inspecciones previamente fijada. Esto es considerando que de alguna manera ya se tiene resuelto el problema de costos de prueba, es decir, que se ha determinado previa-

mente el tamaño de muestra y el número de inspecciones a realizar de manera que los costos de prueba sean aceptables. Retomando lo mencionado en el último párrafo de la Sección 3.4 podría definirse el costo de una prueba como función de la cantidad de unidades a probar, del número de inspecciones y de su duración (considerando incluso penalizaciones en costo si la prueba excede de un tiempo límite) de manera que se propongan estrategias óptimas que maximicen la información esperada de Fisher sujeto a una restricción en costo, o alternativamente, que minimicen el costo de prueba sujeto a una restricción en la información esperada de Fisher. Lo que se buscaría con esto es diseñar pruebas de vida que ataquen los problemas de cantidad de información y costos de prueba de forma integral, y por lo tanto más eficiente, en lugar de resolverlos por separado.

Cabe mencionar que los resultados de este trabajo han sido motivado dentro de un contexto de Confiabilidad, pero bien pudieran aplicarse en territorios ajenos. En términos generales, se recomendaría considerar las ideas que aquí se plantean en cuanto a la planeación de estrategias de inspección en cualquier otro contexto en la cual, por un lado ha de obtenerse una muestra con datos agrupados a partir de un experimento con el objetivo de estimar los parámetros desconocidos de la distribución de la población total, y por otro lado, dentro del diseño del experimento se tenga la capacidad de seleccionar la segmentación del soporte de la distribución que dará origen a la agrupación de los datos. Bajo este contexto, los datos podrían representar longitud, voltaje, luminosidad, etc. y no necesariamente tiempo como es el caso en esta tesis. Ante tal situación incluso podría ser de interés buscar una extensión para el caso multivariado, donde los datos estarían representados por vectores en lugar de escalares (por ejemplo cuando éstos representen una posición en el espacio).

5. Apéndice

5.1. Existencia de una solución óptima

Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de densidad con las siguientes propiedades:

- $\phi \in C(\mathbb{R})$
- $\phi(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \phi'(z) = 0$

Como consecuencia de la segunda condición podemos asegurar que existe Φ^{-1} y además es derivable. Definamos

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \phi \circ \Phi^{-1}(x), & \text{con } x \in (0, 1), \\ E_\lambda &= \{(x, y) \in (0, 1)^2 \mid x < y\}, \\ E_\lambda^* &= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \leq y\}, \\ \lambda(x, y) &= \frac{[\rho(y) - \rho(x)]^2}{y - x}, & \text{con } (x, y) \in E_\lambda.\end{aligned}$$

Lema 2 $\lambda(x, y)$ es continua

Demostración. $\phi \in C^0(\mathbb{R})$ y $\Phi^{-1} \in C^0(0, 1)$ por lo tanto $\rho \in C^0(0, 1)$, y como $y - x > 0 \quad \forall (x, y) \in E_\lambda$ el resultado es inmediato. ■

Lema 3 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \lambda(x, y) = 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in E_\lambda^* \setminus E_\lambda$

Demostración. Primeramente notemos que los elementos de $E_\lambda^* \setminus E_\lambda$ tienen alguna de las siguientes formas:

$$(0, c_1), (c_1, 1), (0, 1), (c_2, c_2), \quad \text{con } c_1 \in (0, 1), c_2 \in [0, 1]$$

Para los primeros tres casos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,c_1)} \lambda(x,y) &= \frac{\rho(c_1)^2}{c_1}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (c_1,1)} \lambda(x,y) &= \frac{\rho(c_1)^2}{1-c_1}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \lambda(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Consideremos el cuarto caso. Sea $\{(x_n, y_n)\} \rightarrow (c_2, c_2)$, con $(x_n, y_n) \in E_\lambda$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\rho(y_n) - \rho(x_n)]^2}{y_n - x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\rho(y_n) - \rho(x_n)] [\rho(y_n) + \rho(x_n)] \rho(y_n) - \rho(x_n)}{y_n - x_n \rho(y_n) + \rho(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(y_n)^2 - \rho(x_n)^2}{y_n - x_n} \frac{\rho(y_n) - \rho(x_n)}{\rho(y_n) + \rho(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n,\end{aligned}$$

$$\text{con } a_n = \frac{\rho(y_n)^2 - \rho(x_n)^2}{y_n - x_n}, \quad b_n = \frac{\rho(y_n) - \rho(x_n)}{\rho(y_n) + \rho(x_n)}.$$

Notemos que ρ^2 es diferenciable, explícitamente

$$\begin{aligned}\frac{d\rho^2(w)}{dw} &= 2\rho(w) \frac{d\rho(w)}{dw} \\ &= 2\rho(w) \left\{ \phi' \circ \Phi^{-1}(w) \left[\frac{d\Phi(z)}{dz} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \right]^{-1} \right\} \\ &= 2\rho(w) \left[\phi' \circ \Phi^{-1}(w) \frac{1}{\rho(w)} \right] \\ &= 2\phi' \circ \Phi^{-1}(w),\end{aligned}$$

y por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N} \exists w_n \in (y_n, x_n)$ tal que

$$\frac{\rho(y_n)^2 - \rho(x_n)^2}{y_n - x_n} = 2\phi' \circ \Phi^{-1}(w_n).$$

Más aún,

$$\begin{aligned}\lim_{w \rightarrow 0} \phi' \circ \Phi^{-1}(w) &= \lim_{w \rightarrow 1} \phi' \circ \Phi^{-1}(w) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \phi'(z) = 0 \\ \implies \exists A \in \mathbb{R} \text{ tal que } |\phi' \circ \Phi^{-1}(w)| &< A \quad \forall w \in (0, 1) \\ \implies \exists A \in \mathbb{R} \text{ tal que } |a_n| &< A \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

De igual modo,

$$\begin{aligned}\rho(w) &> 0 \quad \forall w \in (0, 1) \\ \implies |\rho(y_n) - \rho(x_n)| &\leq \rho(y_n) + \rho(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies \left| \frac{\rho(y_n) - \rho(x_n)}{\rho(y_n) + \rho(x_n)} \right| &\leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies |b_n| &\leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Hasta ahora hemos probado que ambas sucesiones están acotadas. En particular:

(1) si $c_2 \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n)} = \frac{\rho(c_2) - \rho(c_2)}{\rho(c_2) + \rho(c_2)} = \frac{0}{2\rho(c_2)} = 0,$$

(2) si $c_2 \in \{0, 1\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\phi' \circ \Phi^{-1}(w_n) = \lim_{w \rightarrow c_2} 2\phi' \circ \Phi^{-1}(w) = 2 \lim_{|z| \rightarrow \infty} \phi'(z) = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (c_2, c_2)} \lambda(x, y) = 0$ y se obtiene el resultado. ■

De los Lemas 2 y 3 se concluye que $\forall (x_0, y_0) \in E_\lambda^* \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \lambda(x, y)$.

Lema 4 $\forall (x_0, y_0) \in \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x < y\} \exists w \in (y_0, x_0)$ tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [\lambda(x, w) + \lambda(w, y)] \geq \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \lambda(x, y)$$

Demostración. Sea $w = \frac{y+x}{2}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \{[\rho(y) - \rho(w)] - [\rho(w) - \rho(x)]\}^2 \\ 0 &\leq 2[\rho(w) - \rho(x)]^2 + 2[\rho(y) - \rho(w)]^2 \\ &\quad - \{[\rho(y) - \rho(w)] + [\rho(w) - \rho(x)]\}^2 \\ 0 &\leq 2\frac{[\rho(w) - \rho(x)]^2}{y-x} + 2\frac{[\rho(y) - \rho(w)]^2}{y-x} \\ &\quad - \frac{[\rho(y) - \rho(w) + \rho(w) - \rho(x)]^2}{y-x} \\ 0 &\leq \frac{[\rho(w) - \rho(x)]^2}{w-x} + \frac{[\rho(y) - \rho(w)]^2}{y-w} \\ &\quad - \frac{[\rho(y) - \rho(x)]^2}{y-x} \\ 0 &\leq \lambda(x, w) + \lambda(w, y) - \lambda(x, y) \\ \lambda(x, y) &\geq \lambda(x, w) + \lambda(w, y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \lambda(x, y) &\geq \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [\lambda(x, w) + \lambda(w, y)] \end{aligned}$$

■

Ahora definamos

$$\begin{aligned} E &= \{\mathbf{p} \in (0, 1)^m \mid 0 < p_1 < \dots < p_m < 1\}, \\ E^* &= \{\mathbf{p} \in [0, 1]^m \mid 0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_m \leq 1\}, \\ \Lambda(\mathbf{p}) &= \frac{\rho(p_1)^2}{p_1} + \sum_{i=2}^m \frac{[\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})]^2}{p_i - p_{i-1}} + \frac{\rho(p_m)^2}{1 - p_m}, \text{ con } \mathbf{p} \in E. \end{aligned}$$

Teorema 1 $\exists \mathbf{p}_0 \in E$ tal que $\Lambda(\mathbf{p}_0) = \sup \{\Lambda(\mathbf{p})\}$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(\mathbf{p}) = \{\delta_0(\mathbf{p}), \delta_1(\mathbf{p}), \delta_2(\mathbf{p}), \dots, \delta_m(\mathbf{p}), \delta_{m+1}(\mathbf{p})\} \\ &= \{0, p_1, p_2, \dots, p_m, 1\}, \text{ con } \mathbf{p} \in E^*. \end{aligned}$$

Primero mostraremos que para todo $\mathbf{p}^* \in E^* \setminus E$ existe $\mathbf{p}^{**} \in E^*$ tal que

$$|\{i \mid \delta_{i-1}^{**} < \delta_i^{**}\}| = |\{i \mid \delta_{i-1}^* < \delta_i^*\}| + 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{**}} \Lambda(\mathbf{p}) \geq \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p}).$$

Tomemos $\mathbf{p}^* \in E^* \setminus E$ y analicemos los siguientes dos casos:

$$(1) \delta_0^* < \delta_1^*$$

Definamos $j = \min \{i \mid \delta_i^* = \delta_{i+1}^*\}$ de manera que $\delta_{j-1}^* < \delta_j^*$ y $\delta_j^* = \delta_{j+1}^*$. Por el Lema 4 existe $w \in (\delta_{j-1}^*, \delta_j^*)$ tal que

$$\lim_{(\delta_{j-1}, \delta_j) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, \delta_j^*)} [\lambda(\delta_{j-1}, w) + \lambda(w, \delta_j)] \geq \lim_{(\delta_{j-1}, \delta_j) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, \delta_j^*)} \lambda(\delta_{j-1}, \delta_j).$$

Por lo tanto, si tomamos \mathbf{p}^{**} con

$$p_i^{**} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ p_r & \text{en otro caso} \end{cases},$$

entonces $\delta_{j-1}^{**} < \delta_j^{**}$ y $\delta_j^{**} < \delta_{j+1}^{**}$, por lo que

$$\begin{aligned} |\{i \mid \delta_i^{**} < \delta_{i+1}^{**}\}| &= |\{i \mid \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \cup \{j\}| \\ &= |\{i \mid \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}| + |\{j\}| - |\{i \mid \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \cap \{j\}| \\ &= |\{i \mid \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}| + |\{j\}| - |\phi| \\ &= |\{i \mid \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}| + 1. \end{aligned}$$

Claramente $\mathbf{p}^{**} \in E^*$, además

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{**}} \Lambda(\mathbf{p}) &= \sum_{i=0}^m \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^{**}, \delta_{i+1}^{**})} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^{**} < \delta_{i+1}^{**}\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^{**}, \delta_{i+1}^{**})} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \sum_{\{i | \delta_i^{**} = \delta_{i+1}^{**}\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^{**}, \delta_{i+1}^{**})} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^{**} < \delta_{i+1}^{**}\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^{**}, \delta_{i+1}^{**})} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \cup \{j\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \setminus \{j-1\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \lim_{(\delta_{j-1}, \delta_j) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, w)} \lambda(\delta_{j-1}, \delta_j) + \lim_{(\delta_j, \delta_{j+1}) \rightarrow (w, \delta_{j+1}^*)} \lambda(\delta_j, \delta_{j+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \setminus \{j-1\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \lim_{(\delta_{j-1}, \delta_{j+1}) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, \delta_{j+1}^*)} [\lambda(\delta_{j-1}, w) + \lambda(w, \delta_{j+1})] \\
&\geq \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \setminus \{j-1\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \lim_{(\delta_{j-1}, \delta_{j+1}) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, \delta_{j+1}^*)} \lambda(\delta_{j-1}, \delta_{j+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \setminus \{j-1\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \lim_{(\delta_{j-1}, \delta_j) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, \delta_j^*)} \lambda(\delta_{j-1}, \delta_j) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{**}} \Lambda(\mathbf{p}) &= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&+ \sum_{\{i | \delta_i^* = \delta_{i+1}^*\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^m \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \delta_0^* = \delta_1^*$$

En este caso tomamos $j = \max\{i | \delta_i^* = \delta_0^*\}$ y otra vez por el Lema 4 existe $w \in (\delta_j^*, \delta_{j+1}^*)$ tal que

$$\lambda(\delta_j^*, w) + \lambda(w, \delta_{j+1}^*) > \lambda(\delta_j^*, \delta_{j+1}^*),$$

por lo que si tomamos \mathbf{p}^{**} con

$$p_i^{**} = \begin{cases} w & \text{si } i = j \\ p_i^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces,

$$|\{i | \delta_i^{**} < \delta_{i+1}^{**}\}| = |\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \cup \{j-1\}| = |\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}| + 1$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{**}} \Lambda(\mathbf{p}) &= \sum_{\{i | \delta_i^{**} < \delta_{i+1}^{**}\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^{**}, \delta_{i+1}^{**})} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \cup \{j-1\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \setminus \{j\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \lim_{(\delta_{j-1}, \delta_j) \rightarrow (\delta_{j-1}^*, \delta_j^*)} \lambda(\delta_{j-1}, \delta_j) + \lim_{(\delta_j, \delta_{j+1}) \rightarrow (w, \delta_{j+1}^*)} \lambda(\delta_j, \delta_{j+1}) \\
&\geq \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\} \setminus \{j\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&\quad + \lim_{(\delta_j, \delta_{j+1}) \rightarrow (\delta_j^*, \delta_{j+1}^*)} \lambda(\delta_j, \delta_{j+1}) \\
&= \sum_{\{i | \delta_i^* < \delta_{i+1}^*\}} \lim_{(\delta_i, \delta_{i+1}) \rightarrow (\delta_i^*, \delta_{i+1}^*)} \lambda(\delta_i, \delta_{i+1}) \\
&= \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

De estos dos casos se puede concluir el resultado parcial y en consecuencia para todo $\mathbf{p}^* \in E^*$ existe $\mathbf{p}_0 \in E$ tal que $\Lambda(\mathbf{p}_0) \geq \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p})$, esto es, sea $\mathbf{p}^* \in E^*$, si $\mathbf{p}^* \in E$ la conclusión es inmediata tomando $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}^*$, en caso contrario, $\mathbf{p}^* \in E^* \setminus E$ y entonces podemos encontrar $\mathbf{p}^{**} \in E^*$ con

$$|\{i | \delta_{i-1}^{**} < \delta_i^{**}\}| = |\{i | \delta_{i-1}^* < \delta_i^*\}| + 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{**}} \Lambda(\mathbf{p}) \geq \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p}).$$

Aplicando iterativamente este resultado se obtiene $\mathbf{p}_0 \in E$ (al cual se llega cuando $|\{i | \delta_i < \delta_{i+1}\}| = m + 1$), donde

$$\Lambda(\mathbf{p}_0) = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_0} \Lambda(\mathbf{p}) \geq \dots \geq \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{**}} \Lambda(\mathbf{p}) \geq \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p}).$$

Ahora consideremos $s = \sup \{\Lambda(\mathbf{p})\}$. De la definición de valor supremo podemos asegurar que existe $\{\mathbf{p}_n\}$, con $\mathbf{p}_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\{\Lambda(\mathbf{p}_n)\} \rightarrow s$. Dado que E^* es cerrado y acotado es un espacio compacto, y como $E \subset E^*$ entonces existe $N \subset \mathbb{N}$ tal que $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in N} \rightarrow \mathbf{p}^* \in E^*$. Finalmente concluimos que existe $\mathbf{p}_0 \in E$ tal que

$$s \geq \Lambda(\mathbf{p}_0) \geq \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^*} \Lambda(\mathbf{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\Lambda(\mathbf{p}_n)\}_{n \in N_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\Lambda(\mathbf{p}_n)\} = s.$$

■

Claramente $s \in \mathbb{R}$, ya que $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$.

El Teorema 1 es válido si en lugar de E y E^* se trabaja respectivamente con

$$\begin{aligned} E_{p_r} &= \{\mathbf{p} \in (0, 1)^m \mid 0 < p_1 < \cdots < p_m = p_r < 1\} \text{ y} \\ E_{p_r}^* &= \{\mathbf{p} \in [0, 1]^m \mid 0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_m = p_r < 1\}, \end{aligned}$$

lo cual garantiza que Λ también puede maximizarse cuando se fija la duración de prueba desde un inicio, en tal caso tomamos $p_r = \Phi(\beta \ln t_r / \alpha)$.

Nota 2 *La estructura de esta demostración permite extenderse al caso en que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$ y $\phi(z) \geq 0$ siempre y cuando se establezcan condiciones que aseguren que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (c,c)} \frac{[\rho(y) - \rho(x)]^2}{y - x} = 0,$$

con $c \in [0, 1]$, lo cual en general no se cumple.

5.2. Más propiedades de la estrategia óptima

En esta sección analizaremos algunas propiedades de las estrategias óptimas, matemáticamente más complejas a las mostradas en la Sección 3.3, que permitirán establecer métodos para encontrarlas.

Una vez demostrada la existencia de un máximo global de Λ , notando que ésta es derivable en todo su dominio, cualquier estrategia óptima sin

restricción en su duración de tiempo, llamémosle \mathbf{p}^* , debe satisfacer que $\nabla\Lambda = \mathbf{0}$, esto es,

$$\left. \frac{\partial\Lambda}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Bajo la convención empleada en la Sección 3.2.1 consideremos

$$\rho(p_0 = 0) = \rho(p_{m+1} = 1) = 0,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} \frac{[\rho(p_j) - \rho(p_{j-1})]^2}{p_j - p_{j-1}} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \frac{[\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})]^2}{p_i - p_{i-1}} + \frac{[\rho(p_{i+1}) - \rho(p_i)]^2}{p_{i+1} - p_i} \right\} \\ &= 2 \left[\frac{\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}} \right] \rho'(p_i) - \left[\frac{\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})}{p_i - p_i} \right]^2 \\ &\quad - 2 \left[\frac{\rho(p_{i+1}) - \rho(p_i)}{p_{i+1} - p_i} \right] \rho'(p_i) - \left[\frac{\rho(p_{i+1}) - \rho(p_i)}{p_{i+1} - p_i} \right]^2 \\ &= 2 (\xi_i - \xi_{i+1}) \rho'(p_i) - (\xi_i^2 - \xi_{i+1}^2) \\ &= (\xi_i - \xi_{i+1}) [2\rho'(p_i) - \xi_i - \xi_{i+1}], \end{aligned}$$

$$\text{con } \xi_i = \frac{\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}}, i = 1, \dots, m.$$

De aquí que si $(\xi_i - \xi_{i+1})|_{\mathbf{p}} = 0$ ó $[2\rho'(p_i) - \xi_i - \xi_{i+1}]|_{\mathbf{p}} = 0$ para todo i , entonces en \mathbf{p} se alcanza un máximo o un mínimo local. Ahora mostraremos que para cualquier estrategia óptima \mathbf{p}^* , $(\xi_i - \xi_{i+1})|_{\mathbf{p}^*} \neq 0$ para todo i .

Lema 5 Sea \mathbf{p} tal que $\nabla\Lambda(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, con $(\xi_i - \xi_{i+1})|_{\mathbf{p}} = 0$ para algún i . Por lo tanto, $\exists j$ tal que $(\xi_j - \xi_{j+1})|_{\mathbf{p}} = 0$ y $\exists p \in (p_{j-1}, p_j)$ tal que $\frac{\rho(p) - \rho(p_{j-1})}{p - p_{j-1}} \neq \xi_j$

Demostración. Consideremos $j = \min \{i \mid (\xi_i - \xi_{i+1})|_{\mathbf{p}} = 0\}$ y supongamos entonces que

$$\xi_j|_{\mathbf{p}} = \frac{\rho(p) - \rho(p_{j-1})}{p - p_{j-1}} \quad \forall p \in (p_{j-1}, p_j),$$

por lo tanto:

(1) si $j = 1$

$$\begin{aligned} \xi_1|_{\mathbf{p}} &= \lim_{p \rightarrow p_0} \xi_1|_{\mathbf{p}} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\rho(p) - \rho(p_0)}{p - p_0} = \lim_{p \rightarrow 0} \rho'(p) = 0 \\ &\implies \rho(p_1) = \rho(p_0) = 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice la condición $\phi(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$.

(2) si $j > 1$, entonces $(\xi_{j-1} - \xi_j)|_{\mathbf{p}} \neq 0$ y $[2\rho'(p_{j-1}) - \xi_{j-1} - \xi_j]|_{\mathbf{p}} = 0$, además

$$\begin{aligned} \xi_j|_{\mathbf{p}} &= \lim_{p \rightarrow p_{j-1}} \xi_j|_{\mathbf{p}} = \lim_{p \rightarrow p_{j-1}} \frac{\rho(p) - \rho(p_{j-1})}{p - p_{j-1}} = \rho'(p_{j-1}) \\ &\implies [2\rho'(p_{j-1}) - \xi_{j-1} - \xi_j]|_{\mathbf{p}} = (\xi_j - \xi_{j-1})|_{\mathbf{p}} = 0 \end{aligned}$$

■

Teorema 2 Sea \mathbf{p}^* tal que $\Lambda(\mathbf{p}^*)$ es un máximo global de Λ , por lo tanto $(\xi_i - \xi_{i+1})|_{\mathbf{p}^*} \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$

Demostración. Supongamos \mathbf{p}^* tal que $\Lambda(\mathbf{p}^*)$ es un máximo global de Λ y a su vez $(\xi_i - \xi_{i+1})|_{\mathbf{p}^*} = 0$ para algún i .

Por el Lema 5 podemos tomar j y p tal que

$$\xi_j|_{\mathbf{p}^*} \neq \frac{\rho(p) - \rho(p_{j-1}^*)}{p - p_{j-1}^*},$$

más aún, por la continuidad de ρ se puede pedir que

$$\rho(p) \in (\rho(p_{j-1}^*), \rho(p_j^*)).$$

Con base en lo anterior consideremos el triángulo denotado por ΔABC , con $A = (p_{j-1}^*, \rho(p_{j-1}^*))$, $B = (p, \rho(p))$, $C = (p_{j+1}^*, \rho(p_{j+1}^*))$. Por las propiedades del triángulo podemos afirmar que $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| > |\overline{AC}|$, por lo tanto, haciendo $x_1 = p - p_{j-1}^*$, $x_2 = p_{j+1}^* - p$, $y_1 = \rho(p) - \rho(p_{j-1}^*)$, $y_2 = \rho(p_{j+1}^*) - \rho(p)$ se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} &> \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\ \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 &> (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\ x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} &> x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \\ (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) &> (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \\ x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 &> 2x_1x_2y_1y_2 \\ \frac{x_1}{x_2}y_2^2 + \frac{x_2}{x_1}y_1^2 + y_1^2 + y_2^2 &> 2y_1y_2 + y_1^2 + y_2^2 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1}y_1^2 + \frac{x_1 + x_2}{x_2}y_2^2 &> (y_1 + y_2)^2 \\ \frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_2^2}{x_2} &> \frac{(y_1 + y_2)^2}{x_1 + x_2} \\ \frac{[\rho(p) - \rho(p_{j-1}^*)]^2}{p - p_{j-1}^*} + \frac{[\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p)]^2}{p_{j+1}^* - p} &> \frac{[\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*)]^2}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \\ \lambda(p_{j-1}^*, p) + \lambda(p, p_{j+1}^*) &> \lambda(p_{j-1}^*, p_{j+1}^*). \end{aligned}$$

Por otro lado si $(\xi_j - \xi_{j+1})|_{p^*} = 0$, entonces

$$\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_j^*) = [\rho(p_j^*) - \rho(p_{j-1}^*)] \frac{p_{j+1}^* - p_j^*}{p_j^* - p_{j-1}^*}$$

y a su vez

$$\begin{aligned}
\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*) &= \rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_j^*) + \rho(p_j^*) - \rho(p_{j-1}^*) \\
&= [\rho(p_j^*) - \rho(p_{j-1}^*)] \left[1 + \frac{p_{j+1}^* - p_j^*}{p_j^* - p_{j-1}^*} \right] \\
&= [\rho(p_j^*) - \rho(p_{j-1}^*)] \frac{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*}{p_j^* - p_{j-1}^*},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\rho(p_j^*) - \rho(p_{j-1}^*) &= [\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*)] \frac{p_j^* - p_{j-1}^*}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \quad \text{y} \\
\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_j^*) &= [\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*)] \frac{p_{j+1}^* - p_j^*}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned}
\lambda(p_{j-1}^*, p_j^*) + \lambda(p_j^*, p_{j+1}^*) &= \frac{[\rho(p_j^*) - \rho(p_{j-1}^*)]^2}{p_j^* - p_{j-1}^*} + \frac{[\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_j^*)]^2}{p_{j+1}^* - p_j^*} \\
&= \frac{[\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*)]^2}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \frac{p_j^* - p_{j-1}^*}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \\
&\quad + \frac{[\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*)]^2}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \frac{p_{j+1}^* - p_j^*}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \\
&= \frac{[\rho(p_{j+1}^*) - \rho(p_{j-1}^*)]^2}{p_{j+1}^* - p_{j-1}^*} \\
&= \lambda(p_{j-1}^*, p_{j+1}^*)
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\lambda(p_{j-1}^*, p) + \lambda(p, p_{j+1}^*) > \lambda(p_{j-1}^*, p_{j+1}^*) = \lambda(p_{j-1}^*, p_j^*) + \lambda(p_j^*, p_{j+1}^*).$$

De manera que si consideramos \mathbf{p}^{**} con

$$p_i^{**} = \begin{cases} p & \text{si } i = j \\ p_i^* & \text{en otro caso} \end{cases},$$

claramente $\mathbf{p}^{**} \in E$ y $\Lambda(\mathbf{p}^{**}) > \Lambda(\mathbf{p}^*)$. ■

De este resultado se concluye que si $\Lambda(\mathbf{p}^*)$ es un máximo global entonces

$$[2\rho'(p_{i-1}) - \xi_{i-1} - \xi_i] \Big|_{\mathbf{p}^*} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Si se sustituye E por E_r como el dominio de Λ , el Teorema 2 también es cierto y con el mismo procedimiento se llega a que

$$[2\rho'(p_{i-1}) - \xi_{i-1} - \xi_i] \Big|_{\mathbf{p}^*} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1$$

El siguiente lema ayuda a comprobar que una mayor duración de prueba no siempre se traduce en una ganancia de información.

Lema 6 $\lim_{p_r \rightarrow 1} \max \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}, m = m_0 \}$
 $= \max \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E, m = m_0 - 1 \},$
con $m_0 = 2, 3, \dots$

Demostración. Por la existencia del máximo de Λ sobre todo E_{p_r} y por su continuidad, heredada de la continuidad de λ se tiene que

$$\begin{aligned} & \lim_{p_r \rightarrow 1} \max \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}, m = m_0 \} \\ &= \max \left\{ \lim_{p_r \rightarrow 1} \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}, m = m_0 \right\} \\ &= \max \left\{ \lim_{p_r \rightarrow 1} \frac{\rho(p)^2}{p_1} + \sum_{i=2}^m \frac{[\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})]^2}{p_i - p_{i-1}} + \frac{\rho(p_m)^2}{1 - p_m} \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}, m = m_0 \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{\rho(p_1)^2}{p_1} + \sum_{i=2}^{m-1} \frac{[\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})]^2}{p_i - p_{i-1}} + \frac{\rho(p_{m-1})^2}{1 - p_{m-1}} \right. \\ & \quad \left. + \lim_{(p_r, p_{m+1}) \rightarrow (1,1)} \lambda(p_r, p_{m+1}) \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}, m = m_0 \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{\rho(p_1)^2}{p_1} + \sum_{i=2}^m \frac{[\rho(p_i) - \rho(p_{i-1})]^2}{p_i - p_{i-1}} + \frac{\rho(p_m)^2}{1 - p_m} \mid \mathbf{p} \in E, m = m_0 - 1 \right\} \\ &= \max \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E, m = m_0 - 1 \} \end{aligned}$$

■

De este lema se puede concluir que alargar una prueba implica asintóticamente la pérdida de información correspondiente a una inspección. En

particular para distribuciones como la Weibull y la loglogística cuyo máximo de $\Lambda(\mathbf{p})$ sobre E y sobre E_{p_r} es único, el resultado vale sustituyendo la función máx por la función arg máx, con lo cual se aseguraría que la estrategia óptima de m inspecciones con duración de prueba fija tiende a la estrategia óptima con $m - 1$ inspecciones sin restricción en tiempo cuando la duración de prueba se hace tender a infinito.

Sean ahora

$$\begin{aligned}\Lambda^*(p) &= \text{máx} \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}, p_r = p \} \\ p_{opt} &= \inf \{ p^* \in \mathbb{R}^+ \mid \Lambda^*(p^*) = \text{máx} \{ \Lambda^*(p) \mid p \in \mathbb{R}^+ \} \} \\ E'_{p_r} &= \{ \mathbf{p} \in (0, 1)^m \mid 0 < p_1 < \dots < p_m < p_r < 1 \} \\ P^*_{p_r} &= \{ \mathbf{p}^* \in E'_{p_r} \mid \Lambda(\mathbf{p}^*) = \text{máx} \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E'_{p_r} \} \}\end{aligned}$$

Lema 7 Si Λ no tiene máximos locales en $E'_{p_{opt}}$, se tiene por lo tanto que $\text{mín} \{ p_r, p_{opt} \} = \inf \{ p_m^* \mid \mathbf{p}^* \in P^*_{p_r} \}$ para todo $p_r \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Si $p_r \geq p_{opt}$ el resultado es inmediato de la definición de p_{opt} .

Revisemos el caso en que $p_r < p_{opt}$.

$$\begin{aligned}&\Lambda^* \text{ tiene un máximo local en } p^* \\ \implies &\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \Lambda^*(p^*) \geq \Lambda^*(p) \quad \forall p \in B_p(\varepsilon) \\ \implies &\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \text{máx} \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_{p^*} \} \geq \text{máx} \{ \Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_p \} \quad \forall p \in B_p(\varepsilon) \\ \implies &\exists \mathbf{p}^* \in E_{p^*}, \varepsilon > 0 \text{ tal que } \Lambda(\mathbf{p}^*) \geq \Lambda(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in B_{\mathbf{p}^*}(\varepsilon) \\ \implies &\Lambda \text{ tiene un máximo local en } E \text{ para algún } \mathbf{p} \in E_{p^*}\end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned}&\Lambda \text{ no tiene máximos locales en } E'_{p_{opt}} \\ \implies &\Lambda^* \text{ no tiene máximos locales en } (0, p_{opt})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \Lambda^* \text{ es estrictamente creciente en } (0, p_{opt}) \\
&\implies \exists \mathbf{p}^* \in E_{p_r} \text{ tal que } \Lambda(\mathbf{p}^*) > \Lambda(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in E_p, \text{ con } p < p_r \\
&\implies P_{p_r}^* = \{\mathbf{p}^* \in E_{p_r} \mid \Lambda(\mathbf{p}^*) = \text{máx} \{\Lambda(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in E_{p_r}\}\} \\
&\implies p_r = \inf \{p_m^* \mid \mathbf{p}^* \in P_{p_r}^*\}
\end{aligned}$$

■

En particular este resultado aplica para distribuciones como la Weibull y la loglogística que permiten un solo máximo local para Λ en E y que corresponde a su máximo absoluto.

5.3. Algoritmo para encontrar el argumento que maximiza Λ para algunas distribuciones

5.3.1. Distribución Weibull

Si el tiempo a la falla de un producto es modelado con la distribución Weibull (o particularmente la distribución exponencial), entonces el indicador de calidad de la estrategia de inspección estará construido a partir de la distribución Gumbel estándar, es decir,

$$\Lambda(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})},$$

con $\phi(z) = \exp(z) \exp[-\exp(z)]$, $\Phi(z_i) = 1 - \exp[-\exp(z)]$. En tal caso

$$\xi_i = \frac{\exp(z_i) \exp[-\exp(z_i)] - \exp(z_{i-1}) \exp[-\exp(z_{i-1})]}{\exp[-\exp(z_{i-1})] - \exp[-\exp(z_i)]},$$

con $i = 1, \dots, m + 1$.

Definamos ahora

$$\vartheta_i = \exp(z_i) - \exp(z_{i-1}), \quad i = 1, \dots, m + 1,$$

de tal forma que al sustituir $\exp(z_{i-1}) = \exp(z_i) - \vartheta_i$ en ξ_i resulta

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \frac{\exp(z_i) \exp[-\exp(z_i)] - [\exp(z_i) - \vartheta_i] \exp[-\exp(z_i) + \vartheta_i]}{\exp[-\exp(z_i) + \vartheta_i] - \exp[-\exp(z_i)]} \\
&= \frac{\exp(z_i) - [\exp(z_i) - \vartheta_i] \exp(\vartheta_i)}{\exp(\vartheta_i) - 1} \\
&= \frac{\exp(z_i) [1 - \exp(\vartheta_i)] + \vartheta_i \exp(\vartheta_i)}{\exp(\vartheta_i) - 1} \\
&= -\exp(z_i) + \frac{\vartheta_i \exp(\vartheta_i)}{\exp(\vartheta_i) - 1}.
\end{aligned}$$

Análogamente sustituimos $\exp(z_{i+1}) = \exp(z_i) + \vartheta_{i+1}$ en ξ_{i+1} obteniendo así

$$\begin{aligned}
\xi_{i+1} &= \frac{[\exp(z_i) + \vartheta_{i+1}] \exp[-\exp(z_i) - \vartheta_{i+1}] - \exp(z_i) \exp[-\exp(z_i)]}{\exp[-\exp(z_i)] - \exp[-\exp(z_i) - \vartheta_{i+1}]} \\
&= \frac{[\exp(z_i) + \vartheta_{i+1}] \exp(-\vartheta_{i+1}) - \exp(z_i)}{1 - \exp(-\vartheta_{i+1})} \\
&= \frac{\vartheta_{i+1} \exp(-\vartheta_{i+1}) + [\exp(-\vartheta_{i+1}) - 1] \exp(z_i)}{1 - \exp(-\vartheta_{i+1})} \\
&= -\exp(z_i) + \frac{-\vartheta_{i+1} \exp(-\vartheta_{i+1})}{\exp(-\vartheta_{i+1}) - 1}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\xi_i - \xi_{i+1} = \frac{\vartheta_i \exp(\vartheta_i)}{\exp(\vartheta_i) - 1} - \frac{-\vartheta_{i+1} \exp(-\vartheta_{i+1})}{\exp(-\vartheta_{i+1}) - 1} > 0 \quad \forall \vartheta_i, \vartheta_{i+1} > 0,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Lambda}{\partial z_i} \right|_{z=z^*} &= 0 \\
\iff 2 \frac{\phi'(z_i)}{\phi(z_i)} \Big|_{z=z^*} &= \frac{\xi_i^2 - \xi_{i+1}^2}{\xi_i - \xi_{i+1}} \Big|_{z=z^*} \\
\iff 2 \frac{d \ln \phi(z_i)}{dz_i} \Big|_{z=z^*} &= \xi_i + \xi_{i+1} \Big|_{z=z^*},
\end{aligned}$$

donde $\frac{d \ln \phi(z_i)}{dz_i} = 1 - \exp(z_i)$.

Sustituyendo cada término en la i -ésima ecuación, $\frac{\partial \Lambda}{\partial z_i} \Big|_{z=z^*} = 0$ si y solo si

$$\begin{aligned}
2 [1 - \exp(z_i)] \Big|_{z=z^*} &= \left[-\exp(z_i) + \frac{\vartheta_i \exp(\vartheta_i)}{\exp(\vartheta_i) - 1} \right. \\
&\quad \left. - \exp(z_i) + \frac{-\vartheta_{i+1} \exp(-\vartheta_{i+1})}{\exp(-\vartheta_{i+1}) - 1} \right] \Big|_{z=z^*} \\
2 - 2 \exp(z_i^*) &= -2 \exp(z_i^*) + \frac{\vartheta_i^* \exp(\vartheta_i^*)}{\exp(\vartheta_i^*) - 1} + \frac{-\vartheta_{i+1}^* \exp(-\vartheta_{i+1}^*)}{\exp(-\vartheta_{i+1}^*) - 1} \\
2 &= \frac{\vartheta_i^* \exp(\vartheta_i^*)}{\exp(\vartheta_i^*) - 1} + \frac{-\vartheta_{i+1}^* \exp(-\vartheta_{i+1}^*)}{\exp(-\vartheta_{i+1}^*) - 1} \\
2 &= \varphi(\vartheta_i^*) + \varphi(-\vartheta_{i+1}^*),
\end{aligned}$$

con $\varphi(\vartheta) = \frac{\vartheta \exp(\vartheta)}{\exp(\vartheta) - 1}$.

La estrategia óptima será aquella que satisfaga el sistema de ecuaciones correspondiente a $i = 1, 2, \dots, m'$, donde $m' = m - 1$ si se ha fijado previamente la duración de prueba y $m' = m$ si no existe tal restricción.

Puede comprobarse fácilmente que existe φ^{-1} ya que $\varphi'(\vartheta) > 0 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$. En consecuencia

$$\vartheta_i^* = \varphi^{-1}(2 - \varphi(-\vartheta_{i+1}^*))$$

es la única solución a la i -ésima ecuación, más aún, ϑ_i^* como función de ϑ_{i+1}^* es estrictamente creciente.

Nota 3 *Para mantener la convención utilizada desde un inicio hacemos las siguientes consideraciones*

$$\exp(\infty) = \infty, \quad \exp(-\infty) = 0, \quad \vartheta_1 = \exp(z_1), \quad \vartheta_{m+1} = \infty, \quad \varphi(-\infty) = 0.$$

En particular cuando no hay restricción en z_m

$$\vartheta_m^* = \varphi^{-1}(2),$$

por lo que la única solución se reduce a calcular ϑ_i^* numéricamente a partir de la i -ésima ecuación iniciando por $i = m$, y dada la existencia, ésta solución debe corresponder al máximo global. Finalmente la estrategia óptima

estandarizada estará dada por

$$z_i^* = \ln \left(\sum_{j=1}^i \vartheta_j^* \right), \quad i = 1, \dots, m$$

Por otro lado, si z_m ha sido fijado como producto de la restricción en la duración de prueba, la obtención de la estrategia óptima se complica, sin embargo se puede asegurar su unicidad notando que z_i^* es estrictamente creciente como función de ϑ_j^* para todo $i, j = 1, 2, \dots, m$ y entonces z_i^* es estrictamente creciente como función de z_m para todo i .

5.3.2. Distribución Loglogística

Para el caso de la distribución loglogística, el indicador de calidad de la estrategia estará dada a partir de la distribución logística estándar como

$$\Lambda(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{[\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})},$$

con $\phi(z) = \frac{\exp(z)}{[1 + \exp(z)]^2}$, $\Phi(z) = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)}$. Entonces

$$\xi_i = \frac{\frac{\exp(z_i)}{[1 + \exp(z_i)]^2} - \frac{\exp(z_{i-1})}{[1 + \exp(z_{i-1})]^2}}{\frac{\exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)} - \frac{\exp(z_{i-1})}{1 + \exp(z_{i-1})}},$$

con $i = 1, \dots, m + 1$.

Definamos

$$\vartheta_i = \frac{1 + \exp(z_i)}{1 + \exp(z_{i-1})}, \quad i = 1, \dots, m + 1,$$

por lo que ahora sustituimos

$$\begin{aligned} \exp(z_{i-1}) &= \frac{1 + \exp(z_i)}{\vartheta_i} - 1 \quad \text{y} \\ \exp(z_{i+1}) &= \vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1 \end{aligned}$$

en ξ_i y ξ_{i+1} respectivamente, esto es

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \frac{\frac{\exp(z_i)}{[1 + \exp(z_i)]^2} - \left[\frac{1 + \exp(z)}{\vartheta_i} - 1 \right] \left[\frac{1 + \exp(z)}{\vartheta_i} \right]^{-2}}{\frac{\exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)} - \left[\frac{1 + \exp(z_i)}{\vartheta_i} - 1 \right] \left[\frac{1 + \exp(z_i)}{\vartheta_i} \right]^{-1}} \\
&= \frac{\exp(z_i) - [1 + \exp(z_i)] \vartheta_i + \vartheta_i^2}{[1 + \exp(z_i)]^2 \left\{ \frac{\exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)} - \left[\frac{1 + \exp(z_i)}{\vartheta_i} - 1 \right] \left[\frac{1 + \exp(z_i)}{\vartheta_i} \right]^{-1} \right\}} \\
&= \frac{[1 + \exp(z_i)] (1 - \vartheta_i) + \vartheta_i^2 - 1}{[1 + \exp(z_i)] \{ \exp(z_i) - [1 + \exp(z_i) - \vartheta_i] \}} \\
&= \frac{[1 + \exp(z_i)] (1 - \vartheta_i) + \vartheta_i^2 - 1}{- [1 + \exp(z_i)] (1 - \vartheta_i)} \\
&= -1 + \frac{\vartheta_i + 1}{\exp(z_i) + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{i+1} &= \frac{\frac{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1}{\vartheta_{i+1}^2 [1 + \exp(z_i)]^2} - \frac{\exp(z_i)}{[1 + \exp(z_i)]^2}}{\frac{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1}{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)]} - \frac{\exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)}} \\
&= \frac{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1 - \vartheta_{i+1}^2 \exp(z_i)}{\vartheta_{i+1}^2 [1 + \exp(z_i)]^2 \left(\frac{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1}{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)]} - \frac{\exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)} \right)} \\
&= \frac{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1 - \vartheta_{i+1}^2 [1 + \exp(z_i)] + \vartheta_{i+1}^2}{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] \{ \vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] - 1 - \vartheta_{i+1} \exp(z_i) \}} \\
&= \frac{\vartheta_{i+1} (1 - \vartheta_{i+1}) [1 + \exp(z_i)] + \vartheta_{i+1}^2 - 1}{\vartheta_{i+1} [1 + \exp(z_i)] (\vartheta_{i+1} - 1)} \\
&= -1 + \frac{\vartheta_{i+1} + 1}{\vartheta_{i+1} [\exp(z_i) + 1]}
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\xi_i - \xi_{i+1} &= \left[-1 + \frac{\vartheta_i + 1}{\exp(z_i) + 1} \right] - \left\{ -1 + \frac{\vartheta_{i+1} + 1}{\vartheta_{i+1} [\exp(z_i) + 1]} \right\} \\
&= \frac{\vartheta_i \vartheta_{i+1} - 1}{\vartheta_{i+1} [\exp(z_i) + 1]} > 0 \quad \forall \vartheta_i, \vartheta_{i+1} > 1,
\end{aligned}$$

cualquier argumento que maximice el indicador de calidad debe satisfacer

$$2 \frac{d \ln \phi(z_i)}{dz_i} \Big|_{z=z^*} = \xi_i + \xi_{i+1} \Big|_{z=z^*}.$$

Explícitamente

$$\begin{aligned} 2 \left[-1 + \frac{2}{\exp(z_i^*) + 1} \right] &= -1 + \frac{\vartheta_i^* + 1}{\exp(z_i^*) + 1} - 1 + \frac{\vartheta_{i+1}^* + 1}{\vartheta_{i+1}^* [\exp(z_i^*) + 1]} \\ \frac{4}{\exp(z_i^*) + 1} &= \frac{\vartheta_i^* + 1}{\exp(z_i^*) + 1} + \frac{\vartheta_{i+1}^* + 1}{\vartheta_{i+1}^* [\exp(z_i^*) + 1]} \\ 4 &= \vartheta_i^* + 1 + \frac{\vartheta_{i+1}^* + 1}{\vartheta_{i+1}^*} = \vartheta_i^* + 1 + 1 + \frac{1}{\vartheta_{i+1}^*} \\ 2 &= \vartheta_i^* + \frac{1}{\vartheta_{i+1}^*} \end{aligned}$$

Nota 4 *Nuevamente hacemos las respectivas consideraciones correspondientes a la convención utilizada:*

$$\exp(\infty) = \infty, \exp(-\infty) = 0, \vartheta_1 = \exp(z_1), \vartheta_{m+1} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0.$$

La m -ésima ecuación, cuando no hay restricción de tiempo, se reduce a

$$\vartheta_m^* = 2$$

y el procedimiento para encontrar el argumento óptimo es análogo al caso en que se tiene la distribución Weibull, pero en este caso puede verificarse analíticamente que la única solución al sistema de ecuaciones es

$$\vartheta_{m-k+1}^* = \frac{k+1}{k}, \text{ con } k = 1, \dots, m$$

y por lo tanto corresponde al máximo global. Finalmente la estrategia óptima estandarizada se obtiene a partir de

$$z_i^* = \ln \left(\prod_{j=1}^i \vartheta_j^* - 1 \right), i = 1, \dots, m,$$

esto es,

$$z_i^* = \ln \left(\frac{i}{m-i+1} \right), i = 1, \dots, m.$$

Nota 5 *Fácilmente puede comprobarse que*

$$\Phi(z_i^*) = \frac{i}{m+1}, i = 1, \dots, m,$$

por lo que se concluye que la estrategia óptima es igual a la estrategia equiprobable para todo m cuando no se tiene restricción en la duración de prueba.

Estrategia óptima bajo restricción de tiempo. La simplicidad de las ecuaciones obtenidas bajo el modelo loglogístico para las estrategias óptimas sin restricción en la duración del tiempo de prueba, permite obtener también expresiones relativamente sencillas para las estrategias óptimas bajo una restricción z_r menor a la duración óptima de prueba, tal y como se muestra a continuación.

Una vez fijada la duración de prueba $z_m^* = z_r$, las ϑ_i^* 's correspondientes a la estrategia óptima deben satisfacer las ecuaciones

$$2 = \vartheta_i + \frac{1}{\vartheta_{i+1}}, \text{ con } i = 1, \dots, m-1.$$

por lo tanto,

$$\vartheta_{m-k}^* = \frac{(k+1)\vartheta_m^* - k}{k\vartheta_m^* - (k-1)}, \text{ con } k = 0, \dots, m-1.$$

Puede verificarse que efectivamente

$$2 = \vartheta_{m-k}^* + \frac{1}{\vartheta_{m-k+1}^*}, \text{ con } k = 1, \dots, m-1.$$

Por otro lado,

$$1 + \exp(z_i^*) = \vartheta_i^* [1 + \exp(z_{i-1}^*)], \text{ con } i = 1, \dots, m,$$

y sustituyendo iterativamente se llega a la expresión

$$1 + \exp(z_i^*) = [1 + \exp(z_{i-j}^*)] \prod_{k=i-j+1}^i \vartheta_k^*, \text{ con } i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, i,$$

donde

$$\begin{aligned} \prod_{k=i-j+1}^i \vartheta_k^* &= \prod_{k=m-i}^{m-i+j-1} \vartheta_{m-k}^* = \prod_{k=m-i}^{m-i+j-1} \frac{(k+1)\vartheta_m^* - k}{k\vartheta_m^* - (k-1)} \\ &= \frac{(m-i+j)\vartheta_m^* - (m-i+j-1)}{(m-i)\vartheta_m^* - (m-i-1)}. \end{aligned}$$

En particular para $i = m$ se tiene

$$1 + \exp(z_m^*) = [1 + \exp(z_{m-j}^*)] [j\vartheta_m^* - (j-1)],$$

y a su vez, con $j = m$

$$1 + \exp(z_m^*) = [1 + \exp(z_0^*)] [m\vartheta_m^* - (m-1)] = m\vartheta_m^* - (m-1),$$

por lo que

$$\vartheta_m^* = \frac{\exp(z_m^*)}{m} + 1.$$

Finalmente

$$1 + \exp(z_m^*) = [1 + \exp(z_{m-j}^*)] \left\{ j \left[\frac{\exp(z_m^*)}{m} + 1 \right] - (j-1) \right\},$$

de donde se concluye que

$$z_{m-j}^* = \ln \left[\frac{m \exp(z_m^*) + m}{j \exp(z_m^*) + m} - 1 \right], \text{ para } j = 0, \dots, m-1,$$

o equivalentemente

$$z_i^* = \ln \left[\frac{i \exp(z_m^*)}{(m-i) \exp(z_m^*) + m} \right], \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Nota 6 Para este caso, al igual que cuando no se tiene restricción en el tiempo de prueba, también puede comprobarse fácilmente que las estrategias óptima y equiprobable coinciden, esto es,

$$\Phi(z_i^*) = \frac{i}{m} \Phi(z_m^*)$$

para todo i, m, z_m^* .

Referencias

- [1] Ahmad Abu-Taleb, M. Bhaskara Rao, Haimeng Zhang, (2003). Periodic Inspection Plans: The Case of Weibull Distribution, *Metrika*. 58:15-30.
- [2] William Q. Meeker Jr., (1986). Planning Life Tests in which Units are Inspected for Failure, *IEEE Transactions on Reliability*. R-35, 5:571-578.
- [3] Wayne Nelson, (1977). Optimum Demonstration Test with Grouped Inspection Data From an Exponential Distribution, *IEEE Transactions on Reliability*. R-26, 3:226-230.
- [4] Kulldorff, G., (1961). *Contributions to the Theory of Estimation from Grouped Data and Partially Grouped Samples*, Jonh Wiley, New York.
- [5] Hoyland, A. and Rausand, M., (1994). *System Reliability Theory*, Jonh Wiley & Sons, Inc.
- [6] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A., (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*, Jonh Wiley & Sons, Inc.
- [7] Kalbfleisch, J.G., (1979). *Probability and Statistical Inference II*, Springer-Verlag, New York, Inc.
- [8] Serfling, R. J., (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, Jonh Wiley, New York.
- [9] Chan, H. A. and Englert, P. J., (2001). *Accelerated Stress Testing Handbook*, Lucent Technologies, Inc. and AT&T Corp.
- [10] Hobbs, G. K., (2000). *Accelerated Reliability Engineering*, Jonh Wiley & Sons Ltd and others, England.
- [11] Lall, P., Pecht, M. G. and Hakim, E. B., (1997). *Influence of Temperature on Microelectronics and Reliability*, CRC Press LLC.