

---

# IDEALES DE MULTIPLICADORES DE CURVAS PLANAS IRREDUCIBLES

---

TESIS PARA OBTENER  
EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICAS

*Trabajo presentado por:*  
Carlos Rodrigo GUZMÁN DURÁN

*Directores:*  
Dr. Manuel GONZÁLEZ VILLA  
Dr. Xavier GÓMEZ-MONT ÁVALOS



CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A. C.

Marzo, 2018

## 1. AGRADECIMIENTOS

Estoy profundamente agradecido con mis asesores durante este proceso de doctorado. Con el Profesor Xavier Gómez-Mont que aceptó dirigir mi doctorado a pesar de mis debilidades académicas y en todo momento mostró disposición para orientarme y aprender conmigo diversos temas de geometría algebraica y teoría de singularidades con el objetivo de desarrollar líneas de investigación y por su entusiasmo por las matemáticas. Con el Dr. Manuel González Villa que desde un inicio la amistad y los intereses matemáticos nos llevaron a discutir los temas de este trabajo y por su invaluable apoyo, su paciencia e imprescindible aporte a los resultados de esta memoria.

Agradezco a los profesores Xavier Gómez-Mont y José Seade que, a través del proyecto LAISLA, me apoyaron para realizar una estancia de tres meses con el Profesor Bernard Teissier en el Institut de Mathématiques de Jussieu, en París, al inicio del doctorado. Esos meses marcaron mi vida académica y personal por el fabuloso ambiente académico y cultural que se generaba alrededor de ese grupo de trabajo dirigido por el Profesor Teissier y con el cual estoy profundamente agradecido, por su amistad y enseñanzas matemáticas. A los doctores Hussein Mourtada, María Pé Pereira, Helena Cobo, Charles Favre, y mis compañeras de doctorado de ese entonces, Ana Belén de Felipe y Lilia Alanis, todos ellos, amigos y maestros.

Agradezco profundamente a mi compañera de todos estos años, Claudia Alcántara, sin ella no habría nada de esto. Por su compañía, afecto y apoyo incondicional en todos los momentos, apoyo que incluyó escuchar y darme consejos sobre los temas de esta memoria, así como su apoyo financiero durante el periodo que me quedé sin financiamiento.

Estoy muy agradecido por todo el apoyo y enseñanzas de mis profesores a lo largo de estos años de posgrado en CIMAT, a mis compañeros, personal administrativo y personal de servicio que hicieron que mi estancia estuviera enfocada sólo en cuestiones académicas y personales, algo en verdad invaluable. También agradezco al Dr. Arturo Giles que durante su estancia posdoctoral en CIMAT me orientó y ayudó a entender diversos temas de geometría algebraica y teoría de singularidades.

Agradezco a los sinodales por sus relevantes comentarios para mejorar la tesis tanto en las cuestiones estéticas como en el contenido. En particular al Profesor Mark Spivakovsky, por su amistad e interés por el tema desde hace algunos meses cuando me sugirió tratar de entender conceptos algebraicos relacionados con los objetos de esta memoria.

No puedo dejar de agradecer a mis padres cuyo apoyo y cariño me han mantenido a flote siempre y han hecho gran parte de lo que soy.

Por último agradezco al CONACyT y al CIMAT, instituciones que me financiaron con una beca durante este largo proceso y por las que estaré en deuda con mi país para siempre.



## ÍNDICE

1. AGRADECIMIENTOS	1
2. INTRODUCCIÓN	4
Capítulo 1. Ideales de multiplicadores	13
1. Preliminares	13
2. Ideales de multiplicadores	14
3. Números de salto y umbral log canónico	18
4. Ideales de multiplicadores de ideales monomiales	22
Capítulo 2. Curvas planas irreducibles	25
1. Raíces aproximadas	28
2. Proceso de Newton	29
3. Resolución minimal y su relación con el proceso de Newton	33
4. Algunas propiedades del algoritmo de Euclides y el máximo común divisor	39
5. Resolución y cálculo de los invariantes numéricos $r_i$ y $b_i$	43
6. Una fórmula recursiva para el número de Milnor	48
Capítulo 3. Ideales de multiplicadores de curvas planas irreducibles	53
1. Caso con un exponente de Puiseux	53
2. Caso con dos exponentes de Puiseux	58
3. Caso general	76
4. Ejemplos	91
Capítulo 4. APÉNDICES	95
1. Algoritmo	95
2. Tablas de Ejemplo	98
Bibliography	113

## 2. INTRODUCCIÓN

**2.1. Motivación.** El estudio de singularidades ha tenido un papel importante en el estudio de variedades algebraicas y su clasificación, en particular se ha puesto atención en el comportamiento de las singularidades bajo transformaciones birracionales.

Durante las últimas dos o tres décadas, los *ideales de multiplicadores* y los *números de salto* se han convertido en una de las principales herramientas en el contexto de la geometría birracional de las variedades algebraicas complejas.

Estos objetos fueron definidos originalmente de manera analítica por Nadel [Nad], en términos de convergencia local de ciertas integrales. Los ideales de multiplicadores y los números de salto aparecieron de forma más o menos implícita en geometría algebraica en relación con teoremas de anulamiento de cohomología (ver [EsnVie]); en el marco de la Teoría de Singularidades, en trabajos de Libgober, Loeser-Vaquie y Vaquie; y en el marco del Algebra Conmutativa, en el trabajo de Lipman [Lip] sobre ideales de adjunción. Desde entonces se han encontrado numerosas aplicaciones de los ideales de multiplicadores en el estudio de la geometría birracional de los pares de variedades algebraicas. En particular, las relaciones de los ideales multiplicadores con otros invariantes como, por ejemplo, el espectro de las estructuras de Hodge mixtas introducido por Varchenko y Steenbrink y los módulos de Hodge mixtos de Saito, las raíces del polinomio de Bernstein-Sato o los polos de las funciones zeta de Igusa han despertado mucho interés. Estas relaciones se entienden, por lo general, mejor en el caso de singularidades aisladas.

Así mismo se han desarrollado y estudiado algunos conceptos análogos, como los ideales de prueba, con métodos de característica prima y usando herramientas como el morfismo de Frobenius.

**2.2. Objetivos.** El objetivo principal de este trabajo es dar un método efectivo para calcular los ideales de multiplicadores y los números de salto de un germen de curva plana irreducible. Nuestra motivación última es encontrar una estrategia y unas técnicas que puedan generalizarse a dimensión superior y permitan calcular los ideales de multiplicadores de singularidades *quasi-ordinarias* de hipersuperficies; una clase de singularidades que son, en general, no aisladas pero comparten muchas propiedades de las curvas planas.

**2.3. Ideales de multiplicadores y números de salto.** Dada una variedad quasi-proyectiva compleja lisa  $X$ , una gavilla de ideales  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$  y un número racional positivo  $\lambda$ , le podemos asociar una gavilla de ideales coherente  $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^\lambda) \subseteq \mathcal{O}_X$ , la cual captura, de alguna manera, información sobre las singularidades de elementos generales de  $\mathfrak{a}$ . En particular podemos considerar un divisor efectivo  $D$  en  $X$  y calcular los ideales de multiplicadores  $\mathcal{J}(\lambda D)$  de su gavilla asociada  $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_X(-D)$  para obtener información de las singularidades de  $D$ .

La familia de ideales  $\mathcal{J}(\lambda D) \subseteq \mathcal{O}_X$ , dependiente del parámetro  $\lambda$ , será más profunda cuanto “peores” sean las singularidades del par  $(X, D)$ . Éste es el contexto de este trabajo.

Los ideales de multiplicadores son definidos a través de convenientes resoluciones de singularidades llamadas *resoluciones logarítmicas* (ver Definiciones 1.2 y 1.7). Así, dada una resolución  $\log \pi : X' \rightarrow X$  de  $D$ , y  $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$  se define

$$\mathcal{J}(\lambda D) := \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \lambda \pi^* D \rfloor),$$

donde  $K_\pi$  es el divisor canónico relativo (1) (este divisor corresponde al haz lineal de *top forms* en  $X'$  que no provienen de formas de  $X$  y por lo tanto está soportado en el divisor excepcional). Es importante mencionar que dichas resoluciones siempre existen gracias al Teorema de Resolución de Singularidades de Hironaka y que la definición de los ideales es independiente de la resolución escogida (ver Teorema 1.1). Sin embargo es, en general, complicado encontrar una resolución de manera efectiva y por lo tanto, también son difíciles de calcular los ideales de multiplicadores. Una excepción importante es la clase de ideales monomiales en espacios afines, cuyos ideales de multiplicadores son descritos por una fórmula combinatoria muy simple dada por el Teorema de Howald [**How**] (ver Sección 1.4).

Ein, Lazarsfeld, Smith y Varolin [**ELSV**] probaron que hay un número discreto de valores racionales  $\lambda_i$  donde el ideal de multiplicador cambia. Estos números son llamados *números de salto* de  $(X, D)$  y definen una filtración

$$\mathcal{O}_X \supseteq \mathcal{J}(\lambda_1 D) \supseteq \mathcal{J}(\lambda_2 D) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{J}(\lambda_i D) \supseteq \mathcal{J}(\lambda_{i+1} D) \supseteq \cdots$$

con  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_i < \lambda_{i+1} < \cdots$ , y  $\mathcal{J}(\lambda D) = \mathcal{J}(\lambda_i D)$  si  $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1})$ .

Por otro lado observemos que si  $x \in D$ , y se tiene que  $K_\pi = \sum b_i E_i$  y  $\pi^* D = \sum r_i E_i$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\lambda D)_x &= (\pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \lambda \pi^* D \rfloor))_x \\ &= (\pi_* \mathcal{O}_{X'}(\sum (b_i - \lfloor \lambda r_i \rfloor) E_i))_x \\ &= \{h \in \mathcal{O}_{X,x} \mid \text{ord}_{E_i} \pi^*(h) \geq \text{ord}_{E_i}(\lfloor \lambda \pi^* D \rfloor - K_\pi) = \lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i \text{ para todo } i\} \end{aligned}$$

por lo que, localmente, podemos interpretar los ideales multiplicadores como los conjuntos de funciones que pasan una familia parametrizada de cotas asociadas a las componentes excepcionales de la resolución logarítmica.

**2.4. Trabajos previos.** Los números de salto de singularidades de curvas planas irreducibles han sido bien entendidos en los trabajos de T. Järvilehto [**Jar**], K. Tucker [**Tuc**] y D. Naie [**Nai**]. Nuestro enfoque está muy inspirado en el trabajo de Tucker, como explicaremos más abajo.

También cabe mencionar una nueva descripción independiente y más reciente de M. Alberich-Carramiñana, J. Àlvarez Montaner, F. Dachs-Cadefau [AAD] que conjugada con un algoritmo para calcular la cerradura integra de cualquier ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}\{x, y\}$ , desarrollado por M. Alberich-Carramiñana, J. Àlvarez Montaner y G. Blanco en [AAB], también permite obtener descripciones de los ideales multiplicadores de un germen de curva plana irreducible como ideales generados por *monomios generalizados* en las coordenadas  $x, y$  y un sistema de elementos de contacto maximal con el ideal  $\mathfrak{a}$ .

En [Jar] se calculan los números de salto de ideales completos simples en anillos regulares locales de dimensión dos relacionando ideales simples con valuaciones divisoriales y relaciones de proximidad entre puntos infinitamente próximos.

Tucker [Tuc] calcula los números de salto de ideales en superficies algebraicas con singularidades racionales entendiendo la *contribución crítica* de divisores definida originalmente por K. Smith y H. Thomson [ST] y extendida por él mismo. Para el caso de curvas irreducibles prueba que los números de salto están contribuidos críticamente por los divisores de ruptura de su resolución minimal y, por tanto, son invariantes del tipo topológico o tipo equisingular; es decir, es posible expresar los números de salto en función de los pares de Newton de la curva. Además muestra que hay una relación entre los números de salto de una curva con  $g - 1$  pares de Newton y otra que tiene esos mismos  $g - 1$  pares de Newton y un par de Newton extra.

Naie [Nai] expresa los números de salto en términos del diagrama de Enriques de la resolución logarímicamente de la curva usando los generadores del semigrupo de la curva en el punto singular.

M. Alberich-Carramiñana, J. Àlvarez Montaner, F. Dachs-Cadefau [AAD] basan su trabajo en el hecho de que los ideales multiplicadores son integramente cerrados (ver [Laz, Corolario 9.6.13]). Usando la correspondencia, establecida por Lipman, entre ideales integramente cerrados y divisores antinef y un procedimiento, llamado de descarga, introducido por Casas-Alvero, para el cómputo de la cerradura antinef de un divisor, este trabajo da fórmulas que permiten dar secuencialmente los números de salto de una curva. Estas fórmulas generalizan la fórmula del umbral log canónico. Además describen los ideales multiplicadores con ayuda de unos divisores de salto mínimos que son antinef y únicos. Recientemente, M. Alberich-Carramiñana, J. Àlvarez Montaner y G. Blanco [AAB] han dado un algoritmo para calcular la cerradura integra de cualquier ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}\{x, y\}$ , cuyos generadores pueden ser presentados como monomios en un conjunto de elementos de contacto máximo asociados a la resolución log minimal de  $\mathfrak{a}$ . La conjunción de los trabajos [AAD] y [AAB] permite, por tanto, dar una descripción de los ideales de multiplicadores asociados a una curva mediante generadores.

En el contexto de estos resultados es interesante observar que por la teoría de Zariski todo ideal integramente cerrado se factoriza de manera única como producto de ideales integramente

cerrados simples:  $I = P_1 \cdots P_r$  (no necesariamente todos distintos), donde los ideales integralmente cerrados simples son ideales de valuación, los cuales, en el caso de anillos locales regulares de dimensión 2, por M. Spivakovsky, están generados por monomios generalizados en las raíces aproximadas de una función generatriz – la cual es una ecuación de curva plana irreducible– (ver [Spi, Theorem 8.6]).

Independientemente a nuestro trabajo, P. González-Pérez y M. Robredo Buces [GPRB] de la Universidad Complutense de Madrid están desarrollando una descripción de los ideales multiplicadores de una curva plana reducida usando resoluciones tóricas y estudiando la posible generalización al caso quasi-ordinario.

Finalmente, nos gustaría mencionar el artículo [GM], dónde C. Galindo y F. Monserrat calculan lo que llaman la *serie de Poincaré de ideales de multiplicadores* en anillos locales de dimensión dos regulares. Este trabajo ha sido generalizado por M. Alberich-Carramiñana, J. Álvarez Montaner, F. Dachs-Cadefau y V. González-Alonso a superficies con singularidades racionales en [AADG]. Estas series con exponentes fraccionales tienen por coeficientes las *multiplicidades de los números de salto*, definidos originalmente por L. Ein, R. Lazarsfeld, K. Smith y D. Varolin [ELSV], de la siguiente manera

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{J}((\lambda - \epsilon)D)}{\mathcal{J}(\lambda D)}.$$

Observemos que estas dimensiones son no cero sólo si  $\lambda$  es un número de salto, y definimos

$$\mathcal{K}_{\lambda}(D) := \frac{\mathcal{J}((\lambda - \epsilon)D)}{\mathcal{J}(\lambda D)}.$$

**2.5. Contenidos de esta memoria.** El **Capítulo 1** de este trabajo será dedicado a describir el panorama general de esta teoría bajo el enfoque algebraico siguiendo el texto pionero de R. Lazarsfeld [Laz, Chapter 9].

El **Capítulo 2** será dedicado a dar una parcial descripción de las singularidades de curvas planas irreducibles: consideramos el anillo de funciones holomorfas en el origen de  $\mathbb{C}^2$  que denotamos por  $\mathcal{O}$  y fijamos  $X = \text{Spec}(\mathcal{O})$ . Consideramos  $C \subseteq X$ , una curva irreducible singular definida por  $f \in \mathcal{O}$  (irreducible), en otras palabras es un divisor primo efectivo reducido en  $X$  y  $f$  es una ecuación local de  $C$ .

El estudio de estas singularidades se remonta a Newton en su *Treatise of fluxions and of infinite series* de 1736, donde describe un método recursivo para calcular una serie formal  $\eta \in \mathbb{C}[[t]]$ , tal que  $f(x, \eta(x^{1/n})) = 0$ , para algún entero positivo  $n$  –asumiendo que el eje  $y$  no es una dirección tangente de la curva–. En 1850 Puiseux prueba que la serie producida por el algoritmo de Newton es convergente. Además, se tiene que un número finito de exponentes (digamos  $g$ ) que aparecen



en  $\eta(x^{1/n})$ , contienen mucha información topológica y geométrica de la curva  $C$  cerca de la singularidad, los llamados *exponentes de Puiseux*, los cuales se pueden obtener a partir de los *pares de Newton*  $\{(p_i, q_i)\}$  a través de su algoritmo. Esta información también está codificada en el *enlace* de la singularidad, el cual es descrito por los pares  $\{(p_i, \alpha_i)\}$  (ver [Dim, Proposition 2.6]) y pueden ser calculados unos de otros mediante las fórmulas:

$$\alpha_1 = q_1, \quad \alpha_{i+1} = p_i p_{i+1} \alpha_i + q_{i+1}.$$

Se sabe que aplicando el algoritmo de Euclides a los pares de Newton es posible calcular las multiplicidades  $r_i$  de la curva a lo largo de los divisores excepcionales de su *resolución estándar* o *minimal*. En el caso de un sólo par este cálculo es muy sencillo pero para el caso de más pares el cálculo es un poco más complicado, por lo que en la Sección 2.5 damos un algoritmo para calcular la multiplicidad  $r_i$  de cualquier divisor de la resolución dependiendo de a qué *paquete de Newton* pertenece (ver Definición 2.2) a partir de lo que llamamos el *algoritmo de Euclides inverso truncado* (ver Definición 2.5). En la Sección 6 damos una demostración elemental de una fórmula recursiva para el número de Milnor de una singularidad irreducible de curva plana. Para calcular los ideales multiplicadores de una curva irreducible en el Capítulo 3 refinaremos este tipo de recursión.

El **Capítulo 3** contiene los principales resultados novedosos de esta memoria. Basándonos en la estrategia de Tucker y usando reiteradamente el Teorema de Howald, recuperamos los números de salto de una curva irreducible y, al mismo tiempo, encontramos las funciones que provocan dichos “saltos” a partir de las valuaciones divisoriales que aparecen en la resolución minimal de la curva (4).

En la primera sección damos una prueba elemental del caso de una curva  $C_1$  con un único par de Newton en la Proposición 3.1. La segunda sección estudia el caso de una curva  $C_2$  con dos exponentes. Por una parte se describe la contribución del primer par de Newton o de  $C_1$  a los ideales multiplicadores de la curva  $C_2$ . Por otra parte, se desarrolla el paso inductivo que permitirá el cálculo general, relacionando la contribución del segundo par de Newton con los ideales multiplicadores de una curva auxiliar  $C_{aux}^1$  con un único par de Newton, al que se puede aplicar el resultado de Howald. La tercera sección enuncia el resultado general y contiene su demostración. Más abajo, en esta misma introducción, se enuncia el resultado y se ofrece un resumen de la prueba. La cuarta sección contiene algunos ejemplos.

En una quinta sección, por sugerencia de María Alberich-Carramiñana, nos gustaría dar una descripción de los ideales de multiplicadores por generadores a partir de monomios generalizados que provocan números de salto, sin embargo esto es trabajo en proceso y no se incluye en esta versión.

La tesis concluye con un **Apéndice** que da un algoritmo para calcular las funciones que provocan los saltos de cualquier número de salto, también se muestran unas tablas que describen todos los números de salto de un ejemplo con tres pares.

**2.6. Enunciado del resultado principal.** Ahora enunciaremos el resultado principal de esta memoria. Para esto definimos los siguientes conjuntos

$$J(p_i, \alpha_i) := \left\{ \frac{p_i(r+1) + \alpha_i(s+1)}{p_i \alpha_i} \mid r, s \in \mathbf{Z}_{>0} \right\} \cap (0, 1),$$

para  $1 \leq i \leq g$ , y

$$J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) :=$$

$$\left\{ \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \left( \dots \left( \frac{1}{p_{i+1}} (\lambda + l_i) + l_{i+1} \right) + \dots \right) + l_{g-1} \right) \mid \lambda \in J(p_i, \alpha_i), l_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\} \cap (0, 1),$$

para  $1 \leq i \leq g-1$ , y  $l_j \in \{0, \dots, p_{j+1} - 1\}$ .

A cada elemento  $\lambda$  en la unión de los conjuntos  $J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1})$ , que acabamos de introducir, le asociamos los siguientes  $g$  sistemas lineales.

- El sistema  $S[1](\lambda)$  consiste en una única ecuación lineal

$$\lambda \alpha_1 e_0 = p_1 a_1 + q_1 a_2 + \alpha_1 p_1 l_1 + \alpha_1 p_1 p_2 l_2 + \dots + \alpha_1 p_1 p_2 \dots p_{g-1} l_{g-1}$$

en las incógnitas  $a_1, a_2, l_1, l_2, \dots, l_{g-1}$  sujetas a las restricciones

$$p_1 a_1 + q_1 a_2 < \alpha_1 p_1, \quad a_1, a_2 \geq 1, \quad 0 \leq l_j \leq p_{j+1} - 1.$$

- El sistema  $S[i](\lambda)$  consiste en  $i$  ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \alpha_i e_{i-1} = p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} + \alpha_i p_i l_i + \alpha_i p_i p_{i+1} l_{i+1} + \dots + \alpha_i p_i p_{i+1} \dots p_{g-1} l_{g-1}, \\ p_{i-1} \alpha_{i-1} + a_{i+1} = p_{i-1} a_i + \alpha_{i-1} l_{i-2}, \\ \dots = \dots, \\ p_2 \alpha_2 + a_4 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2. \end{array} \right.$$

en las incógnitas  $a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i, \dots, l_{g-1}$  sujetas a las restricciones

$$p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} < p_i \alpha_i, \quad a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, l_2, \dots, l_{i-1} \geq 1, \quad 0 \leq l_j \leq p_{j+1} - 1.$$

Y el teorema principal de este trabajo puede ser enunciado como sigue

**TEOREMA 3.1** *Sea  $C$  una curva plana irreducible con  $g$  pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^g$ .*

(a). (Järvilehto, Tucker, Naie) Los números de salto de  $C$  menores que uno son los elementos del conjunto

$$\mathcal{JN}(C) = \bigcup_{i=1}^{g-1} \bigcup_{j=i}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) \cup J(p_g, \alpha_g).$$

(b). La dimensión del espacio vectorial  $\mathcal{K}_\lambda(C)$  es igual al número de conjuntos

$J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1})$  y  $J(p_g, \alpha_g)$  que contienen a  $\lambda$ . Este número coincide con el número de sistemas  $S[i](\lambda)$  que tienen solución en  $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Por último, el conjunto

$$\bigcup_{i=1}^g \left\{ \left[ x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \dots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} f_i^{l_i} \dots f_{g-1}^{l_{g-1}} \right] \left( a_1, \dots, a_{i+1}, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, \dots, l_{g-1} \right) \right\}$$

es una base de  $\mathcal{K}_\lambda(C)$ .

**2.7. Acerca de la demostración de los resultados principales.** La demostración está inspirada en el trabajo de Tucker [Tuc] y es por recursión sobre el número de pares de Newton. Sin embargo, para ser capaces de describir los ideales multiplicadores de una curva irreducible  $C$  con  $g$  pares de Newton, no sólo sus números de salto, tenemos que refinar la estrategia de Tucker. Para cada número de salto  $\lambda$ , encontraremos las funciones que provocan el correspondiente salto ( $\mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot C) \setminus \mathcal{J}(\lambda \cdot C) \neq \emptyset$ ) en la familia de ideales multiplicadores de  $C$ . Por ello, evitaremos usar en nuestra prueba el hecho, establecido por Tucker mediante técnicas de geometría local de superficies, de que los números de salto están críticamente contribuidos por los divisores de ruptura de la resolución. Una vez que conozcamos bases de los espacios cocientes  $\mathcal{K}_\lambda(C) = \frac{\mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot C)}{\mathcal{J}(\lambda \cdot C)}$  para todo número de salto  $\lambda$  de  $C$ , recuperaremos los ideales multiplicadores  $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$ .

El Teorema de Howald permite calcular ideales multiplicadores de curvas no degeneradas con respecto de su polígono de Newton y, por tanto, soluciona el problema en el caso de una curva  $C_1$  con un único par de Newton. En efecto, si el par de Newton es  $(p, q)$ , eligiendo un sistema de coordenadas particular, los números de salto ( $< 1$ ) son de la forma

$$\lambda = \frac{(r+1)p + (s+1)q}{pq} < 1, \text{ con } r, s \in \mathbf{Z}_{>0}$$

y el correspondiente  $\mathbf{C}$ -espacio vectorial

$$\mathcal{K}_\lambda(C_1) = \frac{\mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot C_1)}{\mathcal{J}(\lambda \cdot C_1)}$$

está generado por el monomio  $x^r y^s$ . Además el ideal de multiplicadores  $\mathcal{J}(\lambda \cdot C_1)$  es el ideal monomial generado por los monomios  $x^a y^b$  tales que  $(a+1)p + (b+1)q > \lambda pq$ .

Nuestra estrategia pretende ir más allá del caso no degenerado, mostrando que, en general, los saltos en la familia de ideales multiplicadores de una curva irreducible  $C$  están provocados por

monomios generalizados en las coordenadas  $x, y$  y las raíces aproximadas de la curva y que los ideales multiplicadores están generados también por monomios generalizados.

Para describir los ideales multiplicadores y números de salto de una curva  $C_2$  con dos pares, que denotamos por  $\{(p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$ , demostraremos, que por cada número de salto  $\lambda = \frac{(r+1)p_1+(s+1)q_1}{p_1q_1}$  de  $C_1$  habrá  $p_2$  números de salto de  $C_2$ . Estos números de salto serán de la forma  $\frac{1}{p_2}(\lambda + l_1)$  y estarán provocados por las funciones  $x^r y^s f_1^{l_1}$ . Esto se demuestra comparando las resoluciones de  $C_2$  y de su raíz aproximada  $C_1$ , que comparten el primer paquete de Newton.

Así se calcula la contribución de  $C_1$  o del primer paquete de Newton a los ideales multiplicadores y números de salto de  $C_2$ . La contribución a los números de salto es, por tanto, la unión de los conjuntos  $J(p_1, \alpha_1, l_1)$ . Hay que entender además la contribución del segundo paquete de Newton. En este punto debe observarse que los divisores del segundo paquete de Newton pueden volver a dar como número de salto algunos de los valores  $\frac{1}{p_2}(\lambda + l_1)$ .

Para describir la contribución del segundo paquete de Newton usaremos el proceso de Newton (ver Sección 2 del Capítulo 2) y un morfismo birracional  $S_1$  que nos permite relacionar la curva  $C_2$  con una curva auxiliar, que denotamos por  $C_{aux}^1$  (ver Definición 2.1), con un sólo par de Newton  $(p_2, \alpha_2)$ . Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{C}_2 & & \widetilde{NP_1^* C_2} = \widetilde{S_1^* C_{aux}^1} & & \tilde{C}_{aux}^1 \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
 C_2 \subseteq \mathbf{C}_{x,y}^2 & \xleftarrow{NP_1} & NP_1^* C_2 = S_1^* C_{aux}^1 & \xrightarrow{S_1} & C_{aux}^1 \subseteq \mathbf{C}_{u,v}^2
 \end{array}$$

donde  $\pi, \phi$  y  $\psi$  representan resoluciones log de  $C_2, NP_1^* C_2$  y  $C_{aux}^1$  respectivamente.

Aunque el proceso de Newton  $NP_1$  no es birracional, la comparación de las resoluciones log de  $C_2$  y de  $NP_1^* C_2$  permiten relacionar los números de salto de  $C_2$  y de  $NP_1^* C_2$ . Esto nos permite, aplicando la regla para transformaciones birracionales (ver Proposición 1.2) a  $S_1$ , reducir el cálculo de la contribución del segundo paquete a los números de salto de  $C_2$  al cálculo de los números de salto de la curva  $C_{aux}^1$  y, por tanto, al Teorema de Howald. En consecuencia, la contribución del segundo paquete a los números de salto de  $C_2$  es el conjunto  $J(p_2, \alpha_2)$ .

Para ser capaces de determinar funciones que produzcan los correspondientes saltos hemos de estudiar el pullback de los monomios generalizados  $M \in \mathbf{C}[x, y, f_1]$  por el proceso de Newton y el pullback de los monomios  $m \in \mathbf{C}[u, v]$  por la aplicación birracional  $S_1$ . Supongamos que  $\lambda' = \frac{a_3 p_2 + l_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_2} \in J(p_2, \alpha_2)$  es un número de salto de  $C_{aux}^1$ , demostraremos que si los exponentes

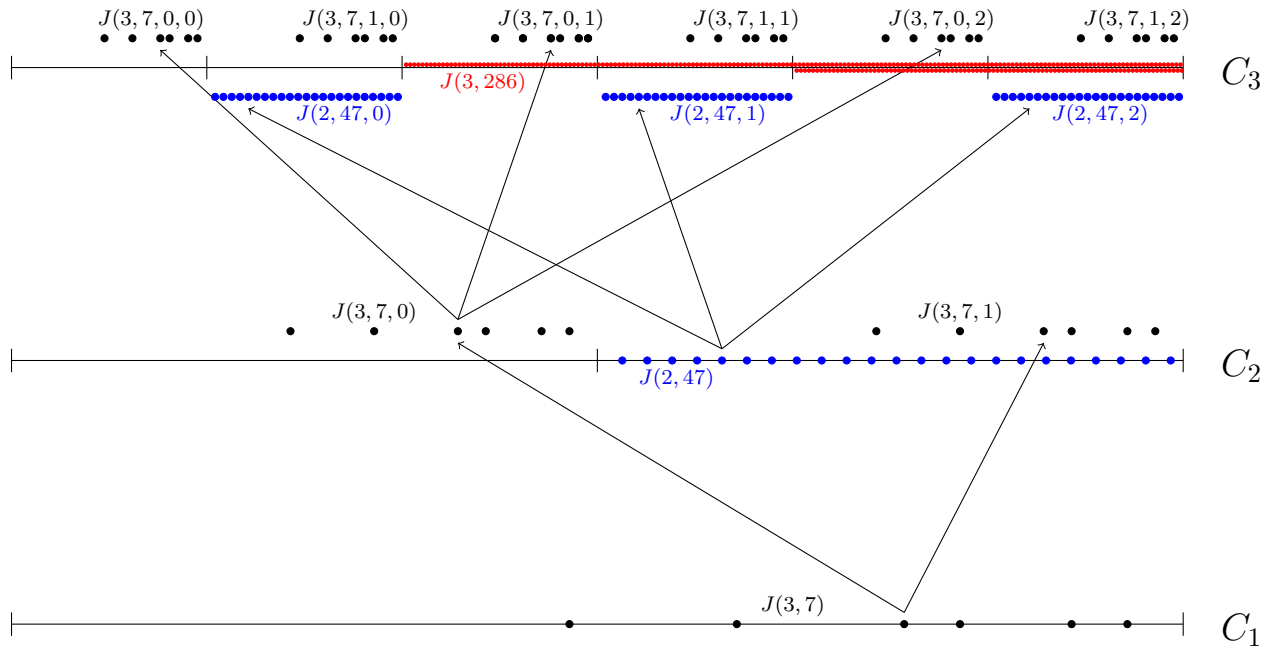
de  $M = x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1}$  y de  $m = u^{a_3-1}v^{l_1-1}$  satisfacen el sistema  $S(\lambda')[2]$  entonces

$$NP_1^*M \cdot \text{Jac}NP_1 = S_1^*m \cdot \text{Jac}S_1,$$

salvo una unidad. Por tanto, podemos deducir que  $M$  provoca el salto correspondiente a  $\lambda'$ .

El caso general se prueba por recursión en el número de pares de Newton generalizando las ideas, descritas más arriba, para pasar del caso de uno a dos pares de Newton.

En la imagen siguiente podemos ver dichas relaciones entre los números de salto de cada raíz aproximada para el caso de una curva con tres pares de Newton (Ejemplo 2 de la Sección 4).



## CAPÍTULO 1

### Ideales de multiplicadores

Siguiendo [Laz], sea  $X$  una variedad compleja lisa de dimensión  $n$  y  $D$  un  $\mathbf{Q}$ -divisor efectivo en  $X$ . El ideal de multiplicadores  $\mathcal{J}(D) \subseteq \mathcal{O}_X$  de  $D$  es una gavilla de ideales coherente en  $X$ . Podemos pensar que de alguna manera estas gavillas reflejan sutilmente las singularidades de  $D$ , y tienen buenas propiedades formales. Cuando  $X$  es proyectiva y  $L$  es un divisor entero tal que  $L - D$  es amplio, el teorema de anulamiento de Kawamata-Viehweg-Nadel dice que

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{J}(D)) = 0 \text{ con } i > 0.$$

Si  $D$  es entero entonces  $\mathcal{J}(D) = \mathcal{O}_X(-D)$  y esto se reduce al teorema clásico de anulamiento de Kodaira.

Los ideales de multiplicadores serán definidos a través de convenientes resoluciones, llamadas *logarítmicas*, y un punto esencial es verificar que son independientes de la resolución usada para construirlos.

#### 1. Preliminares

DEFINICIÓN 1.1. Un divisor  $D = \sum D_i$  tiene *cruzamientos normales simples* (y  $D$  es un divisor SNC) si cada  $D_i$  es suave, y si  $D$  está definido en una vecindad de cualquier punto por una ecuación en coordenadas analíticas locales del tipo

$$z_1 z_2 \cdots z_k = 0$$

para algún  $k \leq n$ . Un  $\mathbf{Q}$ -divisor  $\sum a_i D_i$  tiene *soporte a cruzamiento normal* si  $\sum D_i$  es un divisor SNC.

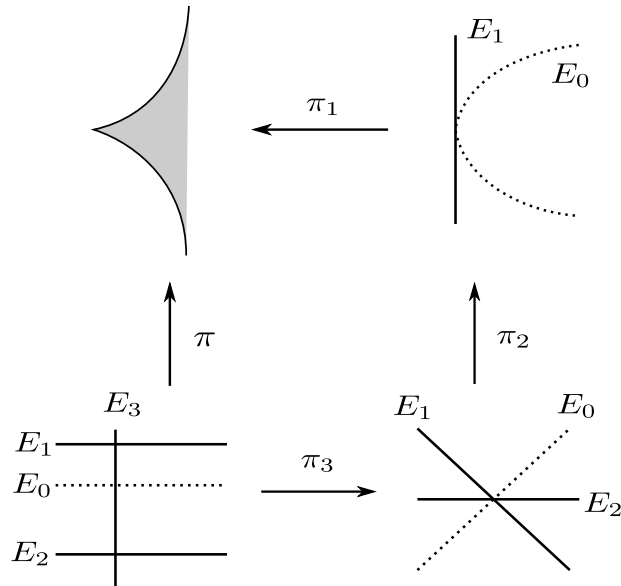
Denotamos  $[D] = [\sum a_i D_i] = \sum [a_i] D_i$ , donde para  $x \in \mathbf{Q}$ ,  $[x]$  es el mayor entero  $\leq x$ .

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $D = \sum a_i D_i$  un  $\mathbf{Q}$ -divisor efectivo en  $X$ . Una **resolución log** de  $D$  (o del par  $(X, D)$ ) es un morfismo birracional proyectivo

$$\pi : X' \rightarrow X,$$

con  $X'$  no singular, tal que el divisor  $\pi^* D + \text{Exc}(\pi)$  tiene soporte a cruzamiento normal (SCN).

EJEMPLO 1. Consideremos  $X = \mathbf{C}^2$  y  $D = \{y^2 - x^3 = 0\}$ . Una resolución log de  $D$  se obtiene por la familiar sucesión de tres explosiones que ilustramos a continuación:



Dada una resolución log  $\pi : X' \rightarrow X$ , denotamos por

$$(1) \quad K_\pi = K_{X'} - \pi^* K_X$$

el *divisor canónico relativo* de  $X'$  sobre  $X$ . Observemos que esto está naturalmente definido como un divisor efectivo soportado en el divisor excepcional de  $\pi$ , y no es sólo una clase de equivalencia lineal: el determinante de la derivada de  $\pi$ ,  $\det(d\pi)$  nos da una ecuación local. Observando que  $\pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi) = \mathcal{O}_X$ , vemos que si  $N$  es un divisor entero efectivo en  $X'$ , entonces

$$\pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - N) \subseteq \mathcal{O}_X$$

Con esto podemos definir lo que es una gavilla de *ideales de multiplicadores*. Estas gavillas de ideales nos reflejan el grado en que la parte fraccional de  $D$  falla en tener soporte a cruzamiento normal.

## 2. Ideales de multiplicadores

DEFINICIÓN 1.3 (**Ideal de multiplicadores de un Q-divisor efectivo**). Sea  $D$  un Q-divisor efectivo en una variedad compleja lisa  $X$  y  $\lambda > 0$  un número racional.

Fijemos una resolución log  $\pi : X' \rightarrow X$  de  $D$ . Entonces la *gavilla de ideales multiplicadores* asociado a  $D$  y  $\lambda$  está definida por

$$\mathcal{J}(\lambda D) := \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \lambda \cdot \pi^* D \rfloor)$$

Cuando  $\lambda = 1$  simplemente escribimos  $\mathcal{J}(D)$ .

Como  $X$  es no singular,  $\pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) = \mathcal{O}_X(K_X)$  para cualquier resolución  $\pi$ . Entonces la inclusión  $\mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \lambda \cdot \pi^*D \rfloor) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X'}(K_\pi)$  va a una inclusión bajo el *push forward*

$$\mathcal{J}(\lambda D) \hookrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Alternativamente, dado  $x \in D$  y una resolución  $\pi : X' \rightarrow X$ , con  $\pi^*D = \sum r_i E_i$  y  $K_\pi = \sum b_i E_i$ , entonces la fibra del ideal de multiplicadores  $\mathcal{J}(\lambda D)_x$  en  $x$ , es el conjunto de gérmenes  $h \in \mathcal{O}_{X,x}$  tales que

$$(2) \quad \text{ord}_{E_i} \pi^*(h) \geq \text{ord}_{E_i}(\lfloor \lambda \pi^*D \rfloor - K_\pi) = \lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i,$$

para todo divisor  $E_i$ .

NOTACIÓN 1. Dado un divisor excepcional  $E_k$  de una resolución log  $\pi$  de  $D$  y  $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ , llamaremos a  $\lfloor \lambda r_k \rfloor - b_k$  la cota  $C(E_k, \lambda)$  o  $C(\pi, E_k, \lambda)$  si queremos especificar la resolución log.

EJEMPLO 2. Sea  $D$  un divisor efectivo en  $X$ . Entonces  $\mathcal{J}(D) = \mathcal{O}_X(-D)$ . Esto se tiene pues si  $\pi : X' \rightarrow X$  es una resolución log de  $D$ , entonces  $\pi^*D$  es también un divisor entero y usando la fórmula de proyección se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(D) &= \pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \pi^*D) \\ &= \pi_*(\mathcal{O}_{X'}(K_\pi) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(-D)) \\ &= \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X(-D) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. **Cúspide.** Sea  $X = \mathbf{C}^2$  con coordenadas  $(x, y)$ , y  $D = \{y^2 - x^3 = 0\}$ . Como se mencionó arriba, una resolución logarítmica  $\pi : X' \rightarrow X$  está dada por una sucesión de 3 explosiones.

Tenemos que  $K_\pi - \lfloor \lambda \pi^*D \rfloor$  es el divisor

$$E_1 + 2E_2 + 4E_3 - \lfloor \lambda(E_0 + 2E_1 + 3E_2 + 6E_3) \rfloor.$$

Por lo tanto, si  $\lambda = 1$ ,

$$\mathcal{J}(D) = \pi_*\mathcal{O}_{X'}(-(E_0 + E_1 + E_2 + 2E_3)) = \mathcal{O}_X(-D) \subsetneq \mathcal{O}_X$$

Si  $\lambda \in [5/6, 1)$ ,

$$\mathcal{J}(\lambda D) = \pi_*\mathcal{O}_{X'}(-E_3)$$

y se puede mostrar que para estos  $\lambda$

$$\mathcal{O}_X(-D) \subsetneq \mathcal{J}(\lambda D) = \mathfrak{M} \subsetneq \mathcal{O}_X$$

y si  $\lambda < 5/6$

$$\mathcal{J}(\lambda D) = \mathcal{O}_X.$$



Observemos que  $\mathcal{J}(\lambda D) = \mathcal{O}_X$  si  $\lambda < \min\{\frac{b_i+1}{r_i}\}$ .

En contraste, si  $B \subseteq \mathbf{C}^2$  es la curva  $\{y^2 = x^2\}$  con un punto ordinario doble, entonces

$$\mathcal{J}(\lambda B) = \mathcal{O}_X \text{ para } 0 < \lambda < 1.$$

En otras palabras, el ideal de multiplicadores reconoce que la curva  $D$  tiene una singularidad “peor” que la de  $B$ .

Se tiene la siguiente

**PROPOSICIÓN 1.1 (Agregando divisores enteros).** *Sea  $X$  una variedad lisa,  $A$  un divisor entero y  $D$  cualquier  $\mathbf{Q}$ -divisor en  $X$ . Entonces*

$$\mathcal{J}(D + A) = \mathcal{J}(D) \otimes \mathcal{O}_X(-A).$$

**PRUEBA.** Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  una resolución log de  $(X, D)$ . Si  $A$  es entero, entonces  $\lfloor \pi^* D + \pi^* A \rfloor = \lfloor \pi^* D \rfloor + \pi^* A$  para cualquier  $\mathbf{Q}$ -divisor  $D$ . Entonces

$$\begin{aligned} \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \pi^*(D + A) \rfloor) &= \pi_*(\mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \pi^* D \rfloor) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-\pi^* A)) \\ &= \pi_*(\mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \pi^* D \rfloor)) \otimes \mathcal{O}_X(-A) \\ &= \mathcal{J}(D) \otimes \mathcal{O}_X(-A), \end{aligned}$$

como afirmamos. □

**TEOREMA 1.1 (Esnault-Viehweg).** *En la definición 1.3 la gavilla de ideales multiplicadores  $\mathcal{J}(D)$  es independiente de la resolución log utilizada para construirla.*

**PRUEBA.** Consideremos primero una sucesión de aplicaciones

$$V \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{\mu} X,$$

donde  $\mu$  es una resolución log de  $D$ , y  $g$  es una resolución log de  $\mu^* D + Exc(\mu)$ . Asumamos, de momento, que podemos probar

$$g_* \mathcal{O}_V(K_{V/X'} - \lfloor g^* \mu^* D \rfloor) = \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \mu^* D \rfloor).$$

Entonces, definiendo  $h = \mu \circ g$ , y usando la fórmula de proyección tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor \mu^* D \rfloor) &= \mu_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X}) \otimes g_* \mathcal{O}_V(K_{V/X'} - \lfloor g^* \mu^* D \rfloor)) \\ &= \mu_* g_*(g^* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X}) \otimes \mathcal{O}_V(K_{V/X'} - \lfloor g^* \mu^* D \rfloor)) \\ &= h_* \mathcal{O}_V(K_{V/X'} - \lfloor h^* D \rfloor). \end{aligned}$$

En otras palabras, obtenemos el mismo ideal multiplicador usando  $h$  que usando  $\mu$ . Pero cualquiera dos resoluciones pueden ser dominadas por una tercera, y entonces el Teorema se sigue.

Así, hemos reducido la cuestión a mostrar que si el divisor subyacente  $-\mu^*D$  tiene soporte a cruzamiento normal, entonces nada se cambia al pasar a la resolución más larga. Esto es el siguiente lema.  $\square$

LEMA 1.1. *Sea  $X$  una variedad suave de dimensión  $n$ , y  $D$  un  $\mathbf{Q}$ -divisor en  $X$  con soporte a cruzamiento normal. Supongamos que  $\mu : X' \rightarrow X$  es una resolución log de  $D$ . Entonces*

$$\mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor \mu^* D \rfloor) = \mathcal{O}_X(-\lfloor D \rfloor).$$

PRUEBA. Como consecuencia de la Proposición 1.1 se tiene que si la ecuación es cierta para un  $\mathbf{Q}$ -divisor dado  $D$ , entonces también es cierta para  $D + A$  donde  $A$  es un divisor entero. Por lo tanto es suficiente mostrar el Lema bajo la hipótesis adicional de que  $\lfloor D \rfloor = 0$ , en cuyo caso necesitamos mostrar que  $\lfloor \mu^* D \rfloor \preceq K_{X'/X}$ .

Comencemos fijando algo de notación. Sea  $E \subset X'$  un divisor primo. Necesitamos establecer que

$$\text{ord}_E(\lfloor \mu^* D \rfloor) \leq \text{ord}_E(K_{X'/X}).$$

Como por hipótesis tenemos que  $\lfloor D \rfloor = 0$  esto es claro si  $E$  no es excepcional. Así, podemos suponer que  $E$  aparece en el lugar excepcional de  $\mu$ . Sea

$$Z = \mu(E) \subseteq X, e = \text{codim}_X Z.$$

Escojamos un punto general  $y \in E$  y sea  $x = \mu(y) \in Z$ . Denotamos por  $D_1, \dots, D_l$  las componentes primas de  $D$  que pasan a través  $Z$ . Entonces  $l \leq e$ , y como sólo estas componentes contribuyen al lado izquierdo de la desigualdad anterior podemos suponer además que

$$D = \sum_{i=1}^l a_i D_i, 0 \leq a_i < 1.$$

Ahora escogemos coordenadas analíticas locales  $z_1, \dots, z_n$  en  $X'$  centradas en  $y$  y  $w_1, \dots, w_n$  en  $X$  centradas en  $x$  tales que  $E$  está localmente definido por  $(z_i = 0)$ . Así  $D$  tiene soporte SCN y podemos asumir que

$$D_i =_{\text{localmente}} \text{div}(w_i), (1 \leq i \leq l).$$

Sea  $c_i = \text{ord}_E(\mu^* D_i)$ . Así

$$\text{ord}_E(\mu^* D) = \sum_{i=1}^l a_i c_i < \sum_{i=1}^l c_i,$$

y existen funciones  $b_i \in \mathbf{C}\{z\}$  tales que

$$w_i = z_1^{c_i} \cdot b_i (1 \leq i \leq l).$$

Entonces  $\mu^* dw_i = c_i z_1^{c_i-1} b_i \cdot dz_1 + z_1^{c_i} \cdot db_i$  para  $1 \leq i \leq l$  y consecuentemente

$$\mu^*(dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n) = z_1^{\gamma-1} g \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

para alguna  $g \in \mathbf{C}\{z\}$ , donde  $\gamma = \sum_{i=1}^l c_i$ . Entonces

$$\begin{aligned} \text{ord}_E(K_{X'/X}) &\geq \left( \sum_{i=1}^l c_i \right) - 1 \\ &\geq \text{ord}_E(\mu^*D) - 1, \end{aligned}$$

De lo que se sigue la desigualdad.  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.2. Regla para transformaciones birracionales.** Sea  $f : Y \rightarrow X$  un morfismo propio birracional entre variedades lisas, y sea  $D$  cualquier  $\mathbf{Q}$ -divisor en  $X$  (no necesariamente efectivo). Entonces

$$(3) \quad \mathcal{J}(X; D) = f_*(\mathcal{J}(Y; f^*D) \otimes \mathcal{O}_Y(K_{Y/X})).$$

**PRUEBA.** Esto es consecuencia de la fórmula de proyección. Específicamente, sea  $\nu : V \rightarrow Y$  una resolución logarítmica de  $f^*D + \text{Exc}(f)$ , y denotemos por  $h : V \rightarrow X$  la composición  $h = f \circ \nu$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(X; D) &= h_*(\mathcal{O}_V(K_{V/X} - [h^*D])) \\ &= f_*\nu_*(\mathcal{O}_V(K_{V/Y} - [\nu^*f^*D]) \otimes \nu^*\mathcal{O}_Y(K_{Y/X})) \\ &= f_*(\nu_*\mathcal{O}_V(K_{V/Y} - [\nu^*f^*D]) \otimes \mathcal{O}_Y(K_{Y/X})) \\ &= f_*(\mathcal{J}(Y; f^*D) \otimes \mathcal{O}_Y(K_{Y/X})), \end{aligned}$$

como se afirmó.  $\square$

### 3. Números de salto y umbral log canónico

**DEFINICIÓN 1.4. (Umbral log canónico)** El *umbral log canónico* de un  $\mathbf{Q}$ -divisor efectivo  $D$  en  $x \in X$  es

$$\text{lct}(D; x) = \inf\{\lambda \in \mathbf{Q} \mid \mathcal{J}(\lambda \cdot D)_x \subseteq \mathfrak{M}_x\},$$

donde  $\mathfrak{M}_x \subseteq \mathcal{O}_X$  es la gavilla ideal máxima de  $x$ . Más generalmente, dado un subconjunto cerrado  $Z \subseteq X$ , el *umbral log canónico* de  $D$  en  $Z$  es el infimo de todos los racionales  $\lambda > 0$  para los cuales  $\mathcal{J}(\lambda \cdot D)_x \subseteq \mathfrak{M}_x$  para algún  $x \in Z$ . Cuando  $Z = X$  sólo escribimos  $\text{lct}(D)$ .

Si tenemos que  $\pi : X' \rightarrow X$  es una resolución log de  $D$ , y escribimos

$$\pi^*D = \sum r_i E_i, \quad K_\pi = \sum b_i E_i$$

con adecuados  $r_i \in \mathbf{Q}$ ,  $b_i \in \mathbf{N}$  y divisores primos  $E_i$  en  $X'$ . Entonces

$$\text{lct}(D; x) = \min \left\{ \frac{b_j + 1}{r_j} \right\},$$

donde el mínimo se toma sobre todos los índices  $j$  para los cuales  $\pi(E_j)$  pasa por  $x$ . Observar que la igualdad  $\text{lct}(D; x) = \min \left\{ \frac{b_j+1}{r_j} \right\}$  se verifica cuando los coeficientes de cada  $E_j$  son  $\geq -1$  en  $K_\pi - \lfloor \lambda \cdot \pi^*(D) \rfloor$ , ya que los ideales están parametrizados por números positivos, y al menos un  $E_j$  tiene coeficiente  $= -1$ .

EJEMPLO 4. En el Ejemplo 3 de la cúspide  $C \subseteq \mathbf{C}^2$ , los cálculos nos dicen que  $\text{lct}(C; 0) = 5/6$ .

En este caso, como  $X = \mathbf{C}^2$  es afín, para saber cuándo una función  $h \in \mathcal{O}_X$  está en  $\mathcal{J}(\lambda D)$  uno debe mostrar que para todo  $E$ :

$$(4) \quad \text{ord}_E \pi^*(h) \geq \text{ord}_E(\lfloor \lambda \pi^* D \rfloor - K_\pi)$$

Como  $X$  es normal, observemos que la condición (4) es trivial si  $\text{ord}_E(\lfloor \lambda \pi^* D \rfloor - K_\pi) \leq 0$ .

Ahora analicemos qué pasa cuando variamos  $\lambda$ : haciendo  $\lambda$  un poco más grande, (4) no cambia, pues el lado derecho quedará igual. Así  $\mathcal{J}(\lambda D) = \mathcal{J}((\lambda + \epsilon)D)$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Como sea, haciendo más grande  $\lambda$  hará que el coeficiente de  $E$  en  $\lfloor \lambda \pi^* D \rfloor - K_\pi$  cambie, precisamente donde  $\text{ord}_E(\lfloor \lambda \pi^* D \rfloor - K_\pi)$  es un entero.

LEMA 1.2 (Ein, Lazarsfeld, Smith & Varolin). *Sea  $D$  un  $\mathbf{Q}$ -divisor efectivo en  $X$ , y  $x \in X$  un punto en el soporte de  $D$ . Existe una sucesión creciente*

$$0 = \lambda_0(D; x) < \lambda_1(D; x) < \lambda_2(D; x) < \dots$$

de números racionales  $\lambda_i = \lambda_i(D; x)$  caracterizados por las propiedades:

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot D)_x = \mathcal{J}(\lambda_i \cdot D)_x \text{ para } \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}),$$

mientras  $\mathcal{J}(\lambda_{i+1} \cdot D)_x \subsetneq \mathcal{J}(\lambda_i \cdot D)_x$  para todo  $i$ .

DEFINICIÓN 1.5 (**Números de salto**). Los números racionales  $\lambda_i(D; x)$  son los *números de salto* de  $D$  en  $x$ . Decimos que  $\lambda$  es un número de salto de  $D$  en un subconjunto cerrado  $Z \subset X$  si es un número de salto de  $Z$  en algún punto  $x \in Z$ .

DEFINICIÓN 1.6. Decimos que  $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$  es un *candidato a número de salto* para un divisor primo  $E$  que aparece en  $\pi^* D$  si  $\text{ord}_E(\lambda \pi^* D - K_\pi)$  es un entero. Si  $G$  es un divisor reducido en  $X'$ , un candidato a número de salto de  $G$  es un candidato a número de salto común a todos los divisores primos en su soporte.

Vemos explícitamente que los candidatos a números de salto no triviales para  $E$  son:

$$\left\{ \frac{\text{ord}_E K_\pi + m}{\text{ord}_E \pi^* D} : m \in \mathbf{Z}_{>0} \right\}$$

y por lo tanto dada una resolución  $\pi : X' \rightarrow X$ , con  $\pi^*D = \sum r_i E_i$  y  $K_\pi = \sum b_i E_i$ , todos los candidatos a números de salto son:

$$\left\{ \frac{b_i + m}{r_i} : m \in \mathbf{Z}_{>0} \right\}$$

**OBSERVACIÓN 1.1 (Periodicidad de los números de salto).** Sea  $A$  un divisor efectivo entero en  $X$  que pasa por un punto  $x \in X$ . Entonces  $\lambda$  es un número de salto de  $A$  en  $x$  si, y sólo si,  $\lambda + 1$  es un número de salto. Así, todos los números de salto de  $A$  están determinados por un número finito que están en el intervalo  $(0, 1]$ . (Esto se sigue de que  $\mathcal{J}((1 + \lambda) \cdot A) = \mathcal{J}(\lambda \cdot A) \otimes \mathcal{O}_X(-A)$ ).

Siguiendo [Bu], dado  $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ , definimos

$$(5) \quad \mathcal{K}_\lambda(D) = \mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot D) / \mathcal{J}(\lambda \cdot D),$$

con  $0 < \epsilon \ll 1$ . Observemos que como consecuencia del lema de Nakayama estos cocientes son finitamente generados como  $\mathbf{C}$ -espacios vectoriales.

**OBSERVACIÓN 1.2.** Se tiene que  $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$  es un número de salto de  $(X, D)$  si  $\mathcal{K}_\lambda(D) \neq 0$ .

Para el caso de subesquemas de mayor codimensión definidos por gavillas de ideales  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$  no cero en  $X$  se tiene la siguiente

**DEFINICIÓN 1.7.** Dada una resolución log

$$\pi : X' \rightarrow X,$$

con

$$\pi^{-1}\mathfrak{a} =_{def} \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F),$$

donde  $F$  es un divisor efectivo en  $X'$  tal que  $F + Exc(\mu)$  es SNC.

**DEFINICIÓN 1.8.** Sea  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$  una gavilla de ideales no cero, y  $\lambda > 0$  un número racional. Fijemos una resolución log  $\pi$  de  $\mathfrak{a}$ , con  $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$ . El ideal de multiplicador  $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^\lambda)$  asociado a  $\lambda$  y  $\mathfrak{a}$  está definido como

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \mathcal{J}(X; \lambda \cdot \mathfrak{a}) = \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \lambda \cdot F \rfloor).$$

Ahora, una resolución  $\pi : X' \rightarrow X$ , es una resolución log de una colección finita de gavillas de ideales  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s \subseteq \mathcal{O}_X$ , si podemos escribir  $\mathfrak{a}_i \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-H_i)$ , donde  $H_i$  es un divisor efectivo en  $X'$  ( $1 \leq i \leq s$ ) tales que  $\cup_i H_i \cup Exc(\pi)$  es un divisor SNC.

DEFINICIÓN 1.9. El ideal de multiplicadores de  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s \subseteq \mathcal{O}_X$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbf{Q}_{>0}$  es

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{a}_s^{\alpha_s}) = \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \alpha_1 H_1 + \dots + \alpha_s H_s \rfloor)$$

para cualquier resolución  $\log \pi$  de  $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s)$ .

Volviendo al caso de divisores, sea  $x \in D$  un punto, y denotemos por  $\mathfrak{a}$  a la gavilla de ideales  $\mathcal{O}_X(-D)$  y por  $\mathfrak{M}_x$  la gavilla de ideal del punto  $x \in X$ . Para  $\alpha \in \mathbf{Q}_{<0}$ , definimos

$$\mathcal{K}_{\alpha,x}(D) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{(1-\epsilon)\alpha}) / \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{(1-\epsilon)\alpha} \cdot \mathfrak{M}_x^\delta),$$

donde  $0 < \epsilon \ll \delta \ll 1$ . Se prueba que esta definición es independiente de la elección de  $\epsilon$  y  $\delta$ . También que  $\mathcal{K}_{\alpha,x}(D)$  tiene soporte a lo más en  $\{x\}$ . Y se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.10. Decimos que  $\alpha \in \mathbf{Q}_{<0}$  es un *número de salto interior* de  $(X, D)$  en  $x$  si  $\mathcal{K}_{\alpha,x}(D) \neq 0$ . La *salto interior* multiplicidad de  $(X, D)$  en  $x$  es

$$n_{\alpha,x}(D) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{K}_{\alpha,x}(D).$$

Ahora, si  $X$  es de dimensión  $m$ ,  $x \in X$  y  $f$  es un germen de hipersuperficie en  $x$ . La teoría de singularidades pone atención en invariantes topológicos como la fibra de Milnor  $M_{f,x}$  y la monodromía. Un importante invariante analítico es la estructura de Hodge mixta canónica en la cohomología de la fibra de Milnor y el *espectro de Hodge* de una ecuación local  $f$  de  $D$  en  $x$  de Steenbrink es un polinomio de Puiseux

$$Sp(f) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}_{>0}} n_\alpha(f) \cdot t^\alpha$$

donde las *multiplicidades espectrales*  $n_\alpha(f) \in \mathbf{Z}$  están definidas por

$$n_\alpha(f) := \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^{m-1-i} \dim_{\mathbf{C}} \text{Gr}_F^{\lfloor m-\alpha \rfloor} \tilde{H}^i(M_{f,x}, \mathbf{C})_{e^{-2\pi i \alpha}}$$

También llamamos a  $n_\alpha(f)$  la multiplicidad de  $\alpha$  en el espectro de Hodge.

Una pregunta natural es: ¿qué reflejan los ideales de multiplicadores  $\mathcal{J}(D)$  de las construcciones estándar de la teoría de singularidades de un germen  $D$  en un punto  $x$ ? Se tiene el siguiente teorema de N. Budur [Bu].

TEOREMA 1.2. *Sea  $X$  una variedad quasi-proyectiva lisa de dimensión  $m$ . Sea  $D$  un divisor efectivo entero en  $X$  y  $x \in D$  un punto. Sea  $f$  cualquier ecuación local de  $D$  en  $x$ . Entonces para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $n_\alpha(f) = n_{\alpha,x}(D)$ .*

COROLARIO 1.1. *Para todo  $\alpha \in (0, 1]$ ,*

1.  $\alpha$  aparece en el espectro de Hodge de  $f$  si y sólo si  $\alpha$  es un inner jumping number de  $(X, D)$  en  $x$ ;
2. (M. Saito) la multiplicidad  $n_\alpha(f) \geq 0$ ;
3. (Varchenko) si  $x$  es una singularidad aislada de  $D$  y  $\alpha \neq 1$ , entonces, reemplazando  $X$  por una vecindad abierta de  $x$  si es necesario,  $\alpha$  aparece en el espectro de Hodge si y sólo si  $\alpha$  es un jumping number.

En el caso de singularidades aisladas, el espectro recupera el número de Milnor [Bu2]

$$\mu(f) = \sum_{\alpha} n_{\alpha}(f).$$

Como el espectro también satisface una simetría  $n_{\alpha}(f) = n_{m-\alpha}(f)$ . Entonces en el caso de curvas planas irreducibles se tiene la siguiente relación entre el número de Milnor y las multiplicidades de los números de salto  $< 1$ :

$$(6) \quad \frac{\mu(f)}{2} = \sum_{\alpha < 1} n_{\alpha, x}(f)$$

#### 4. Ideales de multiplicadores de ideales monomiales

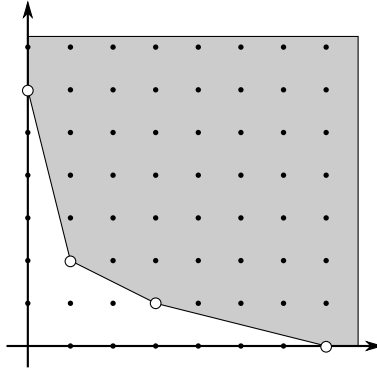
Asumamos que  $X$  es afín, con anillo coordinado  $A = \mathbf{C}[X]$ . Entonces cualquier ideal  $\mathfrak{a} \subseteq A$  determina una gavilla en  $X$ . Por lo tanto dado  $\lambda > 0$ , su ideal de multiplicadores  $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$  está definido, y por la misma razón podemos ver a  $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$  como un ideal en  $A$ .

Sea  $X = \mathbf{C}^n$  con coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ , y pongamos  $\mathbf{C}[X] = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Un ideal monomial  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{C}[X]$  es un ideal generado por monomios en  $x_i$ . Cualquier monomio está especificado por su vector de exponentes  $v \in \mathbf{N}^n$ , y dado  $v$  podemos escribir  $x^v$  su monomio correspondiente. Considerando  $\mathbf{N}^n$  como un subconjunto de  $\mathbf{R}^n$ , definimos el *poliedro de Newton*

$$\Gamma_+ = \Gamma_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{R}^n$$

de  $\mathfrak{a}$  a la envolvente convexa en  $\mathbf{R}^n$  del conjunto de vectores exponentes de monomios en  $\mathfrak{a}$ . Así  $\Gamma_+(\mathfrak{a})$  es un conjunto cerrado no acotado en el primer octante. Un ejemplo en  $\mathbf{C}^2$  y

$$\mathfrak{a} = \langle y^6, xy^2, x^3y, x^7 \rangle$$



Dado  $\lambda > 0$  denotamos por  $\lambda \cdot \Gamma_+(\mathfrak{a})$  la región convexa obtenida de escalar  $\Gamma_+(\mathfrak{a})$  por  $\lambda$  (así que  $\Gamma_+(\mathfrak{a}) \subseteq \lambda \cdot \Gamma_+(\mathfrak{a})$ , cuando  $\lambda \leq 1$  y declaramos  $\Gamma_+(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \lambda \cdot \Gamma_+(\mathfrak{a})$ ). El *interior*  $\text{int}(\Gamma_+(\lambda \cdot \mathfrak{a}))$  es el interior topológico de  $\Gamma_+(\lambda \cdot \mathfrak{a})$  respecto a la topología estándar de  $\mathbf{R}^n$ . Finalmente introducimos el vector

$$\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}^n,$$

que corresponde al monomio  $x^{\mathbf{1}} = x_1 x_2 \cdots x_n$ , y que tendrá un rol especial.

**TEOREMA 1.3 (Teorema de Howald).** *Dado  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{C}[X]$ , un ideal monomial. El ideal de multiplicadores  $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$  es el ideal monomial generado por todos los monomios  $x^v$  tales que sus vectores exponente satisfacen la condición*

$$v + \mathbf{1} \in \text{int}(\Gamma_+(\lambda \cdot \mathfrak{a})).$$

**EJEMPLO 5 (Log canonical thresholds).** Sea  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{C}[X]$  un ideal monomial. Entonces el Teorema 1.3 nos da una manera simple de calcular el log canonical threshold  $\text{lct}(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$ . De hecho, sean  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  coordenadas naturales de  $\mathbf{R}^n = \mathbf{Z}^n \otimes \mathbf{R}$  adaptadas a la base estándar de  $\mathbf{Z}^n$ . El poliedro de Newton  $\Gamma_+(\mathfrak{a})$  está definido dentro del primer octante  $\{\zeta_1 \geq 0, \dots, \zeta_n \geq 0\}$  por finitas desigualdades de la forma

$$f_\alpha(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \geq 1,$$

donde  $f_\alpha$  son formas lineales con coeficientes racionales no negativos. Entonces

$$\text{lct}(\mathfrak{a}) = \min_{\alpha} \{f_\alpha(1, \dots, 1)\}.$$

**EJEMPLO 6. (Números de salto de ideales monomiales).** Con la notación del ejemplo anterior, podemos calcular los números de salto del ideal monomial  $\mathfrak{a}$ . De hecho, cada vector exponente  $v \in \mathbf{N}^n$  determina un número de salto  $\lambda_v$  caracterizado como el racional más pequeño  $\lambda > 0$  tal que  $x^v \notin \mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ , y cada número de salto es de esta forma (aunque observemos que diferentes



$v \in \mathbf{N}^n$  pueden tener el mismo jumping number  $\lambda$ ). Como en el ejemplo anterior, el teorema de Howald implica que

$$\lambda_v = \min_{\alpha} \{f_{\alpha}(v+1)\}.$$

**DEFINICIÓN 1.11 (Polinomios no degenerados).** Sea  $f \in \mathbf{C}[X]$  un polinomio con ideal de términos  $\mathfrak{a}_f$ , y considera su poliedro de Newton  $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(\mathfrak{a}_f)$ . Dada una cara  $\sigma$  de  $\Gamma_+(f)$  – incluyendo  $\sigma = \Gamma_+(f)$  – denotamos por  $f_{\sigma} \in \mathbf{C}[X]$  la suma de los términos de  $f$  que corresponden a puntos en  $\sigma$ . Decimos que  $f$  es *no degenerado en  $\sigma$* , si la 1-forma  $df_{\sigma}$  no se anula en  $(\mathbf{C}^*)^n$ . Decimos que  $f$  es *no degenerado* si  $f$  es no degenerado en cada cara de  $\Gamma_+(f)$ . Finalmente decimos que  $f$  tiene *parte principal no degenerada* si esta condición es cierta en cada cara compacta  $\sigma$  de  $\Gamma_+(f)$ . (De hecho esta última noción aparece en Arnold, Gusein-Zade y Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps. Vol II: Monodromy and Asymptotics of Integrals*: esto esencialmente controla el comportamiento local de  $f$  cerca del origen.)

**TEOREMA 1.4.** *Asumamos que  $f \in \mathbf{C}[X]$  es no degenerado. Entonces*

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot f) = \mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}_f)$$

*para todo  $0 < \lambda < 1$ . Si  $f$  tiene parte principal no degenerada, entonces la misma afirmación es cierta en una vecindad del origen.*

Como consecuencia se tiene la siguiente proposición:

**PROPOSICIÓN 1.3.** *Sea  $(C, 0) \subseteq (\mathbf{C}^2, 0)$ , un germen irreducible con un sólo par de Newton  $(p, q)$ . Entonces, en coordenadas convenientes*

$$\lambda = \frac{(r+1)p + (s+1)q}{pq} < 1, \text{ con } r, s \in \mathbf{Z}_{>0}$$

*es un número de salto de  $C$  y el monomio  $x^r y^s$  genera el  $\mathbf{C}$ -espacio vectorial*

$$\mathcal{K}_{\lambda}(C) = \frac{\mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot C)}{\mathcal{J}(\lambda \cdot C)}.$$

## CAPÍTULO 2

### Curvas planas irreducibles

El estudio de singularidades de curvas complejas planas ha sido amplio y se cuenta con mucha literatura. Sugerimos consultar [Bri], [JoPf], [Tei], [Wal] y [Zar], por poner algunas referencias importantes.

Siguiendo a B. Teissier [Tei], sea  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  el anillo local de funciones holomorfas en 0, el cual podemos identificar con el anillo  $\mathbb{C}\{x, y\}$  de series de potencias convergentes en el origen de  $\mathbb{C}^2$ .

Sea  $(C, 0) \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de curva irreducible (también llamado *rama*) definido por  $\{f(x, y) = 0\}$  con  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  irreducible. Por el teorema de preparación de Weierstrass podemos suponer que  $f$  es un polinomio de Weierstrass  $f(x, y) = y^{e_0} + a_1(x)y^{e_0-1} + \dots + a_n(x)$  irreducible en  $\mathbb{C}\{x\}[y]$ , donde  $e_0 = n = \text{mult}_0(C)$ .

El teorema de Newton nos dice que tal polinomio tiene todas sus raíces de la forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \omega^i x^{i/n},$$

donde  $\omega$  es una raíz  $n$ -ésima de la unidad en  $\mathbb{C}$ .

Lo cual es equivalente a la afirmación de que una curva analítica irreducible como arriba puede ser parametrizada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= t^n \\ y &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i. \end{aligned}$$

En particular, esto muestra que  $f$ , como polinomio de Weierstrass, determina una extensión de Galois del campo de fracciones  $\mathbb{C}\{\{x\}\}$  de  $\mathbb{C}\{x\}$ , y del campo de fracciones  $\mathbb{C}((x))$  de  $\mathbb{C}[[x]]$ , con grupo de Galois  $\mu_n$ .

Una consecuencia directa de esto es el

**TEOREMA 2.1** (Teorema de Newton-Puiseux). *La cerradura algebraica del campo  $\mathbb{C}\{\{x\}\}$  (resp.  $\mathbb{C}((x))$ ) es el campo  $\cup_{n \geq 1} \mathbb{C}\{\{x^{1/n}\}\}$  (resp.  $\cup_{n \geq 1} \mathbb{C}((x^{1/n}))$ ).*

Así, posiblemente después de un cambio de coordenadas para que  $x = 0$  sea transversal a  $C$  en el 0, la rama puede ser parametrizada, cerca de 0, como sigue

$$\begin{aligned} x &= t^{e_0} \\ y &= \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i \quad \text{con } m \geq e_0. \end{aligned}$$

Ahora consideremos la siguiente agrupación de los términos de la serie  $y(t)$ : fijemos  $\beta_0 = e_0 = n$  y sea  $\beta_1$  el exponente más pequeño que aparece en  $y(t)$  que no es divisible por  $\beta_0$ . Si tal exponente no existe, significa que  $y$  es una serie de potencias de  $x$ , y nuestra rama es analíticamente isomorfa a  $\mathbb{C}$ , y por lo tanto no singular. Supongamos que esto no pasa y fijemos  $e_1 = (n, \beta_1)$ , el máximo común divisor de estos dos enteros. Ahora definamos  $\beta_2$  como el exponente más pequeño que aparece en  $y(t)$  que no es divisible por  $e_1$ . Definimos  $e_2 = (e_1, \beta_2)$ ; tenemos que  $e_2 < e_1$ , y continuamos de esta manera. Habiendo definido  $e_i = (e_{i-1}, \beta_i)$ , definimos  $\beta_{i+1}$  como el exponente más pequeño que aparece en  $y(t)$  que no es divisible por  $e_i$ . Como la sucesión de enteros

$$n = e_0 > e_1 > e_2 > \cdots > e_i > \cdots$$

es estrictamente decreciente, existe un entero  $g$  tal que  $e_g = 1$ . En este punto, hemos estructurado nuestra representación paramétrica como sigue:

$$(7) \quad \begin{aligned} x(t) &= t^{e_0} \\ y(t) &= a_{e_0} t^{e_0} + a_{2e_0} t^{2e_0} + \cdots + a_{h_0 e_0} t^{h_0 e_0} + \\ &+ a_{\beta_1} t^{\beta_1} + a_{\beta_1 + e_1} t^{\beta_1 + e_1} + \cdots + a_{\beta_1 + h_1 e_1} t^{\beta_1 + h_1 e_1} \\ &+ a_{\beta_2} t^{\beta_2} + a_{\beta_2 + e_2} t^{\beta_2 + e_2} + \cdots + a_{\beta_q} t^{\beta_q} + a_{\beta_q + e_q} t^{\beta_q + e_q} + \cdots \\ &+ a_{\beta_g} t^{\beta_g} + a_{\beta_g + 1} t^{\beta_g + 1} + \cdots \end{aligned}$$

donde  $h_0 = \lfloor \frac{\beta_1}{e_0} \rfloor$ ,  $h_i = \lfloor \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{e_i} \rfloor$  y, por construcción, los coeficientes de  $a_{\beta_i}$  para  $i \geq 1$ , son no nulos.

Ahora definamos los enteros  $n_i$  y  $m_i$  por las igualdades

$$(8) \quad e_{i-1} = n_i e_i, \quad \beta_i = m_i e_i \quad \text{con } 1 \leq i \leq g,$$

de donde  $e_i = n_{i+1} \cdots n_g$ .

Notemos que podemos reescribir la expansión de  $y$  en potencias de  $t$  por una expansión en  $x$  con potencias fraccionales como sigue:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_n x + a_{2n} x^2 + \cdots + a_{h_0 n} x^{h_0} + \\ &+ a_{\beta_1} x^{\frac{m_1}{n_1}} + a_{\beta_1 + e_1} x^{\frac{m_1 + 1}{n_1}} + \cdots + a_{\beta_1 + h_1 e_1} x^{\frac{m_1 + h_1}{n_1}} \\ &+ a_{\beta_2} x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + a_{\beta_2 + e_2} x^{\frac{m_2 + 1}{n_1 n_2}} + \cdots + a_{\beta_q} x^{\frac{m_q}{n_1 n_2 \cdots n_q}} + a_{\beta_q + e_{q-1}} x^{\frac{m_q + 1}{n_1 n_2 \cdots n_q}} + \cdots \\ &+ a_{\beta_g} x^{\frac{m_g}{n_1 n_2 \cdots n_g}} + a_{\beta_g + 1} x^{\frac{m_g + 1}{n_1 n_2 \cdots n_g}} + \cdots \end{aligned}$$

Los pares de enteros coprimos  $\{(m_i, n_i)\}$  son llamados *pares característicos de Puiseux*. Su información es obviamente equivalente a la de los exponentes característicos  $\beta_i$ .

La sucesión de enteros  $B(C) = (e_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$  es llamada la *sucesión característica* de  $C$  en las coordenadas  $(x, y)$  y puede ser caracterizada algebraicamente como sigue: sea  $\mu_n$  el grupo de

$n$ -raíces de la unidad. Para  $\omega \in \mu_n$  calculemos el orden en  $t$  de la serie  $y(t) - y(\omega t)$ . Si escribimos  $\omega = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ , tenemos

$$y(\omega t) = a_n \omega^n t^n + \cdots + a_{\beta_1} \omega^{\beta_1} t^{\beta_1} + \cdots$$

y observamos que multiplicar  $t$  por  $\omega$  no afecta los términos en  $t^{jn}$ . El término  $t^{\beta_1}$  no cambia si y solo si  $\omega^{\beta_1} = 1$ , esto es si  $\frac{k\beta_1}{n}$  es un entero, i.e.,  $k\beta_1 = ln$  o  $km_1 = ln_1$  con la notación introducida arriba. Como  $n_1$  y  $m_1$  son coprimos, esto significa que  $k$  es un múltiplo de  $n_1$ , que es equivalente a decir que  $\omega$  pertenece al semigrupo  $\mu_{\frac{n}{n_1}}$  de  $\mu_n$  que consiste de  $\frac{n}{n_1} = n_2 \cdots n_g$ -raíces de la unidad. Si este es el caso, entonces los coeficientes de todos los términos de la forma  $t^{\beta_1 + je_1}$  en la expansión de Puiseux tampoco cambian cuando multiplicamos  $t$  por  $\omega$ , y el primer término que puede cambiar es  $a_{\beta_2} t^{\beta_2}$ . Un argumento similar al previo muestra que si  $\omega \in \mu_{\frac{n}{n_1}}$ , entonces  $\omega^{\beta_2} = 1$  si y sólo si  $\omega \in \mu_{\frac{n}{n_1 n_2}}$  y así sucesivamente.

Finalmente si denotamos por  $v$  el orden en  $t$  de un elemento de  $\mathbf{C}\{t\}$ , vemos que

$$v(y(t) - y(\omega t)) = \beta_i \text{ si y sólo si } \omega \in \mu_{\frac{n}{n_1 \cdots n_{i-1}}} \setminus \mu_{\frac{n}{n_1 \cdots n_i}} \text{ con } 1 \leq i \leq g$$

Esto nos da una caracterización algebraica, y una sucesión de subextensiones cíclicas

$$\mathbf{C}\{x\} \subset \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{n_1}}\} \subset \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{n_1 n_2}}\} \subset \cdots \subset \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{n_1 \cdots n_i}}\} \subset \cdots \subset \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{n}}\}$$

que corresponden a los subgrupos anidados  $\mu_{\frac{n}{n_1 \cdots n_i}}$  del grupo  $\mu_n$ .

Esto prueba que la sucesión  $(e_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$  depende sólo de la inclusión  $\mathbf{C}\{x\} \subset \mathcal{O}_{C,0}$ .

**OBSERVACIÓN 2.1.** Se puede probar que de hecho, la parametrización nos define la normalización de la curva [**JoPf**]:

$$\begin{aligned} i : \mathbf{C}\{x, y\}/(f) &\hookrightarrow \mathbf{C}\{t\} \\ [x] &\mapsto x(t) \\ [y] &\mapsto y(t). \end{aligned}$$

Ahora definamos los números  $p_i, q_i$  por las igualdades  $p_i = n_i$  y

$$(9) \quad \begin{aligned} q_1 &= m_1, \\ q_{i+1} &= m_{i+1} - m_i n_{i+1} \text{ con } 1 \leq i < g. \end{aligned}$$

Estos pares coprimos  $(p_i, q_i)$  son llamados *pares de Newton*.

**EJEMPLO 7.** Consideremos la curva analítica irreducible parametrizada por

$$\begin{aligned} x(t) &= t^4 \\ y(t) &= t^6 + t^9, \end{aligned}$$

por lo que tiene como sucesión característica  $(e_0, \beta_1, \beta_2) = (4, 6, 9)$  y pares de Puiseux  $(3, 2)$  y  $(9, 2)$ . Para recuperar una ecuación de la curva simplemente podemos reescribir la serie de  $y$  en potencias de  $t$  por potencias fraccionales de  $x$ :

$$y(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{9}{4}}$$

y tenemos que si  $\omega \in \mu_4$  es una raíz primitiva de la unidad

$$f(x, y) = \prod_{j=1}^4 y - y(\omega^j x) = (y^2 - x^3)^2 - x^9 - 4y^2 x^3 - 4yx^6.$$

## 1. Raíces aproximadas

Volviendo a la parametrización (7), para cada  $k = 0, \dots, g-1$ , consideremos la curva dada por la parametrización

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{e_0} \\ y(t) &= a_{e_0} t^{e_0} + a_{2e_0} t^{2e_0} + \dots + a_{h_0 e_0} t^{h_0 e_0} + \\ &+ a_{\beta_1} t^{\beta_1} + a_{\beta_1 + e_1} t^{\beta_1 + e_1} + \dots + a_{\beta_1 + h_1 e_1} t^{\beta_1 + h_1 e_1} + \dots \\ &+ a_{\beta_{k-1}} t^{\beta_{k-1}} + a_{\beta_{k-1} + e_{k-1}} t^{\beta_{k-1} + e_{k-1}} + \dots + a_{\beta_{k-1} + h_{k-1} e_{k-1}} t^{\beta_{k-1} + h_{k-1} e_{k-1}} + \\ &+ a_{\beta_k} t^{\beta_k} + a_{\beta_k + 1} t^{\beta_k + 1} + \dots + a_{\beta_k + h_k e_k} t^{\beta_k + h_k e_k} \end{aligned}$$

Observemos que no es primitiva pues el máximo común divisor de cada potencia de  $t$  que aparece es  $e_k > 1$ . Así, tomando una raíz  $e_k$  de  $t$ , obtenemos una rama con  $k$  pares de Puiseux; a la que denotaremos por  $C_k$  y es parametrizada por

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{e_0/e_k} \\ y(t) &= a_{e_0} t^{e_0/e_k} + a_{2e_0} t^{2e_0/e_k} + \dots + a_{h_0 e_0} t^{h_0 e_0/e_k} + \\ &+ a_{\beta_1} t^{\beta_1/e_k} + a_{\beta_1 + e_1} t^{\frac{\beta_1 + e_1}{e_k}} + \dots + a_{\beta_1 + h_1 e_1} t^{\frac{\beta_1 + h_1 e_1}{e_k}} + \dots \\ &+ a_{\beta_{k-1}} t^{\beta_{k-1}/e_k} + a_{\beta_{k-1} + e_{k-1}} t^{\frac{\beta_{k-1} + e_{k-1}}{e_k}} + \dots + a_{\beta_{k-1} + h_{k-1} e_{k-1}} t^{\frac{\beta_{k-1} + h_{k-1} e_{k-1}}{e_k}} + \\ &+ a_{\beta_k} t^{\beta_k/e_k} + a_{\beta_k + 1} t^{\frac{\beta_k + e_k}{e_k}} + \dots + a_{\beta_k + h_k e_k} t^{\frac{\beta_k + h_k e_k}{e_k}} \end{aligned}$$

y es llamada la  $k$ -ésima raíz aproximada de  $C$ . Con sucesión característica

$$\frac{1}{e_k} (e_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = (e_0/e_k, \beta_1/e_k, \dots, \beta_k/e_k)$$

y pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^k$ . A un germen de definición lo denotaremos por  $f_k$ .

## 2. Proceso de Newton

Dada  $f(x, y) = \sum a_{i,j} x^i y^j \in \mathbf{C}\{x, y\}$  reducida con  $f(0, 0) = 0$ . Llamamos al conjunto

$$\text{Sop}(f) = \{(i, j) : a_{i,j} \neq 0\}$$

el *soporte* de  $f$ . A veces identificamos el par  $(i, j)$  con el monomio  $x^i y^j$ .

Consideremos la envolvente convexa del conjunto

$$\Gamma_+(f) := \bigcup_{(i,j) \in \text{Sop}(f)} \{(i, j) + \mathbf{R}_+^2\}.$$

El polígono de Newton de  $f$ , en el origen relativo a las coordenadas  $(x, y)$  es la frontera de  $\Gamma_+(f)$  y lo denotamos por  $\Gamma(f)$ . Los segmentos compactos de  $\Gamma(f)$  son llamados *caras* y la pendiente de la línea que pasa por la cara es llamada *pendiente* de la cara.

Es fácil ver que si  $f$  es irreducible, entonces  $\Gamma(f)$  tiene una sola cara compacta, sin embargo no todas las funciones con una sola cara compacta son irreducibles [**JoPf**]. Además, en el caso irreducible, es posible hacer un cambio de coordenadas analítico que deje la cara compacta de  $\Gamma(f)$  con vértices en los ejes coordenados:

Dada una rama  $(C, 0) \subseteq (\mathbf{C}^2, 0)$  con ecuación en su forma normal de Weierstrass

$$f(x, y) = y^{e_0} + a_1(x)y^{e_0-1} + \dots + a_n(x),$$

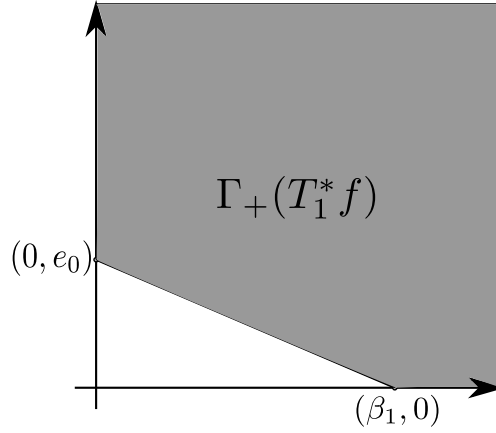
con una parametrización como (7). Consideremos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} T_1 : (\mathbf{C}^2, 0) &\rightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \\ (x_1, y_1) &\mapsto \begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 - \sum_{i=1}^{h_0} a_{ie_0} x_1^i, \end{aligned} \end{aligned}$$

que cambia la parametrización de  $C$  de la siguiente manera

$$(10) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= t^{e_0} \\ y_1(t) &= y(t) - a_{e_0} t^{e_0} - a_{2e_0} t^{2e_0} - \dots - a_{h_0 e_0} t^{h_0 e_0} = \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i. \end{aligned}$$

Observemos que esta transformación no cambia la característica de la curva y también nos da una parametrización de  $C$  que hace que  $\Gamma(T_1^* f)$  relativo a las coordenadas  $(x_1, y_1)$  tenga una cara compacta con vértices  $(0, e_0), (q_1 e_1, 0) = (\beta_1, 0)$  y pendiente  $-p_1/q_1$ :



OBSERVACIÓN 2.2. Por lo anterior tenemos que de acuerdo con la definición de no degeneración 1.11, en estas coordenadas una rama  $C$  es no degenerada respecto a su polígono de Newton, si y sólo si,  $g = 1$ .

Recordemos que los pares de Newton de  $f$  están dados por (9) y ahora consideremos una transformación de Newton:

$$\begin{aligned} N_1 : (\mathbf{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \\ (x_2, y_2) &\mapsto (x_1, y_1) = (x_2^{p_1}, x_2^{q_1}(a_{\beta_1} + y_2)), \end{aligned}$$

la cual tiene un efecto en  $T_1^*C$ :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t^{e_0/p_1} = t^{e_1} \\ y_2(t) &= t^{-e_1 q_1} \cdot \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i - a_{\beta_1} = t^{-\beta_1} \cdot \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i - a_{\beta_1} \\ &= a_{\beta_1 + e_1} t^{e_1} + \dots + a_{\beta_1 + h_1 e_1} t^{h_1 e_1} \\ &\quad + a_{\beta_2} t^{\beta_2 - \beta_1} + \dots + a_{\beta_2 + h_2 e_2} t^{\beta_2 + h_2 e_2 - \beta_1} + \dots \\ &\quad + a_{\beta_g} t^{\beta_g - \beta_1} + \dots \\ &= a_{\beta_1 + e_1} t^{e_1} + \dots + a_{\beta_1 + h_1 e_1} t^{h_1 e_1} \\ &\quad + a_{\beta_2} t^{q_2 e_2} + \dots + a_{\beta_2 + h_2 e_2} t^{q_2 e_2 + h_2 e_2} + \dots \\ &\quad + a_{\beta_g} t^{m_g - m_1 n_2 \dots n_{g-1} e_{g-1}} + \dots \end{aligned}$$

pues  $\beta_2 - \beta_1 = m_2 e_2 - m_1 n_2 e_2 = q_2 e_2$  y  $\beta_k - \beta_1 = (m_k - m_1 n_2 \dots n_k) e_k$ .

OBSERVACIÓN 2.3. Con lo anterior tenemos que la transformación de Newton disminuye en uno el número de pares característicos de la curva:

$$(e_1, \beta'_1, \dots, \beta'_{g-1}) = (e_0/p_1, \beta_2 - \beta_1, \dots, \beta_g - \beta_1).$$

Ahora apliquemos nuevamente un cambio de coordenadas:

$$T_2 : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$$

$$(x_3, y_3) \mapsto \begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = y_3 - \sum_{i=1}^{h_1} a_{\beta_1+ie_1} x_3^i, \end{cases}$$

por lo que

$$x_3(t) = t^{e_1}$$

$$y_3(t) = y_2(t) - a_{\beta_1+e_1} t^{e_1} - a_{\beta_1+2e_1} t^{2e_1} - \dots - a_{\beta_1+h_1e_1} t^{h_1e_1} = \sum_{i \geq \beta_2} a_i t^i$$

Iterando este proceso tenemos que para  $k \leq g$  definimos la transformación

$$T_k : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$$

$$(x_{2k-1}, y_{2k-1}) \mapsto \begin{cases} x_{2(k-1)} = x_{2k-1} \\ y_{2(k-1)} = y_{2k-1} - \sum_{i=1}^{h_{k-1}} a_{\beta_{k-1}+ie_{k-1}} x_{2k-1}^i, \end{cases}$$

por lo que

$$x_{2k-1}(t) = t^{e_{k-1}}$$

$$y_{2k-1}(t) = y_{k-1}(t) - a_{\beta_{k-1}+e_{k-1}} t^{e_{k-1}} - \dots - a_{\beta_{k-1}+h_{k-1}e_{k-1}} t^{h_{k-1}e_{k-1}}$$

$$= \sum_{i \geq \beta_k} a_i t^i.$$

Y consideremos una  $k$ -ésima transformación de Newton:

$$N_k : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$$

$$(x_{2k}, y_{2k}) \mapsto \begin{cases} x_{2k-1} = x_{2k}^{p_k} \\ y_{2k-1} = x_{2k}^{q_k} (a_{\beta_k} + y_{2k}), \end{cases}$$

se tiene que

$$x_{2k}(t) = t^{e_{k-1}/p_k} = t^{e_k}$$

$$y_{2k}(t) = t^{-e_k q_k} \cdot \sum_{i \geq \beta_k} a_i t^i - a_{\beta_k} = t^{-(\beta_k - \beta_{k-1})} \cdot \sum_{i \geq \beta_k} a_i t^i - a_{\beta_k}$$

$$= a_{\beta_k+e_k} t^{e_k} + \dots + a_{\beta_k+h_k e_k} t^{h_k e_k}$$

$$+ a_{\beta_{k+1}} t^{\beta_{k+1}-\beta_k} + \dots + a_{\beta_{k+1}+h_{k+1}e_{k+1}} t^{\beta_{k+1}+h_{k+1}e_{k+1}-\beta_k} + \dots$$

$$+ a_{\beta_g} t^{\beta_g-\beta_k} + \dots$$

$$= a_{\beta_k+e_k} t^{e_k} + \dots + a_{\beta_k+h_k e_k} t^{h_k e_k}$$

$$+ a_{\beta_{k+1}} t^{q_{k+1}e_{k+1}} + \dots + a_{\beta_{k+1}+h_{k+1}e_{k+1}} t^{q_{k+1}e_{k+1}+h_{k+1}e_{k+1}} + \dots$$

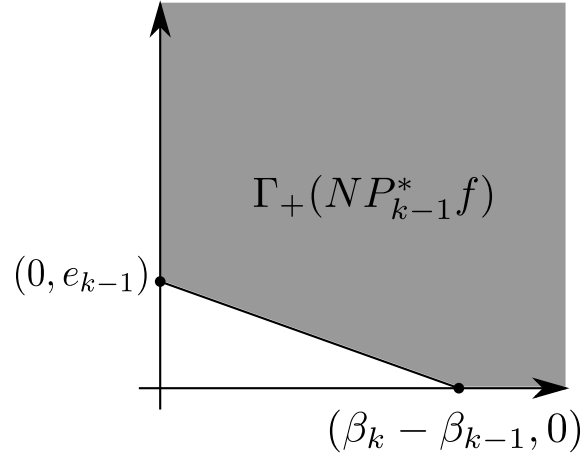
$$+ a_{\beta_g} t^{m_g-m_k n_{k+1} \dots n_{g-1} e_{g-1}} + \dots$$

A este proceso le llamaremos *Proceso de Newton* y denotaremos

$$(11) \quad NP_k := T_{k+1} \circ (N_k \circ T_k) \circ (N_{k-1} \circ T_{k-1}) \circ \dots \circ (N_1 \circ T_1)$$

y se tiene que el polígono de Newton se transforma de la siguiente manera:





OBSERVACIÓN 2.4. En particular  $NP_k^* C_k$  es lisa pues tiene característica 1 y parametrización:

$$\begin{cases} x_{2k+1} = t \\ y_{2k+1} = 0. \end{cases}$$

y  $NP_k^* C_{k+1}$  tiene característica  $(p_{k+1}, \frac{\beta_{k+1}-\beta_k}{e_{k+1}}) = (p_{k+1}, q_{k+1})$ :

$$\begin{cases} x_{2k+1} = t^{p_{k+1}} \\ y_{2k+1} = a_{\beta_{k+1}} t^{q_{k+1}} + \dots + a_{\beta_{k+1}+h_{k+1}e_{k+1}} t^{q_{k+1}+h_{k+1}} \end{cases}$$

En este punto es conveniente introducir unos nuevos invariantes:

$$(12) \quad \alpha_1 = q_1, \quad \alpha_{i+1} = p_i p_{i+1} \alpha_i + q_{i+1}$$

OBSERVACIÓN 2.5. Es conocido desde Brauner (1928) que el *enlace* de una singularidad irreducible de curva con  $g$  pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^g$  puede obtenerse mediante la construcción iterada del siguiente modo: sea  $K_1$  el nudo tórico de tipo  $(\alpha_1, p_1)$  (o equivalentemente un *cable knot* de invariante  $(\alpha_1, p_1)$  alrededor de  $S^1$ ). Y para  $i \in \{2, \dots, g\}$  sea  $K_i$  un “cable knot” de invariantes  $(\alpha_i, p_i)$  a los largo de  $K_{i-1}$ . Entonces  $K_g$  es el enlace de la singularidad. Esto da un significado topológico a los  $\{(\alpha_i, p_i)\}$ .

Ahora definiremos una transformación birracional que nos será útil para los resultados del tercer capítulo la cual aplicaremos después del proceso de Newton  $NP_k$ :

$$(13) \quad \begin{aligned} S_k : (\mathbf{C}^2, 0) &\rightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \\ (u, v) &\mapsto \begin{cases} x_{2k+1} = u \\ y_{2k+1} = u^{p_k \alpha_k} v, \end{cases} \end{aligned}$$

la cual es birracional con inversa

$$S_k^{-1} : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$$

$$(x_{2k+1}, y_{2k+1}) \mapsto \begin{cases} u = x_{2k+1} \\ v = x_{2k+1}^{-p_k \alpha_k} y_{2k+1}. \end{cases}$$

$S_k$  cambia la parametrización de  $NP_k^*C$  de la siguiente manera

$$u(t) = x_{2k+1}(t) = t^{e_k}$$

$$v(t) = t^{p_k \alpha_k e_k} y_{2k+1}(t)$$

$$= +a_{\beta_{k+1}} t^{q_{k+1} e_{k+1} + p_k \alpha_k e_k} + \dots + a_{\beta_{k+1} + h_{k+1} e_{k+1}} t^{q_{k+1} e_{k+1} + h_{k+1} e_{k+1} + p_k \alpha_k e_k} + \dots$$

$$+ a_{\beta_g} t^{\beta_g - \beta_k + p_k \alpha_k e_k} + \dots$$

Ahora, usando que  $\alpha_{k+1} = p_k p_{k+1} \alpha_k + q_{k+1}$  y que  $p_k \alpha_k e_k = p_k p_{k+1} \alpha_k e_{k+1}$  se tiene

$$u(t) = x_{2k+1}(t) = t^{e_k}$$

$$v(t) = a_{\beta_{k+1}} t^{\alpha_{k+1} e_{k+1}} + \dots + a_{\beta_{k+1} + h_{k+1} e_{k+1}} t^{\alpha_{k+1} e_{k+1} + h_{k+1} e_{k+1}} + \dots$$

$$+ a_{\beta_g} t^{\beta_g - \beta_k + p_k \alpha_k e_k} + \dots$$

Más aún, el efecto en  $NP_k^*C_{k+1}$  es

$$(14) \quad u(t) = x_{2k+1}(t) = t^{p_{k+1}}$$

$$v(t) = a_{\beta_{k+1}} t^{\alpha_{k+1}} + \dots + a_{\beta_{k+1} + h_{k+1} e_{k+1}} t^{\alpha_{k+1} + h_{k+1}}$$

DEFINICIÓN 2.1. A esta última curva  $S_{k*}(NP_k^*C_{k+1})$ , con un único par de Newton  $(p_{k+1}, \alpha_{k+1})$  la denotaremos por  $C_{au.x}^k$ .

### 3. Resolución minimal y su relación con el proceso de Newton

Consideremos  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2, 0}$ , el anillo local de funciones holomorfas de  $\mathbf{C}^2$  en una vecindad del origen y  $X = \text{Spec}(\mathcal{O})$ . Consideramos a  $C \subseteq X$ , una curva irreducible singular definida por  $f \in \mathcal{O}$ , irreducible.

Recordemos que la explosión en el origen de  $\mathbf{C}^2$  la podemos definir como la subvariedad  $Z$  de  $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$  definida por la ecuación  $\{xv - yu = 0\}$ , donde  $(x, y, [u : v])$  son coordenadas de  $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$ . Ésta es una variedad algebraica no singular de dimensión 2 y la primera proyección induce un morfismo algebraico  $B_0 : Z \rightarrow \mathbf{C}^2$ .

La fibra  $B_0^{-1}(0, 0)$  es toda la línea proyectiva  $\mathbf{P}^1$  pues si  $x = y = 0$  la ecuación se anula, mientras que si  $(x, y) \neq 0$ ,  $B_0^{-1}((x, y))$  es sólo un punto porque  $x$  e  $y$  determinan únicamente la razón de  $u$  y  $v$ .

Así,  $Z$  es una superficie que puede ser cubierta por dos cartas afines correspondientes a las cartas de la línea proyectiva. En el abierto  $U_1$  donde  $u \neq 0$  podemos tomar como coordenadas

$(x_1, y_1) = (x, \frac{v}{u})$  y la aplicación inducida por  $B_0$  en  $U_1$  está descrita en estas coordenadas por

$$\begin{aligned}x \circ B_0 &= x_1 \\y \circ B_0 &= x_1 y_1.\end{aligned}$$

Similarmente en el conjunto abierto  $U_2$  definido por  $v \neq 0$ , tomamos coordenadas  $(x_1, y_1) = (\frac{u}{v}, y)$  y la aplicación  $B_0$  está descrita por

$$\begin{aligned}x \circ B_0 &= x_1 y_1 \\y \circ B_0 &= y_1.\end{aligned}$$

Observemos que en la primera carta  $B_0^{-1}(0, 0)$  está definido por  $x_1 = 0$  y en la segunda por  $y_1 = 0$ .

La curva  $E = B_0^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\} \times \mathbf{P}^1$  es llamado el *divisor excepcional* de la explosión.

Consideremos la expansión de  $f$  como una suma de polinomios homogéneos

$$f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \cdots + f_{m+k}(x, y) + \cdots,$$

donde  $f_j$  es homogéneo de grado  $j$ . En la carta  $U_1$ , podemos escribir

$$\begin{aligned}f \circ B_0 &= f(x_1, x_1 y_1) = \\&= x_1^m (f_m(1, y_1) + x_1 f_{m+1}(1, y_1) + \cdots + x_1^k f_{m+k}(1, y_1) + \cdots)\end{aligned}$$

y hay una expansión similar en la otra carta. Si observamos el conjunto de ceros de  $f \circ B_0$  vemos que contiene el divisor excepcional contado  $m$  veces. Si quitamos este divisor excepcional tantas veces como sea posible, i.e., dividir  $f \circ B_0$  por  $x_1^m$  en la primera carta y por  $y_1^m$  en la segunda, obtenemos la ecuación de la curva en la superficie  $Z$ , ya sea formal o definida cerca de  $B_0^{-1}$ , que ya no contiene el divisor excepcional. Esta curva es la *transformada estricta* de  $C$

$$\tilde{C} = \overline{B_0^{-1}(C \setminus \{(0, 0)\})}.$$

Por construcción, la transformada estricta corta el divisor excepcional sólo en un número finito de puntos. Esto nos lleva a una definición equivalente a decir que una curva  $C$  es *analíticamente irreducible* o es una *rama* si para todo modelo liso  $\pi : Y \rightarrow X$ , tenemos que  $\pi_*^{-1}(C) \cap \pi^{-1}(\{0\})$  consiste de un sólo punto.

Notemos que en particular esto implica que el divisor excepcional de explotar el origen de  $\mathbf{C}^2$  intersecta a la transformada estricta de  $C$  en un sólo punto. Así, una rama  $C$  tiene bien definida una dirección tangente, i.e., el cono tangente de  $C$  en el origen consiste de una sola línea.

**OBSERVACIÓN 2.6.** El efecto de la explosión en la parametrización (7) es:

$$\begin{aligned}i \circ x \circ B_0 &= i \circ x_1 = t^{e_0} \\i \circ y \circ B_0 &= i \circ x_1 y_1 = t^{-e_0} \cdot \sum_{i \geq e_0} a_i t^i\end{aligned}$$

en la carta  $U_1$ , donde la transformada estricta intersecta al divisor excepcional. Por lo tanto esto también cambia la sucesión característica de la siguiente manera: si  $e_0 < \beta_1 - e_0$ , se tiene la

sucesión  $(e_0, \beta_1 - e_0, \dots, \beta_g - e_0)$ , en caso contrario se transforma mediante el proceso de inversión de Abhyankar (ver [JoPf], 5.2.21).

Esto nos sugiere que después de una sucesión de explosiones en puntos cerrados (aquellos donde la transformada estricta interseca al divisor excepcional) se obtiene una resolución de la curva, llamada *resolución minimal* o *resolución estándar* [Wal].

Así, la resolución minimal  $\pi : X' \rightarrow X$  de una curva irreducible  $C$ , está dada por una sucesión finita de explosiones  $\theta_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$  en puntos cerrados infinitamente próximos a  $p_1 = 0$ :

$$\pi : X' = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X$$

Nos referimos a las multiplicidades de la transformada estricta de  $C$  en los puntos  $p_i$ 's como la *sucesión de multiplicidades* de  $C$ . Si  $\pi_i : X_i \rightarrow X$  es la composición de las primeras  $i$  explosiones, la sucesión de enteros positivos es:

$$\text{mult}_{p_1}(C), \text{mult}_{p_2}(\pi_{1,*}^{-1}C), \text{mult}_{p_3}(\pi_{2,*}^{-1}C), \dots, \text{mult}_{p_n}(\pi_{n-1,*}^{-1}C)$$

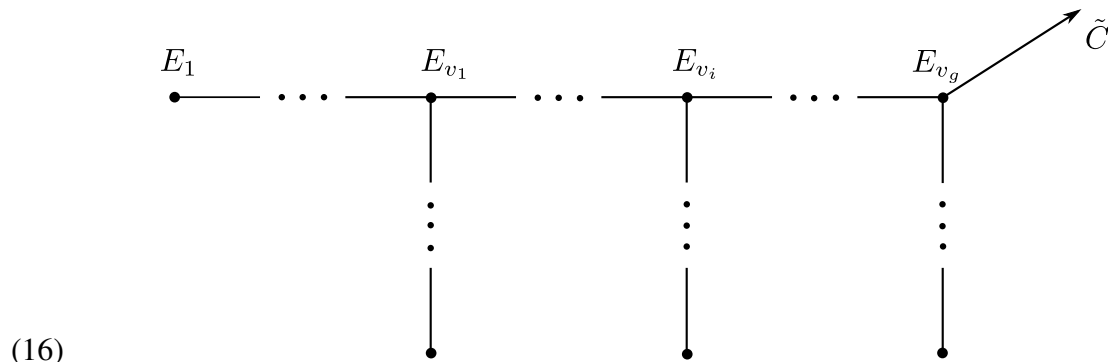
que denotaremos  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Esta sucesión también recupera el número de Milnor de la curva con la fórmula (ver [Wal, Teorema 6.5.8]):

$$(15) \quad \mu(C) = \sum_{i=1}^n a_i(a_i - 1).$$

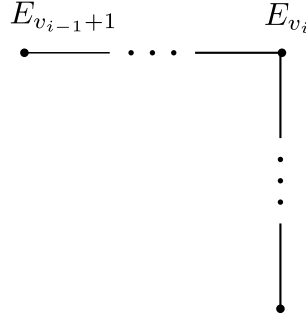
Dada  $\pi : X' \rightarrow X$  la resolución minimal de la singularidad  $0 \in C \subseteq X$ . Sea  $\pi^{-1}(0) = E = \cup_{i=1}^n E_i$  el divisor excepcional y  $\tilde{C}$  la transformada estricta de  $C$ . Tenemos que  $\pi^*C = \sum_{i=0}^n r_i E_i$ , donde  $E_0 = \tilde{C}$ .

A esta resolución le podemos asociar una gráfica pesada llamada *grafo de resolución dual*. Hay un vértice  $\bullet^{E_i}$  por cada divisor excepcional de  $\pi$ , y dos vértices correspondientes a  $E_i$  y  $E_j$  son adyacentes para  $i \neq j$  si y sólo si  $E_i \cdot E_j = 1$  (i.e.,  $E_i$  interseca  $E_j$  no trivialmente). Adicionalmente será conveniente incluir un vértice correspondiente a la transformada estricta de  $C$  en  $X'$ :



(16)

DEFINICIÓN 2.2. Las explosiones que corresponden al “aspa”  $i$ -ésima del grafo dual, cuya composición de explosiones es  $\eta_i := \theta_{v_i} \circ \cdots \circ \theta_{v_{i-1}+1}$



lo llamaremos  $i$ -ésimo paquete de Newton.

Del Capítulo 1 se tiene la notación  $K_\pi = \sum b_i E_i$  y los números  $r_i$  y  $b_i$  pueden calcularse mediante las siguientes fórmulas (ver [Bri]):

$$r_i = \begin{cases} r_{i-1} + a_{i-1} & \text{si } p_{i-1} \text{ está en un único divisor excepcional } E_{i-1} \\ r_{i-1} + r_j + a_{i-1} & \text{si } p_{i-1} \text{ es la intersección de } E_{i-1} \text{ y } E_j \text{ con } j < i - 1 \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} b_{i-1} + 1 & \text{si } p_{i-1} \text{ está en un único divisor excepcional } E_{i-1} \\ b_{i-1} + b_j + 1 & \text{si } p_{i-1} \text{ es la intersección de } E_{i-1} \text{ y } E_j \text{ con } j < i - 1 \end{cases}$$

para  $i > 1$  y  $r_1 = a_1$ ,  $b_1 = 1$ .

DEFINICIÓN 2.3. Los divisores etiquetados con los subíndices  $v_i$  en la figura (16), es decir, los divisores  $E_{v_i}$  que intersectan a otros tres divisores primos de la transformada total de  $C$  son llamados divisores de *ruptura*.

Para estos divisores además se tiene que

$$r_{v_{i+1}} = \alpha_{i+1} p_{i+1} e_{i+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g$$

la cual, usando (12) se transforma en la siguiente relación recursiva

$$(17) \quad r_{v_{i+1}} = p_{i+1} r_{v_i} + q_{i+1} e_i$$

Los números  $b_{v_i}$  cumplen, asimismo, la siguiente relación recursiva

$$(18) \quad b_{v_{i+1}} + 1 = p_{i+1} (b_{v_i} + 1) + q_{i+1}$$

y combinando las dos relaciones recursivas tenemos que

$$(19) \quad r_{v_{i+1}} - p_{i+1} r_{v_i} = e_i ((b_{v_{i+1}} + 1) - p_{i+1} (b_{v_i} + 1)).$$

**3.1. Relación entre el proceso de Newton y la resolución minimal.** Antes de explicar la relación entre el proceso de Newton y la resolución minimal daremos la siguiente

DEFINICIÓN 2.4. Dos ramas  $(C, 0)$  y  $(D, 0)$  tienen el mismo tipo topológico si,  $C$  y  $D$  son topológicamente equivalentes como superficies encajadas en  $\mathbf{C}^2$ , es decir, si existe un homeomorfismo

$$\phi : U \rightarrow U',$$

con  $U$  y  $U'$  vecindades abiertas del origen en  $\mathbf{C}^2$ , tales que:

- $C$  está definida en  $U$ ,  $D$  está definida en  $U'$ ;
- $\phi(C \cap U) = D \cap U'$ .

Dos curvas son *equisingulares* si tienen la misma sucesión característica, y por lo tanto si tienen los mismos pares de Newton, la misma sucesión de multiplicidades, y el mismo enlace y por lo tanto si tienen el mismo tipo topológico (ver [Wal] Prop. 4.3.8 y [Dim] Prop. 2.6 pag. 43).

Siguiendo la notación de [Zar] escribiremos  $C \equiv D$  si  $C$  y  $D$  son ramas equisingulares.

Como se observó en 2.1, el proceso de Newton nos define la normalización de la curva y más aún

LEMA 2.1. *Dada una rama  $(C, 0) \subseteq (\mathbf{C}^2, 0)$ , se tiene que*

$$(NP_i^*C, 0) \equiv (\pi_{v_i}^*C, p_{v_i+1}),$$

donde  $\pi_{v_i}$  es la composición de explosiones de los primeros  $i$  paquetes de Newton de  $C$  y  $NP_i$  es el  $i$ -ésimo proceso de Newton.

Una manera de entender esto es ver cómo cambia la ecuación de la curva (en coordenadas “convenientes”) bajo el proceso de Newton y ver que esto produce un monomio excepcional con multiplicidad  $r_{v_i}$  y la otra componente es una curva equisingular a la transformada estricta de  $C$  bajo  $\pi_{v_i}$ ; esto se traduce en comprobar cómo cambia la parametrización de  $C$  bajo  $NP_i$  y  $\pi_{v_i}$  módulo una inversión de Abhyankar y ver que efectivamente tienen la misma característica (ver Observación 2.3).

Otra prueba de este hecho se deduce de [GPGV] sección 9 con métodos tóricos. Nosotros no daremos una prueba de este hecho pero mostraremos lo que sucede con un ejemplo para que el lector tenga una idea más clara.

EJEMPLO 8. *Consideremos una curva  $(C, 0) \subseteq (\mathbf{C}^2, 0)$  con tres pares de Newton y parametrización*

$$C \equiv \begin{cases} x &= t^{12} \\ y &= t^{12} + t^{18} + t^{24} + t^{27} + t^{30} + t^{35} \end{cases}$$

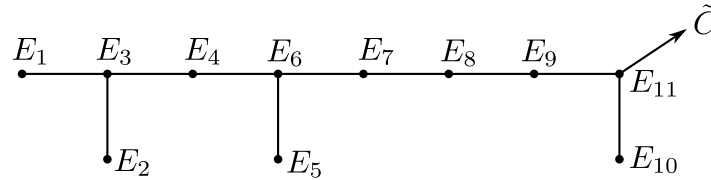
Sus exponentes característicos están dados por

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \quad \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2 \cdot 2}, \quad \frac{35}{12} = \frac{9}{4} + \frac{8}{4 \cdot 3}$$

por lo que sus pares de Newton son

$$(p_1, q_1) = (2, 3), \quad (p_2, q_2) = (2, 3), \quad (p_3, q_3) = (3, 8)$$

Aplicando el algoritmo de Euclides a estos pares se obtiene el número de explosiones que hay que hacer para obtener la resolución minimal y las multiplicidades:



con multiplicidades

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$E_9$	$E_{10}$	$E_{11}$
$r_i$	12	18	36	42	45	90	93	96	98	195	294
$b_i$	1	2	4	5	6	12	13	14	15	30	46

y

$$\alpha_1 = q_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 = 15, \quad \alpha_3 = 2 \cdot 3 \cdot 15 + 8 = 98.$$

Con raíces aproximadas

$$C_0 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad C_1 \equiv \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + t^3 + t^4 \end{cases} \quad C_2 \equiv \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^4 + t^6 + t^8 + t^9 + t^{30} \end{cases}.$$

El proceso de Newton modifica la parametrización de la siguiente manera:

Paso  $NP_1$ :

$$T_1 \equiv \begin{cases} \tilde{x}_1 = x \\ \tilde{y}_1 = y - x \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_1 = t^{12} \\ \tilde{y}_1 = t^{18} + t^{24} + t^{27} + t^{30} + t^{35} \end{cases}$$

$$N_1 \equiv \begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1^2 \\ \tilde{y}_1 = x_1^3(1 + y_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t^6 \\ y_1 = t^6 + t^9 + t^{12} + t^{17} \end{cases}$$

Paso  $NP_2$ :

$$T_2 \equiv \begin{cases} \tilde{x}_2 = x_1 \\ \tilde{y}_2 = y_1 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_2 = t^6 \\ \tilde{y}_2 = t^9 + t^{12} + t^{17} \end{cases}$$

$$N_2 \equiv \begin{cases} \tilde{x}_2 = x_2^2 \\ \tilde{y}_2 = x_2^3(1 + y_2) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = t^3 \\ y_2 = t^3 + t^8 \end{cases}$$

Paso  $NP_3$ :

$$T_3 \equiv \begin{cases} \tilde{x}_3 = x_2 \\ \tilde{y}_3 = y_2 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_3 = t^3 \\ \tilde{y}_3 = t^8 \end{cases}$$

$$N_3 \equiv \begin{cases} \tilde{x}_3 = x_3^3 \\ \tilde{y}_3 = x_3^8(1 + y_3) \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = t \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Como se verá en la siguiente sección (ver Lema 2.3), se tiene que

$$\pi_{v_1} = \begin{cases} x = u^2v \\ y = u^3v^2 \end{cases}, \quad \pi_{v_1}^{-1} = \begin{cases} u = x^2y^{-1} \\ v = x^{-3}y^2 \end{cases}$$

$$\pi_{v_1}^* C \equiv \begin{cases} u = \frac{x^2}{y} = \frac{t^{24}}{(t^{18}+t^{24}+t^{27}+t^{30}+t^{35})} = \frac{t^6}{(1+t^6+t^9+t^{12}+t^{17})} \\ v = \frac{y^2}{x^3} = \frac{(t^{18}+t^{24}+t^{27}+t^{30}+t^{35})^2}{t^{36}} = 1 - 2t^6 - 2t^9 + t^{12} + 4t^{15} + 2t^{17} + \dots \end{cases}$$

en un punto infinitamente próximo a  $p_{v_{i+1}}$  que tiene coordenadas  $(0, 1)$  en la carta  $(u, v)$ . Haciendo un cambio de coordenadas tenemos

$$\begin{cases} \tilde{u} = u = t^6(1 + t^6 + t^9 + t^{12} + t^{17})^{-1} \\ \tilde{v} = v - 1 = -2t^6 - 2t^9 + t^{12} + 4t^{15} + 2t^{17} + \dots \end{cases}$$

y comparando las características podemos observar que  $(\pi_{v_1}^* C, p_{i+1})$  es equisingular a  $(NP_1^* C, 0)$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 2.7. En este momento es importante observar que un sistema de coordenadas local de  $\mathbf{C}_{x_{2k+1}, y_{2k+1}}^2$  está dado por  $(x_{2k+1}, f_k)$ .

En las siguientes secciones usaremos algunas propiedades del algoritmo de Euclides para dar descripciones de los números  $r_i$  y  $b_i$  para todos los divisores excepcionales que aparecen en la resolución de una curva plana irreducible.

#### 4. Algunas propiedades del algoritmo de Euclides y el máximo común divisor

El algoritmo de Euclides da un método para calcular el máximo común divisor de dos enteros. Dados  $p, q \in \mathbf{Z}_{>0}$ , supondremos que  $p < q$ . El máximo común divisor de  $p$  y  $q$ , que denotaremos por  $(p, q)$ , es el último residuo no cero al aplicar dicho algoritmo. Definiendo  $a_0 = q$  y  $a_1 = p$  se tiene:

$$(20) \quad \begin{aligned} a_0 &= c_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 \\ a_1 &= c_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 \\ &\vdots \\ a_{l-2} &= c_{l-1} a_{l-1} + a_l, & 0 < a_l < a_{l-1} \\ a_{l-1} &= c_l a_l \end{aligned}$$



y por tanto  $(p, q) = a_l$ . En este caso decimos que  $l$  es el número de líneas del algoritmo. La línea  $j - 1$ -ésima es  $a_{j-2} = c_{j-1}a_{j-1} + a_j$  y diremos que es par o impar, dependiendo de que lo sea  $j$ . A los números  $c_1, \dots, c_l$  los llamaremos cocientes y a los  $a_2, \dots, a_l$  los llamaremos residuos.

**DEFINICIÓN 2.5 (Algoritmo de Euclides inverso truncado, AEIT).** Sean  $p, q \in \mathbf{Z}_{>0}$ , con  $p < q$  con algoritmo de Euclides como 20. A todo  $k$  con  $0 < k \leq c_1 + c_2 + \dots + c_l$  le asociamos un único par  $(i, j)$  con  $1 \leq i \leq l$  y  $1 \leq j \leq c_i$ , de modo que  $k = c_1 + \dots + c_{i-1} + j$ . Además convenimos  $c_0 = 0$ .

Definimos el siguiente *algoritmo de Euclides inverso  $k$ -truncado*, que denotamos  $\text{AEIT}(k)$ , como

$$(21) \quad \begin{aligned} a_{i-1}(k) &= j \cdot 1 \\ a_{i-2}(k) &= c_{i-1}a_{i-1}(k) + 1 \\ &\vdots \\ a_1(k) &= c_2a_2(k) + a_3(k) \\ a_0(k) &= c_1a_1(k) + a_2(k), \end{aligned}$$

donde usamos los cocientes  $c_1, \dots, c_{i-1}$  dados por el algoritmo de Euclides 20 de  $p$  y  $q$ . Nótese que el algoritmo inverso  $k$ -truncado tiene  $i$  líneas. Los  $a_j(k)$  están determinados por los cocientes  $c_1, \dots, c_{i-1}$  y por  $j$  de la siguiente manera: comenzamos con la ecuación  $a_{i-1}(k) = j \cdot 1$  y nos regresamos con el algoritmo, i.e., definimos  $a_{i-2}(k) := c_{i-1}a_{i-1}(k) + 1$ ,  $a_{i-3}(k) := c_{i-2}a_{i-2}(k) + a_{i-1}(k)$  e iteramos.

Por construcción  $(a_0(k), a_1(k)) = 1$ .

**AFIRMACIÓN 2.1.1.** *Dados  $p, q \in \mathbf{Z}_{>0}$  tales que  $p < q$  y  $(p, q) = a_l$  con algoritmo de Euclides como 20. Dado  $k = c_1 + \dots + c_{l-1}$ , i. e.,  $(l-1, c_{l-1})$ , entonces los números  $a_1(k) = s$  y  $a_0(k) = t$  de la definición 1.1 cumplen la siguiente propiedad*

$$\begin{cases} qs - pt = a_l & \text{si } l \text{ es par} \\ qs - pt = -a_l & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$$

**PRUEBA.** Nótese que  $s = a_1(k) < t = a_0(k)$ . Sustituyendo  $s = a_1(k)$  y  $t = a_0(k)$  se tiene

$$\begin{aligned} qs - pt &= a_0s - a_1t &= (c_1a_1 + a_2)a_1(k) - a_1(c_1a_1(k) + a_2(k)) \\ &= a_2a_1(k) - a_1a_2(k) &= a_2(c_2a_2(k) + a_3(k)) - (c_2a_2 + a_3)a_2(k) \\ &= a_2a_3(k) - a_3a_2(k) &= \dots \\ &= \pm[a_{l-2}a_{l-1}(k) - a_{l-1}a_{l-2}(k)] &= \pm[(c_{l-1}a_{l-1} + a_l)a_{l-1}(k) - a_{l-1}(c_{l-1}a_{l-1}(k))] \\ & &= \pm a_l, \end{aligned}$$

donde recordando que por AEIT  $a_{l-2}(k) = j \cdot 1$ , definimos  $a_{l-1}(k) = 1$ . □

No es difícil comprobar que  $s$  y  $t$  son los menores enteros positivos que cumplen la afirmación (2.1.1).

Como consecuencia de esta afirmación se tiene la siguiente

OBSERVACIÓN 2.8. Sean  $p, q \in \mathbf{Z}_{>0}$ ,  $p < q$ , tales que  $(p, q) = 1$  con algoritmo de Euclides como anteriormente, y sean

$$\begin{aligned} k &= c_1 + \cdots + c_{i-1} + j \\ k' &= c_1 + \cdots + c_{i-1} \end{aligned}$$

entonces aplicando AEIT( $k$ ) y AEIT( $k'$ ) obtenemos  $a_0(k)$ ,  $a_1(k)$ ,  $a_0(k')$  y  $a_1(k')$  tales que

$$a_0(k)a_1(k') - a_1(k)a_0(k') = \pm 1.$$

LEMA 2.2. Sean  $p, q \in \mathbf{Z}_{>0}$ ,  $p < q$ , con  $(p, q) = 1$  con algoritmo de Euclides como anteriormente y  $k, k'$  como en la observación anterior. Entonces

$$\begin{aligned} a_0(k+1) &= a_0(k) + a_0(k') \\ a_1(k+1) &= a_1(k) + a_1(k') \end{aligned}$$

PRUEBA. Necesitamos considerar dos casos, cuando  $k+1$  pertenece a la misma línea del algoritmo de Euclides y cuando  $k+1$  cambia de línea. Comencemos por el primer caso. De los respectivos AEIT se tiene

$$\begin{array}{ll} a_{i-1}(k) &= j \cdot 1 \\ a_{i-2}(k) &= c_{i-1}a_{i-1}(k) + 1 & a_{i-2}(k') &= c_{i-1} \cdot 1 \\ a_{i-3}(k) &= c_{i-2}a_{i-2}(k) + a_{i-1}(k) & a_{i-3}(k') &= c_{i-2}a_{i-2}(k') + 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_1(k) &= c_2a_2(k) + a_3(k) & a_1(k') &= c_2a_2(k') + a_3(k') \\ a_0(k) &= c_1a_1(k) + a_2(k) & a_0(k') &= c_1a_1(k') + a_2(k') \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{i-1}(k+1) &= (j+1) \cdot 1 \\ a_{i-2}(k+1) &= c_{i-1}a_{i-1}(k+1) + 1 \\ &\vdots \\ a_1(k+1) &= c_2a_2(k+1) + a_3(k+1) \\ a_0(k+1) &= c_1a_1(k+1) + a_2(k+1), \end{aligned}$$

Sumando formalmente  $AEIT(k)$  y  $AEIT(k')$  donde agregamos en la primera línea de  $AEIT(k')$   $1 \cdot 1$ , se tiene

$$\begin{aligned}
a_{i-1}(k) + 1 \cdot 1 &= j \cdot 1 + 1 \cdot 1 &= (j + 1) \cdot 1 \\
&= &= a_{i-1}(k + 1) \\
a_{i-2}(k) + a_{i-2}(k') &= c_{i-1}a_{i-1}(k) + 1 + c_{i-1} \cdot 1 &= c_{i-1}(a_{i-1}(k) + 1) + 1 \\
&= &= c_{i-1}a_{i-1}(k + 1) + 1 \\
&= &= a_{i-2}(k + 1) \\
&\vdots &\vdots \\
a_1(k) + a_1(k') &= c_2a_2(k) + a_3(k) + c_2a_2(k') + a_3(k') &= c_2(a_2(k) + a_2(k')) + a_3(k) + a_3(k') \\
&= &= c_2a_2(k + 1) + a_3(k + 1) \\
&= &= a_1(k + 1) \\
a_0(k) + a_0(k') &= c_1a_1(k) + a_2(k) + c_1a_1(k') + a_2(k') &= c_1(a_1(k) + a_1(k')) + a_2(k) + a_2(k') \\
&= &= c_1a_1(k + 1) + a_2(k + 1) \\
&= &= a_0(k + 1)
\end{aligned}$$

El caso en que  $k+1$  pertenece a la línea siguiente del algoritmo significa que  $k+1 = c_1 + \dots + c_i + 1$  y por lo tanto  $k$  tiene asociado el par  $(i, c_i)$  y  $k+1$  el par  $(i+1, 1)$ , así  $AEIT(k+1)$  tiene una línea más que  $AEIT(k)$  pero la prueba anterior es fácil de arreglar agregando la línea  $1 \cdot 1$  a  $AEIT(k)$  y a  $AEIT(k')$  para tener:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 + 0 &= 1 \cdot 1 &= a_i(k + 1) \\
a_{i-1}(k) + 1 \cdot 1 &= j \cdot 1 + 1 \cdot 1 &= c_i \cdot 1 + 1 \\
&= c_i \cdot a_i(k + 1) + 1 &= a_{i-1}(k + 1) \\
a_{i-2}(k) + a_{i-2}(k') &= c_{i-1}a_{i-1}(k) + 1 + c_{i-1} \cdot 1 &= c_{i-1}(a_{i-1}(k) + 1) + 1 \\
&= c_{i-1}a_{i-1}(k + 1) + 1 &= c_{i-1}a_{i-1}(k + 1) + a_i(k + 1) \\
&= &= a_{i-2}(k + 1) \\
&\vdots &\vdots \\
a_1(k) + a_1(k') &= c_2a_2(k) + a_3(k) + c_2a_2(k') + a_3(k') &= c_2(a_2(k) + a_2(k')) + a_3(k) + a_3(k') \\
&= &= c_2a_2(k + 1) + a_3(k + 1) \\
&= &= a_1(k + 1) \\
a_0(k) + a_0(k') &= c_1a_1(k) + a_2(k) + c_1a_1(k') + a_2(k') &= c_1(a_1(k) + a_1(k')) + a_2(k) + a_2(k') \\
&= &= c_1a_1(k + 1) + a_2(k + 1) \\
&= &= a_0(k + 1)
\end{aligned}$$

□

## 5. Resolución y cálculo de los invariantes numéricos $r_i$ y $b_i$

**5.1. Caso de un sólo exponente.** Sea  $C$  una curva plana con un sólo par de Newton. Como el grafo dual (junto con su decoración) es un invariante de equisingularidad basta considerar una curva plana irreducible definida por  $\{f = y^p - x^q = 0\}$  con  $p, q \in \mathbf{Z}_{>0}$ ,  $p < q$  y  $(p, q) = 1$ . Es posible calcular la sucesión de multiplicidades de la resolución minimal aplicando el algoritmo de Euclides a  $p$  y  $q$ :

Sean  $a_0 = q$  y  $a_1 = p$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1 a_1 + a_2 \\ a_1 &= c_2 a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_{s-2} &= c_{s-1} a_{s-1} + a_s \\ a_{s-1} &= c_s a_s \end{aligned}$$

Recordemos que por hipótesis  $(p, q) = 1$ , entonces  $a_s = 1$ . Además la resolución está dada por una sucesión de  $c_1 + \dots + c_s$  explosiones en puntos cerrados, es decir, un único paquete de Puiseux. Para las explosiones que corresponden a las líneas impares del algoritmo de Euclides consideramos la carta  $U_1$  con coordenadas:

$$\begin{cases} x = u \\ y = uv, \end{cases}$$

donde la transformada estricta de la curva intersecta al divisor excepcional  $E = \{u = 0\}$  y la carta  $U_2$  con coordenadas

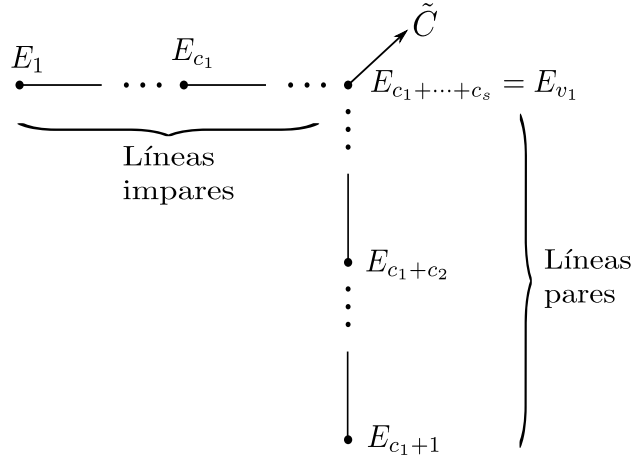
$$\begin{cases} x = uv \\ y = v, \end{cases}$$

para las líneas pares.

La sucesión de multiplicidades es

$$\underbrace{(a_1 \ a_1 \ \dots \ a_1)}_{c_1\text{-veces}} \underbrace{(a_2 \ a_2 \ \dots \ a_2)}_{c_2\text{-veces}} \dots \underbrace{(a_s \ a_s \ \dots \ a_s)}_{c_s\text{-veces}}$$

y grafo dual



donde el divisor de ruptura  $E_{v_1}$  pertenecerá a la línea horizontal o vertical dependiendo de la paridad de  $s$ .

Sea  $k \leq c_1 + \dots + c_s$  con  $k = c_1 + \dots + c_{i-1} + j$ , con  $c_0 = 0$  y como en la definición del AEIT consideramos la siguiente notación

$$E_k = E_{c_1+\dots+c_{i-1}+j} =: E_{(i,j)}$$

donde  $i$  nos dice a qué línea del algoritmo de Euclides corresponde la explosión en la que apareció el divisor excepcional y  $j$  la posición de dicha explosión en la línea del algoritmo.

Recordemos que en nuestra notación tenemos que  $\pi^*C = \sum r_i E_i$  y  $K_\pi = \sum b_i E_i$ . Procederemos a calcular las multiplicidades  $r_i, b_i$ :

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea  $k \leq c_1 + \dots + c_s$  y  $E_k = E_{c_1+\dots+c_{i-1}+j} = E_{(i,j)}$ . Entonces*

$$b_k = a_0(k) + a_1(k) - 1$$

y

$$r_k = \begin{cases} p \cdot a_0(k) & \text{si } i \text{ es impar,} \\ q \cdot a_1(k) & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases}$$

donde  $a_0(k)$  y  $a_1(k)$  se obtiene de la  $k$ -truncación del AEIT:

$$\begin{aligned} a_{i-1}(k) &= j \cdot 1, \\ a_{i-2}(k) &= c_{i-1}a_{i-1}(k) + 1, \\ &\vdots \\ a_1(k) &= c_2a_2(k) + a_3(k), \\ a_0(k) &= c_1a_1(k) + a_2(k). \end{aligned}$$

PRUEBA. Comenzamos probando un lema que nos dice cómo son las ecuaciones locales de la composición de las primeras  $k = c_1 + \dots + c_{i-1} + j$  explosiones:

LEMA 2.3. *La ecuación local de la composición de las primeras  $k = c_1 + \cdots + c_{i-1} + j$  explosiones es*

$$\begin{array}{l} x = u^{a_1(k)}v^c \\ y = u^{a_0(k)}v^b \end{array} \quad \text{si } i \text{ es impar o} \quad \begin{array}{l} x = u^c v^{a_1(k)} \\ y = u^b v^{a_0(k)} \end{array} \quad \text{si } i \text{ es par}$$

donde  $c = a_0(k')$  y  $b = a_1(k')$  se calculan con la  $k'$ -truncación del algoritmo de Euclides de  $p$  y  $q$ , y  $k' = c_1 + \cdots + c_{i-2}$ ; es decir

$$\begin{aligned} a_{i-3}(k') &= c_{i-2} \cdot 1, \\ a_{i-4}(k') &= c_{i-3}a_{i-3}(k') + 1, \\ &\vdots \\ a_1(k') &= c_2a_2(k') + a_3(k'), \\ a_0(k') &= c_1a_1(k') + a_2(k'). \end{aligned}$$

PRUEBA.

Observemos que en cada explosión la matriz de exponentes del cambio de coordenadas tiene determinante 1:

$$\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

y

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Por lo que la composición de explosiones también nos dará una matriz de exponentes con determinante 1.

Procederemos por inducción.

Caso  $k = 1$  (una única explosión  $(i, j) = (1, 1)$ ): tenemos que  $a_0(1) = a_1(1) = 1$  y  $c = 0, b = 1$  y se tienen que en la carta  $U_1$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_1y_1 \end{cases}$$

Luego para el caso  $k = c_1 + 1$  ( $(i, j) = (2, 1)$ )

$$\begin{aligned} a_1(k) &= j \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1, \\ a_0(k) &= c_1 \cdot 1 + 1 = c_1 + 1. \end{aligned}$$

y  $c = 1$  y  $b = c_1$ . Y tenemos

$$\begin{array}{l} x = x_1 = x_2 = \cdots = x_{c_1} = x_{c_1+1}y_{c_1+1}, \\ y = x_1y_1 = x_2^2y_2 = \cdots = x_{c_1}^{c_1}y_{c_1} = x_{c_1+1}^{c_1}y_{c_1+1}^{c_1+1}, \end{array}$$

donde la última igualdad se da porque se considera la carta  $U_2$  al cambiar de línea en el algoritmo:

$$\begin{aligned}x_{c_1} &= x_{c_1+1}y_{c_1+1}, \\y_{c_1} &= y_{c_1+1}.\end{aligned}$$

Para el caso general es suficiente verificar que las fórmulas son válidas bajo una explosión.

Necesitamos considerar 4 casos: supongamos que  $k$  está en una línea impar y por hipótesis de inducción se tienen coordenadas

$$\begin{aligned}x &= x_k^{a_1(k)} y_k^c, \\y &= x_k^{a_0(k)} y_k^b.\end{aligned}$$

Aplicando una explosión se tiene que si  $k+1$  sigue perteneciendo a la línea impar usamos la carta  $U_1$  para obtener

$$\begin{aligned}x &= x_{k+1}^{a_1(k)+c} y_{k+1}^c, \\y &= x_{k+1}^{a_0(k)+b} y_{k+1}^b.\end{aligned}$$

si  $k+1$  cambia a una línea par usamos la carta  $U_2$  y obtenemos

$$\begin{aligned}x &= x_{k+1}^{a_1(k)} y_{k+1}^{a_1(k)+c}, \\y &= x_{k+1}^{a_0(k)} y_{k+1}^{a_0(k)+b}.\end{aligned}$$

En ambos casos hay que probar que  $a_1(k+1) = a_1(k) + c$  y  $a_0(k+1) = a_0(k) + b$  y para el segundo caso que

$$a_1(k)a_0(k+1) - a_0(k)a_1(k+1) = \pm 1,$$

pero todo esto se sigue de la observación 1.1. y el lema 1.1. Lo que prueba la inducción.  $\square$

Volviendo a la prueba de la proposición calculamos primero los  $b_i$ 's:

Si  $i$  es par tenemos

$$\left. \begin{aligned}dx &= cu^{c-1}v^{a_1(k)}du + a_1(k)u^c v^{a_1(k)-1}dv \\dy &= bu^{b-1}v^{a_0(k)}du + a_0(k)u^b v^{a_0(k)-1}dv\end{aligned} \right\} \rightsquigarrow dx \wedge dy = cte \cdot u^{b+c-1}v^{a_0(k)+a_1(k)-1}du \wedge dv.$$

Como  $\{v=0\}$  es una ecuación local de  $E_k = E_{(i,j)}$  tenemos que  $b_k = a_0(k) + a_1(k) - 1$

Si  $i$  es impar tenemos

$$\left. \begin{aligned}dx &= a_1(k)u^{a_1(k)-1}v^cdu + cu^{a_1(k)}v^{c-1}dv \\dy &= a_0(k)u^{a_0(k)-1}v^bdu + bu^{a_0(k)}v^{b-1}dv\end{aligned} \right\} \rightsquigarrow dx \wedge dy = cte \cdot u^{a_0(k)+a_1(k)-1}v^{b+c-1}du \wedge dv.$$

Como  $\{u=0\}$  es una ecuación local de  $E_k = E_{(i,j)}$  tenemos que  $b_k = a_0(k) + a_1(k) - 1$ , y se tiene lo que se afirmó.

Ahora para el caso de los  $r_i$ 's tenemos que en el caso impar:

$$\pi_{(i,j)}^*(f) = (u^{a_0(k)}v^b)^p - (u^{a_1(k)}v^c)^q = u^{pa_0(k)}v^{bp} - u^{qa_1(k)}v^{cq} = u^{pa_0(k)}v^{cq}(v^{bp-cq} - u^{qa_1(k)-pa_0(k)})$$

pues  $pa_0(k) < qa_1(k)$  y  $cq < bq$  al suponer  $i$  impar. Además como la ecuación local de  $E_k = E_{(i,j)}$  es  $\{u = 0\}$  tenemos que  $r_k = p \cdot a_0(k)$  como se afirmó.

Para el caso par

$$\pi_{(i,j)}^*(f) = (u^b v^{a_0(k)})^p - (u^c v^{a_1(k)})^q = u^{bp} v^{pa_0(k)} - u^{cq} v^{qa_1(k)} = u^{bp} v^{qa_1(k)} (v^{a_0(k)p - a_1(k)q} - u^{cq - bp})$$

pues  $qa_1(k) < pa_0(k)$  y  $bp < cq$ . Como en este caso la ecuación local de  $E_k = E_{(i,j)}$  es  $\{v = 0\}$  se tiene que  $r_k = q \cdot a_1(k)$  como se afirmó.  $\square$

En general si consideramos una curva con un par de Puiseux  $(p, q)$ , i.e., equisingular a la curva que acabamos de analizar, se tiene que su resolución estándar o minimal se consigue con el mismo número de explosiones y los  $r_i$ 's no cambian, en este caso tampoco los  $b_i$ 's.

**5.2. Caso general.** Para ver cómo son las multiplicidades en el caso de una curva con más pares de Newton observemos que, en coordenadas convenientes, en la explosión  $v_{i-1}$ , el *pull back* de  $f$  es de la forma:

$$\pi_{v_{i-1}}^*(f) = x_{v_{i-1}}^{e_{i-1}p_{i-1}\alpha_{i-1}} [(y_{v_{i-1}}^{p_i} - a_i x_{v_{i-1}}^{q_i})^{e_i} + \sum_{i,j} c_{i,j} x_{v_{i-1}}^i y_{v_{i-1}}^j].$$

Consideremos la  $k$  truncación del algoritmo de Euclides inverso a  $p_i$  y  $q_i$ . Escribiendo  $j = v_{i-1} + k$ , con  $0 < k \leq v_i - v_{i-1}$ , las multiplicidades  $r_j$  y  $b_j$  se pueden describir de la siguiente manera:

$$(22) \quad r_j = \begin{cases} r_{v_{i-1}} \cdot a_1(k) + e_i p_i a_0(k) & \text{línea impar,} \\ r_{v_{i-1}} \cdot a_1(k) + e_i q_i a_1(k) & \text{línea par,} \end{cases}$$

$$(23) \quad b_j = b_{v_{i-1}} a_1(k) + a_0(k) + a_1(k) - 1,$$

donde claramente  $r_{v_{i-1}} = e_{i-1} p_{i-1} \alpha_{i-1}$ .

La fórmula anterior junto con los valores  $\text{ord}_{E_{v_i}} \pi^* h$  dados en la siguiente tabla nos permitirán calcular los órdenes de los *pull-backs* de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y de las raíces aproximadas  $f_i$  para cualquier divisor  $E_j$  de la resolución logarítmica de  $C$ . Los valores de la siguiente tabla son conocidos y pueden calcularse usando, por ejemplo, la igualdad (17). Alternativamente se pueden calcular a partir de los diagramas de Eisenbud-Neumann de  $C$ . Véase [EisNeu].



	$x$	$y$	$f_1$	$\cdots$	$f_j$	$\cdots$	$f_{g-1}$	$f_g$
$E_{v_1}$	$p_1$	$\alpha_1$	$\alpha_1 p_1$	$\cdots$	$\alpha_1 p_1 \cdots p_j$	$\cdots$	$\alpha_1 p_1 \cdots p_{g-1}$	$\alpha_1 p_1 \cdots p_g$
$E_{v_2}$	$p_1 p_2$	$\alpha_1 p_2$	$\alpha_2$	$\cdots$	$\alpha_2 p_2 \cdots p_j$	$\cdots$	$\alpha_2 p_2 \cdots p_{g-1}$	$\alpha_2 p_2 \cdots p_g$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$E_{v_j}$	$p_1 \cdots p_j$	$\alpha_1 p_2 \cdots p_j$	$\alpha_2 p_3 \cdots p_j$	$\cdots$	$\alpha_j p_j$	$\cdots$	$\alpha_j p_j \cdots p_{g-1}$	$\alpha_j p_j \cdots p_g$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$E_{v_g}$	$p_1 \cdots p_g$	$\alpha_1 p_2 \cdots p_g$	$\alpha_2 p_3 \cdots p_g$	$\cdots$	$\alpha_{j+1} p_{j+2} \cdots p_g$	$\cdots$	$\alpha_g$	$\alpha_g p_g$

## 6. Una fórmula recursiva para el número de Milnor

Terminamos este capítulo con la demostración de una fórmula recursiva para el número de Milnor.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea  $C_{k+1}$  una curva irreducible con  $k + 1$  pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^{k+1}$  y sea  $C_k$  su  $k$ -ésima raíz aproximada. Entonces*

$$\mu(C_{k+1}) = p_{k+1} \mu(C_k) + \mu(C_{aux}^{(k)}),$$

donde  $C_{aux}^{(k)}$  es la curva con un único par de Newton  $(p_{k+1}, \alpha_{k+1})$  definida en 2.1.

Esta fórmula se puede deducir fácilmente de [KM $\mathbf{c}$ E, Theorem 2.3 (4)] o de [GVKM $\mathbf{c}$ E, Theorem 1]. Sin embargo daremos una prueba elemental usando las sucesiones de multiplicidades de las curvas  $C_{k+1}$ ,  $C_k$  y  $C_{aux}^{(k)}$ .

PRUEBA. Supongamos que  $k = 1$  y denotemos por  $(m_1, m_2, \dots, m_r)$  la sucesión de multiplicidades que se relaciona con el par de Newton  $(p_1, q_1)$  mediante el siguiente algoritmo de Newton

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1 a_1 + a_2 \\ a_1 &= c_2 a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_{s-2} &= c_{s-1} a_{s-1} + a_s \\ a_{s-1} &= c_s a_s, \end{aligned}$$

donde  $a_0 = q_1$  y  $a_1 = p_1$  y, por la hipótesis  $(p, q) = 1$ , se tiene que  $a_s = 1$ . Por último  $r = c_1 + \cdots + c_s$  y

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = \cdots = m_{c_1} = a_1 = p_1 \\ m_{c_1+1} &= m_{c_1+2} = \cdots = m_{c_1+c_2} = a_2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$m_{r-c_s+1} = m_{r-c_s+2} = \cdots = m_r = a_s = 1.$$

La sucesión de multiplicidades de  $C_{aux}^{(1)}$  es  $(p_2, (\alpha_1 p_1), p_2, n_1, \dots, n_t)$ , donde  $(n_1, \dots, n_t)$  es la sucesión de multiplicidades de una curva con un sólo par de Newton  $(p_2, q_2)$ .

Finalmente, la sucesión de multiplicidades de  $C_2$  es  $(p_2 m_1, \dots, p_2 m_s, n_1, \dots, n_t)$ .

Por tanto, usando [Wal, Theorem 6.5.8], la igualdad

$$\mu(C_2) = p_2 \mu(C_1) + \mu(C_{aux}^{(1)})$$

es equivalente a la igualdad

$$\sum p_2 m_i (p_2 m_i - 1) + \sum n_j (n_j - 1) = p_2 \sum m_i (m_i - 1) + p_1 \alpha_1 p_2 (p_2 - 1) + \sum n_j (n_j - 1)$$

y a la igualdad

$$\sum m_i (p_2 m_i - 1) = \sum m_i (m_i - 1) + p_1 \alpha_1 (p_2 - 1).$$

Esta última igualdad se sigue de las ecuación  $\sum_i m_i^2 = p_1 q_1$ , que es fácilmente deducibles recursivamente del algoritmo de Euclides.

En efecto,

$$q_1 p_1 = a_0 a_1 = (c_1 a_1 + a_2) a_1 = c_1 a_1^2 + a_1 a_2 =$$

$$c_1 a_1^2 + (c_2 a_2 + a_3) a_2 = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + a_2 a_3 =$$

...

$$\cdots = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \cdots + c_{s-1} a_{s-1}^2 + a_{s-1} a_s =$$

$$\cdots = c_1 a_1 (a_1 - 1) + c_2 a_2 (a_2 - 1) + \cdots + c_s a_s^2.$$

**OBSERVACIÓN 2.9.** La ecuación  $\sum_i m_i (m_i - 1) = (p_1 - 1)(q_1 - 1)$  se puede deducir de modo análogo a partir del algoritmo de Euclides.

$$(q_1 - 1)(p_1 - 1) = (a_0 - 1)(a_1 - 1) = (c_1 a_1 + a_2 - 1)(a_1 - 1) = c_1 a_1 (a_1 - 1) + (a_1 - 1)(a_2 - 1) =$$

$$c_1 a_1 (a_1 - 1) + (c_2 a_2 + a_3 - 1)(a_2 - 1) = c_1 a_1 (a_1 - 1) + c_2 a_2 (a_2 - 1) + (a_2 - 1)(a_3 - 1) =$$

...

$$\cdots = c_1 a_1 (a_1 - 1) + c_2 a_2 (a_2 - 1) + \cdots + c_{s-1} (a_s)(a_s - 1).$$

$$\cdots = c_1 a_1 (a_1 - 1) + c_2 a_2 (a_2 - 1) + \cdots + c_s (a_s)(a_s - 1).$$

En el caso general  $k > 1$ , la demostración es análoga. La sucesión de multiplicidades de  $C_k$  será

$$\left(\frac{e_1}{e_k}m_1^{(1)}, \dots, \frac{e_1}{e_k}m_{r_1}^{(1)}, \frac{e_2}{e_k} \cdots p_k m_1^{(2)}, \dots, \frac{e_2}{e_k}m_{r_2}^{(2)}, \dots, \frac{e_{k-1}}{e_k}m_1^{(k-1)}, \dots, \frac{e_{k-1}}{e_k}m_{r_k}^{(k-1)}, m_1^{(k)}, \dots, m_{r_k}^{(k)}\right).$$

Las multiplicidades  $m_1^{(j)}, \dots, m_{r_j}^{(j)}$  corresponden al  $j$ -ésimo paquete de Newton y se relacionan con el  $j$ -ésimo par de Newton  $(p_j, q_j)$  mediante el algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned} a_0^{(j)} &= c_1^{(j)} a_1 + a_2^{(j)} \\ a_1^{(j)} &= c_2^{(j)} a_2 + a_3^{(j)} \\ &\vdots \\ a_{s_j-2}^{(j)} &= c_{s_j-1}^{(j)} a_{s_j-1} + a_{s_j}^{(j)} \\ a_{s_j-1}^{(j)} &= c_{s_j}^{(j)} a_{s_j}, \end{aligned}$$

donde  $a_0^{(j)} = \max\{p_j, q_j\}$  y  $a_1^{(j)} = \min\{p_j, q_j\}$  y, por la hipótesis  $(p_j, q_j) = 1$ , se tiene que  $a_{s_j} = 1$ . Por último  $r_j = c_1 + \cdots + c_{s_j}$  y

$$\begin{aligned} m_1^{(j)} &= m_2^{(j)} = \cdots = m_{c_1^{(j)}}^{(j)} = a_1^{(j)} = p_j \\ m_{c_1^{(j)}+1}^{(j)} &= m_{c_1^{(j)}+2}^{(j)} = \cdots = m_{c_1^{(j)}+c_2^{(j)}}^{(j)} = a_2^{(j)} \\ &\dots \\ m_{r_j-c_{s_j}^{(j)}+1}^{(j)} &= m_{r_j-c_{s_j}^{(j)}+2}^{(j)} = \cdots = m_{r_j}^{(j)} = a_{s_j}^{(j)} = 1. \end{aligned}$$

La sucesión de multiplicidades de  $C_{aux}^{(k)}$  es  $(p_{k+1}, \binom{\alpha_k p_k}{\alpha_k}, p_{k+1}, n_1, \dots, n_t)$ , donde  $(n_1, \dots, n_t)$  es la sucesión de multiplicidades de una curva con un sólo par de Newton  $(p_k, q_k)$ .

Finalmente, la sucesión de multiplicidades de  $C_{k+1}$  es

$$\left(\frac{e_1}{e_{k+1}}m_1^{(1)}, \dots, \frac{e_1}{e_{k+1}}m_{r_1}^{(1)}, \frac{e_2}{e_{k+1}}, \dots, \frac{e_{k-1}}{e_{k+1}}m^{(k-1)}, p_{k+1}m_1^{(k)}, \dots, p_{k+1}m_{r_k}^{(k)}, n_1, \dots, n_t\right).$$

Ahora el enunciado de la Proposición se sigue ya que

$$\begin{aligned} p_{k+1}\mu(C_k) + \mu(C_{aux}^{(k)}) - \sum n_k(n_k - 1) &= \\ p_{k+1}\left(\sum \frac{e_1}{e_k}m_i^{(1)}\left(\frac{e_1}{e_k}m_i^{(1)} - 1\right) + \cdots + \sum m_j^{(k)}(m_j^{(k)} - 1)\right) + \alpha_k p_k p_{k+1}(p_{k+1} - 1) \end{aligned}$$

Expandiendo  $\alpha_k = (((\alpha_1 p_i + q_1)p_1 p_2 + q_2)p_2 p_3 + q_3) + \cdots + p_{k-1} p_k + q_k$  y usando que  $\alpha_1 p_1 = \sum (m_i^{(1)})^2$  y que  $\alpha_j q_j = \sum (m_i^{(j)})^2$  tenemos que

$$\begin{aligned} &= p_{k+1}\left(\sum \frac{e_1}{e_k}m_i^{(1)}\left(\frac{e_1}{e_k}m_i^{(1)} - 1\right) + \cdots + \sum m_j^{(k)}(m_j^{(k)} - 1)\right) + \\ &\quad \left(\sum \left(\frac{e_1}{e_k}m_i^{(1)}\right)^2 + \cdots + \sum \left(\frac{e_1}{e_k}m_i^{(k)}\right)^2\right)p_{k+1}(p_{k+1} - 1) = \end{aligned}$$

cancelando el término  $p_{k+1}(\frac{e_j}{e_k}m_i^{(j)})^2$  para cada superíndice  $(j)$  tenemos

$$\begin{aligned}
&= -p_{k+1} \left( \sum \frac{e_1}{e_k} m_i^{(1)} + \cdots + \sum m_j^{(k)} \right) + \left( \sum \left( \frac{e_1}{e_k} m_i^{(1)} \right)^2 + \cdots + \sum \left( \frac{e_1}{e_k} m_i^{(k)} \right)^2 \right) (p_{k+1})^2 = \\
&= \sum \left( \left( \frac{e_1}{e_{k+1}} m_i^{(1)} \right)^2 - \frac{e_1}{e_{k+1}} m_i^{(1)} \right) + \cdots + \sum \left( \left( \frac{e_1}{e_{k+1}} m_i^{(k)} \right)^2 - e_{k+1} m_i^{(k)} \right) = \\
&\quad \sum \frac{e_1}{e_{k+1}} m_i^{(1)} \left( \frac{e_1}{e_{k+1}} m_i^{(1)} - 1 \right) + \cdots + \sum p_{k+1} m_j^{(k)} (p_{k+1} m_j^{(k)} - 1) = \\
&\quad \mu(C_{K+1}) - \sum n_k (n_k - 1),
\end{aligned}$$

lo que prueba la proposición. □



## CAPÍTULO 3

### Ideales de multiplicadores de curvas planas irreducibles

Nuevamente consideremos  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}$ , el anillo local de funciones holomorfas de  $\mathbf{C}^2$  en una vecindad del origen y  $X = \text{Spec}(\mathcal{O})$ . Sea  $C \subseteq X$ , una curva irreducible singular definida por  $f \in \mathcal{O}$ , irreducible, en otras palabras es un divisor primo efectivo reducido en  $X$  y  $f$  es una ecuación local de  $C$ , la cual asumimos que está en su forma de polinomio de Weierstrass.

Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  la resolución minimal de  $C$  dada por una sucesión de  $n$  explosiones  $\theta_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$  en puntos cerrados:

$$\pi : X' = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X$$

y denotamos por  $\pi_i : X_i \rightarrow X$  la composición de las primeras  $i$  explosiones.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior le asociamos la *sucesión de multiplicidades*  $(a_1, \dots, a_n)$ , donde  $a_i = \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1,*}^{-1}C)$  y  $p_i$  es el centro de la explosión  $\theta_i$ . Esta sucesión, se sabe, es un invariante de equisingularidad.

NOTACIÓN. Sea

$$\mathcal{JN}(C) := \{\text{números de salto de } C < 1\} \subseteq \mathbf{Q} \cap (0, 1).$$

**0.1. Algunas propiedades del redondeo.** La definición de ideales multiplicadores utiliza la función parte entera. Vamos a enunciar un par de propiedades de esta función que usaremos en las pruebas de este capítulo.

AFIRMACIÓN 3.0.2. *Para todo  $m, n \in \mathbf{R}$  se tiene que:*

$$(24) \quad \lfloor m + n \rfloor \leq \lfloor m \rfloor + \lfloor n \rfloor + 1.$$

Para todo  $m \in \mathbf{Z}$  y  $c \in \mathbf{R}$ :

$$(25) \quad m \geq \lfloor c \rfloor + 1 \text{ si, y solo si } m > c$$

#### 1. Caso con un exponente de Puiseux

La propiedad de tener un solo exponente de Puiseux es equivalente a la existencia de un sistema de coordenadas para el cual la ecuación de la curva es no degenerada con respecto a su polígono de Newton (ver Observación 2.2). Teniendo en cuenta este hecho es posible calcular los ideales

de multiplicadores y los números de salto ( $< 1$ ) de cualquier curva irreducible con un solo exponente característico usando los Teoremas 1.3, 1.4 y la periodicidad de los números de salto (ver Observación 1.1).

En esta sección daremos una prueba alternativa del caso con un exponente de Puiseux que usará las expresiones para los números  $r_i$  y  $b_i$  calculadas con ayuda de los algoritmos de Euclides truncados, dados en la Sección 5 del Capítulo 2.

**PROPOSICIÓN 3.1.** *Sea  $C$  una curva analítica irreducible singular en el origen con un solo par de Newton  $(p, q)$ . Entonces*

$$\mathcal{JN}(C) = \left\{ \lambda = \frac{p(r+1) + q(s+1)}{pq} < 1 \text{ con } r, s \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Además si  $\lambda = \frac{p(r+1)+q(s+1)}{pq} \in \mathcal{JN}(C)$ , entonces el monomio  $x^r y^s$  genera el  $\mathbf{C}$ -espacio vectorial  $\mathcal{K}_\lambda(C)$ .

**PRUEBA.** Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  la resolución minimal de  $C$  dada por una sucesión de  $n$  explosiones en puntos cerrados:

$$\pi : X' = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X.$$

Sabemos que  $n = c_1 + \cdots + c_s$  obtenido a través del algoritmo de Euclides y por la Proposición 2.1 hemos calculado las multiplicidades  $r_i$  y  $b_i$ . Mostraremos que el monomio  $x^r y^s$  pasa las cotas  $C(E_k, \lambda)$ :

$$\text{ord}_{E_k} \pi^*(x^r y^s) \geq \lfloor \lambda r_k \rfloor - b_k,$$

para todo  $k \neq v_1$ , donde  $E_{v_1}$  es el único divisor de ruptura y  $v_1 = c_1 + \cdots + c_s$ . Sin embargo no pasa  $C(E_{v_1}, \lambda)$ :

$$\text{ord}_{E_{v_1}} \pi^*(x^r y^s) \not\geq \lfloor \lambda r_{v_1} \rfloor - b_{v_1},$$

con lo que  $x^r y^s \notin \mathcal{J}(\lambda \cdot C)$ . Además mostraremos que  $x^r y^s \in \mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot C)$  para  $0 < \epsilon \ll 1$  y con esto mostramos que  $\lambda$  es un número de salto y  $[x^r y^s] \in \mathcal{K}_\lambda(C)^*$ .

Para esto usaremos la Proposición 2.1. y discutiremos dos casos, los que corresponden a las líneas pares e impares del algoritmo de Euclides. Pero primero observemos el siguiente hecho:

Caso impar: Por Proposición 2.1. tenemos que  $r_k = p a_0(k) < q a_1(k)$  y  $b_k = a_0(k) + a_1(k) - 1$ . Además por el Lema. 2.3

$$\text{ord}_{E_k} \pi^* x = a_1(k) < \text{ord}_{E_k} \pi^* y = a_0(k)$$

Así

$$\begin{aligned}
\text{ord}_{E_k} \pi^* x^r y^s &= a_1(k)r + a_0(k)s && \geq \lfloor \lambda r_k \rfloor - b_k \\
& \quad \text{''} && \geq \lfloor \frac{p(r+1)+q(s+1)}{pq} \cdot pa_0(k) \rfloor - a_0(k) - a_1(k) + 1 \\
\Leftrightarrow a_1(k)(r+1) + a_0(k)(s+1) &\geq \lfloor \frac{pa_0(k)(r+1)}{q} \rfloor + a_0(k)(s+1) + 1 \\
\Leftrightarrow a_1(k)(r+1) &> \lfloor \frac{pa_0(k)(r+1)}{q} \rfloor
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos (25) y como  $qa_1(k) > pa_0(k)$  se tiene que  $x^r y^s$  pasa la cota  $C(E_k, \lambda)$ .

Caso par: nuevamente por la Proposición 2.1.  $r_k = r_{(i,j)} = qa_1(k) < pa_0(k)$  y  $b_{(i,j)} = a_0(k) + a_1(k) - 1$ . Y Lema. 2.3

$$\text{ord}_{E_k} \pi^* x = a_1(k) < \text{ord}_{E_k} \pi^* y = a_0(k)$$

Así

$$\begin{aligned}
\text{ord}_{E_k} \pi^* x^r y^s &= a_1(k)r + a_0(k)s && \geq \lfloor \lambda r_k \rfloor - b_k \\
& \quad \text{''} && \geq \lfloor \frac{p(r+1)+q(s+1)}{pq} \cdot qa_1(k) \rfloor - a_0(k) - a_1(k) + 1 \\
\Leftrightarrow a_1(k)(r+1) + a_0(k)(s+1) &\geq \lfloor \frac{qa_1(k)(s+1)}{p} \rfloor + a_1(k)(r+1) + 1 \\
\Leftrightarrow a_0(k)(s+1) &> \lfloor \frac{qa_1(k)(s+1)}{p} \rfloor
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos (25) y como  $pa_0(k) > qa_1(k)$  se tiene que  $x^r y^s$  pasa la cota  $C(E_k, \lambda)$ .

Por otro lado, los datos numéricos asociados al último divisor, el divisor de ruptura  $E_{v_1}$  son:

$$\begin{aligned}
r_{v_1} &= pq & \text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* x &= p \\
b_{v_1} &= p + q - 1 & \text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* y &= q
\end{aligned}$$

Pero observemos que en este caso  $x^r y^s$  no pasa la cota  $C(E_{v_1}, \lambda)$ :

$$\begin{aligned}
\text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* x^r y^s &= pr + qs && \not\geq \lfloor \frac{p(r+1)+q(s+1)}{pq} \cdot pq \rfloor - p - q + 1 \\
\Leftrightarrow pr + qs &\not\geq p(r+1) + q(s+1) - p - q + 1 \\
\Leftrightarrow pr + qs &\not\geq pr + qs + 1
\end{aligned}$$

Observemos que si consideramos  $\lambda - \epsilon = \frac{p(r+1)+q(s+1)}{pq} - \epsilon$  con  $0 < \epsilon \ll 1$ , tenemos

$$\text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* x^r y^s = \lfloor (\lambda - \epsilon) \cdot pq \rfloor - p - q + 1 = pr + qs$$

y como la condición en los otros divisores quedaba abierta, se tiene  $x^r y^s \in \mathcal{J}((\lambda - \epsilon) \cdot C)$  y por lo tanto

$$[x^r y^s] \in \mathcal{K}_\lambda(C)^*.$$

Finalmente, es consecuencia de todo el análisis anterior que para cada  $\lambda \in \mathcal{JN}(C)$  tenemos que el correspondiente ideal  $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$  es monomial. Además si  $\lambda, \lambda' \in \mathcal{JN}(C)$  son distintos y



consecutivos entonces la función  $x^r y^s$  que falla la cota  $C(E_{v_1}, \lambda')$  es un generador del ideal  $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$ . Se deduce por tanto que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_\lambda(C) = 1$  y que  $\langle [x^r y^s] \rangle = \mathcal{K}_\lambda(C)$ .

Alternativamente se puede razonar del siguiente modo: como  $\mathcal{JN}(C)$  tiene exactamente  $\frac{\mu(C)}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$  elementos distintos, la ecuación (6) nos dice que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_\lambda(C) = 1$  para todo  $\lambda \in \mathcal{JN}(C)$ , y por lo tanto  $\langle [x^r y^s] \rangle = \mathcal{K}_\lambda(C)$ . □

**EJEMPLO 9.** Sea  $C$  la curva plana irreducible definida por  $\{f = y^3 - x^{14} = 0\} \subseteq X = \text{Spec } \mathcal{O}$ , donde  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$  es el anillo local de  $\mathbb{C}^2$  en el origen. Una resolución logarítmica de  $C$  se obtiene por una sucesión de explosiones en puntos cerrados:

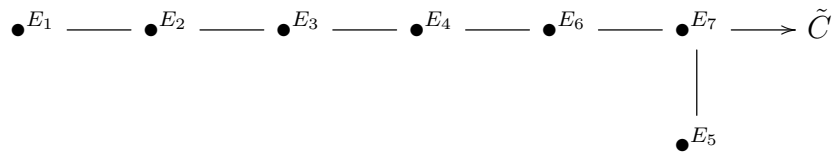
$$\pi : X' = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X$$

Con  $\theta_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  y la composición de las primeras  $i$  explosiones  $\pi_i : X_i \rightarrow X$ .

Aplicando el algoritmo de Euclides a 3 y 14:

$$\begin{aligned} 14 &= 4 \times \underline{3} + 2 \\ 3 &= 1 \times \underline{2} + 1 \\ 2 &= 2 \times \underline{1} \end{aligned}$$

obtenemos que la resolución minimal está dada por una sucesión de 7 explosiones en puntos cerrados con sucesión de multiplicidades:  $(a_1, \dots, a_7) = (3, 3, 3, 3, 2, 1, 1)$  donde  $a_i = \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1}^{-1,*} C)$  y  $p_i$  es el centro de la explosión  $\theta_i$ . Como se mencionó en el Capítulo 2 se puede calcular el número de Milnor mediante la fórmula (15)  $\mu = \sum a_i(a_i - 1)$ , de donde  $\mu = 4 \times 3 \times 2 + 2 = 26$ . También observamos que el grafo dual de la resolución es:



Con  $\tilde{C}$  la transformada estricta de  $C$ .

Denotando  $\pi^* C = \sum r_i E_i$  y  $K_\pi = \sum b_i E_i$ , se tienen las siguientes multiplicidades:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
$r_i$	3	6	9	12	14	27	42
$b_i$	1	2	3	4	5	10	16

Recordemos que dada una resolución log  $\pi : X' \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  de  $C$  y  $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ ,

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot C) = \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_\pi - \lfloor \lambda \pi^* C \rfloor) \subseteq \mathcal{O}.$$

De donde tenemos

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot C) = \pi_* \mathcal{O}_{X'} \left( \sum b_i E_i - \lfloor \lambda \sum r_i E_i \rfloor \right) = \pi_* \mathcal{O}_{X'} \left( \sum (b_i - \lfloor \lambda r_i \rfloor) E_i \right)$$

así que

$$h \in \mathcal{J}(\lambda \cdot C) \quad \text{si} \quad \text{ord}_{E_i} \pi^* h \geq \lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i, \quad \text{para todo } i.$$

Como observamos arriba, el número de Milnor de la curva es  $\mu = 26$  y en razón de (6), se tiene que hay 13 números de salto menores a 1. Ahora, por la Proposición anterior tenemos que los números de salto son de la forma:

$$\left\{ \lambda = \frac{3(r+1) + 14(s+1)}{42} < 1 \mid r, s \geq 0 \right\}$$

y si consideramos  $\mathcal{K}_\lambda(C) = \frac{\mathcal{J}((\lambda-\epsilon) \cdot C)}{\mathcal{J}(\lambda \cdot C)}$  como  $\mathbf{C}$ -espacio vectorial tenemos que:

Número de salto $\lambda$	$\frac{17}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{23}{42}$	$\frac{26}{42}$	$\frac{29}{42}$	$\frac{31}{42}$	$\frac{32}{42}$	$\frac{34}{42}$	$\frac{35}{42}$	$\frac{37}{42}$	$\frac{38}{42}$	$\frac{40}{42}$	$\frac{41}{42}$
Base de $\mathcal{K}_\lambda(C)$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$y$	$x^5$	$xy$	$x^6$	$x^2y$	$x^7$	$x^3y$	$x^8$

Observemos que efectivamente las funciones fallan en la cota asociada al divisor  $E_7$ :

Jumping Number	Cota $\lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i$							$\text{ord}_{E_i} \pi^* h$							Función que falla
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	
$\lambda$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$h$
$\frac{17}{42}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$\frac{20}{42}$	0	0	1	1	1	2	4	1	1	1	1	1	2	3	$x$
$\frac{23}{42}$	0	1	1	2	2	4	7	2	2	2	2	2	4	6	$x^2$
$\frac{26}{42}$	0	1	2	3	3	6	10	3	3	3	3	3	6	9	$x^3$
$\frac{29}{42}$	1	2	3	4	4	8	13	4	4	4	4	4	8	12	$x^4$
$\frac{31}{42}$	1	2	3	4	5	9	15	1	2	3	4	5	9	14	$y$
$\frac{32}{42}$	1	2	3	5	5	10	16	5	5	5	5	5	10	15	$x^5$
$\frac{34}{42}$	1	2	4	5	6	11	18	2	3	4	5	6	11	17	$xy$
$\frac{35}{42}$	1	3	4	6	6	12	19	6	6	6	6	6	12	18	$x^6$
$\frac{37}{42}$	1	3	4	6	7	13	21	3	4	5	6	7	13	20	$x^2y$
$\frac{38}{42}$	1	3	5	6	7	14	22	7	7	7	7	7	14	21	$x^7$
$\frac{40}{42}$	1	3	5	7	8	15	24	4	5	6	7	8	15	23	$x^3y$
$\frac{41}{42}$	1	3	5	7	8	16	25	8	8	8	8	8	16	24	$x^8$

Con esto obtenemos los 13 números de salto  $< 1$ , junto con sus ideales de multiplicadores que nos dan la filtración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{C_2} \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{17}{42} \cdot C\right) = (x, y) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{20}{42} \cdot C\right) = (x^2, y) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{23}{42} \cdot C\right) = (x^3, y) \\
\supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{26}{42} \cdot C\right) = (x^4, y) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{29}{42} \cdot C\right) = (x^5, y) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{31}{42} \cdot C\right) = (x^5, xy, y^2) \\
\supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{32}{42} \cdot C\right) = (x^6, xy, y^2) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{34}{42} \cdot C\right) = (x^6, x^2y, y^2) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{35}{42} \cdot C\right) = (x^7, x^2y, y^2) \\
\supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{37}{42} \cdot C\right) = (x^7, x^3y, y^2) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{38}{42} \cdot C\right) = (x^8, x^3y, y^2) & \supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{40}{42} \cdot C\right) = (x^8, x^4y, y^2) \\
\supsetneq \mathcal{J}\left(\frac{41}{42} \cdot C\right) = (x^9, x^4y, y^2) & \supsetneq \dots
\end{aligned}$$

## 2. Caso con dos exponentes de Puiseux

En esta sección estudiaremos el caso de dos pares de Newton con la intención mostrar el papel de las raíces aproximadas en el caso general. Comencemos con la siguiente

DEFINICIÓN 3.1. Sean  $p_1, p_2, \alpha_1 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , con  $p_1$  y  $\alpha_1$  primos entre si, definimos los conjuntos

$$J(p_1, \alpha_1) := \left\{ \frac{(r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1}{p_1\alpha_1} \mid r, s \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\} \cap (0, 1)$$

y

$$J(p_1, \alpha_1, l) := \left\{ \frac{(r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1}{p_1\alpha_1 p_2} + \frac{l}{p_2} \mid r, s \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\} \cap (0, 1),$$

con  $l \in \{0, \dots, p_2 - 1\}$

Ahora demostremos un lema que nos relaciona los ideales de multiplicadores de  $C_1$  con algunos ideales de multiplicadores de  $C_2$ .

LEMA 3.1. Sea  $C_2$  un germen irreducible con dos pares de Newton y  $C_1$  su primera raíz aproximada. Si  $\lambda$  es un número de salto de  $C_1$ , entonces  $\lambda_l := \frac{1}{p_2}(\lambda + l) \in J(p_1, \alpha_1, l)$  es un número de salto de la curva  $C_2$ , para cualquier  $l \in \{0, 1, \dots, p_2 - 1\}$ , es decir;

$$\bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l) \subseteq \mathcal{JN}(C_2).$$

Más aún, si  $\lambda = \frac{(r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1}{p_1\alpha_1}$ , entonces

$$[x^r y^s f_1^l] \in \mathcal{K}_{\lambda_l}(C_2)^*.$$

PRUEBA. Sea  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) una ecuación de  $C_1$  (resp. de  $C_2$ ). La resolución minimal de  $C_1$  consiste en un único paquete de Newton que denotaremos por  $\eta_1$ , siguiendo la Definición 2.2. La resolución minimal  $\pi$  de  $C_2$  consiste en dos paquetes de Newton; es decir,  $\pi = \eta_2 \circ \eta_1$ . En otras palabras, el primer paquete de Newton, o equivalentemente, la composición de las primeras  $v_1$  explosiones de la resolución minimal  $\pi$  de  $C_2$  y la resolución minimal  $\eta_1$  de  $C_1$  son comunes.

Por tanto, la resolución minimal de  $C_2$  es también una resolución logarítmica de  $C_1$  (no minimal) y el grafo dual de la resolución minimal de  $C_1$  coincide con el primer paquete de Newton de  $C_2$ , i.e., hasta el primer divisor de ruptura (ver [Pop]):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet^{E_1} & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet^{E_{v_1}} & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet^{E_{v_2}} & \longrightarrow & \tilde{C}_2 \\
 & & & & | & & & & | & & \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & & & | & & & & | & & \\
 & & & & \bullet & & & & \bullet & \longrightarrow & \tilde{C}_1
 \end{array}$$

Las primeras  $v_1$  entradas de la sucesión de multiplicidades de  $C_2$  y de  $C_1$  están relacionadas del siguiente modo:

$$p_2 \cdot \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1}^{-1,*} C_1) = \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1}^{-1,*} C_2) \quad \text{para } i = 1, \dots, v_1$$

En consecuencia, se tiene que si  $r_i(f_1) := \text{ord}_{E_i} \pi^*(f_1)$  y  $r_i(f) := \text{ord}_{E_i} \pi^*(f)$ , entonces

$$p_2 \cdot r_i(f_1) = r_i(f_2) \quad \text{con } i = 1, \dots, v_1.$$

Por otra parte, los números  $b_i$  coinciden en los divisores excepcionales comunes a la resoluciones minimales de  $C_2$  y de  $C_1$ . Así, las cotas

$$C(\eta_1, E_i, \lambda) = \lfloor \lambda \cdot r_i(f_1) \rfloor - b_i = \lfloor \frac{1}{p_2} \lambda \cdot r_i(f_2) \rfloor - b_i = C\left(\pi, E_i, \frac{\lambda}{p_2}\right)$$

asociadas a los divisores excepcionales  $E_i$ , con  $i = 1, \dots, v_1$ , coinciden. Igualmente, coinciden los órdenes  $\text{ord}_{E_i} \pi^* h$ , para cualquier  $h \in \mathcal{O}$ , y, en consecuencia, las funciones que satisfacen (o no satisfacen) las desigualdades asociadas a los divisores excepcionales  $E_i$ , con  $i = 1, \dots, v_1$ .

En particular,  $f_1$  cumple que  $\text{ord}_{E_i} \eta_1^* f_1 = r_i(f_1)$  para los divisores excepcionales del primer paquete de Newton, es decir, para  $i = 1, \dots, v_1$ . Y, por tanto,  $f_1$  pasa las cotas  $C(\eta_1, E_i, \lambda)$ . Además por la periodicidad (Obs. 1.1) tenemos las siguientes equivalencias: Para todo  $\lambda < 1$  y todo  $h \in \mathcal{O}$ ,

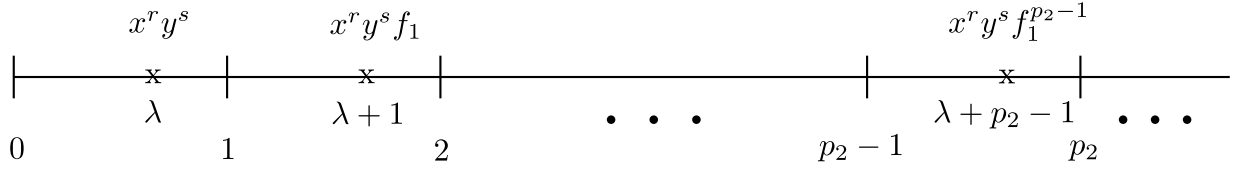
$$h \text{ pasa la cota } C(\eta_1, E_i, \lambda); \text{ es decir, } \text{ord}_{E_i} \pi^* h \geq \lfloor \lambda r_i(f_1) \rfloor - b_i,$$

si y solo si

$$h f_1^l \text{ pasa la cota } C(\eta_1, E_i, \lambda + l); \text{ es decir, } \text{ord}_{E_i} \pi^*(h f_1^l) \geq \lfloor (\lambda + l) r_i(f_1) \rfloor - b_i,$$

Estas dos condiciones son, por lo discutido más arriba, a su vez equivalentes a

$$h f_1^l \text{ pasa la cota } C(\pi, E_i, \frac{1}{p_2}(\lambda + l)); \text{ es decir, } \text{ord}_{E_i} \pi^*(h f_1^l) \geq \lfloor (\lambda + l) r_i(f_2) \rfloor - b_i.$$



Para mostrar que  $\bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l) \subseteq \mathcal{JN}(C_2)$  bastará estudiar las condiciones impuestas por el segundo paquete de Newton, i.e., las condiciones impuestas por los divisores  $E_j$  con  $v_1 + 1 \leq j \leq v_2$ .

La Proposición 3.1 implica que si  $\lambda < 1$  es un número de salto de  $C_1$ , entonces  $\lambda = \frac{(r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1}{p_1\alpha_1}$  y que en ese caso  $\mathcal{K}_\lambda(C_1)$  está generado por el monomio  $x^r y^s$ . Queremos comprobar que  $x^r y^s f_1^l$  pasa las cotas  $C(\pi, E_j, \lambda_l)$ :

$$\text{ord}_{E_j} \pi^*(x^r y^s f_1^l) \geq \lfloor \lambda_l \cdot r_j(f_2) \rfloor - b_j,$$

para  $0 \leq l \leq p_2 - 1$ .

Supongamos que  $j = v_1 + k$ , con  $0 < k \leq v_2 - v_1$ . Consideremos la  $k$ -truncación del algoritmo inverso de  $p_2$  y  $q_2$  y sean  $a_0(k)$  y  $a_1(k)$  los números asociados. Podemos escribir

$$r_j(f_2) = a_1(k)r_{v_1}(f_2) + (r_j(f_2) - a_1(k)r_{v_1}(f_2))$$

y, análogamente

$$b_j + 1 = a_1(k)(b_{v_1} + 1) + ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_1} + 1)).$$

En primer lugar, observamos que  $\lambda_0 a_1(k)r_{v_1}(f_2)$  es entero, ya que  $r_{v_1}(f_2) = p_2 r_{v_1}(f_1) = p_2 \alpha_1 p_1$ , e igual a

$$((r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1)a_1(k) = \text{ord}_{E_j} \pi^*(x^r y^s) + a_1(k)(p_1 + \alpha_1) = \text{ord}_{E_j} \pi^*(x^r y^s) + a_1(k)(b_{v_1} + 1),$$

puesto que  $\text{ord}_{E_j} \pi^* x = a_1(k)p_1$ ,  $\text{ord}_{E_j} \pi^* y = a_1(k)\alpha_1$  y  $b_{v_1} + 1 = p_1 + \alpha_1$ .

Por lo tanto, descomponiendo  $\lambda_l$  como  $\lambda_0 + \frac{l}{p_2}$  y cancelando  $a_1(k)(b_{v_1} + 1)$ , tenemos que  $\lfloor \lambda_l \cdot r_j(f_2) \rfloor - b_j$  es igual a

$$\text{ord}_{E_j} \pi^*(x^r y^s) + \lfloor \frac{l}{p_2} r_j(f_2) + \lambda_0 \cdot (r_j(f_2) - a_1(k)r_{v_1}(f_2)) \rfloor - ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_1} + 1)) + 1.$$

En segundo lugar, a continuación acotaremos  $\frac{l}{p_2} r_j(f_2)$  por  $\text{ord}_{E_j} \pi^* f_1^l$ . Para ello usaremos la igualdad (22), que nos dice que

$$r_j(f_2) - a_1(k)r_{v_1}(f_2) = \begin{cases} p_2 a_0(k) & \text{si } k \text{ corresponde a línea impar,} \\ q_2 a_1(k) & \text{si } k \text{ corresponde a línea par,} \end{cases}$$

y el hecho de que  $q_2 a_1(k) < p_2 a_0(k)$ . Por tanto, usando que  $r_{v_1}(f_2) = p_2 r_{v_1}(f_1)$ , tenemos

$$r_j(f_2) \leq a_1(k)r_{v_1}(f_2) + p_2 a_0(k) = p_2 (a_1(k)r_{v_1}(f_1) + a_0(k)) = p_2 \text{ord}_{E_j} \pi^*(f_1).$$

En consecuencia,  $\lfloor \lambda_l \cdot r_j(f_2) \rfloor - b_j$  es menor o igual que

$$\text{ord}_{E_j} \pi^*(x^r y^s f_1^l) + \lfloor \lambda_0 \cdot (r_j - a_1(k)r_{v_1}(f_2)) \rfloor - ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_1} + 1)) + 1.$$

Finalmente, usaremos la igualdad (23), que afirma que

$$b_j + 1 - a_1(k)b_{v_1} = a_0(k) + a_1(k),$$

de donde

$$b_j + 1 - a_1(k)(b_{v_1} + 1) = a_0(k)$$

para comprobar que

$$\lfloor \lambda_0 \cdot (r_j - a_1(k)r_{v_1}(f_2)) \rfloor - ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_1} + 1)) + 1 \leq 0.$$

En efecto, usando de nuevo (22), tenemos

$$\lfloor \lambda_0 \cdot (r_j - a_1(k)r_{v_1}(f_2)) \rfloor - ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_1} + 1)) + 1 \leq \lfloor \lambda_0 \cdot p_2 a_0(k) \rfloor - a_0(k) + 1,$$

ya que  $q_2 a_1(k) < p_2 a_0(k)$ . Además

$$\lfloor \lambda_0 \cdot p_2 a_0(k) \rfloor - a_0(k) + 1 \leq 0,$$

ya que  $\lambda_0 \cdot p_2 = \lambda < 1$ .

Así que

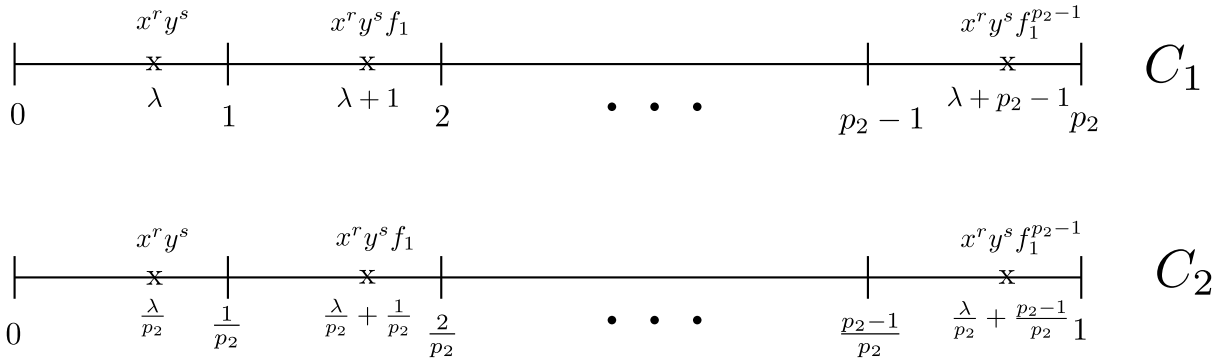
$$\text{ord}_{E_j} \pi^*(x^r y^s f_1^l) \geq \lfloor \lambda_l \cdot r_j(f_2) \rfloor - b_j$$

y por lo tanto  $x^r y^s f_1^l$  pasa las cotas  $C(\pi, E_j, \lambda_l)$  para  $j > v_1$  pero no  $C(\pi, E_{v_1}, \lambda_l)$  y por lo tanto

$$[x^r y^s f_1^l] \in \mathcal{K}_{\lambda_l}(C_2)^*.$$

□

Gráficamente tenemos la siguiente imagen:



OBSERVACIÓN 3.1. La prueba anterior nos dice que  $\mathcal{J}(\frac{1}{p_2}\lambda \cdot C_2) = \mathcal{J}(\lambda \cdot C_1)$ , para  $\lambda \in (0, 1)$ .

PRUEBA. Claramente  $\mathcal{J}(\frac{1}{p_2}\lambda \cdot C_2) \subseteq \mathcal{J}(\lambda \cdot C_1)$ . Ahora, suponemos que existe  $h \in \mathcal{J}(\lambda C_1) - \mathcal{J}(\frac{1}{p_2}\lambda C_2)$ , e implica que  $h$  no pasa la cota  $C(\pi, E_j, \frac{1}{p_2}\lambda)$  para algún  $j > v_1$ ; es decir, que

$$\text{ord}_{E_j} \pi^* h < \lfloor \frac{1}{p_2} \lambda \cdot r_j(f_2) \rfloor - b_j.$$

Como  $\mathcal{J}(\lambda C_1)$  es monomial,  $h$  se puede expresar como una suma finita  $\sum h_i \cdot m_i$ , donde  $m_i$  es un monomio en  $\mathcal{J}(\lambda C_1)$ . Pero eso contradice el Lema anterior ya que

$$\text{ord}_{E_j} \pi^* h \geq \text{ord}_{E_j} \pi^* m_i \geq \lfloor \frac{1}{p_2} \lambda \cdot r_j(f_2) \rfloor - b_j.$$

Concluimos que  $\mathcal{J}(\frac{1}{p_2}\lambda \cdot C_2) = \mathcal{J}(\lambda \cdot C_1)$ . □

Con lo anterior hemos encontrado  $p_2 \cdot \frac{\mu(C_1)}{2}$  números de salto de  $C_2$ , sin embargo faltan más (recordemos (6) y Prop. 2.2). Para encontrar los restantes relacionaremos los números de salto de  $C_{aux}^1$ , definida en 2.1, con números de salto de  $C_2$ . Lo práctico de hacer esto es que la curva  $C_{aux}^1$  cuenta con un sólo par de Newton  $(p_2, \alpha_2)$  y en razón de la Proposición 3.1 es muy fácil calcular sus ideales de multiplicadores.

Para esto usaremos el proceso de Newton y la transformación auxiliar (13), la cual nos da unas relaciones entre algunas multiplicidades de la resolución minimal de  $C_2$  y multiplicidades de resoluciones log de sus transformadas bajo estas transformaciones, i.e.,  $NP_1^* C_2$  y  $C_{aux}^1$ .

Denotamos por  $\mathbf{C}_{x,y}^2$  al plano afín con coordenadas  $(x, y)$  y consideramos el siguiente diagrama

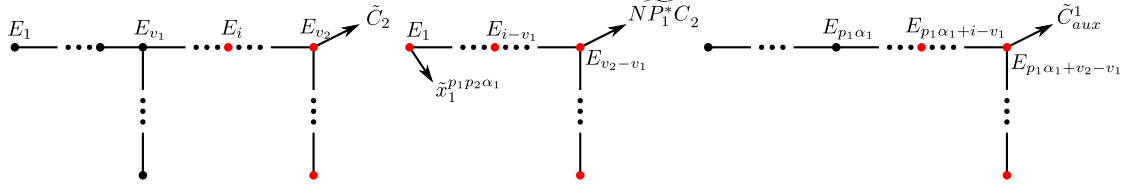
$$(26) \quad \begin{array}{ccccc} \tilde{C}_2 & & \widetilde{NP_1^* C_2} = \widetilde{S_1^* C_{aux}^1} & & \tilde{C}_{aux}^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ C_2 \subseteq \mathbf{C}_{x,y}^2 & \xleftarrow{NP_1} & NP_1^* C_2 = S_1^* C_{aux}^1 \subseteq \mathbf{C}_{x_1,y_1}^2 & \xrightarrow{S_1} & C_{aux}^1 \subseteq \mathbf{C}_{u,v}^2 \end{array}$$

donde  $\pi$ ,  $\phi$  y  $\psi$  son resoluciones log de  $C_2$ , de  $NP_1^* C_2$  y de  $C_{aux}^1$ , respectivamente, donde  $NP_1$  es el primer proceso de Newton, definido en (11), y  $S_1$  es la transformación birracional, dada por

$$S_1 = \begin{cases} u & = & x_1 \\ v & = & x_1^{p_1 \alpha_1} y_1. \end{cases}$$

Por definición tenemos  $(S_1^{-1} \circ NP_1)^* C_2 = C_{aux}^1$ , la cual es una curva con un único par de Newton  $(p_2, \alpha_2)$ , descrita en Definición 2.1.

LEMA 3.2. *Los grafos duales de las resoluciones log anteriores  $\pi$ ,  $\phi$  y  $\psi$  de la Figura 26 son:*



Además hay las siguientes biyecciones entre subconjuntos de los correspondientes divisores excepcionales:

$$\begin{aligned} B(\pi, \phi) : E_i &\longleftrightarrow E_{i-v_1} \\ B(\phi, \psi) : E_{i-v_1} &\longleftrightarrow E_{p_1\alpha_1+i-v_1} \end{aligned} ,$$

para  $v_1 + 1 \leq i \leq v_2$ , tales que  $r_i(\pi) = r_{i-v_1}(\phi) = r_{p_1\alpha_1+i-v_1}(\psi)$ .

PRUEBA. Primero consideremos  $\pi$  como la composición  $\eta_2 \circ \pi_{v_1}$ , donde  $\eta_2$  son las explosiones que corresponden al segundo paquete de Newton (2.2) de la resolución de  $C_2$  y  $\pi_{v_1}$  es la composición de las explosiones del primer paquete de Newton de la resolución de  $C_2$ ; es decir, de las primeras  $v_1$  explosiones. Se tiene el siguiente diagrama

$$(27) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{C}_2 & & \widetilde{NP_1^*C_2} \\ \downarrow \pi & \searrow \eta_2 & \downarrow \phi \\ & \pi_{v_1}^* C_2 & NP_1^* C_2 \\ & \swarrow \pi_{v_1} & \nearrow NP_1 \\ C_2 & & \end{array}$$

Por el Lema 2.1  $(\pi_{v_1}^* C, p_{v_1+1})$  es equisingular a  $(NP_1^* C, 0)$ , de donde se obtiene la primera biyección  $B(\pi, \phi) : E_i \longleftrightarrow E_{i-v_1}$ , con  $v_1 + 1 \leq i \leq v_2$  y además se obtiene las igualdades  $r_i(\pi) = r_{i-v_1}(\phi)$ .

Ahora, considerando  $(S_1^{-1} \circ NP_1)^* C_2 = C_{aux}^1$  y, en vista de la parametrización de  $C_{aux}^1$  dada en (14), tenemos que localmente  $C_{aux}^1$  tiene una ecuación del tipo

$$v^{p_2} - b_1 u^{\alpha_2} + \sum b_{i,j} u^i v^j.$$

Así, usando que  $\alpha_2 = p_1 p_2 \alpha_1 + q_2$  podemos explotar  $p_1 \alpha_1$ -veces para obtener que una ecuación de definición de la transformada total de esta curva es

$$U^{p_1 p_2 \alpha_1} [(V^{p_2} - b_1 U^{q_2}) + \sum c_{k,l} U^k V^l],$$

lo que nos da la segunda biyección  $B(\phi, \psi) : E_{i-v_1} \longleftrightarrow E_{p_1\alpha_1+i-v_1}$  y, además, las igualdades

$$r_{i-v_1}(\phi) = r_{p_1\alpha_1+i-v_1}(\psi).$$



□

LEMA 3.3. Sea  $M \in \mathbf{C}[x, y]$ , entonces para  $i > v_1$

$$\text{ord}_{E_i} \pi^* M = \text{ord}_{E_{i-v_1}} \phi^*(NP_1^* M)$$

y

$$\begin{aligned} b_i &= \text{ord}_{E_i} \pi^* dx \wedge dy = \text{ord}_{E_{i-v_1}} \phi^* NP_1^* dx \wedge dy \\ &= \text{ord}_{E_{i-v_1}} \phi^* \text{Jac} NP_1 + \text{ord}_{E_{i-v_1}} \phi^* dx_1 \wedge dy_1 \end{aligned}$$

PRUEBA.

Ambas afirmaciones se deducen de las expresiones en coordenadas de  $\pi_{v_1}$  y de  $NM_1$ :

$$\pi_{v_1} = \begin{cases} x &= x_{v_1}^{p_1} y_{v_1}^a \\ y &= x_{v_1}^{q_1} y_{v_1}^c, \end{cases} \quad NM_1 = \begin{cases} x &= x_1^{p_1} \\ y &= x_1^{q_1} (a_{\beta_1} + y_1), \end{cases}$$

con  $p_1 c - a q_1 = 1$ .

Para probar la primera afirmación, basta comprobarla para  $M$  un monomio en las coordenadas  $x$  e  $y$ , para  $M = f_1$  y para  $M = f_2$  (ver [**Pop**, Corollary 5.4]). El último caso se vio en el Lema anterior mediante la biyección  $B(\pi, \phi)$ . En los casos restantes bastará comparar  $\pi_{v_1}^* M$  y  $NM_1^* M$  y usar que, según el Lema 2.1, los gérmenes  $(NP_1^* C, 0)$  y  $(\pi_{v_1}^* C, p_{v_1+1})$  son equisingulares.

En efecto, tenemos que  $\pi_{v_1}^* x^r y^s = x_{v_1}^{r p_1 + s q_1}$  módulo una unidad en el punto  $p_{v_1}$ , pues tiene coordenada  $y_{v_1}$  no nula, y que  $NP_1^* x^r y^s = x_1^{r p_1 + s q_1} (a_{\beta_1} + y_1)^s$ . Además tenemos que  $\pi_{v_1}^* f_1 = y_{v_1}$  y que  $NP_1^* f_1 = y_1$  módulo una unidad.

A partir de las expresiones de  $\pi_{v_1}$  y de  $NM_1$ , tenemos que

$$\pi_{v_1}^* dx \wedge dy = (p_1 c - a q_1) x_{v_1}^{p_1 + q_1 - 1} y_{v_1}^{a + c - 1} dx_{v_1} \wedge dy_{v_1}$$

y como  $E_{v_1}$  está dado por  $x_{v_1} = 0$  tenemos que  $b_{v_1}(\pi) = p_1 + q_1 - 1$ . Por otra parte,  $NM_1^* dx \wedge dy = p_1 x_1^{p_1 + q_1 - 1} dx_1 \wedge dy_1$ . Recordando que  $NP_1 = T_2 \circ N_1 \circ T_1$  donde  $T_1$  y  $T_2$  son isomorfismos, tenemos, por tanto, que

$$b_{v_1}(\pi) = \text{ord}_{E_{v_1}} NP_1^* dx \wedge dy = \text{ord}_{E_{v_1}} \text{Jac} NP_1.$$

Las igualdades

$$b_i(\pi) = \text{ord}_{E_{i-v_1}} \phi^* \text{Jac} NP_1 + \text{ord}_{E_{i-v_1}} \phi^* dx_1 \wedge dy_1$$

se siguen del hecho de que  $(\pi_{v_1}^* C_2, p_{v_1+1})$  y  $(NP_1^* C_2, 0)$  son equisingulares y del hecho que  $p_{v_1+1}$  tiene coordenada  $y_{v_1}$  no nula.

□

El siguiente Corolario es consecuencia directa de los dos Lemas anteriores.

COROLARIO 3.1. Sea  $M \in \mathbf{C}[x, y]$ . Entonces, para  $i > v_1$ ,  $M$  pasa la cota  $C(\pi, E_i, \lambda)$  si y sólo si  $\text{Jac}NP_1 \cdot NP_1^*M$  pasa la cota  $C(\phi, E_{i-v_1}, \lambda)$ .

Equivalentemente,  $\text{ord}_{E_i}\pi^*M \geq \lfloor \lambda r_i(\pi) \rfloor - b_i(\pi)$  si y sólo si

$$\text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*(\text{Jac}NP_1 \cdot NP_1^*M) \geq \lfloor \lambda r_{i-v_1}(\phi) \rfloor - b_{i-v_1}(\phi).$$

PRUEBA. La desigualdad  $\text{ord}_{E_i}\pi^*M \geq \lfloor \lambda r_i(\pi) \rfloor - b_i(\pi)$  es equivalente por el Lema 3.2, a la desigualdad  $\text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*M \geq \lfloor \lambda r_{i-v_1}(\phi) \rfloor - b_i(\pi)$  y, por el Lema 3.3, a la desigualdad

$$\text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*NP_1^*M \geq \lfloor \lambda r_i(\phi) \rfloor - \text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*\text{Jac}NP_1 - b_{i-v_1}(\phi).$$

□

El Lema y Corolario siguientes son consecuencia directa del hecho de que  $S_1$  es birracional y la Proposición 1.2.

LEMA 3.4. Sea  $m \in \mathbf{C}[u, v]$  un monomio. Entonces,  $\text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*S_1^*m = \text{ord}_{E_{p_1q_1+i-v_1}}\psi^*m$  y

$$b_{p_1q_1+i-v_1}(\psi) = \text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*S_1^*du \wedge dv = \text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*\text{Jac}S_1 + \text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*dx_1 \wedge dy_1.$$

COROLARIO 3.2. Sea  $m \in \mathbf{C}[u, v]$  un monomio. Entonces,  $m$  pasa la cota  $C(\psi, \lambda, E_{p_1q_1+i-v_1})$  si y sólo si  $S_1^*m \cdot \text{Jac}S_1$  pasa la cota  $C(\phi, \lambda, E_{i-v_1})$ .

OBSERVACIÓN 3.2. En general,  $\text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*NP_1^*dx \wedge dy \neq \text{ord}_{E_{i-v_1}}\phi^*S^*du \wedge dv$ .

Ahora consideraremos los pesos  $w(x) = p_1$  y  $w(y) = \alpha_1$  en  $\mathbf{C}[x, y]$ .

LEMA 3.5. Consideremos los monomios  $x^r y^s$ , con peso  $w(x^r y^s) = p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a$  y  $a > 0$ , y  $m = u^{a-1}$ . Entonces,

$$NP_1^*(x^r y^s) \cdot \text{Jac}NP_1 = S_1^*m \cdot \text{Jac}S_1,$$

módulo una unidad.

PRUEBA. Por un lado, de la definición de los pesos se tiene  $w(x^r y^s) = p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a = rp_1 + s\alpha_1$ , por lo que

$$(28) \quad (r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1 = p_1\alpha_1 + a.$$

Por otro lado,  $\text{Jac}NP_1 = p_1x_1^{p_1+\alpha_1-1}$  y  $\text{Jac}S_1 = x_1^{p_1\alpha_1}$ , así

$$\begin{aligned} NP_1^*(x^r y^s) \cdot \text{Jac}NP_1 &= x_1^{rp_1+s\alpha_1}(a_{\beta_1} + y_1)^s p_1 x_1^{p_1+\alpha_1-1} \\ &= p_1 x_1^{(r+1)p_1+(s+1)\alpha_1-1} (a_{\beta_1} + y_1)^s \end{aligned}$$

y

$$S_1^*m \cdot \text{Jac}S_1 = x_1^{p_1\alpha_1+a-1}$$

y usando (28) se tiene la afirmación. □

PROPOSICIÓN 3.2. Sea  $C_1 = \{f_1 = 0\}$  la primera raíz aproximada de  $C_2$ , entonces

$$NP_1^* f_1^t = (x_1^{p_1 \alpha_1} y_1)^t = S_1^* v^t.$$

Además, si  $w(x^r y^s) = p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a$  tenemos que, para  $i > v_1$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.

$$x^r y^s f_1^t \text{ pasa } C(\pi, E_i, \lambda)$$

si y solo si

$$NP_1^*(x^r y^s f_1^t) \cdot \text{Jac} NP_1 \text{ pasa } C(\phi, E_{i-v_1}, \lambda)$$

si y sólo si

$$S_1^*(u^{a-1} v^t) \cdot \text{Jac} S_1 \text{ pasa } C(\phi, E_{i-v_1}, \lambda)$$

si y sólo si

$$u^{a-1} v^t \text{ pasa } C(\psi, E_{p_1 q_1 + i - v_1}, \lambda)$$

PRUEBA. La primera afirmación es consecuencia directa de la definición de la transformación birracional  $S_1$  (y recordar Observaciones 2.4 y 2.7). La primera equivalencia es el Corolario 3.1, la segunda equivalencia se sigue del Lema 3.4 y de la primera afirmación de esta Proposición, y la tercera equivalencia se sigue del Corolario 3.2. □

Ahora podemos describir los ideales de multiplicadores de la raíz aproximada  $C_2$ , que tiene dos pares de Newton  $(p_1, q_1)$  y  $(p_2, q_2)$ . Recordamos la notación introducida en (12)

$$\alpha_1 = q_1 \quad \text{y} \quad \alpha_{i+1} = p_{i+1} p_i \alpha_i + q_{i+1},$$

y los conjuntos  $J(p_1, \alpha_1, l)$  y  $J(p_2, \alpha_2)$  introducidos en la Definición 3.1.

Consideraremos los siguientes sistemas de condiciones lineales con coeficientes enteros ( $> 0$ ).

- El sistema  $S[1](\lambda)$  consiste en una única ecuación lineal

$$\lambda \alpha_1 e_0 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \alpha_1 p_1 l$$

en las incógnitas  $a_1, a_2, l$  sujetas a las restricciones

$$p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 < \alpha_1 p_1, \quad a_1, a_2 \geq 1, \quad 0 \leq l \leq p_2 - 1.$$

- El sistema  $S[2](\lambda)$  consiste en 2 ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda \alpha_2 e_1 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2. \end{cases}$$

en las incógnitas  $a_1, a_2, a_3, l_1$  sujetas a las restricciones

$$p_2 a_3 + \alpha_2 l_1 < \alpha_2 e_1 = \alpha_2 p_2, \quad a_1, a_2, a_3, l_1, \geq 1, \quad a_2 < p_1.$$

OBSERVACIÓN 3.3.

(a). El sistema  $S[1](\lambda)$  es equivalente a

$$\lambda r_{v_1} = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \text{ord}_{E_{v_1}}(\pi^* f_1) \cdot l$$

y el sistema tiene solución entera  $(a_1, a_2, l)$  (en cuyo caso es única) si y sólo si

$$\lambda \in J(p_1, \alpha_1, l).$$

(b). La primera ecuación del sistema  $S[2](\lambda)$  es equivalente a

$$\lambda r_{v_2} = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1,$$

y dada una solución de ésta  $(a_3, l_1)$ , se tiene que la segunda ecuación tiene solución ya que  $p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + 1$  es el conductor del semigrupo  $\langle p_1, \alpha_1 \rangle$  (en cuyo caso, es única con la condición que  $a_2 < p_1$ ).

Así  $S[2](\lambda)$  tiene solución única  $(a_1, a_2, a_3, l_1)$  si y sólo si

$$\lambda = \frac{p_2 a_3 + \alpha_2 l_1}{p_2 \alpha_2} \in J(p_2, \alpha_2), \quad a_2 < p_1.$$

PROPOSICIÓN 3.3. Sea  $C_2$  una rama con dos pares de Newton  $\{(p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$  y sea  $C_1$  su primera raíz aproximada. Entonces,

(a). Los números de salto de  $C_2$  menores que uno son los elementos del conjunto

$$\mathcal{JN}(C_2) = \bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l) \cup J(p_2, \alpha_2).$$

(b). La dimensión del espacio vectorial  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$  es igual al número de conjuntos

$J(p_1, \alpha_1, l)$  y  $J(p_2, \alpha_2)$  que contienen a  $\lambda$ . Este número coincide con el número de sistemas  $S[1](\lambda)$  y  $S[2](\lambda)$  que tienen solución (y de existir la solución ha de ser única) en  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Por último, el conjunto

$$\left\{ \left[ x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^l \right] \left| \begin{array}{l} (a_1, a_2, l) \text{ es una solución} \\ \text{de } S[1](\lambda) \text{ en } \mathbf{Z}_{\geq 0} \end{array} \right. \right\} \cup \left\{ \left[ x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \right] \left| \begin{array}{l} (a_1, a_2, l_1) \text{ es una solución} \\ \text{de } S[2](\lambda) \text{ en } \mathbf{Z}_{\geq 0} \end{array} \right. \right\}$$

es una base de  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$ .

PRUEBA. Por el Lema 3.1 se tiene que  $\bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l) \subseteq \mathcal{JN}(C_2)$ , el cual es un conjunto de cardinalidad  $p_2 \cdot \frac{\mu(C_1)}{2}$  y por lo tanto ordenado.

Denotemos  $\mu(C_1) = \mu_1$  y escribimos

$$\mathcal{JN}(C_1) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{\mu_1/2}\},$$

entonces podemos escribir

$$\bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l) = \bigcup_{l=0}^{p_2-1} \left\{ \frac{\lambda_i + l}{p_2} \mid 1 \leq i \leq \frac{\mu_1}{2} \right\}.$$

Además, de la Observación 3.1, se tiene que si  $\lambda = \frac{p_1(r+1) + \alpha_1(s+1)}{p_2 p_1 \alpha_1} \in J(p_1, \alpha_1, 0)$ , es decir, si  $\lambda$  es un número de salto  $< 1/p_2$ , entonces  $\langle [x^r y^s] \rangle = \mathcal{K}_\lambda(C_2)$ .

El Corolario 3.1, que se basa en los Lemas 3.2 y 3.3, y el Corolario 3.2, que es consecuencia de que  $S_1$  es birracional y la Proposición 1.2, nos permiten identificar las cotas  $C(\pi, E_{v_1+i}, \lambda)$  asociadas a los divisores excepcionales  $E_{v_1+i}$ , con  $1 \leq i \leq v_2 - v_1$  de la resolución minimal de  $C_2$  con las cotas  $C(\phi, E_{i-v_1}, \lambda)$ ,  $C(\psi, E_{p_1 q_1 + i - v_1}, \lambda)$  asociadas a divisores excepcionales de las resoluciones de  $NP_1^* C_2$  y de  $C_{aux}^1$ .

Como  $C_{aux}^1$  tiene un solo par de Newton  $(p_2, \alpha_2)$ , podemos elegir coordenadas de modo que es no degenerada con respecto a su polígono de Newton y como consecuencia del Teorema de Howald (Teorema 1.4 o la Proposición 3.1), podemos calcular sus números de salto e identificarlos con números de salto de  $C_2$  mayores a  $1/p_2$  y debidos a las cotas asociadas a los divisores  $E_{v_1+i}$ , con  $1 \leq i \leq v_2 - v_1$  (es decir, al segundo paquete de Newton) con los números de salto de  $C_{aux}^1$ . En efecto, el Lema 3.2 relaciona el divisor de ruptura de la resolución de  $C_{aux}^1$  (es decir  $E_{p_1 \alpha_1 + v_2 - v_1}$ ) con  $E_{v_2}$ .

Como por el Teorema de Howald los números de salto  $\mathcal{JN}(C_{aux}^1)$  están provocados por el divisor  $E_{p_1 \alpha_1 + v_2 - v_1}$ , entonces estamos seguros de obtener así los números de salto del segundo paquete de Newton de  $C_2$ . En consecuencia

$$\mathcal{JN}(C_2) = \bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l) \cup J(p_2, \alpha_2),$$

con lo que se tiene (a).

Para calcular los ideales de multiplicadores de  $C_2$  asociados a  $\lambda > 1/p_2$  necesitamos identificar las funciones que causan los números de salto de  $C_{aux}^1$  con elementos del ideal monomial  $I$  generado por los monomios  $x^r y^s$  con

$$p_1(r+1) + (s+1)\alpha_1 > p_1 \alpha_1,$$

equivalentemente

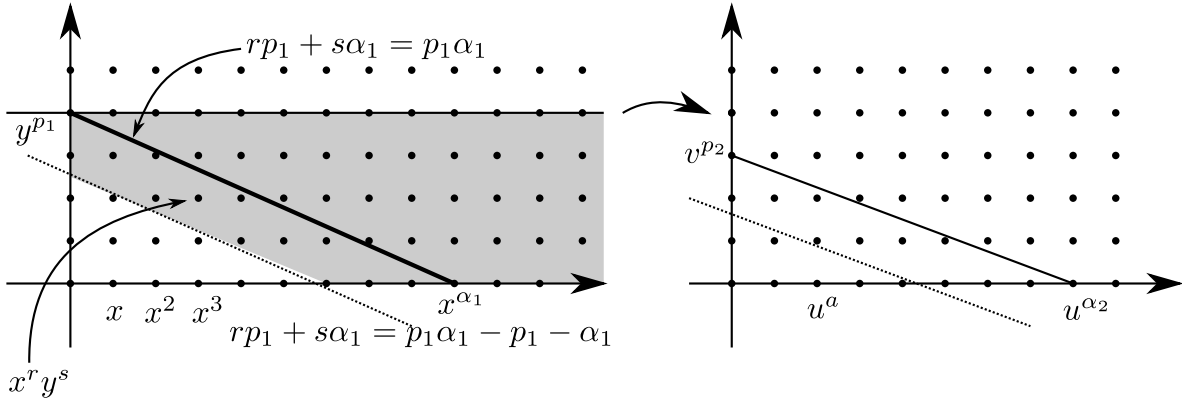
$$p_1 r + \alpha_1 s = p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a, \text{ con } a \geq 1.$$

Para esto recordemos que como consecuencia del Teorema de Howald (ver Proposición 3.1) se tiene que el número de salto  $\lambda = \frac{p_2 a + \alpha_2 t}{p_2 \alpha_2} \in J(p_2, \alpha_2)$  de  $C_{aux}^1$  es causado por un monomio  $u^{a-1} v^{t-1}$ , luego por el Lema 3.5 y la Proposición 3.2 se tiene que corresponde al monomio generalizado  $x^r y^s f_1^{t-1}$ , donde

$$p_1 r + \alpha_1 s = p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a.$$

Observamos que la existencia de una solución  $(r, s)$  a la ecuación anterior está garantizada para cualquier  $a \geq 1$  porque  $(p_1 - 1)(\alpha_1 - 1) = \alpha_1 p_1 - \alpha_1 - p_1 + 1$  es el conductor del semigrupo  $\Gamma_1 = \langle p_1, \alpha_1 \rangle$ . En particular,  $x^r y^s \in I$  y lo denotaremos por  $M_\lambda$ .

Así identificamos las funciones que causan los números de salto de  $C_{aux}^1$  con elementos de  $I$ . En la siguiente figura los monomios de la figura izquierda que corresponden a puntos por debajo de la línea punteada son las funciones que provocan los números de salto  $< 1/p_2$ .



Por otro lado, puede pasar que haya más de un monomio (generalizado) que corresponda a un número de salto  $\lambda \in J(p_2, \alpha_2)$ , sin embargo, a continuación, mostraremos que dichas funciones son proporcionales en el cociente  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$ .

Sea  $\lambda \in J(p_2, \alpha_2)$  y sea  $x^r y^s$  un monomio responsable del número de salto  $\lambda$ . El peso del monomio  $x^r y^s$  es igual a  $w(x^r y^s) = p_1 r + \alpha_1 s = p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a$  con  $a \geq 1$ . Es fácil comprobar que si  $1 \leq a < p_1 + \alpha_1$ , sólo habrá un monomio  $x^r y^s$  tal que

$$p_1 r + \alpha_1 s = p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a.$$

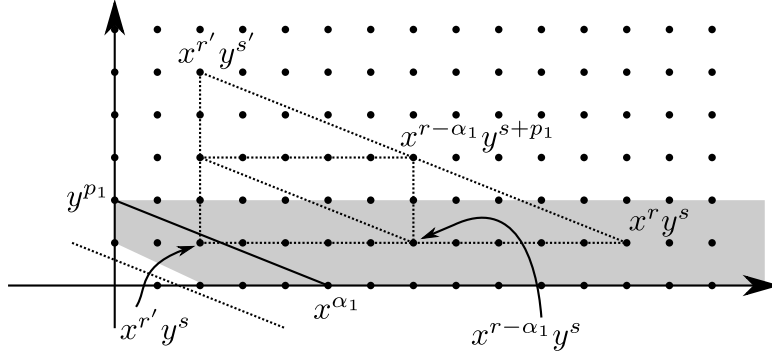
En caso contrario queremos entender la relación entre los distintos monomios con mismo peso. Sea

$$s = \min\{s' \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid \exists r' \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \text{ tal que } w(x^{r'} y^{s'}) = p_1 \alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a\},$$

y notemos que  $s < p_1$  pues en caso contrario  $w(x^{r+\alpha_1}y^{s-p_1})$  también cumple la ecuación. Supongamos que  $a \geq p_1 + \alpha_1$  y que existen dos monomios  $x^r y^s \neq x^{r'} y^{s'}$  con el mismo peso (que por el Lema 3.5 tenemos que ambos corresponden a  $\lambda$ ). Como  $w(x^r y^s) = p_1 r + \alpha_1 s = w(x^{r'} y^{s'}) = p_1 r' + \alpha_1 s'$ , se tiene que

$$p_1(r - r') + \alpha_1(s' - s) = 0,$$

y como  $r > r'$ , existe  $l_0 \in \mathbf{Z}_{>0}$  tal que  $(r - r', s - s') = l_0(\alpha_1, -p_1)$ , por lo que  $r' = r - l_0\alpha_1$  y  $s' = s + l_0p_1$ . Además todos los monomios  $M_\lambda^{(k)} := x^{r-k\alpha_1}y^{s+kp_1}$  con  $0 \leq k \leq l_0$  corresponderán a  $\lambda$ , pues  $w(x^{r-k\alpha_1}y^{s+kp_1}) = (r - k\alpha_1)p_1 + (s + kp_1)\alpha_1 = p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a$ .



Ahora observemos que podemos tomar una combinación lineal (con los coeficientes binomiales del binomio de Newton  $(y^{p_1} - x^{\alpha_1})^{l_0} = f_1^{l_0}$ ):

$$L = \sum \binom{l_0}{i} (-1)^i M_\lambda^{(i)} = x^{r'} y^s f_1^{l_0} = x^{r-l_0\alpha_1} y^s f_1^{l_0},$$

y observemos que

$$\begin{aligned} \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^*(x^{r-l_0\alpha_1} y^s f_1^{l_0}) &= \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^*(x^{r-l_0\alpha_1} y^s) + \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^* f_1^{l_0} \\ &= (r - l_0\alpha_1)p_1 + s\alpha_1 + l_0\alpha_2 \\ &= rp_1 - l_0\alpha_1 p_1 + s\alpha_1 + l_0(p_1\alpha_2 + \alpha_1) \\ &> \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^*(x^r y^s) = rp_1 + s\alpha_1, \end{aligned}$$

mientras que  $\text{ord}_{E_i} \pi^*(x^{r-l_0\alpha_1} y^s f_1^{l_0}) \geq \text{ord}_{E_i} \pi^*(x^r y^s)$ , para todo  $i < v_2$ , por lo que

$$x^{r-l_0\alpha_1} y^s f_1^{l_0} \in \mathcal{J}(\lambda C_2)$$

y por lo tanto

$$[L] = 0 \in \mathcal{K}_\lambda(C_2)$$

por lo que el conjunto  $\{M_\lambda^{(i)}\}$  es linealmente dependiente en el cociente.

Además observemos que  $x^{r-\alpha_1}y^{s+p_1} - x^r y^s = x^{r-\alpha_1}y^s f_1$ , y  $w(x^{r-\alpha_1}y^s) = w(x^r y^s) - p_1\alpha_1$ , y

$$\begin{aligned} \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^*(x^{r-\alpha_1}y^s f_1) &= \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^*(x^{r-\alpha_1}y^s) + \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^* f_1 \\ &= (r - \alpha_1)p_1 p_2 + s\alpha_1 p_2 + \alpha_2 \\ &= rp_1 p_2 - p_1 p_2 \alpha_1 + s\alpha_1 p_2 + (p_1 p_2 \alpha_1 + q_2) = rp_1 p_2 + s\alpha_1 p_2 + q_2 \\ &> \text{ord}_{E_{v_2}} \pi^*(x^r y^s) = rp_1 p_2 + s\alpha_1 p_2, \end{aligned}$$

mientras que  $\text{ord}_{E_i} \pi^*(x^{r-\alpha_1}y^s f_1^{l_0}) \geq \text{ord}_{E_i} \pi^*(x^r y^s)$ , para todo  $i < v_2$ , por lo que

$$x^{r-\alpha_1}y^s f_1 \in \mathcal{J}(\lambda C_2)$$

y, por lo tanto, concluimos que

$$[x^{r-\alpha_1}y^{s+p_1} - x^r y^s] = 0 \in \mathcal{K}_\lambda(C_2).$$

En consecuencia,  $M_\lambda$  y  $M_\lambda^{(1)}$  son linealmente dependientes en  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$  y de manera similar pasa con dos monomios consecutivos  $M_\lambda^{(k)}$  y  $M_\lambda^{(k+1)}$ .

Podemos concluir que todos los monomios generalizados relacionados con el número de salto  $\lambda \in J(p_2, \alpha_2)$  a través de la Proposición 3.2 son linealmente dependientes dos a dos en  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$ . Sin embargo puede pasar que  $\lambda \in J(p_2, \alpha_2)$  también pertenezca a  $\bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l)$ , por lo que en este caso tendrá dos presentaciones:

$$\lambda = \frac{ap_2 + t\alpha_2}{p_2\alpha_2} = \frac{\lambda_i + l}{p_2},$$

pero la función responsable de  $\frac{\lambda_i + l}{p_2}$  por el Lema 3.1, es una función que falla la cota  $C(E_{v_1}, \lambda)$  mientras que la función  $x^r y^s f_1^{t-1}$  falla la cota  $C(E_{v_2}, \lambda)$  y por lo tanto son linealmente independientes en  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$ , en este caso

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_\lambda(C_2) = 2.$$

Para concluir observemos que si  $\lambda \in \bigcup_{l=0}^{p_2-1} J(p_1, \alpha_1, l)$ , es decir,  $\lambda = \frac{1}{p_2} \left( \frac{(r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1}{p_1\alpha_1} + l_1 \right)$ , entonces el sistema lineal  $S[1](\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \lambda\alpha_1 e_0 &= p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \alpha_1 p_1 l \\ (r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1 + l_1 &= p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \alpha_1 p_1 l \end{aligned}$$

tiene solución única  $(a_1, a_2, l) = (r+1, s+1, l_1)$  (recordando que  $e_0 = p_1 p_2$  y  $\lambda < 1$ ). Ahora, hay dos opciones, la primera es que  $\lambda \notin J(p_2, \alpha_2)$ , y como los conjuntos  $J(p_1, \alpha_1, l)$  son disjuntos dos a dos, se tendrá que  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$  es de dimensión 1 y la función  $[x^r y^s f_1^{l_1}]$  será una base de  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$ .

Ahora, si además  $\lambda = \frac{p_2 a + \alpha_2 t}{p_2 \alpha_2} \in J(p_2, \alpha_2)$ , y  $x^{r'} y^{s'} = M_\lambda$ , entonces el sistema lineal  $S[2](\lambda)$ :

$$\begin{cases} \lambda\alpha_2 e_1 &= p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 &= p_1 a_1 + \alpha_1 a_2, \end{cases}$$



es

$$\begin{cases} p_2 a + \alpha_2 t &= p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 &= p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 \end{cases}$$

usando que  $e_1 = p_2$ , el sistema tiene solución  $(a_1, a_2, a_3, l_1) = (r', s', a, t)$ . Además  $[x^{r'} y^{s'} f_1^{t-1}]$  es linealmente independiente de  $[x^r y^s f_1^{l_0}]$  en  $\mathcal{K}_\lambda(C_2)$  pues una función falla la cota impuesta por el primer divisor de ruptura y la otra el segundo. Concluimos (b). □

**OBSERVACIÓN 3.4.** De la proposición anterior y de la Proposición 2.2 se sigue que la curva  $C_2$  tiene  $\frac{\mu(C_2)}{2}$  números de salto, contados con multiplicidad, en coincidencia con (6).

**OBSERVACIÓN 3.5.** Los monomios  $x^{a_1-1} y^{a_2-1}$  que causan los números de salto de  $C_2$  de la forma  $J(p_2, \alpha_2)$  tienen su peso  $w(x^{a_1-1} y^{a_2-1}) = p_1 \alpha_1 - p_1 + \alpha_1 + a$  acotado por la condición  $a \leq \lfloor \frac{\alpha_2 p_2 - \alpha_2}{p_2} \rfloor$ . Esto es consecuencia de que el monomio correspondiente  $u^{a-1}$  ha de cumplir que  $\frac{ap_2 + \alpha_2}{\alpha_2 p_2} < 1$ , en virtud del Teorema de Howald aplicado a la curva  $C_{aux}^1$ .

**EJEMPLO 10. (Curva con dos exponentes de característicos)** Sea  $C$  la curva definida por

$$f = (y^3 - x^5)^2 + y^7 = f_1^2 + y^7 = 0$$

de donde se observa que  $(3, 5)$  es el primer par de Newton, en este caso  $C$  ya está en coordenadas convenientes y no es necesario aplicar  $T_1$ , luego aplicando la primera transformación de Newton dada por  $x = x_1^3$  y  $y = x_1^5(1 + y_1)$  tenemos:

$$\begin{aligned} N_1^*(f) = f(x_1^3, x_1^5(1 + y_1)) &= (x_1^{15}(1 + y_1)^3 - x_1^{15})^2 + x_1^{35}(1 + y_1)^7 \\ &= x_1^{30}[(1 + y_1)^3 - 1]^2 + x_1^5(1 + y_1)^7 \\ &= x_1^{30}[9y_1^2 + x_1^5] + \sum_{i+5/2j>10} a_{i,j} x_1^i y_1^j \end{aligned}$$

De donde observamos que el segundo y último par de Newton es  $(2, 5)$ . Se tiene que  $\alpha_1 = 5$  y  $\alpha_2 = 35$ . Podemos calcular la sucesión de multiplicidades aplicando el algoritmo de Euclides a los pares de Newton:

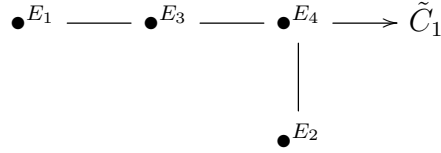
$$\begin{aligned} 5 &= 1 \times \underline{3} + 2 \\ 3 &= 1 \times \underline{2} + 1 \\ 2 &= 2 \times \underline{1} \end{aligned}$$

Que nos da la sucesión de multiplicidades asociada a  $f_1$ :  $(3, 2, 1, 1)$ . El número de Milnor de  $C_1$  es 8, y por (6),  $C_1$  tiene 4 números de salto menores a 1.

Recordemos las multiplicidades de  $C$  y  $C_1$  tendrán la siguiente relación:

$$2 \cdot \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1,*}^{-1} C_1) = \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1,*}^{-1} C) \text{ con } i = 1, \dots, 4$$

y que corresponde al primer paquete de Newton de  $f$ :  $(6, 4, 2, 2, \dots)$ . El grafo dual de la resolución de  $C_1$  es:



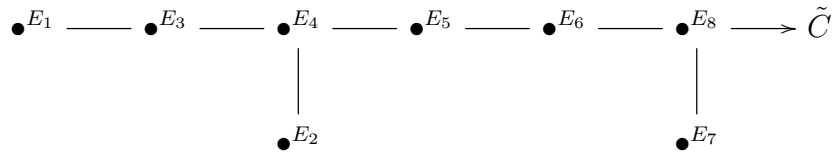
Ahora aplicando el algoritmo de Euclides al segundo par obtenemos el resto de la sucesión de multiplicidades de  $f$ :

$$5 = 2 \times \underline{2} + 1$$

$$2 = 2 \times \underline{1}$$

y tenemos la sucesión de multiplicidades:  $(6, 4, 2, 2 \mid 2, 2, 1, 1)$ . Así, el número de Milnor de  $C$  es  $\mu = \sum_{i=1}^8 a_i(a_i - 1) = 6 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2 = 50$ , por lo que  $C$  tiene 25 números de salto menores a 1.

Se tiene el grafo dual de la resolución minimal de  $C$ :



Con la siguiente tabla de multiplicidades:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$r_i$	6	10	18	30	32	34	35	70
$b_i$	1	2	4	7	8	9	10	20

Luego, por la Proposición 3.1, los números de salto de  $C_1$  son:

$$\left\{ \lambda = \frac{3(r+1) + 5(s+1)}{15} < 1 \mid r, s \geq 0 \right\} = \left\{ \frac{8}{15}, \frac{11}{15}, \frac{13}{15}, \frac{14}{15} \right\},$$

Número de salto $\lambda$	$\frac{8}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$
Base de $\mathcal{K}_\lambda(C_1)$	1	$x$	$y$	$x^2$

Que corresponden a los números de salto  $\left\{ \frac{8}{30}, \frac{11}{30}, \frac{13}{30}, \frac{14}{30} \right\}$  de  $C$ . Ahora, recordando la periodicidad de los números de salto:

$$\mathcal{J}((\lambda + 1) \cdot C_1) = \mathcal{J}(\lambda \cdot C_1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(-C_1)$$

tenemos que  $\left\{ \frac{23}{15}, \frac{26}{15}, \frac{28}{15}, \frac{29}{15} \right\}$  también son números de salto de  $f_1$  con:

Número de salto $\lambda$	$\frac{8}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{23}{15}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{29}{15}$
Base de $\mathcal{K}_\lambda(C_1)$	1	$x$	$y$	$x^2$	$f_1$	$x \cdot f_1$	$y \cdot f_1$	$x^2 \cdot f_1$

Para comprobar que efectivamente estas funciones no pasan las cotas observemos la siguiente tabla:

Número de Salto	Cota				$\text{ord}_{E_i} \pi^* h$				Función que falla
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	
$\lambda$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$h$
$\frac{8}{15}$	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$\frac{11}{15}$	1	1	2	4	1	1	2	3	$x$
$\frac{13}{15}$	1	2	3	6	1	2	3	5	$y$
$\frac{14}{15}$	1	2	4	7	2	2	4	6	$x^2$
$\frac{23}{15}$	3	5	9	16	3	5	9	15	$f_1$
$\frac{26}{15}$	4	6	11	19	4	6	11	18	$x \cdot f_1$
$\frac{28}{15}$	4	7	12	21	4	7	12	20	$y \cdot f_1$
$\frac{29}{15}$	4	7	13	22	5	7	13	21	$x^2 \cdot f_1$

Así, los números de salto de  $C_1$  ( $\lambda \neq 1$ ) que dan números de salto de  $C$  menores a 1 son 8 pero ya hemos observado que  $C$  tiene 25 números de salto ( $< 1$ ). Ahora observaremos que los 17 números de salto faltantes se obtienen de  $C_{aux}^1$  que tiene un único par de Newton  $(p_2, \alpha_2) = (2, 35)$  y por lo tanto

$$\mathcal{JN}(C_{aux}^1) = \left\{ \frac{2(r+1) + 35(s+1)}{70} < 1 \mid r, s \geq 0 \right\} = \left\{ \frac{37}{70}, \dots, \frac{69}{70} \right\}$$

los cuales son los 17 que faltaban. Que por la Proposición 3.1 los  $\mathcal{K}_\lambda(C_{aux}^1)$  están generados por

$$\{[1], [u], [u^2], \dots, [u^{16}]\}$$

y para el sistema  $S[2](37/70)$  tenemos

$$\begin{cases} \frac{37}{70}(35 \times 2) = 2a_3 + 35l_1, \\ (3 \times 5) + a_3 = 3a_1 + 5a_2. \end{cases}$$

por lo que  $a_3 = 1$ ,  $l_1 = 1$  y  $a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 5 = 15 + 1 = 16$ , de donde  $a_1 = a_2 = 2$ , así que

$$\mathcal{K}_{37/70}(C) = \langle [xy] \rangle.$$

Haciendo lo mismo para los otros casos se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{39/70}(C) &= \langle [x^3] \rangle, \mathcal{K}_{41/70}(C) = \langle [y^2] \rangle, \mathcal{K}_{43/70}(C) = \langle [x^2y] \rangle, \mathcal{K}_{45/70}(C) = \langle [x^4] \rangle \\ \mathcal{K}_{47/70}(C) &= \langle [xy^2] \rangle, \mathcal{K}_{49/70}(C) = \langle [x^3y] \rangle, \mathcal{K}_{51/70}(C) = \langle [y^3] \rangle, \mathcal{K}_{53/70}(C) = \langle [x^2y^2] \rangle \\ \mathcal{K}_{55/70}(C) &= \langle [x^4y] \rangle, \mathcal{K}_{57/70}(C) = \langle [x^6] \rangle, \mathcal{K}_{59/70}(C) = \langle [x^3y^2] \rangle, \mathcal{K}_{61/70}(C) = \langle [x^5y] \rangle \\ \mathcal{K}_{63/70}(C) &= \langle [x^7] \rangle, \mathcal{K}_{65/70}(C) = \langle [x^4y^2] \rangle, \mathcal{K}_{67/70}(C) = \langle [x^6y] \rangle, \mathcal{K}_{69/70}(C) = \langle [x^8] \rangle. \end{aligned}$$

Hagamos ahora la tabla de multiplicidades de  $C$  para comprobar que estas funciones generan los cocientes.

$\lambda$	$[\lambda r_i] - b_i$								$\text{ord}_{E_i} \pi^* h$								Falla
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$h$
$\frac{8}{30}$	0	0	0	1	0	0	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\frac{11}{30}$	1	1	2	4	3	3	2	5	1	1	2	3	3	3	3	6	$x$
$\frac{13}{30}$	1	2	3	6	5	5	5	10	1	2	3	5	5	5	5	10	$y$
$\frac{14}{30}$	1	2	4	7	6	6	6	12	2	2	4	6	6	6	6	12	$x^2$
$\frac{37}{70}$	2	3	5	8	8	8	8	17	2	3	5	8	8	8	8	16	$xy$
$\frac{39}{70}$	2	3	6	9	9	9	9	19	3	3	6	9	9	9	9	18	$x^3$
$\frac{41}{70}$	2	3	6	10	10	10	10	21	2	4	6	10	10	10	10	20	$y^2$
$\frac{43}{70}$	2	4	7	11	11	11	11	23	3	4	7	11	11	11	11	22	$x^2y$
$\frac{45}{70}$	2	4	7	12	12	12	12	25	4	4	8	12	12	12	12	24	$x^4$
$\frac{47}{70}$	3	4	8	13	13	13	13	27	3	5	8	13	13	13	13	26	$xy^2$
$\frac{49}{70}$	3	5	8	14	14	14	14	29	4	5	9	14	14	14	14	28	$x^3y$
$\frac{51}{70}$	3	5	9	14	15	15	15	31	3	5	9	15	15	15	15	30	$y^3 - ax^5$
									3	6	9	15	15	15	15	30	$y^3$
									5	5	10	15	15	15	15	30	$x^5$
$\frac{53}{70}$	3	5	9	15	16	16	16	33	4	6	10	16	16	16	16	32	$x^2y^2$
$\frac{23}{30}$	3	5	9	16	16	17	16	33	3	5	9	15	16	17	18	35	$f_1$
$\frac{55}{70}$	3	5	10	16	17	17	17	35	5	6	11	17	17	17	17	34	$x^4y$
$\frac{57}{70}$	3	6	10	17	18	18	18	37	6	6	12	18	18	18	18	36	$x^6, xy^3$
$\frac{59}{70}$	4	6	11	18	18	19	19	39	5	7	12	19	19	19	19	38	$x^3y^2$
$\frac{26}{30}$	4	6	11	19	19	20	20	40	4	6	11	18	19	20	21	41	$x \cdot f_1$
$\frac{61}{70}$	4	6	11	19	19	20	20	41	4	8	12	20	20	20	20	40	$x^5y, y^4$
$\frac{63}{70}$	4	7	12	20	20	21	21	43	7	7	14	21	21	21	21	42	$x^7, x^2y^3$
$\frac{65}{70}$	4	7	12	20	21	22	22	45	6	8	14	22	22	22	22	44	$x^4y^2$
$\frac{28}{30}$	4	7	12	21	21	22	22	45	4	7	12	20	21	22	23	45	$y \cdot f_1$
$\frac{67}{70}$	4	7	13	21	22	23	23	47	7	8	15	23	23	23	23	46	$x^6y$
$\frac{29}{30}$	4	7	13	22	22	23	23	47	5	7	13	21	22	23	24	47	$x^2 \cdot f_1$
$\frac{69}{70}$	4	7	13	22	23	24	24	49	8	8	16	24	24	24	24	48	$x^8$

OBSERVACIÓN 3.6. En algunos números de salto, como el 51/70 y el 57/70, son varias funciones las que fallan, sin embargo  $x^5$ ,  $y^3$  y  $y^3 - ax^5$  son proporcionales en el cociente  $\mathcal{K}_{57/70}(C_1)$ , pues  $f_1 = y^3 - x^5$  no falla, y por lo tanto  $[y^3 - x^5] = 0$ , así,  $[x^5] = [y^3]$ , luego  $[y^3 - ax^5] = (1 - a)[y^3] = (1 - a)[x^5]$ .

En el caso del número de salto 57/70 tenemos que  $xy^3 - x^6 = x \cdot f_1$  sí pasa, por lo que  $[x^6] = [xy^3]$  en el cociente.

### 3. Caso general

Comenzaremos esta sección enunciando nuestro resultado principal que describe los ideales multiplicadores de una singularidad irreducible de curva plana en función de sus pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}$  y su enlace  $\{(p_i, \alpha_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, g$ . La prueba será hecha por recursión.

Para ello recordaremos la notación introducida en (12):

$$\alpha_1 = q_1 \quad \text{y} \quad \alpha_{i+1} = p_{i+1}p_i\alpha_i + q_{i+1}.$$

Ahora hagamos la siguiente definición, analoga a la Definición 3.1:

DEFINICIÓN 3.2.

$$J(p_i, \alpha_i) := \left\{ \frac{p_i(r+1) + \alpha_i(s+1)}{p_i\alpha_i} \mid r, s \in \mathbf{Z}_{>0} \right\} \cap (0, 1),$$

para  $1 \leq i \leq g$ , y

$$J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) := \left\{ \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \left( \dots \left( \frac{1}{p_{i+1}} (\lambda + l_i) + l_{i+1} \right) + \dots \right) + l_{g-1} \right) \mid \lambda \in J(p_i, \alpha_i), l_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\} \cap (0, 1),$$

para  $1 \leq i \leq g-1$ , y  $l_j \in \{0, \dots, p_{j+1} - 1\}$ .

OBSERVACIÓN 3.7.

- Cada uno de los conjuntos  $J(p_i, \alpha_i)$  y  $J(p_i, \alpha_i, l_i, \dots, l_{g-1})$  tiene  $\frac{1}{2}(p_i - 1)(\alpha_i - 1)$  elementos distintos (sin repetición).
- Para  $i$  fijo, los conjuntos  $J(p_i, \alpha_i, l_i, \dots, l_{g-1})$  son disjuntos dos a dos.

Por último, consideraremos los siguientes sistemas de condiciones lineales con coeficientes enteros positivos:

- El sistema  $S[1](\lambda)$  consiste en una única ecuación lineal

$$\lambda\alpha_1 e_0 = p_1 a_1 + q_1 a_2 + \alpha_1 p_1 l_1 + \alpha_1 p_1 p_2 l_2 + \dots + \alpha_1 p_1 p_2 \dots p_{g-1} l_{g-1}$$

en las incognitas  $a_1, a_2, l_1, l_2, \dots, l_{g-1}$  sujetas a las restricciones

$$p_1 a_1 + q_1 a_2 < \alpha_1 p_1, \quad a_1, a_2 \geq 1, \quad 0 \leq l_j \leq p_{j+1} - 1.$$

- El sistema  $S[i](\lambda)$  consiste en  $i$  ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \alpha_i e_{i-1} = p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} + \alpha_i p_i l_i + \alpha_i p_i p_{i+1} l_{i+1} + \dots + \alpha_i p_i p_{i+1} \dots p_{g-1} l_{g-1}, \\ p_{i-1} \alpha_{i-1} + a_{i+1} = p_{i-1} a_i + \alpha_{i-1} l_{i-2}, \\ \dots = \dots, \\ p_2 \alpha_2 + a_4 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2. \end{array} \right.$$

en las incognitas  $a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i, \dots, l_{g-1}$  sujetas a las restricciones

$$p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} < p_i \alpha_i, \quad a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, l_2, \dots, l_{i-1} \geq 1, \quad 0 \leq l_j \leq p_{j+1} - 1.$$

OBSERVACIÓN 3.8.

- (a). El sistema  $S[i](\lambda)$  tiene solución  $(a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, \dots, l_{g-1})$  (en cuyo caso, es única) si y sólo si

$$\lambda = \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \dots \left( \frac{1}{p_{i+1}} \left( \frac{p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1}}{p_i \alpha_i} + l_i \right) + l_{i+1} \right) \dots + l_{g-1} \right) \in J(p_i, \alpha_i, l_i, \dots, l_{g-1}).$$

- (b). Recordando que  $\pi$  es la resolución minimal de  $C$ , se tiene que el sistema  $S[1](\lambda)$  es equivalente a

$$\lambda r_{v_1} = p_1 a_1 + q_1 a_2 + \text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* f_1^{l_1} + \text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* f_2^{l_2} + \dots + \text{ord}_{E_{v_1}} \pi^* f_{g-1}^{l_{g-1}}$$

y la primera ecuación del sistema  $S[i](\lambda)$  es equivalente a

$$\lambda r_{v_i} = p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} + \text{ord}_{E_{v_i}} \pi^* f_i^{l_i} + \text{ord}_{E_{v_i}} \pi^* f_{i+1}^{l_{i+1}} + \dots + \text{ord}_{E_{v_i}} \pi^* f_{g-1}^{l_{g-1}}$$

- (c). Consideramos el sistema  $S[i](\lambda)$  de  $C_i$ . Despejando las variables  $a_3, \dots, a_{i+1}$  el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \alpha_i e_{i-1} = p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1}, \\ a_{i+1} = p_{i-1} a_i + \alpha_{i-1} l_{i-2} - p_{i-1} \alpha_{i-1}, \\ \dots = \dots, \\ a_4 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1 - p_2 \alpha_2, \\ a_3 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 - p_1 \alpha_1 \end{array} \right.$$

Nótese que por tratarse del sistema asociado a la raíz aproximada  $C_i$  el factor  $e_{i-1}$  de la primera ecuación es igual a  $p_i$ .

A continuación, vamos a eliminar recursivamente las variables  $a_3, \dots, a_{i+1}$ .

En primer lugar, eliminamos  $a_3$  usando las dos últimas ecuaciones del sistema. Tenemos que  $a_3$  es igual a

$$\begin{aligned} p_1 a_1 + \alpha_1 a_2 - p_1 \alpha_1 &= p_1(a_1 - 1) + \alpha_1(a_2 - 1) + p_1 + \alpha_1 + p_1 \alpha_1 \\ &= p_1(a_1 - 1) + \alpha_1(a_2 - 1) + b_{v_1} + 1 + p_1 \alpha_1 \end{aligned}$$

usando (18). Ahora,  $a_4 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1 - p_2 \alpha_2$  y sustituyendo  $a_3$  se tiene

$$\begin{aligned} &= p_1 p_2(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2(a_2 - 1) + \alpha_2(l_1 - 1) + p_2(b_{v_1} + 1) + \alpha_2 - p_1 p_2 \alpha_1 - p_2 \alpha_2 \\ &= p_1 p_2(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2(a_2 - 1) + \alpha_2(l_1 - 1) + p_2(b_{v_1} + 1) + q_2 - p_2 \alpha_2 \\ &= p_1 p_2(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2(a_2 - 1) + \alpha_2(l_1 - 1) + (b_{v_2} + 1) - p_2 \alpha_2, \end{aligned}$$

usando (12) y (18); es decir,  $q_2 = \alpha_2 - p_1 p_2 \alpha_1$  y  $b_{v_2} + 1 = p_2(b_{v_1} + 1) + q_2$ .

Eliminamos  $a_4$  usando las tres últimas ecuaciones del sistema. Tenemos que  $a_5$  es igual a

$$p_3 a_4 + \alpha_3 l_2 - p_3 \alpha_3 = \dots = p_1 p_2 p_3(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2 p_3(a_2 - 1) + \alpha_2 p_3(l_1 - 1) + \alpha_3(l_2 - 1) + (b_{v_3} + 1) - p_3 \alpha_3.$$

Analogamente eliminamos  $a_5, \dots, a_i$ , obteniendo que  $a_{i+1}$  es igual a

$$p_1 \dots p_{i-1}(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2 \dots p_{i-1}(a_2 - 1) + \alpha_2 p_3 \dots p_i(l_1 - 1) + \dots + \alpha_{i-1}(l_{i-2} - 1) + (b_{v_{i-1}} + 1) - p_{i-1} \alpha_{i-1}.$$

Finalmente, eliminamos  $a_{i+1}$ , obteniendo que  $\lambda_0 \alpha_i e_{i-1}$  (que recordamos que es igual a  $\lambda_0 \alpha_i p_i$ ) es igual a

$$\begin{aligned} &p_1 p_2 \dots p_i(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2 \dots p_i(a_2 - 1) + \alpha_2 p_3 \dots p_i(l_1 - 1) + \dots + \alpha_i(l_{i-1} - 1) + p_i(b_{v_{i-1}} + 1) + \alpha_i - p_i p_{i-1} \alpha_{i-1} \\ &= p_1 p_2 \dots p_i(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2 \dots p_i(a_2 - 1) + \alpha_2 p_3 \dots p_i(l_1 - 1) + \dots + \alpha_i(l_{i-1} - 1) + p_i(b_{v_{i-1}} + 1) + q_i \\ &= p_1 p_2 \dots p_i(a_1 - 1) + \alpha_1 p_2 \dots p_i(a_2 - 1) + \alpha_2 p_3 \dots p_i(l_1 - 1) + \dots + \alpha_i(l_{i-1} - 1) + (b_{v_i} + 1). \end{aligned}$$

Lo anterior se puede interpretar en función de la resolución  $\pi_{v_i}$  de la curva  $C_i$ :

$$\text{ord}_{E_{v_i}} \pi_{v_i}^* x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \dots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} + (b_{v_i} + 1).$$

Se tiene el siguiente

**TEOREMA 3.1.** *Sea  $C$  una curva plana irreducible con  $g$  pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^g$ .*

(a). (Järvilehto, Tucker, Naie) *Los números de salto de  $C$  menores que uno son los elementos del conjunto*

$$\mathfrak{JN}(C) = \bigcup_{i=1}^{g-1} \bigcup_{j=i}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) \cup J(p_g, \alpha_g).$$

(b). La dimensión del espacio vectorial  $\mathcal{K}_\lambda(C)$  es igual al número de conjuntos

$J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1})$  y  $J(p_g, \alpha_g)$  que contienen a  $\lambda$ . Este número coincide con el número de sistemas  $S[i](\lambda)$  que tiene solución (y de existir la solución ha de ser única) en  $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ . Por último, el conjunto

$$\bigcup_{i=1}^{g-1} \left\{ [x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \dots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} f_i^{l_i} \dots f_{g-1}^{l_{g-1}}] \mid (a_1, \dots, a_{i+1}, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, \dots, l_{g-1}) \text{ es una solución de } S[i](\lambda) \text{ en } \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

es una base de  $\mathcal{K}_\lambda(C)$ .

Para ilustrar el resultado se dan algunos ejemplos en la Sección 4.

La prueba del Teorema es por inducción generalizando los resultados de la Sección 2. Asumamos que el Teorema se cumple para  $g - 1$  pares de Newton usando las Secciones 1 y 2 como primeros casos.

El siguiente Lema es la generalización del Lema 3.1 para mostrar la inclusión

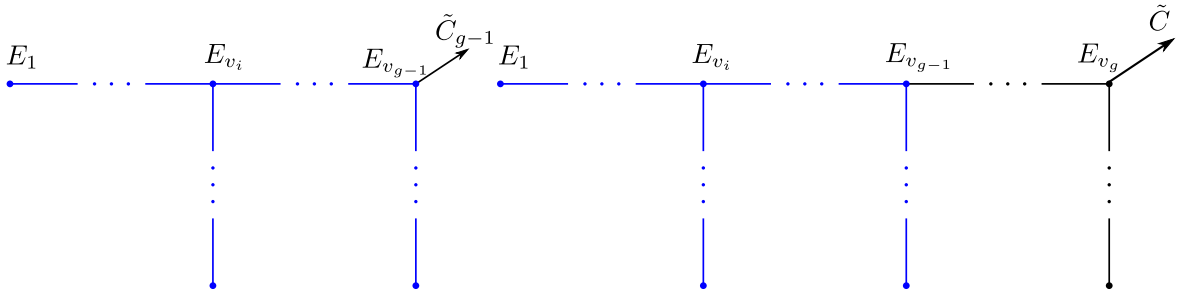
$$\bigcup_{i=1}^{g-1} \bigcup_{j=i}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) \subseteq \mathcal{JN}(C).$$

LEMA 3.6. Sea  $C$  un germen irreducible con  $g$  pares de Newton. Si  $\lambda$  es un número de salto de  $C_{g-1}$ , entonces  $\lambda_{l_{g-1}} := \frac{1}{p_g}(\lambda + l_{g-1})$  es un número de salto de la curva  $C$ , para cualquier  $l_{g-1} \in \{0, 1, \dots, p_g - 1\}$ , y si  $[M] \in \mathcal{K}_\lambda(C_{g-1})^*$ , entonces

$$[M \cdot f_{g-1}^{l_{g-1}}] \in \mathcal{K}_{\lambda_{l_{g-1}}}(C)^*.$$

PRUEBA. La prueba es parecida a la del Lema 3.1 pero la segunda parte es un poco más laboriosa.

Sea  $f_{g-1}$  (resp.  $f_g$ ) la ecuación de  $C_{g-1}$  (resp. de  $C_g$ ). La resolución minimal  $\pi' = \eta_{g-1} \circ \dots \circ \eta_1$  de  $C_{g-1}$  consiste en  $g - 1$  paquetes de Newton y la resolución minimal  $\pi = \eta_g \circ \pi'$  de  $C_g$  consiste en  $g$  paquetes de Newton. En otras palabras, la resolución minimal de  $C_{g-1}$  y  $C_g$  comparten los primeros  $g - 1$  paquetes de Newton



y sus multiplicidades están relacionadas del siguiente modo:



$$p_g \cdot \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1,*}^{-1} C_{g-1}) = \text{mult}_{p_i}(\pi_{i-1,*}^{-1} C) \text{ para } i = 1, \dots, v_{g-1}.$$

En consecuencia, se tiene que

$$p_g \cdot r_i(f_{g-1}) = r_i(f) \text{ con } i = 1, \dots, v_{g-1}.$$

Por otra parte los números  $b_i$  coinciden en los divisores excepcionales comunes a la resoluciones minimales de  $C_g$  y de  $C_{g-1}$ . Así, las cotas

$$(29) \quad C(\pi', E_i, \lambda) = \lfloor \lambda \cdot r_i(f_{g-1}) \rfloor - b_i = \lfloor \frac{1}{p_g} \lambda \cdot r_i(f) \rfloor - b_i = C(\pi, E_i, \lambda)$$

Igualmente, coinciden los órdenes  $\text{ord}_{E_i} \pi^* h = \text{ord}_{E_i} (\pi')^* h$ , para cualquier  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$  y, en consecuencia, las funciones que satisfacen (o no satisfacen) las desigualdades asociadas a estos divisores excepcionales  $E_i$ , con  $i = 1, \dots, v_{g-1}$ .

Razonando como en el Lema 3.1, para probar que

$$\bigcup_{i=1}^{g-1} \bigcup_{j=i}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) \subseteq \mathcal{JN}(C),$$

bastara comprobar que si el monomio generalizado  $M \in \mathbb{C}[x, y, f_1, \dots, f_{g-2}]$  es un generador de  $\mathcal{K}_\lambda(C_{g-1})^*$ , entonces los monomios generalizados  $M \cdot f_{g-1}^{l_{g-1}}$  con  $0 \leq l_{g-1} \leq p_g - 1$  pasan las cotas  $C(E_j, \lambda_{l_{g-1}}, \pi)$  para  $v_{g-1} + 1 \leq j \leq v_g$  correspondientes a los divisores excepcionales del último paquete de Newton. Es decir, queremos comprobar que:

$$(30) \quad \text{ord}_{E_j} \pi^* M \cdot f_{g-1}^{l_{g-1}} \geq \lfloor \lambda_{l_{g-1}} r_j(f) \rfloor - b_j.$$

Así, sea  $\lambda_{l_{g-1}} \in J(p_i, \alpha_i, l_i, \dots, l_{g-1})$  y escribimos

$$\lambda_{l_{g-1}} = \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_{i+1}}{p_{i+2} p_{i+3} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_{g-1}}{p_g}, \quad \text{con } \lambda_{i-1} \in J(p_i, \alpha_i).$$

Escribimos el subíndice del divisor excepcional  $E_j$  como  $j = v_{g-1} + k$ , con  $0 < k \leq v_g - v_{g-1}$ . Consideremos la  $k$ -truncación del algoritmo inverso de  $p_g$  y  $q_g$  y sean  $a_0(k)$  y  $a_1(k)$  los números asociados a  $E_j$  por dicho algoritmo. Estos números nos ayudan a expresar los datos numéricos del divisor  $E_j$  mediante las siguientes sumas telescópicas con  $g - 1$  sumandos.

$$r_j(f) = a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f) + a_1(k) \frac{e_{i+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{i+1}}(f) - p_{i+1} r_{v_i}(f)) + \cdots + (r_j(f) - a_1(k) r_{v_{g-1}}(f))$$

y análogamente

$$b_{j+1} = a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} (b_{v_i} + 1) + a_1(k) \frac{e_{i+1}}{e_{g-1}} ((b_{v_{i+1}} + 1) - p_{i+1} (b_{v_i} + 1)) + \cdots + ((b_{j+1}) - a_1(k) (b_{v_{g-1}} + 1)).$$

En primer lugar vamos a reescribir la cantidad  $\lambda_{l_{g-1}} r_j(f)$  como una suma de  $2(g-i-1)+1$  sumando según la Tabla 3; es decir,

$$\begin{aligned} \lambda_{l_{g-1}} r_j(f) &= \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f) + \sum_{s=i}^{g-2} \frac{l_s}{p_{s+1} p_{s+2} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_{s+1}}{e_{g-1}} r_{v_{s+1}}(f) + \frac{l_{g-1}}{p_g} r_j(f) \\ &+ \sum_{t=i}^{g-2} a_1(k) \frac{e_{t+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{t+1}}(f) - p_{t+1} r_{v_t}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_t}{p_{t+1} \cdots p_g} \right) \\ &+ (r_j(f) - a_1(k) r_{v_{g-1}}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_{g-2}}{p_{g-1} p_g} \right) \end{aligned}$$

	$\frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g}$	$\frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g}$	$\frac{l_{i+1}}{p_{i+2} p_{i+3} \cdots p_g}$	...	$\frac{l_{g-3}}{p_{g-2} p_{g-1} p_g}$	$\frac{l_{g-2}}{p_{g-1} p_g}$	$\frac{l_{g-1}}{p_g}$
$a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f)$	(a)	(b <sub>i</sub> )	(b <sub>i+1</sub> )	...	(b <sub>g-3</sub> )	(b <sub>g-2</sub> )	(b <sub>g-1</sub> )
$a_1(k) \frac{e_{i+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{i+1}}(f) - p_{i+1} r_{v_i}(f))$	(c <sub>i</sub> )			...			
$a_1(k) \frac{e_{i+2}}{e_{g-1}} (r_{v_{i+2}}(f) - p_{i+2} r_{v_{i+1}}(f))$	(c <sub>i+1</sub> )		...	...	...	...	...
...	...		...	...	...	...	...
$a_1(k) \frac{e_{g-2}}{e_{g-1}} (r_{v_{g-2}}(f) - p_{g-2} r_{v_{g-3}}(f))$	(c <sub>g-3</sub> )		...	...	...	...	...
$a_1(k) (r_{v_{g-1}}(f) - p_{g-1} r_{v_{g-2}}(f))$	(c <sub>g-2</sub> )		...	...	...	...	...
$(r_j(f) - a_1(k) r_{v_{g-1}}(f))$	(c <sub>g-1</sub> )		...	...	...	...	...

Tabla 3: Descomposición del producto  $\lambda_{l_{g-1}} r_j(f)$

La afirmación (30) será consecuencia de las tres siguientes hechos, que se probarán más abajo.

(a).  $\frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f) \in \mathbf{Z}$  y es igual a

$$\text{ord}_{E_j} \pi^* x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \cdots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} + a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} (b_{v_i} + 1).$$

(b). Para  $i \leq s < g-1$  tenemos que  $\frac{l_s}{p_{s+1} p_{s+2} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_{s+1}}{e_{g-1}} r_{v_{s+1}}(f) \in \mathbf{Z}$  y es igual a  $\text{ord}_{E_j} \pi^* f_s^{l_s}$ .

Para  $s = g-1$  tenemos que  $\frac{l_{g-1}}{p_g} r_j(f) \leq \text{ord}_{E_j} \pi^* f_{g-1}^{l_{g-1}}$ .

OBSERVACIÓN 3.9. Obsérvese que  $\frac{l_s}{p_{s+1} p_{s+2} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_{s+1}}{e_{g-1}} r_{v_{s+1}}(f)$  puede escribirse, usando una expresión telescópica, como

$$\frac{l_s}{p_{s+1} p_{s+2} \cdots p_g} \left( a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f) + \cdots + a_1(k) \frac{e_{s+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{s+1}}(f) - p_{s+1} r_{v_s}(f)) \right)$$

y, por tanto, corresponde a las primeras  $s$  entradas de la  $s+2-i$ -ésima columna de la Tabla 3; aquellas denotadas por (b<sub>s</sub>). Análogamente,  $\frac{l_{g-1}}{p_g} r_j(f)$  corresponde, usando una expresión telescópica de más arriba, a las primeras  $g-i-1$  entradas de la última columna de la Tabla 3; aquellas denotadas por (b<sub>g-1</sub>).

(c). Para  $i \leq t \leq g - 2$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \left[ a_1(k) \frac{e_{t+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{t+1}}(f) - p_{t+1} r_{v_t}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_t}{p_{t+1} \cdots p_g} \right) \right] \\ & - a_1(k) \frac{e_{t+1}}{e_{g-1}} ((b_{v_{t+1}+1}) - p_{t+1}(b_{v_t} + 1)) + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Para  $t = g - 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \left[ (r_j(f) - a_1(k) r_{v_{g-1}}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_{g-2}}{p_{g-1} p_g} \right) \right] \\ & - ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_{g-1}+1}) + 1) \leq 0. \end{aligned}$$

Veamos ahora como probar la desigualdad (30). Como consecuencia de (a) y (b), tenemos que

$$\begin{aligned} & \lambda_{l_{g-1}} r_j(f) \leq \text{ord}_{E_{v_g}} \pi^* x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \cdots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} f_i^{l_i} \cdots f_{g-1}^{l_{g-1}} + a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} (b_{v_i} + 1) \\ & + \sum_{t=i}^{g-2} a_1(k) \frac{e_{t+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{t+1}}(f) - p_{t+1} r_{v_t}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_t}{p_{t+1} \cdots p_g} \right) \\ & + (r_j(f) - a_1(k) r_{v_{g-1}}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_{g-2}}{p_{g-1} p_g} \right) \end{aligned}$$

Como los dos primeros sumandos del lado derecho de la desigualdad son enteros, utilizando las identidades (24) y la suma telescópica para  $b_j + 1$ , que permite cancelar  $a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} (b_{v_i} + 1)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda_{l_{g-1}} r_j(f) \right] - (b_j + 1) + 1 \leq \text{ord}_{E_{v_g}} \pi^* x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \cdots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} f_i^{l_i} \cdots f_{g-1}^{l_{g-1}} \\ & + \sum_{t=i}^{g-2} \left( \left[ a_1(k) \frac{e_{t+1}}{e_{g-1}} (r_{v_{t+1}}(f) - p_{t+1} r_{v_t}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_t}{p_{t+1} \cdots p_g} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - (a_1(k) \frac{e_{t+1}}{e_{g-1}} ((b_{v_{t+1}+1}) - p_{t+1}(b_{v_t} + 1)) + 1) \right) + \\ & + \left( \left[ (r_j(f) - a_1(k) r_{v_{g-1}}(f)) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_{g-2}}{p_{g-1} p_g} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - ((b_j + 1) - a_1(k)(b_{v_{g-1}+1}) + 1) \right). \end{aligned}$$

La desigualdad (30) se sigue, por tanto, de (c). Basta aplicar (c) al sumando formado por los términos de las líneas última y antepenúltima a sí como a cada uno de los  $g - 2$  sumandos que aparecen en las líneas segunda y tercera de la expresión anterior. observese que los  $g + 1$  términos “+1” que aparecen en las cuatro últimas líneas de la expresión anterior proceden de aplicar  $g - 2$  veces la identidad (24), lo que da  $g + 2$  términos “+1”, y de la expresión telescópica de  $b_j + 1$ , que arroja el término “+1” restante.

Explicamos por último las pruebas de (a), (b) y (c).

*Prueba de (a).* Usando la Observación 3.5 (c) es fácil comprobar que multiplicando  $\lambda_0 \alpha_i p_i$  por  $\frac{e_i}{e_{g-1} a_1(k)} = p_{i+1} \cdots p_{g-1} a_1(k)$  obtenemos  $\frac{\lambda_0}{p_{i+1} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f)$ ; es decir, la cantidad denotada por (a) en la Tabla 3. Por la igualdad anterior, tenemos por tanto que  $\frac{\lambda_0}{p_{i+1} \cdots p_g} a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} r_{v_i}(f)$  es igual a

$$p_{i+1} \cdots p_{g-1} a_1(k) (p_1 p_2 \cdots p_i (a_1 - 1) + \alpha_1 p_2 \cdots p_i (a_2 - 1) + \alpha_2 p_3 \cdots p_i (l_1 - 1) + \cdots + \alpha_i (l_{i-1} - 1) + (b_{v_i} + 1))$$

$$\text{ord}_{E_j} \pi^* x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \cdots f_{i-1}^{l_{i-1}-1} + a_1(k) \frac{e_i}{e_{g-1}} (b_{v_i} + 1),$$

como queríamos.

*Prueba de (b).* La afirmación (b), en los casos  $i \leq s \leq g - 2$ , es inmediata y, en el caso  $s$ , la cota se deduce como en el Lema 3.1.

*Prueba de (c).* La afirmación (c), en los casos  $i \leq t \leq g - 2$ , se deduce a partir de la igualdad (19) y de la siguiente desigualdad

$$(31) \quad \frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \cdots + \frac{l_t}{p_{t+1} \cdots p_g} < \frac{1}{p_{t+1} \cdots p_g}$$

Finalmente la desigualdad (31) se prueba recursivamente. Como  $\lambda_i < 1$  y  $0 \leq l_i \leq p_i - 1$  se tiene que  $\frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} < \frac{1}{p_{i+2} \cdots p_g}$ . Del mismo modo, como  $0 \leq l_{i+1} \leq p_{i+1} - 1$  tenemos que  $\frac{\lambda_{i-1}}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_i}{p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{l_{i+1}}{p_{i+2} p_{i+3} \cdots p_g} < \frac{1}{p_{i+2} \cdots p_g} + \frac{p_{i+2}-1}{p_{i+2} \cdots p_g} < \frac{1}{p_{i+2} \cdots p_g} \cdots$

La afirmación (c) para el caso  $t = g - 1$  se prueba como en el Lema 3.1. □

Ahora consideramos el siguiente diagrama

$$(32) \quad \begin{array}{ccccc} \tilde{C} & \widetilde{NP_{g-1}^* C} = S_{g-1}^* \widetilde{C}^{g-1}_{aux} & & \tilde{C}^{g-1}_{aux} & \\ \downarrow \pi & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & \\ C \subseteq \mathbf{C}_{x,y}^2 & NP_{g-1}^* C = S_{g-1}^* C^{g-1}_{aux} \subseteq \mathbf{C}_{x_1,y_1}^2 & \xrightarrow{S_{g-1}} & C^{g-1}_{aux} \subseteq \mathbf{C}_{u,v}^2 & \end{array}$$

donde  $\pi$ ,  $\phi$  y  $\psi$  son resoluciones log de  $C$ , de  $NP_{g-1}^* C$  y de  $C_{aux}^{g-1}$ , respectivamente, donde  $NP_{g-1}$  es el  $g - 1$ -ésimo proceso de Newton, definido en (11), y  $S_{g-1}$  es la transformación birracional, dada por

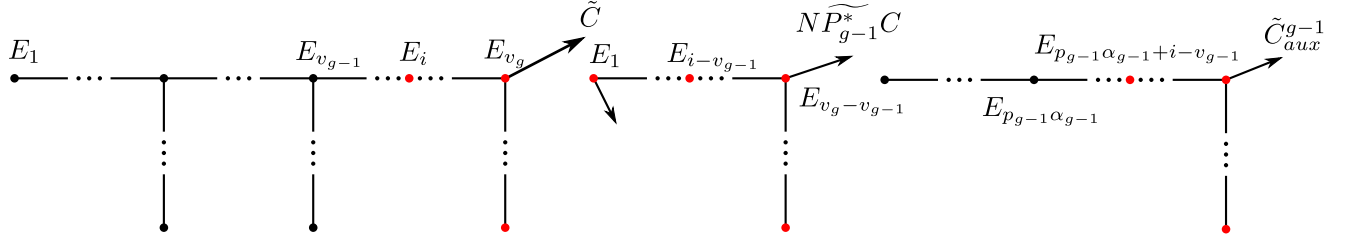
$$S_{g-1} = \begin{cases} u = x_{g-1} \\ v = x_{g-1}^{p_{g-1}-1} y_{g-1}, \end{cases}$$

e introducida previamente en la Definición 2.1.

Por definición tenemos que  $(S_{g-1}^{-1} \circ NP_{g-1})^* C = C_{aux}^{g-1}$ , la cual es una curva con un único par de Newton  $(p_g, \alpha_g)$ , descrita en Definición 14.

LEMA 3.7. *Los grafos duales de las resoluciones log anteriores  $\pi$ ,  $\phi$  y  $\psi$  del Diagrama (32)*

*son:*



*Además hay las siguientes biyecciones entre subconjuntos de los correspondientes divisores excepcionales:*

$$\begin{aligned} B(\pi, \phi) : E_i &\longleftrightarrow E_{i-v_{g-1}} \\ B(\phi, \psi) : E_{i-v_{g-1}} &\longleftrightarrow E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}, \end{aligned}$$

*para  $v_{g-1} + 1 \leq i \leq v_g$ , tales que  $r_i(\pi) = r_{i-v_{g-1}}(\phi) = r_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}(\psi)$ .*

PRUEBA. Por el Lema 2.1  $(\pi_{v_{g-1}}^*C, p_{v_{g-1}+1})$  es equisingular a  $(NP_{g-1}^*C, 0)$ , de donde se obtiene la primera biyección  $B(\pi, \phi) : E_i \longleftrightarrow E_{i-v_{g-1}}$ , con  $v_{g-1} + 1 \leq i \leq v_g$  y, además, se obtiene las igualdades  $r_i(\pi) = r_{i-v_{g-1}}(\phi)$ .

Ahora, considerando  $(S_{g-1}^{-1} \circ NP_{g-1})^*C = C_{aux}^{g-1}$  y, en vista de la parametrización de  $C_{aux}^{g-1}$  dada en (14), tenemos que localmente  $C_{aux}^{g-1}$  tiene una ecuación del tipo

$$v^{p_g} - b_1 u^{\alpha_g} + \sum b_{i,j} u^i v^j.$$

Así, usando que  $\alpha_g = p_{g-1}p_g\alpha_{g-1} + q_g$  podemos explotar  $p_{g-1}\alpha_{g-1}$ -veces para obtener que una ecuación de definición la transformada total de esta curva es

$$U^{p_{g-1}p_g\alpha_{g-1}}[(V^{p_g} - b_1 U^{q_g}) + \sum c_{k,l} U^k V^l],$$

lo que nos da la segunda biyección  $B(\phi, \psi) : E_{i-v_{g-1}} \longleftrightarrow E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}$  y, además, las igualdades

$$r_{i-v_{g-1}}(\phi) = r_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}(\psi).$$

□

LEMA 3.8. *Sea  $M \in \mathbf{C}[x, y]$ , entonces para  $i > v_{g-1}$*

$$\text{ord}_{E_i} \pi^* M = \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^*(NP_{g-1}^* M)$$

y

$$\begin{aligned} b_i &= \text{ord}_{E_i} \pi^* dx \wedge dy = \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* NP_{g-1}^* dx \wedge dy \\ &= \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* \text{Jac} NP_{g-1} + \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* dx_1 \wedge dy_1 \end{aligned}$$

PRUEBA. Para probar esta afirmación, basta comprobarla para  $M$  un monomio, y para  $M = f_i$ , con  $i = 1, \dots, g$  (ver [Pop, Corollary 5.4]). El caso  $f_g = f$  se mostró en el Lema anterior mediante la biyección  $B(\pi, \phi)$ . En los otros casos basta comparar  $\pi_{v_{g-1}}^* M$  y  $NP_{g-1}^* M$  y usar el Lema 2.1 que nos dice que  $(\pi_{v_{g-1}}^* C, p_{v_{g-1}+1})$  y  $(NP_{g-1}^* C, 0)$  son equisingulares.

En efecto,  $\pi_{v_{g-1}}$  puede ser visto como la composición de  $g - 1$  explosiones tóricas del siguiente tipo (módulo algunos cambios de coordenadas):

$$\eta_i = \begin{cases} x_{v_{i-1}} &= x_{v_i}^{p_i} y_{v_i}^a \\ y_{v_{i-1}} &= x_{v_i}^{q_i} y_{v_i}^c \end{cases} \quad \text{y} \quad NM_i = \begin{cases} x &= x_i^{p_i} \\ y &= x_i^{q_i} (a_{\beta_i} + y_i), \end{cases}$$

con  $p_i c - a q_i = 1$ . Así, tomando en cuenta que los  $T_i$  son isomorfismos y haciendo el calculo se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_{v_{g-1}}^* x^r y^s &= x_{v_{g-1}}^{p_{g-1} \dots p_2 (r p_1 + s q_1)} \cdot unit \\ NP_{g-1}^* x^r y^s &= x_{g-1}^{p_{g-1} \dots p_2 (r p_1 + s q_1)} \cdot unit \end{aligned}$$

mientras que  $\pi_{v_{g-1}}^* f_{g-1} = y_{v_{g-1}}$  y  $NP_{g-1}^* f_{g-1} = y_{g-1}$  módulo una unidad. Ahora, para  $f_i$  con  $i = 1, \dots, g - 2$  tenemos que  $\pi_{v_i}^* f_i = y_{v_i}$  y  $NP_i^* f_i = y_i$  módulo una unidad, pero el siguiente punto a explotar tiene coordenada  $y_{v_i}$  no nula, por lo que hay que hacer un cambio de coordenadas para centrar la explosión en el “origen” (en la carta conveniente) y también para el proceso de Newton hay que hacer un cambio de coordenadas para poner el polígono de Newton en posición conveniente, y de esto se sigue la igualdad en los órdenes de multiplicidad de dichas funciones a lo largo de los correspondientes divisores.

Como ya se observó en el Lema 3.3 tenemos que

$$\pi_{v_1}^* dx \wedge dy = (p_1 c - a q_1) x_{v_1}^{p_1 + q_1 - 1} y_{v_1}^{a + c - 1} dx_{v_1} \wedge dy_{v_1}$$

y  $NP_1^* dx \wedge dy = p_1 x_1^{p_1 + q_1 - 1} dx_1 \wedge dy_1$ . Como  $NP_1 = T_2 \circ N_1 \circ T_1$ , donde  $T_1$  y  $T_2$  son isomorfismos, se tiene que

$$b_{v_1}(\pi) = \text{ord}_{E_{v_1}} NP_1^* dx \wedge dy = \text{ord}_{E_{v_1}} \text{Jac} NP_1$$

Ahora, para el siguiente paquete de Newton tenemos

$$\begin{aligned} \pi_{v_2}^* dx \wedge dy &= \eta_2^*(unit \cdot x_{v_1}^{p_1 + q_1 - 1} dx_{v_1} \wedge dy_{v_1}) \\ &= unit \cdot x_{v_2}^{p_2(p_1 + q_1 - 1) + p_2 + q_2 - 1} dx_{v_2} \wedge dy_{v_2} \end{aligned}$$

y

$$NP_2^* dx \wedge dy = unit \cdot x_2^{p_2(p_1 + q_1 - 1) + p_2 + q_2 - 1} dx_1 \wedge dy_1$$

con lo que podemos observar que de hecho

$$b_i = \text{ord}_{E_{i-v_k}} \phi^* NP_k^* dx \wedge dy$$

para  $v_k < i \leq v_{k+1}$  y  $k = 1, \dots, g - 1$ .

Las igualdades

$$b_i(\pi) = \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* \text{Jac} NP_{g-1} + \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* dx_{g-1} \wedge dy_{g-1}$$

se siguen del hecho de que  $(\pi_{v_{g-1}}^* C, p_{v_{g-1}+1})$  y  $(NP_{g-1}^* C, 0)$  son equisingulares y del hecho que  $p_{v_{g-1}+1}$  tiene coordenada  $y_{v_{g-1}}$  no nula.

□

**COROLARIO 3.3.** *Sea  $M$  como en el lema anterior. Entonces,  $M$  pasa la cota  $C(\pi, E_i, \lambda)$  si y sólo si  $\text{Jac} NP_{g-1} \cdot NP_{g-1}^* M$  pasa la cota  $C(\phi, E_{i-v_{g-1}}, \lambda)$ . Equivalentemente,  $\text{ord}_{E_i} \pi^* M \geq \lfloor \lambda r_i(\pi) \rfloor - b_i(\pi)$  si y sólo si*

$$\text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* (\text{Jac} NP_{g-1} \cdot NP_{g-1}^* M) \geq \lfloor \lambda r_{i-v_{g-1}}(\phi) \rfloor - b_{i-v_{g-1}}(\phi).$$

**PRUEBA.** La desigualdad  $\text{ord}_{E_i} \pi^* M \geq \lfloor \lambda r_i(\pi) \rfloor - b_i(\pi)$  es equivalente por el Lema 3.7, a la desigualdad  $\text{ord}_{E_i} \pi^* M \geq \lfloor \lambda r_{i-v_{g-1}}(\phi) \rfloor - b_i(\pi)$  y por el Lema 3.8, a la desigualdad

$$\text{ord}_{i-v_{g-1}} \phi^* NP_{g-1} M \geq \lfloor \lambda r_{i-v_{g-1}}(\phi) \rfloor - \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* \text{Jac} NP_{g-1} - b_{i-v_{g-1}}(\phi).$$

□

El Lema y Corolario siguientes son consecuencia directa del hecho de que  $S_{g-1}$  es birracional.

**LEMA 3.9.** *Sea  $m \in \mathbf{C}[u, v]$  un monomio. Entonces,*

$$\text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* S_{g-1}^* m = \text{ord}_{E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}} \psi^* m$$

y

$$b_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}(\psi) = \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* S_{g-1}^* du \wedge dv = \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* \text{Jac} S_{g-1} + \text{ord}_{E_{i-v_{g-1}}} \phi^* dx_g \wedge dy_g.$$

**COROLARIO 3.4.** *Sea  $m$  como en el Lema anterior. Entonces,  $m$  pasa la cota  $C(\psi, \lambda, E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}})$  si y sólo si  $S^* m \cdot \text{Jac} S$  pasa la cota  $C(\phi, \lambda, E_{i-v_{g-1}})$ .*

**LEMA 3.10.** *Consideremos el monomio generalizado  $x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}$  cuyos exponentes satisfacen el siguiente sistema*

$$\begin{aligned} p_{g-1}\alpha_{g-1} + a_{g+1} &= p_{g-1}a_g + \alpha_{g-1}l_{g-2}, \\ \dots &= \dots, \\ p_2\alpha_2 + a_4 &= p_2a_3 + \alpha_2l_1, \\ p_1\alpha_1 + a_3 &= p_1a_1 + \alpha_1a_2. \end{aligned}$$

y  $m = u^{a_{g+1}-1}$ . Entonces,

$$NP_{g-1}^* (x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}) \cdot \text{Jac} NP_{g-1} = S_{g-1}^* m \cdot \text{Jac} S_{g-1},$$

módulo una unidad.

OBSERVACIÓN 3.10. El sistema que satisfacen los exponentes en el Lema anterior es el sistema  $S[g](\lambda)$  omitiendo la primera ecuación.

PRUEBA. Procederemos por inducción en  $g$ .

El primer paso de inducción ( $g = 2$ ) es el Lema 3.5, donde el peso  $w$  en  $\mathbb{C}[x, y]$  es sustituido por el sistema del enunciado y los exponentes  $r$  y  $s$  hacen el papel de  $a_1 - 1$  y  $a_2 - 1$ . Los exponentes del monomio  $x^{r+1}y^{s+1}$  cumplen la ecuación (28).

Como hipótesis de inducción asumamos que

$$NP_{g-2}^*(x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \cdots f_{g-3}^{l_{g-3}-1}) \cdot \text{Jac}NP_{g-2} = S_{g-2}^*u^{a_g-1} \cdot \text{Jac}S_{g-2}$$

módulo una unidad y, de hecho, utilizando las expresiones (13) de  $S_{g-2}$  tenemos que

$$S_{g-2}^*u^{a_g-1} \cdot \text{Jac}S_{g-2} = x_{g-2}^{p_{g-2}\alpha_{g-2}+a_g-1}$$

Para probar el caso general usaremos que para un elemento  $M \in \mathbb{C}[x, y]$  (en particular para un monomio generalizado como el del enunciado)

$$NP_{g-1}^*M \cdot \text{Jac}NP_{g-1} = NM_{g-1}^*(NP_{g-2}^*M \cdot \text{Jac}NP_{g-2}) \cdot \text{Jac}NM_{g-1}.$$

Así basta comprobar que

$$NM_{g-1}^*(x_{g-2}^{p_{g-2}\alpha_{g-2}+a_g-1} x_{g-2}^{(\alpha_{g-2}p_{g-2})(l_{g-2}-1)} y_{g-2}^{l_{g-2}-1}) \cdot \text{Jac}NM_{g-1} = S_{g-1}^*u^{a_{g+1}-1} \cdot \text{Jac}S_{g-1},$$

ya que  $NP_{g-2}^*f_{g-2} = x_{g-1}^{\alpha_{g-2}p_{g-2}} y_{g-1}$ . Por tanto, al aplicar el  $NM_{g-1}^*$  al monomio se tiene

$$x_{g-1}^{p_{g-1}(a_g-1)+p_{g-1}\alpha_{g-2}p_{g-2}l_{g-2}+q_{g-1}(l_{g-2}-1)+p_{g-1}+q_{g-1}-1} \cdot \text{unit} = x_{g-1}^{a_{g+1}+\alpha_{g-1}p_{g-1}-1}.$$

Utilizando la expresión de  $\alpha_g$  dada en (12), simplificamos el exponente del lado izquierdo de la igualdad anterior y tenemos que

$$x_{g-1}^{p_{g-1}a_g-1+\alpha_{g-1}l_{g-2}-1} \cdot \text{unit} = x_{g-1}^{a_{g+1}+\alpha_{g-1}p_{g-1}-1}.$$

La igualdad de los exponentes en ambos lados de la última igualdad se sigue de la ecuación

$$p_{g-1}a_g + \alpha_{g-1}l_{g-2} = p_{g-1}\alpha_{g-1} + a_{g+1}$$

del enunciado. □

PROPOSICIÓN 3.4. Sea  $C_{g-1} = \{f_{g-1} = 0\}$  la raíz aproximada  $g - 1$  de  $C$ , entonces

$$NP_{g-1}^*f_{g-1}^t = (x_{g-1}^{p_{g-1}\alpha_{g-1}} y_{g-1})^t = S_{g-1}^*v^t.$$



Además, si  $x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}$  es un monomio generalizado como en el Lema anterior (con la condición en los exponentes), tenemos que para  $i > v_{g-1}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes

$$x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}f_{g-1}^t \text{ pasa } C(\pi, E_i, \lambda)$$

si y solo si

$$NP_{g-1}^*(x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}f_{g-1}^t) \cdot \text{Jac}NP_{g-1} \text{ pasa } C(\phi, E_{i-v_{g-1}}, \lambda)$$

si y sólo si

$$S_{g-1}^*(u^{a_{g+1}-1}v^t) \cdot \text{Jac}S_{g-1} \text{ pasa } C(\phi, E_{i-v_{g-1}}, \lambda)$$

si y sólo si

$$u^{a_{g+1}-1}v^t \text{ pasa } C(\psi, E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}, \lambda)$$

PRUEBA. La primera afirmación es consecuencia directa de la definición de la transformación birracional  $S_{g-1}$ . La primera equivalencia es el Corolario 3.3, la segunda equivalencia se sigue del Lema 3.10 y de la primera afirmación de esta Proposición. La tercera equivalencia se sigue del Corolario 3.4.  $\square$

Con estos resultados estamos en condiciones de probar el Teorema 3.1. En primer lugar tenemos que (b) implica (a).

PRUEBA. (TEOREMA 3.1) Se tiene que como consecuencia del Lema 3.6

$$\bigcup_{i=1}^{g-1} \bigcup_{j=i}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) \subseteq \mathcal{JN}(C).$$

El Corolario 3.3, que se basa en los Lemas 3.7 y 3.8 y el Corolario 3.4, que es consecuencia de que  $S_{g-1}$  es birracional y la Proposición 1.2, nos permiten relacionar las cotas  $C(\pi, E_i, \lambda)$  asociadas a los divisores excepcionales  $E_i$ , con  $i > v_{g-1}$  de la resolución minimal de  $C$  con las cotas  $C(\phi, E_{i-v_{g-1}}, \lambda)$ ,  $C(\psi, E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+i-v_{g-1}}, \lambda)$  asociadas a los divisores excepcionales de las resoluciones de  $NP_{g-1}^*C$  y  $C_{aux}^{g-1}$ .

Como  $C_{aux}^{g-1}$  tiene un sólo par de Newton  $(p_g, \alpha_g)$ , podemos elegir coordenadas de modo que es no degenerada respecto a su polígono de Newton y como consecuencia del Teorema de Howald (Teorema 1.4 o la Proposición 3.1), podemos calcular sus números de salto e identificarlos con números de salto de  $C$  mayores a  $1/p_g$  y debidos a las cotas asociadas a los divisores  $E_i$ , con  $i > v_{g-1}$  (es decir, del último paquete de Newton) con los números de salto de  $C_{aux}^{g-1}$ . En efecto, el Lema 3.7 relaciona las multiplicidades en el divisor de ruptura de la resolución de  $C_{aux}^{g-1}$ , es decir,  $E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+v_g-v_{g-1}}$  con las multiplicidades de  $C$  en  $E_{v_g}$ .

Como por el Teorema de Howald los números de salto  $\mathcal{JN}(C_{aux}^{g-1})$  están provocados por el divisor  $E_{p_{g-1}\alpha_{g-1}+v_g-v_{g-1}}$ , entonces estamos seguros de obtener así los números de salto del último paquete de Newton de  $C$ . En consecuencia

$$\mathcal{JN}(C) = \bigcup_{i=1}^{g-1} \bigcup_{j=i}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}) \cup J(p_g, \alpha_g),$$

y se tiene (a).

Sea  $\lambda = \frac{a_{g+1}p_g + t\alpha_g}{p_g\alpha_g} \in J(p_g, \alpha_g)$ , y se tiene que  $u_{g-1}^{a_{g+1}-1}v_{g-1}^{t-1}$  es el monomio responsable del salto de  $C_{aux}^{g-1}$ . Luego, por el Lema 3.10 y la Proposición 3.4 se tiene que  $u_{g-1}^{a_{g+1}-1}v_{g-1}^{t-1}$  corresponde al monomio generalizado

$$M_\lambda(x, y, f_1, \dots, f_{g-1}) := x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}f_{g-1}^{t-1},$$

y definimos

$$M_\lambda^{ev_i} := M_\lambda(x, y, f_1, \dots, f_{i-1}, 1, \dots, 1),$$

y se tiene que los exponentes del monomio generalizado  $M_\lambda^{ev_{g-1}} = x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \dots f_{g-2}^{l_{g-2}-1}$  satisfacen el sistema lineal

$$\begin{aligned} p_{g-1}\alpha_{g-1} + a_{g+1} &= p_{g-1}a_g + \alpha_{g-1}l_{g-2}, \\ \dots &= \dots, \\ p_2\alpha_2 + a_4 &= p_2a_3 + \alpha_2l_1, \\ p_1\alpha_1 + a_3 &= p_1a_1 + \alpha_1a_2. \end{aligned}$$

Observemos que con los pesos  $w(x) = p_1$ ,  $w(y) = \alpha_1$ , el monomio  $M_\lambda^{ev_1} = x^{a_1-1}y^{a_2-1}$  tiene peso

$$\begin{aligned} w(x^{a_1-1}y^{a_2-1}) &= p_1a_1 + \alpha_1a_2 - p_1 - \alpha_1 \\ &= p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a_3, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por la última ecuación del sistema, por lo que  $w(x^{a_1-1}y^{a_2-1})$  es mayor o igual al conductor del semigrupo  $\Gamma_1 = \langle p_1, \alpha_1 \rangle$ , y por el Lema 3.5 podemos hacer *pullback* del monomio  $x^{a_1-1}y^{a_2-1}$  con  $NP_1$  multiplicado por  $\text{Jac}NP_1$  para obtener  $S_1^*(u_1^{a_3-1}) \cdot \text{Jac}S_1$ . Claramente puede haber otras soluciones  $(a'_1, a'_2)$ , pero por la discusión en la prueba del caso de dos pares, se tendrá que  $NP_1^*(x^{a'_1-1}y^{a'_2-1}) \cdot \text{Jac}NP_1 = S_1^*(u_1^{a_3-1}) \cdot \text{Jac}S_1$ , módulo una unidad. Para tener unicidad pediremos  $a_2 < p_1$ . Y se tiene

$$NP_1^*(M_\lambda^{ev_1}) \cdot \text{Jac}NP_1 = S_1^*(u_1^{a_3-1}) \cdot \text{Jac}S_1,$$

módulo una unidad.

Ahora, dando los pesos  $w_1(u_1) = p_2$ ,  $w_1(v_1) = \alpha_2$ , tenemos que, usando la penúltima ecuación del sistema,  $w_1(u_1^{a_3-1}v_1^{l_1-1})$  es mayor al conductor del semigrupo  $\Gamma_2 = \langle p_2, \alpha_2 \rangle$  y por el Lema 3.10 se tiene la siguiente relación

$$NP_2^*(x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1}) \cdot \text{Jac}NP_2 = S_2^*u_2^{a_4-1} \cdot \text{Jac}S_2.$$

Nuevamente, para tener unicidad pedimos  $a_2 < p_1$  y  $a_3 < p_2$ .

Así, procediendo recursivamente y dando los pesos  $w_{g-1}(u_{g-1}) = p_g$ ,  $w_{g-1}(v_{g-1}) = \alpha_g$ , tendremos que  $w_{g-1}(u_{g-1}^{a_{g+1}-1}v_{g-1}^{l_{g-1}-1})$  será mayor al conductor del semigrupo  $\Gamma_g = \langle p_g, \alpha_g \rangle$  y

$$NP_{g-1}^*(M_\lambda^{ev_{g-1}}) \cdot \text{Jac}NP_{g-1} = S_{g-1}^*u_{g-1}^{a_{g+1}-1} \cdot \text{Jac}S_{g-1},$$

con unicidad pidiendo que  $a_{i+1} < p_i$  para  $i = 1, \dots, g$ .

Sin embargo, nuevamente,  $\lambda$  puede tener varias presentaciones. Como los conjuntos

$$\bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1}), \text{ con } i \in \{1, \dots, g-1\}$$

son disjuntos dos a dos,  $\lambda$  puede tener, a lo más,  $g$  presentaciones distintas:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a_{g+1}p_g + t\alpha_g}{p_g\alpha_g} \\ &= \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \dots \left( \frac{1}{p_{i_1+1}} \left( \frac{p_{i_1}a_{i_1+1} + \alpha_{i_1}l_{i_1-1}}{p_{i_1}\alpha_{i_1}} + l_{i_1} \right) + l_{i_1+1} \right) \dots + l_{g-1} \right) \in J(p_{i_1}, \alpha_{i_1}, l_{i_1}, \dots, l_{g-1}) \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \dots \left( \frac{1}{p_{i_k+1}} \left( \frac{p_{i_k}a_{i_k+1} + \alpha_{i_k}l_{i_k-1}}{p_{i_k}\alpha_{i_k}} + l_{i_k} \right) + l_{i_k+1} \right) \dots + l_{g-1} \right) \in J(p_{i_k}, \alpha_{i_k}, l_{i_k}, \dots, l_{g-1}), \end{aligned}$$

y para cada presentación tendremos un monomio generalizado

$$x^{a_1-1}y^{a_2-1}f_1^{l_1-1} \dots f_{i_j-1}^{l_{i_j-1}-1} f_{i_j}^{l_{i_j}} \dots f_{g-1}^{l_{g-1}}$$

que falla la cota  $C(E_{v_{i_j}}, \lambda)$ , cada una un divisor de ruptura distinto y por lo tanto son linealmente independientes en  $\mathcal{K}_\lambda(C)$ . En este caso se tendrá que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_\lambda(C) = k + 1.$$

Para concluir, observemos que si  $\lambda \in \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_i, \alpha_i, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{g-1})$ , con presentación

$$\lambda = \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \dots \left( \frac{1}{p_{i+1}} \left( \frac{p_i a'_{i+1} + \alpha_i l'_{i-1}}{p_i \alpha_i} + l'_i \right) + l'_{i+1} \right) \dots + l'_{g-1} \right),$$

entonces en el sistema lineal  $S[i](\lambda)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \alpha_i e_{i-1} = p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} + \alpha_i p_i l_i + \alpha_i p_i p_{i+1} l_{i+1} + \cdots + \alpha_i p_i p_{i+1} \cdots p_{g-1} l_{g-1}, \\ p_{i-1} \alpha_{i-1} + a_{i+1} = p_{i-1} a_i + \alpha_{i-1} l_{i-2}, \\ \quad \quad \quad \cdots = \cdots, \\ p_2 \alpha_2 + a_4 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2. \end{array} \right.$$

en las incognitas  $a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i, \dots, l_{g-1}$  sujetas a las restricciones

$$p_i a_{i+1} + \alpha_i l_{i-1} < p_i \alpha_i, \quad a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, l_1, l_2, \dots, l_{i-1} \geq 1, \quad 0 \leq l_j \leq p_{j+1} - 1.$$

Tenemos que, considerando que  $e_{i-1} = p_i p_{i+1} \cdots p_g$ , el lado izquierdo de la primera ecuación se convierte en

$$\lambda \alpha_i e_{i-1} = p_i a'_{i+1} + \alpha_i l'_{i-1} + \alpha_i p_i l'_i + \alpha_i p_i p_{i+1} l'_{i+1} + \cdots + \alpha_i p_i p_{i+1} \cdots p_{g-1} l'_{g-1},$$

y por lo tanto tiene solución  $(a'_{i+1}, l'_{i-1}, l'_i, \dots, l'_{g-1})$ , como  $a'_{i+1} \geq 1$  la siguiente ecuación tendrá solución  $(a'_i, l'_{i-1})$  ya que el lado izquierdo de la igualdad es mayor al conductor de  $\Gamma_{i-1}$  y así sucesivamente para obtener una solución al sistema:

$$(a'_1, a'_2, \dots, a'_{i+1}, l'_1, l'_2, \dots, l'_{i-1}, l'_i, \dots, l'_{g-1}),$$

la cual de hecho es única dada por las restricciones dadas en el sistema. Así, para cada presentación de  $\lambda$  tendremos una solución única para el sistema  $S[i_j](\lambda)$  y concluimos (b). □

#### 4. Ejemplos

1. Discutamos en primer lugar el ejemplo de Naie con dos pares de Newton  $(p_1, q_1) = (2, 3)$  y  $(p_2, q_2) = (5, 6)$ . En este caso,  $\alpha_2 = 36$  y tenemos los siguientes sistemas.

$$S[1](\lambda) \equiv \lambda 30 = 2a_1 + 3a_2 + 6l_1.$$

$$S[2](\lambda) \equiv \begin{cases} \lambda 180 = 5a_3 + 36l_1, \\ 6 + a_3 = 2a_1 + 3a_2. \end{cases}$$

Para  $\lambda = \frac{11}{30} = \frac{66}{180}$ , el sistema  $S[1](\lambda)$  tiene la solución  $(a_1, a_2, l_1) = (1, 1, 1)$  y el sistema  $S[2](\lambda)$  tiene la solución  $(a_1, a_2, a_3, l_1) = (3, 2, 6, 1)$ .

Teniendo en cuenta los siguientes valores

	$\text{ord}_{E_i} \pi^* x$	$\text{ord}_{E_i} \pi^* y$	$\text{ord}_{E_i} \pi^* f_1$	$r_i$	$b_i$
$E_3$	2	3	6	30	4
$E_9$	10	15	36	180	30

es fácil comprobar que  $f_1$  no pasa la cota  $C(E_3, \frac{11}{30}) = 11 - 4 = 7$  pero sí pasa la cota  $C(E_9, \frac{11}{30}) = 66 - 30 = 36$ ; mientras que  $x^2 y$  pasa la cota  $C(E_3, \frac{11}{30})$  pero falla la cota  $C(E_9, \frac{11}{30})$ .

2. Sea  $C$  la curva con tres exponentes de Puiseux definida por

$$\left\{ f(x, y) = ((y^3 - x^7)^2 + x^4 y^5)^3 + x^7 y^4 (y^3 - x^7)^4 = 0 \right\},$$

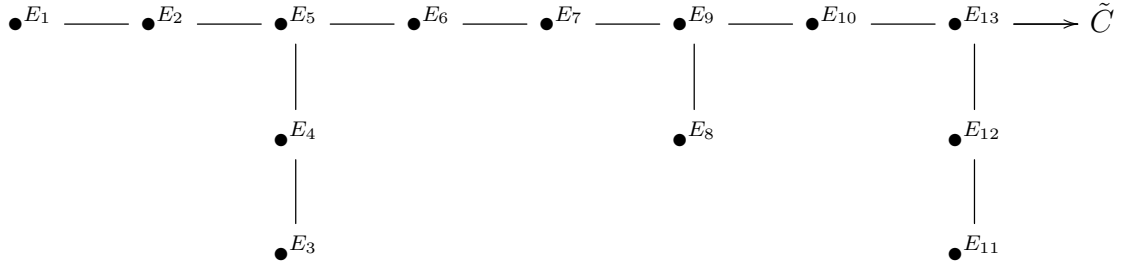
la cual tiene tres pares de Newton:  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^3 = \{(3, 7), (2, 5), (3, 4)\}$ , *enlace*:  $\{(\alpha_i, p_i)\}_{i=1}^3 = \{(7, 3), (47, 2), (286, 3)\}$  y diagrama de Eisenbud-Neumann:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{\alpha_1=7} & \circ & \xrightarrow{\alpha_2=47} & \circ & \xrightarrow{\alpha_3=286} & \circ & \xrightarrow{\quad} & f \\
 & & \downarrow p_1=3 & & \downarrow p_2=2 & & \downarrow p_3=3 & & \\
 & & y & & f_1 & & f_2 & & 
 \end{array}$$

Recordando que aplicando el algoritmo de Euclides a los pares Newton podemos obtener la sucesión de multiplicidades

$$\begin{array}{r}
 7 = 2 \times \underline{3} + 1 \\
 3 = 3 \times \underline{1} \\
 \hline
 5 = 2 \times \underline{2} + 1 \\
 2 = 2 \times \underline{1} \\
 \hline
 4 = 1 \times \underline{3} + 1 \\
 3 = 3 \times \underline{1}
 \end{array}$$

y observando que  $e_1 = 6, e_2 = 3$  obtenemos la sucesión de multiplicidades:  $(18, 18, 6, 6, 6 \mid 6, 6, 3, 3 \mid 3, 1, 1, 1)$  y por lo tanto se tiene que el número de Milnor de  $C$  es  $\mu(f) = \sum a_i(a_i - 1) = 780$ , por lo que hay 390 números de salto menores a 1 y se tiene el grafo de resolución dual:



Con la siguiente tabla de multiplicidades:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$E_9$	$E_{10}$	$E_{11}$	$E_{12}$	$E_{13}$
$r_i$	18	36	42	84	126	132	138	141	282	285	286	572	858
$b_i$	1	2	3	6	9	10	11	12	24	25	26	52	78

Los sistemas  $S[i](\lambda)$  tienen la siguiente forma

$$S[1](\lambda) \equiv \lambda 126 = 3a_1 + 7a_2 + 21l_1 + 42l_2.$$

$$S[2](\lambda) \equiv \begin{cases} \lambda 282 & = 2a_3 + 47l_1 + 94l_2, \\ 21 + a_3 & = 3a_1 + 7a_2. \end{cases}$$

$$S[3](\lambda) \equiv \begin{cases} \lambda 858 & = 3a_4 + 286l_2, \\ 94 + a_4 & = 2a_3 + 47l_1, \\ 21 + a_3 & = 3a_1 + 7a_2. \end{cases}$$

Para ningún número de salto  $\lambda \in \mathcal{JN}(C)$  tenemos que varios sistemas  $S[i](\lambda)$  tengan solución; es decir, todos los espacios vectoriales  $\mathcal{K}_\lambda(C)$  son unidimensionales.

Veamos como calcular funciones que producen los saltos  $\frac{79}{126}$ ,  $\frac{55}{282}$  y  $\frac{370}{858}$ .

Para  $\lambda = \frac{79}{126}$ , el sistema  $S[1](\lambda)$  tiene la solución  $(a_1, a_2, l_1, l_2) = (3, 1, 1, 1)$ , y los sistemas  $S[2](\lambda)$  y  $S[3](\lambda)$  no tiene solución. Se puede comprobar en la tablas (ver el Apéndice 2.) que la función  $x^2 f_1 f_2$  no pasa la cota  $C(E_5, \frac{79}{126})$  pero si pasa las cotas  $C(E_9, \frac{79}{126})$  y  $C(E_{13}, \frac{79}{126})$ .

Para  $\lambda = \frac{55}{282}$ , el sistema  $S[2](\lambda)$  tiene la solución  $(a_1, a_2, a_3, l_1, l_2) = (6, 1, 4, 1, 1, 0)$  pero los sistemas  $S[1](\lambda)$  y  $S[3](\lambda)$  no tienen la solución. El monomio generalizado  $x^5$  falla la cota  $C(E_9, \frac{55}{282})$  pero pasa las cotas  $C(E_{13}, \frac{55}{282})$  y  $C(E_{13}, \frac{55}{282})$ , como se puede comprobar en las tablas.

Para  $\lambda = \frac{370}{858}$ , los sistemas  $S[1](\lambda)$  y  $S[2](\lambda)$  no tiene solución pero el sistema  $S[3](\lambda)$  tiene la solución  $(a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2) = (7, 2, 14, 28, 2, 1)$ . El monomio generalizado

correspondiente a esa solución es  $x^6 y f_1$ . Puede comprobarse con las tablas que  $x^6 y f_1$  pasa las cotas  $C(E_5, \frac{370}{858})$ , ni  $C(E_9, \frac{370}{858})$  pero pasa la cota  $C(E_{13}, \frac{370}{858})$ .

Una tabla completa de los números de salto junto que las funciones que provocan los saltos está en el Apéndice 2.

3. Consideremos ahora una curva con tres pares de Newton  $(p_1, q_1) = (3, 7), (p_2, q_2) = (2, 5), (p_3, q_3) = (5, 13)$ . En este caso,  $\alpha_2 = 47$  y  $\alpha_3 = 483$ . Los sistemas  $S[i](\lambda)$  tienen la siguiente forma

$$S[1](\lambda) \equiv \lambda 210 = 3a_1 + 7a_2 + 21l_1 + 42l_2.$$

$$S[2](\lambda) \equiv \begin{cases} \lambda 470 & = 2a_3 + 47l_1 + 94l_2, \\ 21 + a_3 & = 3a_1 + 7a_2. \end{cases}$$

$$S[3](\lambda) \equiv \begin{cases} \lambda 2415 & = 5a_4 + 483l_2, \\ 94 + a_4 & = 2a_3 + 47l_1, \\ 21 + a_3 & = 3a_1 + 7a_2. \end{cases}$$

Para  $\lambda = \frac{62}{210} = \frac{713}{2415}$ , el sistema  $S[1](\lambda)$  tiene la solución  $(a_1, a_2, l_1, l_2) = (2, 2, 0, 1)$ , el sistema  $S[2](\lambda)$  no tiene la solución y el sistema  $S[3](\lambda)$  tiene solución  $(a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2) = (3, 5, 23, 46, 2, 1)$ .

Teniendo en cuenta los siguientes valores

	$E_5$	$E_9$	$E_{15}$
$r_i$	210	470	2415
$b_i$	9	24	137
$\text{ord}_{E_i} \pi^* x$	3	6	30
$\text{ord}_{E_i} \pi^* y$	7	14	70
$\text{ord}_{E_i} \pi^* f_1$	21	47	235
$\text{ord}_{E_i} \pi^* f_2$	42	94	483

se puede comprobar que  $xy f_2$  falla la cota  $C(E_5, \frac{62}{210}) = 53$  y pasa las cotas  $C(E_9, \frac{62}{210}) = 114$  y  $C(E_{15}, \frac{62}{210}) = 576$ . Mientras que  $x^{62} y^4 f_1$  pasa las cotas  $C(E_5, \frac{62}{210}) = 53$ ,  $C(E_9, \frac{62}{210}) = 114$  pero no pasa la cota  $C(E_{15}, \frac{62}{210}) = 576$ .

## CAPÍTULO 4

### APÉNDICES

#### 1. Algoritmo

Sea  $C$  un germen de curva plana irreducible, con  $g$  pares de Newton  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^g$  y enlace  $\{(p_i, \alpha_i)\}_{i=1}^g$ .

1. Primero ordenamos los monomios de  $\mathbf{C}[x, y]$  por los pesos  $w(x) = p_1$  y  $w(y) = \alpha_1$ . Luego, por el teorema de Howald se tiene que los monomios  $M \in \mathbf{C}[x, y]$  con peso  $w(M) < p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1$  provocan los saltos  $\frac{w(M)+p_1+\alpha_1}{p_1\alpha_1} \in J(p_1, \alpha_1)$  de  $C_1$  y los podemos ordenar  $M_1, M_2, \dots, M_s$ , donde  $s = \frac{(p_1-1)(\alpha_1-1)}{2}$ . Estos monomios también provocan los siguientes saltos de  $C$

$$J(p_1, \alpha_1, 0, \dots, 0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_1, \alpha_1, l_1, \dots, l_{g-1}).$$

Recordando que el conductor de  $\Gamma_1 = \langle p_1, \alpha_1 \rangle$  es  $p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1$  tenemos que para todo  $a$ , existe un monomio tal que  $w(m) = p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + a$ .

2. Ahora ordenamos los monomios de  $\mathbf{C}[u_1, v_1]$  por los pesos  $w_1(u_1) = p_2$  y  $w_1(v_1) = \alpha_2$  y se tiene que los monomios con  $w_1(u_1^r v_1^s) < p_2\alpha_2 - p_2 - \alpha_2$  provocan los números de salto  $\frac{w_1(u_1^r v_1^s)+p_2+\alpha_2}{p_2\alpha_2} \in J(p_2, \alpha_2)$  de  $C_{aux}^1$ . Sin embargo la latiz de monomios

$$\begin{array}{cccccc} u_1^{p_2} & u_1 v_1^{p_2} & u_1^2 v_1^{p_1} & u_1^3 v_1^{p_2} & \cdots & u_1^{\alpha_2} v_1^{p_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ v_1^2 & u_1 v_1^2 & u_1^2 v_1^2 & u_1^3 v_1^2 & \cdots & u_1^{\alpha_2} v_1^2 & \cdots \\ v_1 & u_1 v_1 & u_1^2 v_1 & u_1^3 v_1 & \cdots & u_1^{\alpha_2} v_1 & \cdots \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 & \cdots & u_1^{\alpha_2} & \cdots \end{array}$$

se transforma en

$$\begin{array}{cccccc} m_1 f_1^{p_2} & m_2 f_1^{p_2} & m_3 f_1^{p_2} & m_4 f_1^{p_2} & \cdots & m_{\alpha_2} f_1^{p_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ m_1 f_1^2 & m_2 f_1^2 & m_3 f_1^2 & m_4 f_1^2 & \cdots & m_{\alpha_2} f_1^2 & \cdots \\ m_1 f_1 & m_2 f_1 & m_3 f_1 & m_4 f_1 & \cdots & m_{\alpha_2} f_1 & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{\alpha_2} & \cdots \end{array}$$



donde  $m_i$  es un monomio en  $\mathbf{C}[x, y]$  con exponente de  $y$  menor que  $p_1$  y con peso  $w(m_i) = p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1 + i$ . Así, la función responsable del salto  $\frac{ap_2+t\alpha_2}{p_2\alpha_2} < 1$ , será  $m_a f_1^{t-1}$ . Estas funciones nos darán los números de salto de  $C$

$$J(p_2, \alpha_2, 0, \dots, 0) \subseteq \bigcup_{j=2}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_2, \alpha_2, l_2, \dots, l_{g-1}).$$

Con los monomios de  $\mathbf{C}[u_1, v_1]$  ordenados a partir del orden  $w_1$  ordenamos monomios generalizados de  $\mathbf{C}[x, y, f_1]$  en  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2, 0}$ .

Ahora tomando en cuenta que el conductor de  $\Gamma_2 = \langle p_2, \alpha_2 \rangle$  es  $p_2\alpha_2 - p_2 - \alpha_2$  tendremos que para todo  $a$ , existe un monomio  $m$  con  $w_1(m) = p_2\alpha_2 - p_2 - \alpha_2 + a$ .

3. Como tercer paso se ordenan los monomios de  $\mathbf{C}[u_2, v_2]$  por los pesos  $w_2(u_2) = p_3$ ,  $w_2(v_2) = \alpha_3$  y los monomios con peso  $w_2(u_2^r v_2^s) < p_3\alpha_3 - p_3 - \alpha_3$  provocan los números de salto  $\frac{w_2(u_2^r v_2^s) + p_3 + \alpha_3}{p_3\alpha_3} \in J(p_3, \alpha_3)$  de  $C_{aux}^2$  pero ahora la latiz de monomios

$$\begin{array}{cccccc} u_2^{p_3} & u_2 v_2^{p_3} & u_2^2 v_2^{p_3} & u_2^3 v_2^{p_3} & \dots & u_2^{\alpha_3} v_2^{p_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ v_2^2 & u_2 v_2^2 & u_2^2 v_2^2 & u_2^3 v_2^2 & \dots & u_2^{\alpha_3} v_2^2 & \dots \\ v_2 & u_2 v_2 & u_2^2 v_2 & u_2^3 v_2 & \dots & u_2^{\alpha_3} v_2 & \dots \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 & \dots & u_2^{\alpha_3} & \dots \end{array}$$

se transforma en

$$\begin{array}{cccccc} M_1 f_2^{p_3} & M_2 f_2^{p_3} & M_3 f_2^{p_3} & M_4 f_2^{p_3} & \dots & M_{\alpha_3} f_2^{p_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ M_1 f_2^2 & M_2 f_2^2 & M_3 f_2^2 & M_4 f_2^2 & \dots & M_{\alpha_3} f_2^2 & \dots \\ M_1 f_2 & M_2 f_2 & M_3 f_2 & M_4 f_2 & \dots & M_{\alpha_3} f_2 & \dots \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \dots & M_{\alpha_3} & \dots \end{array}$$

donde  $M_i \in \mathbf{C}[x, y, f_1]$  corresponde a  $w_1(u_1^r v_1^s) = p_2\alpha_2 - p_2 - \alpha_2 + i$ . Ahora estas funciones provocarán los saltos

$$J(p_3, \alpha_3, 0, \dots, 0) \subseteq \bigcup_{j=3}^{g-1} \bigcup_{l_j=0}^{p_{j+1}-1} J(p_3, \alpha_3, l_3, \dots, l_{g-1}).$$

Así procedemos recursivamente para cada  $C_{aux}^{j-1}$ .

Otro algoritmo consiste en lo siguiente:

- Por Howald tenemos que los números de salto de la primera raíz aproximada  $C_1$  de  $C$  son

$$J(p_1, \alpha_1) = \left\{ \lambda = \frac{(r+1)p_1 + (s+1)\alpha_1}{p_1\alpha_1} < 1 \right\}.$$

Dados los pesos  $w(x) = p_1$  y  $w(y) = \alpha_1$  se tiene que un monomio  $m \in \mathbf{C}[x, y]$  con peso  $w(m) < p_1\alpha_1 - p_1 - \alpha_1$  provoca el número de salto  $\lambda_1 = \frac{w(m)+p_1+\alpha_1}{p_1\alpha_1} \in J(p_1, \alpha_1)$ . Luego, por el Lema 3.1 se tiene que

$$\lambda_2 := \frac{1}{p_2} (\lambda_1 + l_1),$$

con  $l_1 \in \{0, \dots, p_2 - 1\}$  es un número de salto de  $C_2$  y

$$[mf_1^{l_1}] \in \mathcal{K}_{\lambda_2}(C_2)^*.$$

A su vez, por el Lema 3.6 se tiene que

$$\lambda_3 := \frac{1}{p_3} (\lambda_2 + l_2),$$

con  $l_2 \in \{0, \dots, p_3 - 1\}$  es un número de salto de  $C_3$  y

$$[mf_1^{l_1} f_2^{l_2}] \in \mathcal{K}_{\lambda_3}(C_3)^*.$$

Así, procediendo recursivamente se tendrá que

$$\lambda := \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \cdots \left( \frac{1}{p_2} (\lambda_1 + l_1) + l_2 \right) \cdots + l_{g-1} \right) \in J(p_1, \alpha_1, l_1, \dots, l_{g-1}),$$

con  $l_i \in \{0, \dots, p_{i+1} - 1\}$  es un número de salto de  $C$  y

$$[mf_1^{l_1} \cdots f_{g-1}^{l_{g-1}}] \in \mathcal{K}_\lambda(C)^*,$$

y estos números de salto serán *contribuidos críticamente* (usando la terminología de [ST] y [Tuc]) por el primer divisor de ruptura  $E_{v_1}$ , es decir, la función sólo falla la cota  $C(E_{v_1}, \lambda)$ .

- En general, si  $\lambda_i \in J(p_i, \alpha_i)$ , con  $i \in \{1, \dots, g\}$ , entonces  $\lambda_i$  es un número de salto de  $C_i$  y de la curva no degenerada  $C_{aux}^{i-1}$  con único par  $(p_i, \alpha_i)$ , el cual es provocado por un monomio  $m$  en las coordenadas  $(u_{i-1}, v_{i-1})$  con peso  $w_{i-1}(m) < p_i\alpha_i - p_i - \alpha_i$ , donde el peso  $w_{i-1}$  lo definimos por  $w_{i-1}(u_{i-1}) = p_i$  y  $w_{i-1}(v_{i-1}) = \alpha_i$ , y

$$\lambda_i = \frac{w_{i-1}(m) + p_i + \alpha_i}{p_i\alpha_i}.$$

Usando el Lema 3.6 recursivamente tenemos que  $\frac{\lambda_i}{e_i} \in J(p_i, \alpha_i, 0, \dots, 0)$  es un número de salto de  $C$  y por el Teorema 3.1 tenemos que si  $m = u_{i-1}^{a_{i+1}-1} v_{i-1}^{t-1}$ , el sistema  $S[i] \left( \frac{\lambda_i}{e_i} \right)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_i}{e_i} \alpha_i e_{i-1} = p_i a_{i+1} + \alpha_i t, \\ p_{i-1} \alpha_{k-1} + a_{i+1} = p_{i-1} a_i + \alpha_{i-1} l_{i-2}, \\ \dots = \dots, \\ p_2 \alpha_2 + a_4 = p_2 a_3 + \alpha_2 l_1, \\ p_1 \alpha_1 + a_3 = p_1 a_1 + \alpha_1 a_2. \end{array} \right.$$

tiene solución única pidiendo que  $a_{k+1} < p_k$  y se tiene que el monomio  $m$  corresponde al monomio generalizado

$$M = x^{a_1-1} y^{a_2-1} f_1^{l_1-1} \dots f_{i-2}^{l_{i-2}-1} f_{i-1}^{t-1},$$

el cuál provoca el salto  $\frac{\lambda_i}{e_i}$  debido a la cota  $C(E_{v_i}, \frac{\lambda_i}{e_i})$ .

Como en el inciso anterior usando recursivamente el Lema 3.6 podemos considerar los números de salto de  $C$  de la forma

$$\lambda = \frac{1}{p_g} \left( \frac{1}{p_{g-1}} \dots \left( \frac{1}{p_{i+1}} (\lambda_i + l_i) + l_{i+1} \right) \dots + l_{g-1} \right) \in J(p_i, \alpha_i, l_i, \dots, l_{g-1}),$$

los cuales son contribuidos críticamente por el divisor  $E_{v_i}$  y

$$[M f_i^{l_i} \dots f_{g-1}^{l_{g-1}}] \in \mathcal{K}_\lambda(C)^*.$$

De esta manera encontramos los números de salto y las funciones que provocan los saltos debidos a cada divisor de ruptura.

## 2. Tablas de Ejemplo

En este apéndice detallamos el calculo de los 390 ideales multiplicadores con números de salto  $< 1$  para la curva con tres pares característicos del Ejemplo 2 de la Sección 4.

### Interpretación de las filas y columnas de la siguiente Tabla:

- La primera y segunda columna corresponden al numerador y denominador del número de salto, que se escribe de manera decimal en la tercera columna.
- Las columnas cuarta, quinta y sexta dan la cota correspondiente para el primer, segundo y tercer divisores de ruptura.
- Las columnas séptima, octava o novena dan una función que no pasa alguna de las cotas impuestas por el número de salto correspondiente a esa fila, pero sí todas las cotas correspondientes a números de salto inferiores.

La función se escribe en la columna séptima, octava o novena dependiendo que la función falle la cota del primer, segundo o tercer divisor de ruptura.

En el caso de fallar en el primer divisor de ruptura el color de fondo de las celdas de esa fila es azul, en el caso de fallar en el segundo divisor de ruptura el color de fondo de las celdas de esa fila es verde y en el caso fallar en el tercer divisor de ruptura el color de fondo de las celdas de esa fila es blanco.

- La última columna muestra una terna que son los ordenes de anulación de la susodicha función a lo largo de los divisores de ruptura.

10	126	0.07936507937	1	-2	-10	1			0,0,0
13	126	0.1031746032	4	5	10	x			3,6,18
16	126	0.126984127	7	11	30	x^2			6,12,36
17	126	0.1349206349	8	14	37	y			7,14,42
19	126	0.1507936508	10	18	51	x^3			9,18,54
20	126	0.1587301587	11	20	58	xy			10,20,60
49	282	0.1737588652	12	25	71		x^4		12,24,72
51	282	0.1808510638	13	27	77		x^2y		13,26,78
53	282	0.1879432624	14	29	83		y^2		14,28,84
55	282	0.195035461	15	31	89		x^5		15,30,90
57	282	0.2021276596	16	33	95		x^3y		16,32,96
59	282	0.2092198582	17	35	101		xy^2		17,34,102
61	282	0.2163120567	18	37	107		x^6		18,36,108
63	282	0.2234042553	19	39	113		x^4y		19,38,114
65	282	0.2304964539	20	41	119		x^2y^2		20,40,120
67	282	0.2375886525	20	43	125		x^7,y^3,y^3-ax^7		21,42,126
69	282	0.2446808511	21	45	131		x^5y		22,44,132
31	126	0.246031746	22	45	133	f_1			21,47,141
71	282	0.2517730496	22	47	138		x^3y^2		23,46,138
73	282	0.2588652482	23	49	144		x^8		24,48,144
75	282	0.2659574468	24	51	150		x^6y		25,50,150
34	126	0.2698412698	25	52	153	xf_1			24,53,159
77	282	0.2730496454	25	53	156		x^4y^2		26,52,156
79	282	0.280141844	26	55	162		x^9		27,54,162
81	282	0.2872340426	27	57	168		x^7y		28,56,168
37	126	0.2936507937	28	58	173	x^2f_1			27,59,177
83	282	0.2943262411	28	59	174		x^5y^2		29,58,174
85	282	0.3014184397	28	61	180		x^10		30,60,180
38	126	0.3015873016	29	61	180	yf_1			28,61,183
87	282	0.3085106383	29	63	186		x^8y		31,62,186
89	282	0.3156028369	30	65	192		x^6y^2		32,64,192

40	126	0.3174603175	31	65	194	$x^{3f_1}$		30,65,195
91	282	0.3226950355	31	67	198		$x^{\{11\}}$	33,66,198
41	126	0.3253968254	32	67	201	$xyf_1$		31,67,201
93	282	0.329787234	32	69	204		$x^9y$	34,68,204
289	858	0.3368298368	33	70	211		$x^7y^2$	35,70,210
292	858	0.3403263403	33	71	214		$x^4f_1$	33,71,213
295	858	0.3438228438	34	72	217		$x^{\{12\}}$	36,72,216
298	858	0.3473193473	34	73	220		$x^2yf_1$	34,73,219
301	858	0.3508158508	35	74	223		$x^{\{10\}y}$	37,74,222
304	858	0.3543123543	35	75	226		$y^2f_1$	35,75,225
307	858	0.3578088578	36	76	229		$x^8y^2$	38,76,228
310	858	0.3613053613	36	77	232		$x^5f_1$	36,77,231
313	858	0.3648018648	36	78	235		$x^{\{13\}}$	39,78,234
316	858	0.3682983683	37	79	238		$x^3yf_1$	37,79,237
319	858	0.3717948718	37	80	241		$x^{\{11\}y}$	40,80,240
322	858	0.3752913753	38	81	244		$xy^2f_1$	38,81,243
325	858	0.3787878788	38	82	247		$x^9y^2$	41,82,246
328	858	0.3822843823	39	83	250		$x^6f_1$	39,83,249
331	858	0.3857808858	39	84	253		$x^{\{14\}}$	42,84,252
334	858	0.3892773893	40	85	256		$x^4yf_1$	40,85,255
337	858	0.3927738928	40	86	259		$x^{\{12\}y}$	43,86,258
340	858	0.3962703963	40	87	262		$x^2y^2f_1$	41,87,261
343	858	0.399768998	41	88	265		$x^{\{10\}y^2}$	44,88,264
346	858	0.4032634033	41	89	268		$x^7f_1$	42,89,267
349	858	0.4067599068	42	90	271		$x^{\{15\}}$	45,90,270
352	858	0.4102564103	42	91	274		$x^5yf_1$	43,91,273
52	126	0.4126984127	43	92	276	$f_2$		42,94,286
355	858	0.4137529138	43	92	277		$x^{\{13\}y}$	46,92,276
358	858	0.4172494172	43	93	280		$x^3y^2f_1$	44,93,279
361	858	0.4207459207	44	94	283		$x^{\{11\}y^2}$	47,94,282
364	858	0.4242424242	44	95	286		$x^8f_1$	45,95,285

367	858	0.4277389277	44	96	289				$x^{16}$	48,96,288
370	858	0.4312354312	45	97	292				$x^{6y}_1$	46,97,291
373	858	0.4347319347	45	98	295				$x^{14y}$	49,98,294
55	126	0.4365079365	46	99	296		xf_2			45,100,304
376	858	0.4382284382	46	99	298				$x^{4y^2}_1$	47,99,297
379	858	0.4417249417	46	100	301				$x^{12y^2}$	50,100,300
382	858	0.4452214452	47	101	304				$x^{9f}_1$	48,101,303
385	858	0.4487179487	47	102	307				$x^{17}$	51,102,306
388	858	0.4522144522	47	103	310				$x^{7y}_1$	49,103,309
391	858	0.4557109557	48	104	313				$x^{15y}$	52,104,312
394	858	0.4592074592	48	105	316				$x^{5y^2}_1$	50,105,315
58	126	0.4603174603	49	105	316		$x^2f_2$			48,106,322
397	858	0.4627039627	49	106	319				$x^{13y^2}$	53,106,318
400	858	0.4662004662	49	107	322				$x^{10f}_1$	51,107,321
59	126	0.4682539683	50	108	323		yf_2			49,108,328
403	858	0.4696969697	50	108	325				$x^{18}$	54,108,324
406	858	0.4731934732	50	109	328				$x^{8yf}_1$	52,109,327
409	858	0.4766899767	51	110	331				$x^{16y}$	55,110,330
412	858	0.4801864802	51	111	334				$x^{6y^2}_1$	53,111,333
415	858	0.4836829837	51	112	337				$x^{14y^2}$	56,112,336
61	126	0.4841269841	52	112	337		$x^3f_2$			51,112,340
418	858	0.4871794872	52	113	340				$x^{11f}_1$	54,113,339
421	858	0.4906759907	52	114	343				$x^{19}$	57,114,342
62	126	0.4920634921	53	114	344		xyf_2			52,114,346
424	858	0.4941724942	53	115	346				$x^{9yf}_1$	55,115,345
427	858	0.4976689977	53	116	349				$x^{17y}$	58,116,348
430	858	0.5011655012	54	117	352				$x^{7y^2}_1$	56,117,351
433	858	0.5046620047	54	118	355				$x^{15y^2}$	59,118,354
143	282	0.5070921986	54	119	357			$x^4f_2$		54,118,358
436	858	0.5081585082	55	119	358				$x^{12f}_1$	57,119,357
439	858	0.5116550117	55	120	361				$x^{20}$	60,120,360

145	282	0.5141843972	55	121	363		$x^{2yf\_2}$		55,120,364
442	858	0.5151515152	55	121	364			$x^{\{10\}yf\_1}$	58,121,363
445	858	0.5186480186	56	122	367			$x^{\{18\}y}$	61,122,366
147	282	0.5212765957	56	123	369		$y^{2f\_2}$		56,122,370
448	858	0.5221445221	56	123	370			$x^{8y^{2f\_1}}$	59,123,369
451	858	0.5256410256	57	124	373			$x^{\{16\}y^{2f\_2}}$	62,124,372
149	282	0.5283687943	57	125	375		$x^{5f\_2}$		57,124,376
454	858	0.5291375291	57	125	376			$x^{\{13\}f\_1}$	60,125,375
457	858	0.5326340326	58	126	379			$x^{\{21\}}$	63,126,378
151	282	0.5354609929	58	127	381		$x^{3yf\_2}$		58,126,382
460	858	0.5361305361	58	127	382			$x^{\{11\}yf\_1}$	61,127,381
463	858	0.5396270396	58	128	385			$x^{\{19\}y}$	64,128,384
153	282	0.5425531915	59	129	387		$xy^{2f\_2}$		59,128,388
466	858	0.5431235431	59	129	388			$x^{9y^{2f\_1}}$	62,129,387
469	858	0.5466200466	59	130	391			$x^{\{17\}y^{2f\_2}}$	65,130,390
155	282	0.5496453901	60	131	393		$x^{6f\_2}$		60,130,394
472	858	0.5501165501	60	131	394			$x^{\{14\}f\_1}$	63,131,393
475	858	0.5536130536	60	132	397			$x^{\{22\}}$	66,132,396
157	282	0.5567375887	61	133	399		$x^{4yf\_2}$		61,132,400
478	858	0.5571095571	61	133	400			$x^{\{12\}yf\_1}$	64,133,399
481	858	0.5606060606	61	134	403			$x^{\{20\}y}$	67,134,402
159	282	0.5638297872	62	135	405		$x^{2y^{2f\_2}}$		62,134,406
484	858	0.5641025641	62	135	406			$x^{\{10\}y^{2f\_1}}$	65,135,405
487	858	0.5675990676	62	136	409			$x^{\{18\}y^{2f\_2}}$	68,136,408
161	282	0.5709219858	62	137	411		$x^{7f\_2,y^{3f\_2},(y^{3-ax^7})f\_2}$		63,136,412
490	858	0.5710955711	62	137	412			$x^{\{15\}f\_1}$	66,137,411
493	858	0.5745920746	63	138	415			$x^{\{23\}}$	69,138,414
163	282	0.5780141844	63	139	417		$x^{5yf\_2}$		64,138,418
496	858	0.5780885781	63	139	418			$x^{\{13\}yf\_1}$	67,139,417
73	126	0.5793650794	64	139	419		$f\_1f\_2$		63,141,427
499	858	0.5815850816	64	140	421			$x^{\{21\}y}$	70,140,420



502	858	0.5850815851	64	140	424				$x^{\{11\}y^2f_1}$	68,141,423
165	282	0.585106383	64	141	424			$x^3y^2f_2$		65,140,424
505	858	0.5885780886	65	141	427				$x^{\{19\}y^2}$	71,142,426
508	858	0.5920745921	65	142	430				$x^{\{16\}f_1}$	69,143,429
167	282	0.5921985816	65	143	430			$x^8f_2$		66,142,430
511	858	0.5955710956	66	143	433				$x^{\{24\}}$	72,144,432
514	858	0.5990675991	66	144	436				$x^{\{14\}yf_1}$	70,145,435
169	282	0.5992907801	66	145	436			$x^6yf_2$		67,144,436
517	858	0.6025641026	66	145	439				$x^{\{22\}y}$	73,146,438
76	126	0.6031746032	67	146	439		$xf_1f_2$			66,147,445
520	858	0.6060606061	67	146	442				$x^{\{12\}y^2f_1}$	71,147,441
171	282	0.6063829787	67	147	442			$x^4y^2f_2$		68,146,442
523	858	0.6095571096	67	147	445				$x^{\{20\}y^2}$	74,148,444
526	858	0.6130536131	68	148	448				$x^{\{17\}f_1}$	72,149,447
173	282	0.6134751773	68	149	448			$x^9f_2$		69,148,448
529	858	0.6165501166	68	149	451				$x^{\{25\}}$	75,150,450
532	858	0.62004662	69	150	454				$x^{\{15\}yf_1}$	73,151,453
175	282	0.6205673759	69	151	454			$x^7yf_2$		70,150,454
535	858	0.6235431235	69	151	457				$x^{\{23\}y}$	76,152,456
79	126	0.626984127	70	152	459		$x^2f_1f_2$			69,153,463
538	858	0.627039627	70	152	460				$x^{\{13\}y^2f_1}$	74,153,459
177	282	0.6276595745	70	153	460			$x^5y^2f_2$		71,152,460
541	858	0.6305361305	70	153	463				$x^{\{21\}y^2}$	77,154,462
544	858	0.634032634	70	154	466				$x^{\{18\}f_1}$	75,155,465
179	282	0.634751773	70	155	466			$x^{10}f_2$		72,154,466
80	126	0.6349206349	71	155	466		$yf_1f_2$			70,155,469
547	858	0.6375291375	71	155	469				$x^{\{26\}}$	78,156,468
550	858	0.641025641	71	156	472				$x^{\{16\}yf_1}$	76,157,471
181	282	0.6418439716	71	157	472			$x^8yf_2$		73,156,472
553	858	0.6445221445	72	157	475				$x^{\{24\}y}$	79,158,474
556	858	0.648018648	72	158	478				$x^{\{14\}y^2f_1}$	77,159,477

183	282	0.6489361702	72	159	478	$x^{6y^2f_2}$		74,158,478
82	126	0.6507936508	73	159	480	$x^{3f_1f_2}$		72,159,481
559	858	0.6515151515	73	159	481		$x^{22}y^2$	80,160,480
562	858	0.655011655	73	160	484		$x^{19}f_1$	78,161,483
185	282	0.6560283688	73	161	484	$x^{11}f_2$		75,160,484
565	858	0.6585081585	73	161	487		$x^{27}$	81,162,486
83	126	0.6587301587	74	161	487	$xyf_1f_2$		73,161,487
568	858	0.662004662	74	162	490		$x^{17}yf_1$	79,163,489
187	282	0.6631205674	74	163	490	$x^9yf_2$		76,162,490
571	858	0.6655011655	74	163	493		$x^{25}y$	82,164,492
574	858	0.668997669	75	164	496		$x^{15}y^2f_1$	80,165,495
575	858	0.6701631702	75	164	497		$x^7y^2f_2$	77,164,496
577	858	0.6724941725	75	165	499		$x^{23}y^2$	83,166,498
578	858	0.6736596737	75	165	500		$x^4f_1f_2$	75,165,499
580	858	0.675990676	76	166	502		$x^{20}f_1$	81,167,501
581	858	0.6771561772	76	166	503		$x^{12}f_2$	78,166,502
583	858	0.6794871795	76	167	505		$x^{28}$	84,168,504
584	858	0.6806526807	76	167	506		$x^2yf_1f_2$	76,167,505
586	858	0.682983683	77	168	508		$x^{18}yf_1$	82,169,507
587	858	0.6841491841	77	168	509		$x^{10}yf_2$	79,168,508
589	858	0.6864801865	77	169	511		$x^{26}y$	85,170,510
590	858	0.6876456876	77	169	512		$y^2f_1f_2$	77,169,511
592	858	0.68997669	77	170	514		$x^{16}y^2f_1$	83,171,513
593	858	0.6911421911	78	170	515		$x^8y^2f_2$	80,170,514
595	858	0.6934731935	78	171	517		$x^{24}y^2$	86,172,516
596	858	0.6946386946	78	171	518		$x^5f_1f_2$	78,171,517
598	858	0.696969697	78	172	520		$x^{21}f_1$	84,173,519
599	858	0.6981351981	78	172	521		$x^{13}f_2$	81,172,520
601	858	0.7004662005	79	173	523		$x^{29}$	87,174,522
602	858	0.7016317016	79	173	524		$x^3yf_1f_2$	79,173,523
604	858	0.703962704	79	174	526		$x^{19}yf_1$	85,175,525

605	858	0.7051282051	79	174	527			$x^{\{1\}}y^{\_2}$	82,174,526
607	858	0.7074592075	80	175	529			$x^{\{2\}}y$	88,176,528
608	858	0.7086247086	80	175	530			$xy^{\_2}f_{\_2}$	80,175,529
610	858	0.710955711	80	176	532			$x^{\{1\}}y^{\_2}f_{\_1}$	86,177,531
611	858	0.7121212121	80	176	533			$x^{\_9}y^{\_2}f_{\_2}$	83,176,532
613	858	0.7144522145	81	177	535			$x^{\{25\}}y^{\_2}$	89,178,534
614	858	0.7156177156	81	177	536			$x^{\_6}f_{\_1}f_{\_2}$	81,177,535
616	858	0.7179487179	81	178	538			$x^{\{22\}}f_{\_1}$	87,179,537
617	858	0.7191142191	81	178	539			$x^{\{14\}}f_{\_2}$	84,178,538
619	858	0.7214452214	81	179	541			$x^{\{30\}}$	91,180,540
620	858	0.7226107226	82	179	542			$x^{\_4}y^{\_1}f_{\_2}$	82,179,541
622	858	0.7249417249	82	180	544			$x^{\{20\}}y^{\_1}$	88,181,543
623	858	0.7261072261	82	180	545			$x^{\{12\}}y^{\_2}$	85,180,544
625	858	0.7284382284	82	181	547			$x^{\{28\}}y$	92,182,546
626	858	0.7296037296	82	181	548			$x^{\_2}y^{\_2}f_{\_1}f_{\_2}$	83,181,547
628	858	0.7319347319	83	182	550			$x^{\{18\}}y^{\_2}f_{\_1}$	89,183,549
629	858	0.7331002331	83	182	551			$x^{\{10\}}y^{\_2}f_{\_2}$	86,182,550
631	858	0.7354312354	83	183	553			$x^{\{26\}}y^{\_2}$	93,184,552
632	858	0.7365967366	83	183	554			$x^{\_7}f_{\_1}f_{\_2}$	84,183,553
634	858	0.7389277389	84	184	556			$x^{\{23\}}f_{\_1}$	90,185,555
635	858	0.7400932401	84	184	557			$x^{\{15\}}f_{\_2}$	87,184,556
637	858	0.7424242424	84	185	559			$x^{\{31\}}$	94,186,558
638	858	0.7435897436	84	185	560			$x^{\_5}y^{\_1}f_{\_2}$	85,185,559
640	858	0.7459207459	84	186	562			$x^{\{21\}}y^{\_1}$	91,187,561
94	126	0.746031746	85	186	562		$(f_{\_2})^{\_2}$		84,188,572
641	858	0.7470862471	85	186	563			$x^{\{13\}}y^{\_2}$	88,186,562
643	858	0.7494172494	85	187	565			$x^{\{29\}}y$	95,188,564
644	858	0.7505827506	85	187	566			$x^{\_3}y^{\_2}f_{\_1}f_{\_2}$	86,187,565
646	858	0.7529137529	85	188	568			$x^{\{19\}}y^{\_2}f_{\_1}$	92,189,567
647	858	0.7540792541	86	188	569			$x^{\{11\}}y^{\_2}f_{\_2}$	89,188,568
649	858	0.7564102564	86	189	571			$x^{\{27\}}y^{\_2}$	96,190,570

650	858	0.7575757576	86	189	572				$x^{8f_1f_2}$	87,189,571
652	858	0.7599067599	86	190	574				$x^{24}f_1$	93,191,573
653	858	0.7610722611	86	190	575				$x^{16}f_2$	90,190,574
655	858	0.7634032634	87	191	577				$x^{32}$	97,192,576
656	858	0.7645687646	87	191	578				$x^{6}f_1f_2$	88,191,577
658	858	0.7668997669	87	192	580				$x^{22}yf_1$	94,193,579
659	858	0.7680652681	87	192	581				$x^{14}yf_2$	91,192,580
97	126	0.7698412698	88	193	582		$x(f_2)^2$			87,194,590
661	858	0.7703962704	88	193	583				$x^{30}y$	98,194,582
662	858	0.7715617716	88	193	584				$x^4y^2f_1f_2$	89,193,583
664	858	0.7738927739	88	194	586				$x^{20}y^2f_1$	95,195,585
665	858	0.7750582751	88	194	587				$x^{12}y^2f_2$	92,194,586
667	858	0.7773892774	88	195	589				$x^{30}y^2$	99,196,588
668	858	0.7785547786	89	195	590				$x^9f_1f_2$	90,195,589
670	858	0.7808857809	89	196	592				$x^{25}f_1$	96,197,591
671	858	0.7820512821	89	196	593				$x^{17}f_2$	93,196,592
673	858	0.7843822844	89	197	595				$x^{33}$	100,198,594
674	858	0.7855477855	89	197	596				$x^7yf_1f_2$	91,197,595
676	858	0.7878787879	90	198	598				$x^{23}yf_1$	97,199,597
677	858	0.789044289	90	198	599				$x^{15}yf_2$	94,198,598
679	858	0.7913752914	90	199	601				$x^{31}y$	101,200,600
680	858	0.7925407925	90	199	602				$x^5y^2f_1f_2$	92,199,601
100	126	0.7936507937	91	199	602		$x^2(f_2)^2$			90,200,608
682	858	0.7948717949	91	200	604				$x^{21}y^2f_1$	98,201,603
683	858	0.796037296	91	200	605				$x^{13}y^2f_2$	94,200,604
685	858	0.7983682984	91	201	607				$x^{29}y^2$	102,202,606
686	858	0.7995337995	91	201	608				$x^{10}f_1f_2$	93,201,607
101	126	0.8015873016	92	202	609		$y(f_2)^2$			91,202,614
688	858	0.8018648019	92	202	610				$x^{26}f_1$	99,203,609
689	858	0.803030303	92	202	611				$x^{18}f_2$	95,202,610
691	858	0.8053613054	92	203	613				$x^{34}$	103,204,612

692	858	0.8065268065	92	203	614				$x^{8y_{f_1f_2}}$	94,203,613
694	858	0.8088578089	92	204	616				$x^{24y_f_1}$	100,205,615
695	858	0.81002331	93	204	617				$x^{16y_{f_2}}$	96,204,616
697	858	0.8123543124	93	205	619				$x^{32y}$	104,206,618
698	858	0.8135198135	93	205	620				$x^{6y^2_{f_1f_2}}$	95,205,619
700	858	0.8158508159	93	206	622				$x^{22y^2_{f_1}}$	101,207,621
701	858	0.817016317	93	206	623				$x^{18y^2_{f_2}}$	97,206,622
103	126	0.8174603175	94	206	623		$x^3(f_2)^2$			93,206,626
703	858	0.8193473193	94	207	625				$x^{34y^2}$	105,208,624
704	858	0.8205128205	94	207	626				$x^{11y_{f_1f_2}}$	96,207,625
706	858	0.8228438228	94	208	628				$x^{27y_{f_1}}$	102,209,627
707	858	0.824009324	94	208	629				$x^{19y_{f_2}}$	98,208,628
104	126	0.8253968254	95	208	630		$xy(f_2)^2$			94,208,632
709	858	0.8263403263	95	209	631				$x^{35}$	106,210,630
710	858	0.8275058275	95	209	632				$x^9y_{f_1f_2}$	97,209,631
712	858	0.8298368298	95	210	634				$x^{25y_{f_1}}$	103,211,633
713	858	0.831002331	95	210	635				$x^{17y_{f_2}}$	99,210,634
715	858	0.8333333333	96	211	637				$x^{33y}$	107,212,636
716	858	0.8344988345	96	211	638				$x^7y^2_{f_1f_2}$	98,211,637
718	858	0.8368298368	96	211	640				$x^{23y^2_{f_1}}$	104,213,639
719	858	0.837995338	96	212	641				$x^{15y^2_{f_2}}$	100,212,640
721	858	0.8403263403	96	212	643				$x^{31y^2}$	109,214,642
237	282	0.8404255319	96	213	643			$x^4(f_2)^2$		96,212,644
722	858	0.8414918415	97	213	644				$x^{12y_{f_1f_2}}$	99,213,643
724	858	0.8438228438	97	213	646				$x^{28y_{f_1}}$	106,215,645
725	858	0.844988345	97	214	647				$x^{20y_{f_2}}$	101,214,646
727	858	0.8473193473	97	214	649				$x^{36}$	110,216,648
239	282	0.8475177305	97	215	649			$x^2y(f_2)^2$		97,214,650
728	858	0.8484848485	97	215	650				$x^{10y_{f_1f_2}}$	100,215,649
730	858	0.8508158508	98	215	652				$x^{26y_{f_1}}$	107,217,651
731	858	0.851981352	98	216	653				$x^{18y_{f_2}}$	102,216,652

733	858	0.8543123543	98	216	655				$x^{\{34\}y}$	111,218,654
241	282	0.8546099291	98	217	655			$y^2(f_2)^2$		98,216,656
734	858	0.8554778555	98	217	656				$x^8y^2f_1f_2$	101,217,655
736	858	0.8578088578	99	217	658				$x^{\{24\}y^2f_1}$	108,219,657
737	858	0.858974359	99	218	659				$x^{\{16\}y^2f_2}$	103,218,658
739	858	0.8613053613	99	218	661				$x^{\{32\}y^2}$	112,220,660
243	282	0.8617021277	99	219	661			$x^5(f_2)^2$		99,218,662
740	858	0.8624708625	99	219	662				$x^{\{13\}f_1f_2}$	102,219,661
742	858	0.8648018648	99	219	664				$x^{\{29\}f_1}$	109,221,663
743	858	0.865967366	100	220	665				$x^{\{21\}f_2}$	104,220,664
745	858	0.8682983683	100	220	667				$x^{\{37\}}$	113,222,666
245	282	0.8687943262	100	221	667			$x^3y(f_2)^2$		100,220,668
746	858	0.8694638695	100	221	668				$x^{\{11\}yf_1f_2}$	103,221,667
748	858	0.8717948718	100	221	670				$x^{\{27\}yf_1}$	110,223,669
749	858	0.872960373	100	222	671				$x^{\{19\}yf_2}$	105,222,670
751	858	0.8752913753	101	222	673				$x^{\{35\}y}$	114,224,672
247	282	0.8758865248	101	223	673			$xy^2(f_2)^2$		101,222,674
752	858	0.8764568765	101	223	674				$x^9y^2f_1f_2$	104,223,673
754	858	0.8787878788	101	223	676				$x^{\{27\}y^2f_1}$	111,225,675
755	858	0.87995338	101	224	677				$x^{\{17\}y^2f_2}$	106,224,676
757	858	0.8822843823	102	224	679				$x^{\{33\}y^2}$	115,226,678
249	282	0.8829787234	102	225	679			$x^6(f_2)^2$		102,224,680
758	858	0.8834498834	102	225	680				$x^{\{14\}f_1f_2}$	105,225,679
760	858	0.8857808858	102	225	682				$x^{\{30\}f_1}$	112,227,681
761	858	0.8869463869	102	226	683				$x^{\{23\}f_2}$	107,226,682
763	858	0.8892773893	103	226	685				$x^{\{38\}}$	116,228,684
251	282	0.890070922	103	227	685			$x^4y(f_2)^2$		103,226,686
764	858	0.8904428904	103	227	686				$x^{\{12\}yf_1f_2}$	106,227,685
766	858	0.8927738928	103	227	688				$x^{\{28\}yf_1}$	113,229,687
767	858	0.8939393939	103	228	689				$x^{\{21\}yf_2}$	108,228,688
769	858	0.8962703963	103	228	691				$x^{\{36\}y}$	117,230,690

253	282	0.8971631206	104	229	691	$x^2y^2(f_2)^2$		104,228,692
770	858	0.8974358974	104	229	692		$x^{10}y^2f_1f_2$	107,229,691
772	858	0.8997668998	104	229	694		$x^{26}y^2f_1$	114,231,693
773	858	0.9009324009	104	230	695		$x^{19}y^2f_2$	109,230,694
775	858	0.9032634033	104	230	697		$x^{34}y^2$	118,232,696
255	282	0.9042553191	104	231	697	$_2)^2, y^3(f_2)^2, (y^3-ax^7)(f_2)^2$		105,230,698
776	858	0.9044289044	104	231	698		$x^{15}f_1f_2$	108,231,697
778	858	0.9067599068	105	231	700		$x^{31}f_1$	115,233,699
779	858	0.9079254079	105	232	701		$x^{24}f_2$	111,232,700
781	858	0.9102564103	105	232	703		$x^{39}$	119,234,702
257	282	0.9113475177	105	233	703	$x^5y(f_2)^2$		106,232,704
782	858	0.9114219114	105	233	704		$x^{13}yf_1f_2$	109,233,703
115	126	0.9126984127	106	233	705	$(f_1)(f_2)^2$		105,235,713
784	858	0.9137529138	106	233	706		$x^{29}yf_1$	116,235,705
785	858	0.9149184149	106	234	707		$x^{22}yf_2$	112,234,706
787	858	0.9172494172	106	234	709		$x^{37}y$	120,236,708
788	858	0.9184149184	106	234	710		$x^{11}y^2f_1f_2$	110,235,709
259	282	0.9184397163	106	235	710	$x^3y^2(f_2)^2$		107,234,710
790	858	0.9207459207	107	235	712		$x^{27}y^2f_1$	117,237,711
791	858	0.9219114219	107	235	713		$x^{20}y^2f_2$	113,236,712
793	858	0.9242424242	107	236	715		$x^{35}y^2$	121,238,714
794	858	0.9254079254	107	236	716		$x^{16}f_1f_2$	111,237,715
261	282	0.9255319149	107	237	716	$x^8(f_2)^2$		108,236,716
796	858	0.9277389277	107	237	718		$x^{32}f_1$	118,239,717
797	858	0.9289044289	108	237	719		$x^{25}f_2$	114,238,718
799	858	0.9312354312	108	238	721		$x^{40}$	122,240,720
800	858	0.9324009324	108	238	722		$x^{14}yf_1f_2$	112,239,721
263	282	0.9326241135	108	239	722	$x^6y(f_2)^2$		109,238,722
802	858	0.9347319347	108	239	724		$x^{30}yf_1$	119,241,723
803	858	0.9358974359	108	239	725		$x^{23}yf_2$	115,240,724
118	126	0.9365079365	109	240	725	$x(f_1)(f_2)^2$		108,241,731

805	858	0.9382284382	109	240	727				$x^{\{38\}y}$	123,242,726
806	858	0.9393939394	109	240	728				$x^{\{12\}y^2f_1f_2}$	113,241,727
265	282	0.9397163121	109	241	728			$x^4y^2(f_2)^2$		110,240,728
808	858	0.9417249417	109	241	730				$x^{\{28\}y^2f_1}$	120,243,729
809	858	0.9428904429	109	241	731				$x^{\{21\}y^2f_2}$	116,242,730
811	858	0.9452214452	110	242	733				$x^{\{38\}y^2}$	124,244,732
812	858	0.9463869464	110	242	734				$x^{\{17\}f_1f_2}$	114,243,733
267	282	0.9468085106	110	243	734			$x^9(f_2)^2$		111,242,734
814	858	0.9487179487	110	243	736				$x^{\{33\}f_1}$	121,245,735
815	858	0.9498834499	110	243	737				$x^{\{26\}}$	117,244,736
817	858	0.9522144522	110	244	739				$x^{\{41\}}$	125,246,738
818	858	0.9533799534	111	244	740				$x^{\{15\}yf_1f_2}$	115,245,739
269	282	0.9539007092	111	245	740			$x^7y(f_2)^2$		112,244,740
820	858	0.9557109557	111	245	742				$x^{\{31\}yf_1}$	122,247,741
821	858	0.9568764569	111	245	743				$x^{\{24\}yf_2}$	118,246,742
823	858	0.9592074592	111	246	745				$x^{\{39\}y}$	126,248,744
121	126	0.9603174603	112	246	745			$x^2(f_1)(f_2)^2$		111,247,749
824	858	0.9603729604	112	246	746				$x^{\{13\}y^2f_1f_2}$	116,247,745
271	282	0.9609929078	112	247	746			$x^5y^2(f_2)^2$		113,246,746
826	858	0.9627039627	112	247	748				$x^{\{29\}y^2f_1}$	123,249,747
827	858	0.9638694639	112	247	749				$x^{\{22\}y^2f_2}$	119,248,748
829	858	0.9662004662	112	248	751				$x^{\{37\}y^2}$	127,250,750
830	858	0.9673659674	112	248	752				$x^{\{18\}f_1f_2}$	117,249,751
273	282	0.9680851064	112	249	752			$x^{10}(f_2)^2$		114,248,752
122	126	0.9682539683	113	249	752			$y(f_1)(f_2)^2$		112,249,755
832	858	0.9696969697	113	249	754				$x^{\{34\}f_1}$	124,251,753
833	858	0.9708624709	113	249	755				$x^{\{27\}f_2}$	120,250,754
835	858	0.9731934732	113	250	757				$x^{\{42\}}$	128,252,756
836	858	0.9743589744	113	250	758				$x^{\{16\}yf_1f_2}$	118,251,757
275	282	0.975177305	113	251	758			$x^8y(f_2)^2$		115,250,758
838	858	0.9766899767	114	251	760				$x^{\{32\}yf_1}$	125,253,759



839	858	0.9778554779	114	251	761			$x^{25}y^2$	121,252,760
841	858	0.9801864802	114	252	763			$x^{40}y$	129,254,762
842	858	0.9813519814	114	252	764			$x^{14}y^2f_1f_2$	119,253,763
277	282	0.9822695035	114	253	764		$x^6y^2(f_2)^2$		116,252,764
844	858	0.9836829837	114	253	766			$x^{30}y^2f_1$	126,255,765
124	126	0.9841269841	115	253	766	$x^3(f_1)(f_2)^2$			114,253,767
845	858	0.9848484848	115	253	767			$x^{23}y^2f_2$	122,254,766
847	858	0.9871794872	115	254	769			$x^{38}y^2$	130,256,768
848	858	0.9883449883	115	254	770			$x^{19}f_1f_2$	120,255,769
279	282	0.9893617021	115	255	770		$x^{11}(f_2)^2$		117,254,770
850	858	0.9906759907	115	255	772			$x^{35}f_1$	127,257,771
851	858	0.9918414918	115	255	773			$x^{28}f_2$	123,256,772
125	126	0.9920634921	116	255	773	$xy(f_1)(f_2)^2$			115,255,772
853	858	0.9941724942	116	256	775			$x^{43}$	131,258,774
854	858	0.9953379953	116	256	776			$x^{17}y^2f_1f_2$	121,257,775
281	282	0.9964539007	116	257	776		$x^9y(f_2)^2$		118,256,776
856	858	0.9976689977	116	257	778			$x^{33}y^2f_1$	128,259,777
857	858	0.9988344988	116	257	779			$x^{26}y^2f_2$	124,258,778

## Bibliography

- [AAB] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA, J. ÀLVAREZ MONTANER AND G. BLANCO *On the integral closure of planar ideals*. arXiv:1701.03503v3.
- [AAD] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA, J. ÀLVAREZ MONTANER AND F. DACHS-CADEFAU *Multiplier ideals in two-dimensional local rings with rational singularities*. Michigan Mathematical Journal , 65, (2016), 287-320
- [AADG] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA, J. ÀLVAREZ MONTANER, F. DACHS-CADEFAU AND V. GONZÁLEZ-ALONSO, *The Poincaré series of multiplier ideals in two dimensional local rings with rational singularities* Adv. Math. 304 (2017), 769-792.
- [Bri] E. BRIESKORN AND H. KNÖRRER, *Plane algebraic curves*. Translate by J. Stillwell. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
- [Bu] N. BUDUR *On Hodge spectrum and multiplier ideals*. Math. Ann. 327, 257-270 (2003).
- [Bu2] N. BUDUR *Singularity invariants related to Milnor fiber: survey* Contemp. Math., 566, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- [Dim] A. DIMCA *Singularities and Topology of Hypersurfaces* Universitext, Springer-Verlag, 1992.
- [ELSV] L. EIN, R. LAZARSELD, K. SMITH AND D. VAROLIN *Jumping coefficients of multiplier ideals* Duke Math. J. 123 (2004) 469-506.
- [EisNeu] D. EISENBUD AND W.D. NEUMANN, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities* The Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1985.
- [EsnVie] H. ESNAULT AND E. VIEHWEG, *Lectures on vanishing theorems*, Vol. 20 of DMK Seminar. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [GM] C. GALINDO AND F. MONSERRAT, *The Poincaré series of multiplier ideals of a simple complete ideal in a local ring of a smooth surface*. Advances in Mathematics 225 (2010) 1046-1068.
- [GPGV] P. GÓNZALEZ PÉREZ AND M. GÓNZALEZ VILLA, *Motivic Milnor fiber of a quasi ordinary hypersurface* J. Reine Angew. Math. 687 (2014), 159-205.
- [GPRB] P. GÓNZALEZ PÉREZ AND M. ROBREDO BUCES, *Comunicación personal*.
- [GVKMCE] M. GONZÁLEZ VILLA, G. KENNEDY, L. J. MCEWAN, *A recursive formula for the motivic Milnor fiber of a plane curve*, arXiv:1610.08487.
- [KMCE] G. KENNEDY AND L. MCEWAN, *Monodromy of plane curves and quasi-ordinary surfaces*, Journal of Singularities volume 1 (2010), 146-168.
- [How] J.A. HOWALD, *Multiplier ideals of monomial ideals*. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 2665-2671.
- [Jar] T. JÄRVILEHTO, *Jumping numbers of a simple complete ideal in a two-dimensional regular local ring*. Mem. Amer. Math. Soc. 214 (2011), no. 1009, viii+78 pp.
- [JoPf] T. DE JONG AND G. PFISTER *Local Analytic Geometry*. Advanced Lectures in Mathematics, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2000.

- [Laz] R. LAZARSELD, *Positivity in Algebraic Geometry. II*. Vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Lip] J. LIPMAN, *Adjoints of ideals in regular local rings*. With an appendix by Steven Dale Cutkosky. *Math. Res. Lett.* 1 (1994), no. 6, 739-755.
- [Nad] A.M. NADEL, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*. *Ann. of Math.* (2) 132(3):549-596, 1990.
- [Nai] D. NAIE, *Jumping numbers of a unibranch curve on a smooth surface*. *Manuscripta Math.* 128 (2009), no. 1, 33-49.
- [Pop] P. POPESCU-PAMPU *Approximate Roots* Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), 285-321, *Fields Inst. Commun.*, 33, Amer. Math. Soc.
- [ST] K. E. SMITH AND H.M. THOMSON *Irrelevant exceptional divisors for curves on a smooth surface*. *Algebra, Geometry and their Interactions Conference*, *Contemp. Math.*, vol. 448, pp. 245-254, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Spi] M. SPIVAKOVSKY *Valuations in Function Fields of Surfaces*. *American Journal of Mathematics*. Vol. 112, No. 1 (1990) pp 107-156.
- [Tei] B. TEISSIER, *Complex curve singularities: a biased introduction*. *Singularities in geometry and topology*, 825-887, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2007.
- [Tuc] K. TUCKER, *Jumping numbers on algebraic surfaces with rational singularities*. Thesis (Ph.D.)-University of Michigan. 2010, 114 pp. ISBN: 978-1109-73275-7.
- [Tuc2] K. TUCKER, *Integrally closed ideals on log terminal surfaces are multiplier ideals* *Math. Res. Lett.* 16 (2009), no. 5, 903-908.
- [Wal] C.T.C. WALL, *Singular Points of Plane Curves*. London Mathematical Society Student Text 63, LMS, 2005.
- [Zar] O. ZARISKI, *The moduli problem for plane branches*. University lectures series AMS, Vol. 39 (2006).