



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

---

---

Dualidad de Grothendieck y  
multiplicación por  $f$

vs

Dualidad de Poincaré y la acción de  
 $N$  en cohomología evanescente

Tesis

que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con orientación en

**Matemáticas Básicas**

Presenta:

**Miguel Angel de la Rosa Castillo**

Director de Tesis:

**Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos**

21 de Marzo de 2013      Guanajuato, Gto. México



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

---

---

Dualidad de Grothendieck y multiplicación por  $f$   
vs  
Dualidad de Poincaré y la acción de  $N$  en cohomología  
evanescente

**Tesis**  
que para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias**  
con orientación en  
**Matemáticas Básicas**

Presenta:  
**Miguel Angel de la Rosa Castillo**

Sinodales:  
**Dra. Gloria Leticia Brambila Paz (CIMAT)**  
Presidente  
**Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez (CIMAT)**  
Secretario  
**Dr. Wilson Álvaro Zúñiga Galindo (CINVESTAV-IPN)**  
Vocal  
**Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta (UNAM)**  
Vocal

**Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos (CIMAT)**  
Vo.Bo.  
Vocal y director de tesis

21 de Marzo de 2013

Guanajuato, Gto. México

A la memoria de mis abuelos,

Agustín y Consuelo.

A mi gran inspiración en lucha y esfuerzo por la familia, un buen papá,

mi padre Francisco.

A mi fortaleza desde la infancia,

mi madre Graciela.

A mis dos tesoros, que me dedican su tiempo y vida,

mi Esposa Maria de la luz y

mi hijo Miguelito.

# Índice general

	Página
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin</b>	<b>1</b>
1.1. Conexiones . . . . .	1
1.1.1. Definición usual de conexión . . . . .	1
1.1.2. Sistemas locales y conexiones . . . . .	2
1.1.3. Conexiones meromorfas . . . . .	3
1.1.3.1. Conexión meromorfa asociada a un par $(E, F)$ . . . . .	3
1.2. Fibración de Milnor . . . . .	4
1.3. Conexión de Gauss-Manin de una singularidad aislada de hipersuperficie . . . . .	6
1.3.1. Retículas de Brieskorn . . . . .	6
1.3.2. Conexión de Gauss-Manin vía las retículas de Brieskorn . . . . .	8
1.3.2.1. Conexión de Gauss-Manin topológica . . . . .	8
<b>2. Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck</b>	<b>10</b>
2.1. Residuo de Leray . . . . .	10
2.1.1. Teorema del Residuo de Leray . . . . .	11
2.1.2. Residuo de Leray para $(n + 1)$ -formas holomorfas . . . . .	12
2.2. Residuo de Leray para una singularidad aislada de hipersuperficie . . . . .	13

2.3. Residuo de Grothendieck y teorema de dualidad local . . . . .	14
2.3.1. Residuo de Grothendieck . . . . .	14
2.3.2. Apareamiento de Grothendieck para singularidades aisladas de hipersuperficie . . . . .	15
2.3.2.1. El apareamiento de Grothendieck . . . . .	16
<b>3. Filtración de Hodge límite de W. Schmid</b>	<b>18</b>
3.1. Fibra canónica de Milnor . . . . .	18
3.1.1. Trivialización canónica . . . . .	20
3.1.2. Transformación de Monodromía en la fibra canónica $H$ . . . . .	21
3.2. Teorema de la Órbita Nilpotente: filtración de Hodge Límite . . . . .	21
3.3. Extensión canónica de Deligne: una variable compleja . . . . .	24
3.4. La filtración de Hodge límite en términos de la extensión de Deligne . . . . .	25
<b>4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas</b>	<b>28</b>
4.1. Categoría de MHS . . . . .	28
4.2. Descomposición tipo Lefschetz . . . . .	31
4.3. Descomposición de una estructura de Hodge Mixta polarizada . . . . .	33
4.4. PMHS de una singularidad aislada de hipersuperficie . . . . .	36
4.4.1. Fibra canónica de Milnor (local) . . . . .	36
4.4.2. La Filtración por peso de una Sing. Aislada . . . . .	40
4.4.3. MHS de W. Schmid vs MHS J. Steenbrink . . . . .	40
4.4.3.1. Compactificación de las fibras $X_t$ . . . . .	40
4.4.3.2. Forma de intersección en $P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$ : aplicación de los resultados de W. Schmid . . . . .	41
4.4.4. PMHS en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . . . . .	43
<b>5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito</b>	<b>45</b>
5.1. La $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración . . . . .	46
5.1.1. La $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración en $\mathcal{G}_0$ . . . . .	50
5.1.2. Operadores Microdiferenciales y la $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración . . . . .	51
5.2. Apareamiento de K. Saito . . . . .	51
5.2.1. Descripción del residuo superior de Saito . . . . .	54
5.3. La retícula de Brieskorn y la $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración . . . . .	55

5.4. Apareamiento de Grothendieck y Apareamiento de Saito . . . . .	58
<b>6. MHS de Varchenko</b>	<b>60</b>
6.1. Filtración Asintótica de Varchenko: versión modificada . . . . .	61
6.2. PMHS asintótica en la Fibra canónica de Milnor . . . . .	61
6.3. Filtración de Hodge de Steenbrink vs Filtración de Hodge de Varchenko . . . . .	62
6.4. La filtración de Hodge y el espectro de una singularidad aislada . . . . .	64
<b>7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup</b>	<b>68</b>
7.1. Cálculo de $res_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ . . . . .	69
7.1.1. Un buen representante en el Álgebra de Milnor . . . . .	69
7.1.2. Propiedades inducidas por producto cup vía el Lema principal . . . . .	71
7.1.3. El operador de multiplicación por $f$ en $\Omega^f$ . . . . .	74
7.1.4. Cálculo de $res_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ en el álgebra de Milnor vía expansiones en $\mathcal{V}^{>-1}$ . . . . .	78
7.2. Condiciones de ortogonalidad . . . . .	83
7.3. Descom. de Deligne en cohomología . . . . .	88
7.3.1. Descomposición de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$ . . . . .	88
7.3.2. Descomposición de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$ . . . . .	89
7.3.3. La descomposición inducida en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . . . . .	90
7.3.4. El apareamiento $\mathcal{S}$ y la descomposición de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . . . . .	91
7.3.5. Isomorfismo entre $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ y $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ . . . . .	93
7.3.6. Una buena base en la cohomología $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . . . . .	94
7.3.7. Base inducida en $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ y condiciones de ortogonalidad . . . . .	95
7.4. Cálculo de $res_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ vía expansiones en la base $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ . . . . .	98
7.5. Descripción de la Matriz asociada al apareamiento $res_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ . . . . .	103
7.5.1. Matriz asociada al apareamiento $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$ . . . . .	104
7.5.2. Matriz asociada al operador mutiplicación por $t$ . . . . .	106
7.5.2.1. Cadenas inducidas por la aplicación $\nu$ . . . . .	107
7.5.2.2. Matriz para el operador $t$ con respecto a las cadenas $C(i)$ . . . . .	107
<b>A. Cohomología de De Rham relativa</b>	<b>110</b>
A.1. Hipercohomología . . . . .	110
A.1.1. Functor imagen directa . . . . .	110

*Índice general*

A.1.2. Imagen inversa topológica . . . . .	111
A.1.3. Hipercohomología e Hiperimagen directa . . . . .	111
A.1.3.1. Resolución inyectiva . . . . .	111
A.1.4. Hipercohomología . . . . .	112
A.2. Cohomología de De Rham relativa . . . . .	113
A.2.1. Cohomología de De Rham relativa para Morfismos Stein . . . . .	114
A.3. Lema de division de De Rham . . . . .	115
A.3.1. Lema de De Rham para una Singularidad Aislada de Hipersuperficie . . . . .	117
<b>B. Operadores micro-diferenciales</b>	<b>118</b>
B.1. Operadores micro-diferenciales . . . . .	118
B.2. La estructura de Anillo en $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ . . . . .	119
B.3. Operadores micro-diferenciales con coeficientes constantes . . . . .	119
<b>C. Formas bilineales</b>	<b>121</b>
C.1. La forma bilineal inducida por $N$ . . . . .	123
<b>D. Ejemplos</b>	<b>126</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>140</b>

# Agradecimientos

Es difícil darse cuenta a quién darle o no gracias por esta etapa de mi vida. Respecto a mis creencias, debo darle gracias primeramente a Dios.

Cada logro en mi vida ha sido tejido con sacrificio y esfuerzo, lo cual inicie con el apoyo de mis padres Graciela y Francisco; a ellos agradezco demasiado, pues sin más miramientos a la adversidad y obstáculos de diferente índole, me apoyaron del modo que fuera.

Como olvidar darle gracias a mi esposa María de la Luz, que siendo mi novia desde la preparatoria, me ayudo a salir adelante con su amor y apoyo incondicional, a pesar de la ausencia de tiempo que en ocasiones esta meta implica. Es ahora una gran satisfacción decirle gracias, y que lo he logrado, con ella al lado de nuestro hijo Miguel.

Le tengo un agradecimiento especial a Xavier Gómez Mont, pues es indescriptible el buen ser humano que es, y lo maravilloso que es aprender matemáticas bajo su dirección; ese entusiasmo y pasión que posee por las matemáticas es contagiante, y motivador para seguir adelante, aún cuando las cosas no se ven tan bien. Gracias a Xavier pude apreciar otro punto de vista para hacer matemáticas, de una manera divertida y sólida; esa visión Geométrica tan especial que posee me ayudo a ver cómo entender unas líneas de la escritura formal de alguna afirmación. Ese, NO, rotundo ante la falta de claridad de mi parte para poder convencer a Xavier es desafiante y fortalece demasiado. Esas palabras, ANDA MAJO, cuando algo va bien pero es necesario escribir para concretar, o bien, cuando algo no está bien pero fue un buen intento fallido; en fin, es difícil describir la gran admiración que le tengo al Dr. Xavier.

Agradezco a el Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez por sus comentarios en los seminarios referentes a este trabajo, como también por los seminarios que me impartió en el área de teoría de Hodge.

Agradezco a mis sinodales la Dra. Leticia Brambila, el Dr. Wilson Zuñiga y el Dr. Javier Elizondo,



## *AGRADECIMIENTOS*

por sus valiosos comentarios, los cuales permitieron que la escritura final de esta tesis fuera la mejor posible.

Deseo hacer un agradecimiento especial al Dr. A. G. Aleksandrov del Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, por sus valiosas discusiones, cuyas sugerencias me ayudaron a establecer algunos de los resultados originales de esta tesis.

Cada parte de este proyecto no hubiese sido posible sin el valioso apoyo económico que se me otorgo por parte del CONACYT, en los estudios de maestría y doctorado; también manifiesto mi gratitud al CIMAT, el cual me otorgó una beca para terminar en el último año de doctorado. También agradezco el estímulo económico que me fue otorgado, por parte del SNI, para ser asistente del Dr. Gómez Mont.

El CIMAT es mi casa de estudios, pues desde mi llegada a la institución, mi estancia ha sido confortable por su grandioso ambiente de trabajo. Cabe señalar que es difícil mencionar a todos sus administrativos, a los cuales agradezco su labor; asimismo, reitero mi agradecimiento a Lourdes y Toquina; como también a Jannet Vega y Lolita por su eficiente trabajo administrativo.

# Introducción

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie con punto crítico aislado en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Definimos los siguientes términos:

- i) La bola de radio  $\varepsilon$ :  $B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| \leq \varepsilon\}$ .
- ii) El disco de radio  $\delta$ :  $S := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \delta\}$ .
- iii)  $X := B_\varepsilon \cap f^{-1}(S)$ .
- iv)  $S' := S \setminus 0$
- v) Las fibras  $X_t := f^{-1}(t) \cap B_\varepsilon$ , para cada  $t \in S'$ .
- vi) La fibra singular  $X_0 := f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$ .
- vii)  $X' := X \setminus X_0$
- viii) La restricción  $f' := f : X' \rightarrow S'$ .

**Teorema** (J.Milnor [39], AVG [16]). *Existen constantes  $0 < \varepsilon, \delta \ll 1$  tales que*

1.  $X' \xrightarrow{f'} S'$  es una fibración  $C^\infty$  localmente trivial.
2.  $X_t$  tiene tipo de homotopía de un bouquet de  $\mu$   $n$ -esferas.
3. Las fibras  $X_t$  son variedades complejas suaves  $(n - 1)$ -dimensionales con frontera regular.

La aplicación  $f : X \rightarrow S$  con estas propiedades se llama la fibración de Milnor. La fibración  $f : X' \rightarrow S'$  define un fibrado vectorial en cohomología  $\underline{H} = \bigcup_{t \in S'} H^n(X_t, \mathbb{C})$ , (inducido por las fibras no singulares  $X_t, t \in S'$ ):

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{H} & H^n(X_t, \mathbb{C}) & \\
 f^* \downarrow & \downarrow & \\
 S' & t & 
 \end{array} \tag{0.0.1}$$

## Introducción

el cual tiene rango  $\mu := \dim_{\mathbb{C}} H^n(X_t, \mathbb{C})$ , el número de Milnor de la singularidad  $f$ . Consideramos la gavilla de secciones holomorfas  $\mathcal{H}^n := \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$  del fibrado  $\underline{H}$  y denotamos por  $\nabla$  su conexión (conexión topológica de Gauss-Manin) asociada, con  $\ker \nabla = \underline{H}$ , cuya derivada covariante a lo largo del campo vectorial  $\frac{d}{dt}$  será denotada por  $\partial_t$ .

Consideremos lo siguiente:

1. El cubriente universal

$$\begin{array}{ccc} S_{\infty} & \xrightarrow{u} & S' \\ \tau \longmapsto & & t = \exp(2\pi i \tau). \end{array}$$

2. La fibra canónica de Milnor definida por el pullback

$$\begin{array}{ccc} X_{\infty} := X' \times_{S'} S_{\infty} & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow f \\ S_{\infty} & \xrightarrow{u} & S' \end{array}$$

3. Las equivalencias de homotopía

$$X_{u(\tau)} \simeq (X_{\infty})_{\tau} \xrightarrow{\hookrightarrow} X_{\infty}. \quad (0.0.2)$$

4. Los isomorfismos inducidos

$$H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H^n((X_{\infty})_{\tau}, \mathbb{C}) \xrightarrow[\simeq]{j_{\tau}^*} H(X_{u(\tau)}, \mathbb{C}).$$

5. La transformación de monodromía

$$M : H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \longrightarrow H^n(X_{\infty}, \mathbb{C})$$

con descomposición  $M = M_s M_u = M_u M_s$  es sus partes semi-simple y unipotente.

Con respecto a la parte semi-simple  $M_s$ , tenemos la descomposición en espacios propios generalizados

$$H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda},$$

con  $H_{\lambda} := \ker \left( M_s - \lambda : H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \right)$ . Por el teorema de monodromía, los valores propios son raíces de la unidad, y el tamaño de los bloques de Jordan de  $M$  tienen tamaño a lo más  $n + 1 \times n + 1$ ; para el valor propio  $\lambda = 1$ , el tamaño de los bloques es a lo más  $n \times n$ . Sea

$$N := \frac{-\log M_u}{2\pi i} : H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \longrightarrow H^n(X_{\infty}, \mathbb{C})$$

la parte nilpotente de la transformación de monodromía. El teorema de monodromía implica también que el operador  $N$  es nilpotente. Más aún:

## Introducción

1. El operador  $N$  tiene grado de nilpotencia menor o igual a  $n + 1$ , i.e.  $N^{n+1} \equiv 0$ .
2. La restricción  $N|_{H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1}$  tiene grado de nilpotencia menor o igual que  $n$ , i.e.  $N^n|_{H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1} \equiv 0$ .

**Proposición** (Hertling [11]). *Existe una forma bilineal (inducida por la forma de intersección en Homología  $H_n(X_\infty, \mathbb{C})$ )*

$$\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (0.0.3)$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

- i) *Es no-degenerada e invariante bajo la acción de la transformación de monodromía.*
- ii) *Es  $(-1)^n$ -simétrica en el espacio  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$ .*
- iii) *Es  $(-1)^{n+1}$ -simétrica en el espacio  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$ .*
- iv) *La descomposición*

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) = H_1 \oplus H_{-1} \bigoplus_{\text{Im}(\lambda) > 0} \left( H_\lambda \oplus H_{\bar{\lambda}} \right)$$

es una descomposición ortogonal con respecto al apareamiento  $\mathcal{S}$ .

Para cada  $\alpha \in (-1, 0]$  y cada entero  $k \geq 0$ , definimos operadores  $L_\alpha^k : H_{\lambda_\alpha} \rightarrow H_{\lambda_\alpha}$ :

$$L_\alpha^0 := id,$$

y

$$L_\alpha^k := \prod_{j=1}^k (\alpha + j + N) \quad \forall k \geq 1.$$

El espacio de cohomología  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  se puede identificar con la gavilla de secciones holomorfas  $\mathcal{H}^n$  de tal manera que para  $A \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  se tiene que  $A(t) \in H^n(X_t, \mathbb{C})$ . Ahora bien, sea  $A \in H_\lambda$  y  $\alpha \in \mathbb{Q}$  tales que  $e^{-2\pi i \alpha} = \lambda$ . Entonces se tiene que

$$s(A, \alpha)(t) = t^\alpha \cdot t^N A(t),$$

con  $t^N := \exp(\log t \cdot N)A(t)$ , es una sección holomorfa monovaluada de  $\underline{H}$ , ya que lo multivaluado de la sección plana  $A(t)$  se cancela con  $t^N$ ; observamos que  $t^N$  es un polinomio en  $\log t$ , ya que  $N$  es nilpotente. Por otra parte, existen isomorfismos

$$\begin{aligned} H_{\lambda_\alpha} &\xrightarrow{\psi_\alpha} C_\alpha \subset \mathcal{G}_0 \\ A &\longmapsto \psi_\alpha(A) := s(A, \alpha)_0 \end{aligned}$$

con  $C_\alpha = \ker(t\partial_t - \beta \cdot id)^{n+1}$ , donde

## Introducción

- $\mathcal{G}_0$  es el  $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ -espacio vectorial  $\mu$ -dimensional, generado por el conjunto de gérmenes

$$\left\{ s(A, \alpha)_0 \in (i_* \mathcal{H}^n)_0 : \lambda_\alpha = \exp(-2\pi i \alpha) \text{ es valor propio de } M \right\}$$

de secciones  $s(A, \alpha)(t)$ .

- $i : S' \rightarrow S$  es el mapeo inclusión y  $\mu$  el número de Milnor de la singularidad  $f$ .
- $\partial_t : (i_* \mathcal{H}^n)_0 \rightarrow (i_* \mathcal{H}^n)_0$  es el operador extensión inducido por la derivada covariante de la conexión de Gauss-Manin.

En  $\mathcal{G}_0$  tenemos los operadores

- Multiplicación por  $t$ :  $C_\alpha \xrightarrow{t} C_{\alpha+1}$ , el cual es un isomorfismo para cada  $\alpha$ .
- El operador inducido  $C_\alpha \xrightarrow{\partial_t} C_{\alpha-1}$ , el cual es un isomorfismo siempre que  $\alpha \neq 0$ .

Los isomorfismos  $\psi_\alpha$  guardan una relación con el endomorfismo  $N$  de acuerdo con el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{\lambda_\alpha} & \xrightarrow{N} & H_{\lambda_\alpha} \\ \psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \psi_\alpha \\ C_\alpha & \xrightarrow{t\partial_t - \alpha \cdot id} & C_\alpha. \end{array}$$

Equivalentemente,

$$t\partial_t - \alpha \cdot id = (\psi_\alpha \circ N \circ \psi_\alpha^{-1}).$$

Obtenemos por tanto, un operador nilpotente en cada espacio  $C_\alpha$ :

$$\tilde{N}_\alpha := (\psi_\alpha \circ N \circ \psi_\alpha^{-1}) : C_\alpha \rightarrow C_\alpha.$$

Los espacios  $C_\alpha$  inducen la llamada  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración  $(\mathcal{V}^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Q}} \subset \mathcal{G}_0$ , en la cual,

- i)  $\mathcal{V}^\alpha = \bigoplus_{\alpha \leq \beta < \alpha+1} \mathbb{C}\{t\}C_\beta$
- ii)  $\mathcal{V}^{>\alpha} = \bigoplus_{\alpha < \beta \leq \alpha+1} \mathbb{C}\{t\}C_\beta$
- iii)  $\frac{\mathcal{V}^\alpha}{\mathcal{V}^{>\alpha}} \simeq C_\alpha$

Observamos que se tienen los operadores inducidos:

1. La multiplicación por  $t$ ,  $\mathcal{V}^{>-1} \xrightarrow{t} \mathcal{V}^{>0}$ , el cual es un isomorfismo.
2. La derivada covariante  $\mathcal{V}^{>-1} \xrightarrow{\partial_t} \mathcal{V}^{>-2}$ , cuya restricción  $\mathcal{V}^{>0} \xrightarrow{\partial_t} \mathcal{V}^{>-1}$  es biyectivo.
3. El operador nilpotente inducido por  $N$ ,  $\mathcal{V}^{>-1} \xrightarrow{\tilde{N}} \mathcal{V}^{>-1}$  con  $\tilde{N}|_{C_\alpha} = \tilde{N}_\alpha$ .

Consideremos ahora el anillo de operadores micro-diferenciales con coeficientes constantes

$$R := \mathbb{C} \left\{ \left\{ \partial_t^{-1} \right\} \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \partial_t^{-j} \mid \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \in \mathbb{C}\{t\} \right\}.$$

**Lema** (Hertling [11]).

- a)  $\mathbb{C}\{t\}C_\alpha$  es un  $R$ -módulo de rango  $\dim_{\mathbb{C}} C_\alpha$  para  $\alpha \notin \mathbb{Z}_{<0}$ .
- b)  $\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^{>\alpha}$  son  $R$ -módulos libres de rango  $\mu$ .

Denotaremos por  $\mathcal{H}_0'' := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge d\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n-1}}$  la retícula de Brieskorn. Definimos el mapeo

$$s : \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}^n \tag{0.0.4}$$

$$\omega \longmapsto \left( s[\omega] : t \longmapsto \left[ \text{LerayRes} \left( \frac{\omega}{f-t} \right) \right] \in H^n(X_t, \mathbb{C}) \right),$$

inducido por el residuo de Leray  $\text{LerayRes} \left( \frac{\omega}{f-t} \right) := \left[ \frac{\omega}{df} \Big|_{X_t} \right]$ .

El siguiente teorema es una herramienta fundamental, del cual nosotros hemos hecho uso para nuestros resultados.

**Teorema**(Varchenko [17, 22, 24]). Para  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$ , se tiene una descomposición

$$s[\omega](t) = \sum_{\alpha > -1} s(A_\alpha^\omega, \alpha),$$

para cada  $t \in S'$ .

Para  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ , definimos el orden de  $\omega$  como  $\alpha(\omega) := \min\{\alpha \mid s(A_\alpha^\omega, \alpha) \neq 0\}$ . Se tiene el mapeo inducido en gérmenes,

$$\begin{aligned} s : \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{G}_0 \\ \omega &\longmapsto s[\omega]_0, \end{aligned}$$

donde,  $s[\omega]_0$  es el germen en  $0 \in \mathbb{C}$  de la sección  $s[\omega](t)$ , para cada  $t \in S'$ ; el kernel de este mapeo es el espacio  $df \wedge d\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n-1}$ . La imagen de este mapeo es llamada **la retícula micro-diferencial de Brieskorn** y es denotada por  $H_0''$ . Observamos que se tiene un isomorfismo

$$\mathcal{H}_0'' \xrightarrow[\simeq]{s} H_0''.$$

**Proposición** (Brieskorn [37], Malgrange [33], Hertling [11]). *Se satisfacen las siguientes propiedades*

## Introducción

- i)  $\mathcal{V}^{n-1} \subset H_0'' \subset \mathcal{V}^{>-1}$
- iii)  $t \cdot H_0'' \subset H_0''$
- iv)  $H_0''$  es un  $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo libre de rango  $\mu$ .
- v)  $\partial_t^{-1} \cdot H_0'' \subset H_0''$
- vi)  $H_0''$  es un  $R$ -módulo libre de rango  $\mu$ .

Un resultado de gran importancia que también hemos usado en los resultados de esta tesis es el siguiente:

**Proposición**(Brieskorn [37]). *Para cada  $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$  se satisface la ecuación*

$$s[d\eta]_0 = \partial_t s[df \wedge \eta]_0.$$

*En particular, para cada  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ , existe  $\eta$  tal que  $d\eta = \omega$  y  $s[\omega]_0 = \partial_t s[df \wedge \eta]_0$ .*

Tenemos los siguientes ingredientes:

- El apareamiento en cohomología,  $\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ .
- Los isomorfismos en cada espacio propio,  $\psi_\alpha : H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{e^{-2\pi i \alpha}} \longrightarrow C_\alpha$ .
- La estructura de  $R$ -módulo del espacio  $\mathcal{V}^{>-1}$ .

Estos datos permiten definir apareamientos

$$P_{\mathcal{S}} : R \cdot C_\alpha \times R \cdot C_\beta \longrightarrow R \cdot \partial_t^{-1},$$

para cada  $-1 < \alpha, \beta \leq 0$ , lo cual determina un apareamiento

$$P_{\mathcal{S}} := \sum P_{\mathcal{S}}^{(-j)}(\bullet, \bullet) : \mathcal{V}^{>-1} \times \mathcal{V}^{>-1} \longrightarrow R \cdot \partial_t^{-1},$$

tal que  $P_{\mathcal{S}}^{(-j)}(\bullet, \bullet)$  es la parte en  $\mathbb{C} \cdot \partial_t^{-j}$  de  $P_{\mathcal{S}}(\bullet, \bullet)$ . El apareamiento  $P_{\mathcal{S}}$  es llamado el apareamiento de orden superior de K. Saito.

Ahora bien, sean  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  coordenadas holomorfas de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , centradas en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ; sea también  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$  el espacio de gérmenes de funciones holomorfas en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , y  $d\underline{z} := dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ . Definimos la función lineal

$$L : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g \longmapsto L(g)$$

con

$$L(g) := \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{n+1} \int_{\Gamma_\epsilon} \left( \frac{g(z)}{\prod_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}} dz \right)$$

donde

$$\Gamma_\epsilon = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} : |f_j(z)| = \epsilon, 0 \leq j \leq n \right\}$$

es un  $(n+1)$  ciclo real (con  $\epsilon$  suficientemente pequeño) orientado de tal manera que

$$d(\arg f_0) \wedge d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_n) \geq 0.$$

Sea  $J_f := \left( \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$  el ideal jacobiano de  $f$ . Entonces para cada  $g \in J_f$  se tiene que  $L(g) = 0$ , lo cual permite definir el apareamiento de Grothendieck

$$\Omega^f \times \Omega^f \xrightarrow{\text{res}_{f,0}} \mathbb{C}$$

$$([\omega_1], [\omega_2]) \longmapsto L(g_1 g_2)$$

donde:

- $\Omega^f := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n}$  con  $\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  el espacio de gérmenes de  $(n+1)$ -formas holomorfas en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ .
- Las clases  $[\omega_1], [\omega_2] \in \Omega^f$  tienen representantes  $\omega_1 = g_1 \underline{dz}$ ,  $\omega_2 = g_2 \underline{dz}$ , respectivamente.

**Teorema de dualidad local** (A. Grothendieck). *El apareamiento  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$  es no degenerado.*

En [17], A. Varchenko establece una fórmula que conecta el apareamiento de Grothendieck  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$  con la forma de intersección en cohomología evanescente. Recientemente, C. Hertling en [11], ha puesto algunos de los resultados de A. Varchenko en un lenguaje más cómodo y sofisticado. Los resultados de C. Hertling están basados en trabajos de M. Saito [15], los cuales usan el concepto de apareamiento de orden superior de K. Saito en la retícula de Brieskorn; el siguiente teorema muestra el teorema de Varchenko en el nuevo lenguaje.

**Teorema**(A. Varchenko[17], M. Saito[15], C. Hertling[11])

- i) *La restricción del residuo superior de Saito  $P_S$  a la retícula microdiferencial de Brieskorn toma valores en  $R \cdot \partial_t^{-n-1}$ . Esto es,*

$$P_S(H_0'', H_0'') \subset R \cdot \partial_t^{-n-1}.$$

*Consecuentemente, para  $1 \leq l \leq n$ , se tiene la igualdad*

$$P_S^{(-l)}(H_0'', H_0'') = 0.$$

- ii) *Para cada  $\omega, \eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ , se tiene que*

$$P_S^{(-n-1)}(s[\omega]_0, s[\eta]_0) = \text{res}_{f,0}(\omega, \eta) \cdot \partial_t^{-n-1}.$$



## Introducción

Consideremos el álgebra jacobiana (con respecto a  $f$ ), la cual está definida como el espacio cociente

$$A_f := \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}}{J_f},$$

con  $\dim_{\mathbb{C}} A_f = \mu$ . Entonces tenemos la siguiente información:

- El isomorfismo canónico:

$$\begin{aligned} A_f &\xrightarrow{\cong} \Omega^f \\ g &\longmapsto \underline{gdz} \end{aligned}$$

- El operador de multiplicación por  $f$

$$\begin{aligned} A_f &\xrightarrow{\{f\}} A_f \\ g &\longmapsto f \cdot g \end{aligned}$$

se comporta bien bajo este isomorfismo.

- El operador  $\{f\}$  es nilpotente, ya que  $f^{n+1} \in J_f$ .
- El mapeo dado por Ec. 0.0.4 induce un isomorfismo:

$$\Omega^f \simeq \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \tag{0.0.5}$$

Observamos finalmente que las tripletas

$$\left( H^n(X_\infty, \mathbb{C}), N, \mathcal{S}(\bullet, \bullet) \right)$$

y

$$\left( \Omega^f, \{f\}, \text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet) \right)$$

comparten las siguientes propiedades:

1. Como  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales,  $\dim_{\mathbb{C}} H^n(X_\infty, \mathbb{C}) = \mu = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^f$ .
2. Los operadores  $N$  y  $\{f\}$  son nilpotentes, más aún,  $N^{n+1} = 0$  y  $\{f\}^{n+1} = 0$ .
3. Los apareamientos  $\mathcal{S}(\bullet, \bullet)$ ,  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$  son no-degenerados.
4. El apareamiento  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$  es simétrico, mientras que  $\mathcal{S}(\bullet, \bullet)$  es  $(-1)^n$ -simétrico en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  y  $(-1)^{n+1}$ -simétrico en  $H_1$ .

El objetivo de esta tesis es resolver lo siguiente:

**¿Qué relación existe entre el apareamiento (con descripción algebraica)**

$$\text{res}_{f,0}(f \bullet, \bullet) : \Omega^f \times \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}$$

y el apareamiento (con interpretación geométrica)

$$\mathcal{S}(N \bullet, \bullet) : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

inducido por el producto cup en cohomología evanescente?.

Antes de enunciar los resultados originales de esta tesis, describiremos el marco de nuestra respuesta a tal cuestión. Consideremos la filtración de Hodge  $F^\bullet \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  (versión de J. Steenbrink [19]) definida como sigue:

1. Para cada  $-1 < \alpha \leq 0$ ,

$$Gr_{\mathcal{V}}^\alpha H_0'' := \frac{\mathcal{V}^\alpha \cap H_0'' + \mathcal{V}^{>\alpha}}{\mathcal{V}^{>\alpha}} \subset C_\alpha.$$

2. Para cada  $-1 < \alpha \leq 0$ ,

$$F^p C_\alpha := \partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0''.$$

3.  $F^p H_{\lambda_\alpha}^n := \psi_\alpha^{-1}(F^p C_\alpha)$  con  $\lambda_\alpha := \exp(-2\pi i \alpha)$ .

4. Finalmente,  $F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C}) := \bigoplus_{\lambda_\alpha} F^p H_{\lambda_\alpha}^n$ .

Definimos  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} := \bigoplus_{\lambda \neq 1} H^n(X_\infty, \mathbb{C})_\lambda$ .

Por otra parte, el operador nilpotente  $N$  define filtraciones crecientes  $W_{\bullet}^{\neq 1} \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  y  $W_{\bullet}^1 \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$  (definidas sobre  $\mathbb{Q}$ ), (ver por ejemplo [17] [22] y [34]) determinadas por las condiciones:

- a)  $N(W_j^{\neq 1}) \subset W_{j-2}^{\neq 1}$  para cada  $j \geq 2$ .
- b)  $N(W_j^1) \subset W_{j-2}^1$  para cada  $j \geq 2$ .
- c) Los mapeos inducidos

$$Gr_{n+1+l}^{W^1} \xrightarrow{N^l} Gr_{n+1-l}^{W^1},$$

$$Gr_{n+l}^{W^{\neq 1}} \xrightarrow{N^l} Gr_{n-l}^{W^{\neq 1}}$$

son isomorfismos para cada  $l \geq 0$ .

Se tiene por tanto una filtración por peso  $W_{\bullet} \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  definida de la siguiente manera

$$W_{\bullet} := W_{\bullet}^1[-n-1]H^n(X_\infty, \mathbb{Q})_1 \bigoplus W_{\bullet}^{\neq 1}[-n]H^n(X_\infty, \mathbb{Q})_{\neq 1},$$

donde el índice esta dado por

$$W_{\bullet}[l] := W_{\bullet+l}$$

con  $l = -n$  o bien  $l = -(n + 1)$ .

Las filtraciones  $F^\bullet$ ,  $W_\bullet$  son invariantes con respecto a  $M_s$ , la parte semi-simple de la monodromía.

**Teorema** (C. Hertling) [11]:

- i) La tripleta  $\left(H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}, F^\bullet H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}, W_\bullet^{\neq 1}[n]\right)$  define una Estructura de Hodge Mixta Polarizada<sup>1</sup> (PMHS) de peso  $n$ , con respecto al apareamiento  $\mathcal{S}$  de Ec. 0.0.3.
- ii) Asimismo, con respecto a  $\mathcal{S}$ , la tripleta  $\left(H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1, F^\bullet H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1, W_\bullet^1[n + 1]\right)$  define una Estructura de Hodge Mixta Polarizada de peso  $n + 1$ .
- iii) Sea  $H$  el espacio  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  o bien el espacio  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$ . Existe una descomposición (descomposición de Deligne, ver [18]) mutua de las filtraciones  $F^\bullet$  y  $W_\bullet$ :

$$\begin{aligned} W_l &= \bigoplus_{k \leq l} \bigoplus_p I^{p, k-p}, \quad y \\ F^p &= \bigoplus_l \bigoplus_{p \leq q} I^{q, l-q}. \end{aligned} \tag{0.0.6}$$

tal que:

- $N$  satisface la condición:

$$N(I^{p,q}) \subset I^{p-1, q-1}$$

para cada  $p, q$ .

- $S(I^{p,q}, I^{r,s}) = 0$  para  $(r, s) \neq (m - p, m - q)$ .
- $I^{p,q} = \bigoplus_{j \geq 0} N^j I_0^{p+j, q+j}$ .
- $S(N^i I_0^{p,q}, N^j I_0^{r,s}) = 0$  para  $(r, s, i + j) \neq (q, p, p + q - m)$ .

con  $m = n$  o  $m = n + 1$ .

Una implicación trascendente de este teorema radica en la construcción de una  $\mathbb{C}$ -base (con condiciones de ortogonalidad heredadas de  $\mathcal{S}$ )  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  para la cohomología  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ ; esta base, induce de manera no trivial una  $\mathbb{C}$ -base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  en el espacio  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ . Las propiedades que poseen estas bases serán reflejadas como veremos en breve en el Corolario 7.4.2.

Consideramos ahora la filtración de Hodge asintótica (versión A. Varchenko [22]) definida por:

- Para  $-1 \leq \alpha \leq 0$ ,  $\tilde{F}^p C_\alpha := t^{-(n-p)} \cdot Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0''$ .

---

<sup>1</sup>ver Definición 4.3.3

## Introducción

- Para  $-1 \leq \alpha \leq 0$  con  $\lambda_\alpha := \exp(-2\pi i\alpha)$ ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}^p H_{\lambda_\alpha}^n &:= \psi_{\alpha+(n-p)}^{-1} \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \right) \\
 &= \psi_\alpha^{-1} \circ t^{-(n-p)} \cdot Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \\
 &= \psi_\alpha^{-1} (\tilde{F}^p C_\alpha).
 \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

- Finalmente,  $\tilde{F}^p H^n(X_\infty, \mathbb{C}) := \bigoplus_{\lambda_\alpha} \tilde{F}^p H_{\lambda_\alpha}^n$ .

La relación entre la filtración de Hodge de J. Steenbrink y la de A. Varchenko se ve en el siguiente resultado:

**Lema.** [3, Pág., 115]

**i)**  $F^{n+1} = \tilde{F}^{n+1} = 0$ .

**ii)** Para  $p$  tal que  $n - p \geq 0$  se satisface la siguiente ecuación:

$$F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha} = L_\alpha^{n-p} (\tilde{F}^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha}),$$

con  $\lambda = \exp(-2\pi i\alpha)$  y  $-1 < \alpha \leq 0$ .

A partir del isomorfismo 0.0.5 podemos graduar a  $\Omega^f$  con respecto a la  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración, de tal manera que tenemos un isomorfismo de espacios graduados

$$\Omega^f \simeq \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f \simeq \bigoplus_{-1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} \simeq \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}.$$

El siguiente resultado establece una relación entre los operadores  $\{f\}$  y  $N$ .

**Teorema**(A. Varchenko [24, Teorema 2. Pág., 251]). *El operador de multiplicación por  $f$ ,*

$$\{f\} : \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f \longrightarrow \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f$$

*posee la misma forma canónica de Jordan que el endomorfismo  $N$ .*

La demostración de este teorema, proporcionada por Varchenko, esta basada en la Estructura de Hodge Mixta Asintótica  $(\tilde{F}^\bullet, W_\bullet)$  para  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . El argumento principal para demostrar este resultado fue considerar el operador inducido en el graduado respecto a la filtración por peso

$$\begin{array}{ccc}
 Gr_l^W & \xrightarrow{Gr^W N} & Gr_{l-2}^W \\
 (u) & \longmapsto & (Nu)
 \end{array}$$

donde  $(u), (Nu)$  denotan las clases en los graduados de los elementos  $u \in W_l$  y  $Nu \in W_{l-2}$ , respectivamente. Además consideró el hecho de que los operadores  $Gr^W N$  y  $N$  poseen la misma forma de

Jordan. Por tanto, concluye la demostración estableciendo el resultado en el graduado  $Gr^W = \bigoplus_l Gr_l^W$ . Observamos que considerar la filtración  $\tilde{F}^\bullet$  implica usar el operador  $t = (\beta\partial_t^{-1} + \tilde{N}_\beta\partial_t^{-1})$ ; de modo que al tomar el graduado  $Gr^W$ , Varchenko se deshace de la acción del operador  $N$ .

Por otra parte, tiempo después, J. Scherk y J. Steenbrink[19, Sección 7.1. Pág., 656] proporcionarán una demostración sin usar el graduado respecto a la filtración por peso. Su argumento se basa en observar que para cada  $-1 < \alpha \leq 0$  y  $n - p \geq 0$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}\Omega_f & \xrightarrow{f} & Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}\Omega_f \\
 \simeq \downarrow s & & \simeq \downarrow s \\
 \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}\partial_t^{-1}H_0''} & \xrightarrow{t} & \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}\partial_t^{-1}H_0''} \\
 \partial_t^{n-p} \downarrow \simeq & & \partial_t^{n-p+1} \downarrow \simeq \\
 Gr_{F^\bullet}^p C_\alpha & \xrightarrow{t\partial_t} & Gr_{F^\bullet}^{p-1} C_\alpha
 \end{array}$$

como también el hecho de que  $Gr_{F^\bullet} N : Gr_{F^\bullet} H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow Gr_{F^\bullet} H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  posee la misma forma de Jordan que el operador  $N$ . Por tanto, esta demostración usa sólo la filtración de Hodge (de J. Steenbrink) definida a partir de la retícula de Brieskorn mediante el operador  $\partial_t = t^{-1}(\beta + \tilde{N}_\beta)$ , sin cancelar la acción de  $N$ . En virtud de esta demostración, el trabajo de esta tesis propone una respuesta positiva al problema planteado anteriormente, utilizando la filtración de Steenbrink  $F^\bullet$  y no la de Varchenko; en otras palabras, esta elección de la filtración de Hodge nos permite hacer uso de la <sup>2</sup>PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  y la descomposición de Deligne asociada, para establecer una relación entre los apareamientos  $res_{f,0}(f^\bullet, \bullet)$  y  $\mathcal{S}(N^\bullet, \bullet)$ , como puede verse en el Teorema 7.4.1 y el Corolario 7.4.2.

Ahora enunciamos los resultados originales que hemos obtenido:

**Proposición 7.1.1(Lema Principal):** *Supongamos que  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  y  $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$  son tales que  $d\eta = \omega$ . Sea también  $\alpha(\omega) \in \mathbb{Q}$  el orden de  $\omega$  tal que  $\lambda_{\alpha(\omega)} = \exp(-2\pi i\alpha(\omega))$ . Entonces*

$$s[f \cdot \omega]_0 - (\alpha(\omega) + 1)s[df \wedge \eta]_0 = \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N}s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\beta > -1} \partial_t^{-1}(\beta - \alpha(\omega))s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0,$$

$$\text{donde } s[\omega](t) = \sum_{\beta > -1} s(A_\beta^\omega, \beta).$$

---

<sup>2</sup>ver Definición 4.4.6

**Corolario 7.1.1:** *Supongamos válidas las condiciones de la Proposición 7.1.1. Entonces*

$$s[f \cdot \omega]_0 \equiv \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N}s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\beta > -1} \partial_t^{-1}(\beta - \alpha(\omega))s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1}H_0'').$$

**Proposición 7.1.2:** *Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}$  con expansiones en  $\mathcal{V}^{>-1}$ :*

$$s[\omega_1]_0 = \left[ \sum_{-1 < \alpha_1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1) \right]_0 \quad \text{y} \quad s[\omega_2]_0 = \left[ \sum_{-1 < \alpha_2} s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2) \right]_0. \quad (0.0.8)$$

*Entonces, módulo  $\partial_t^{-1}H_0''$ , se tiene la equivalencia*

$$\begin{aligned} P_S(s[f \cdot \omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &\equiv \sum_{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n} (-1)^{k_2} \cdot c_{n,l} \cdot \left\{ \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right\} \cdot \partial_t^{-k_1 - k_2 - l - 1}, \end{aligned}$$

*con  $\alpha_1 - k_1, \alpha_2 - k_2 \in (-1, 0]$  y  $0 \leq k_1, k_2 \leq n - 1$ ; las constantes*

$$c_{n,l} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n & \text{si } l = 1 \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} & \text{si } l = 2, \end{cases}$$

*dependen de  $\alpha_1, \alpha_2$ , de acuerdo con la Definición 5.2.1 de  $P_S$ .*

**Teorema 7.1.2:** *Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}$  con expansiones como en Ec. 0.0.8. Entonces,*

$$\begin{aligned} \text{res}_{f,0}(f \cdot \omega_1, \omega_2) &= \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ -k_1 - k_2 - l - 1 = -n - 1}} (-1)^{k_2} \cdot c_{n,l} \cdot \left\{ \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right\}. \end{aligned}$$

El siguiente Teorema es el **resultado principal** de esta tesis, el cual refina el Teorema 7.1.2.

**Teorema 7.4.1:** *Consideremos la Estructura de Hodge Mixta Polarizada en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  y  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$ , con respecto a la filtración de Hodge  $F^\bullet$ , respectivamente. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

Introducción

i) Existe una  $\mathbb{C}$ -base  $\{w_k\}_{1 \leq k \leq \mu}$  para  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ , la cual induce una  $\mathbb{C}$ -base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  para

$$\bigoplus_{-1 < \beta \leq n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} \simeq \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$$

ii) Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}$ . Con respecto al inciso i) consideramos expansiones

$$s[\omega_1]_0 \equiv \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \quad y \quad s[\omega_2]_0 \equiv \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j \quad (\text{mód } \partial_t^{-1} H_0'')$$

Entonces,

$$res_{f,0} \left( f \omega_1, \omega_2 \right) = \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j)$$

donde:

- $l_j$  es el nivel de  $\tilde{s}_j$  de acuerdo con la Definición 5.1.4.
- Los  $l_{ij}$  toman únicamente el valor 1 o bien 2, de acuerdo con la Definición 5.2.1.
- Las constantes  $c_{n,l_{ij}}$  son tales que:

$$c_{n,l_{ij}} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n & \text{si } l_{ij} = 1 \\ \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{n+1} & \text{si } l_{ij} = 2 \end{cases}$$

**Teorema 7.4.2 :**

Se satisfacen las siguientes afirmaciones:

- i) Para  $i = 1, \dots, \mu$ , existen formas diferenciales  $\tilde{\omega}_i \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}$ , las cuales se proyectan en una base para  $\Omega^f$ , elementos de la cual también se denotarán por  $\tilde{\omega}_i$ .
- ii) Para cada  $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$  se tiene que

a)

$$res_{f,0} \left( \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j \right) = (-1)^{l_j} c_{n,l_{ij}} \cdot \mathcal{S} \left( w_i, w_j \right)$$

b)

$$res_{f,0} \left( f \cdot \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j \right) = (-1)^{l_j} c_{n,l_{ij}} \cdot \mathcal{S} \left( Nw_i, w_j \right)$$

donde  $\underline{w} = (w_i)_{1 \leq i \leq \mu}$  es la  $\mathbb{C}$ -base para  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  del Teorema 7.4.1.

- iii) Definimos la matriz  $Q := (Q_{ij}) : \mathbb{C}^\mu \longrightarrow \mathbb{C}^\mu$  con  $Q_{ij} = \text{res}_{f,0}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j)$ . Denótese por  $[N]$  la  $\underline{w}$ -matriz del operador  $N$ . Entonces, la matriz asociada al apareamiento  $\text{res}_{f,0}(f\bullet, \bullet)$  con respecto a la base  $(\tilde{\omega}_i)_{1 \leq i \leq \mu}$  esta dada por el producto de matrices:

$$\left( \text{res}_{f,0}(f\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) \right) = [N]^T \cdot Q,$$

donde  $[N]^T$  es la matriz transpuesta de  $[N]$ .

- iv) Existen una involución  $\kappa : \{1, \dots, \mu\} \rightarrow \{1, \dots, \mu\}$ , y una aplicación  $\nu : \{1, \dots, \mu\} \rightarrow \{1, \dots, \mu, \mu + 1\}$ , tales que:

$$\text{res}_{f,0}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) = \delta_{\kappa(i)j}$$

$$\text{res}_{f,0}(f \cdot \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) = \delta_{\kappa \circ \nu(i)j},$$

para cada  $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$ ;  $\delta_{ij}$  denota la delta de Kronecker.

Los Teoremas 7.4.1 y 7.1.2, y el Teorema 7.4.2 resuelven el problema planteado.

Esta tesis esta distribuida en 7 capítulos y 4 apéndices.

El Capítulo 1 posee el material que describe la conexión meromorfa de Gauss-Manin asociada a una singularidad aislada de hipersuperficie  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , en este apartado, usamos las referencias [37], [13], [6],[20] y [39].

En el Capítulo 2 se desarrollan los conceptos de residuo de Leray y residuo de Grothendieck para una singularidad aislada de hipersuperficie  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ; también se presenta el Teorema 2.1.1 (del residuo de Leray), y el Teorema 2.3.1 (de dualidad local) para el apareamiento de Grothendieck  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$ , para este tema tomamos en cuenta las referencias [40], [28] y [4].

En el Capítulo 3 hacemos una descripción de la filtración de Hodge límite en el sentido de W. Schmid [34].

En el Capítulo 4 nos basamos en [11], [3, Sec. 10.5, pág.,183] y [18] para presentar el concepto de Estructura de Hodge Mixta Polarizada (PMHS) y la descomposición de Deligne asociada; asimismo, establecemos el Teorema 4.4.7 ([11, Teorema 3.5. Pág., 14]) referente a la PMHS para una singularidad aislada de hipersuperficie  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

En el Capítulo 5 definimos el apareamiento de orden superior de K. Saito  $P_S$ , usando la  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración asociada a la conexión de Gauss Manin (local); también presentaremos el Teorema 5.4.1 [11, Proposición 4.4. Pág., 18] que establece una relación entre el apareamiento de Grothendieck  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$  y el apareamiento superior de K. Saito  $P_S$ , una muy buena referencia es [3, Sec. 10.6].



## *Introducción*

El Capítulo 6 contiene una descripción (modificada) de la Estructura de Hodge Mixta (MHS) para una singularidad aislada de hipersuperficie (considerando la filtración de J. Steenbrink [19]); en este capítulo, también definimos el espectro,  $sp(f)$ , para la singularidad  $f$ ; las referencias usadas son [10], [22] [17], [26], [19] y [15].

El Capítulo 7 esta dedicado para demostrar los resultados originales dados por: **Proposición 7.1.1**, **Corolario 7.1.1**, **Proposición 7.1.2**, **Teorema 7.1.2**, **Teorema 7.4.1**, **Teorema 7.4.2**.

El Apéndice A se dedica para explicar la noción de Cohomología de De Rham relativa.

En el Apéndice B damos la definición de operadores micro-diferenciales con coeficientes constantes.

En el Apéndice C probamos un resultado elemental de álgebra lineal que es esencial para la formulación del Teorema 7.4.2.

Finalmente, el Apéndice D contiene un ejemplo sustancial, el cual reúne las ideas que describen los teoremas 7.4.1 y 7.4.2; para esto hacemos uso del sistema computacional de álgebra SINGULAR [6, 5].

# Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin

## 1.1. Conexiones

### 1.1.1. Definición usual de conexión

En cada uno de los resultados que se presentarán en esta sección  $S \subset \mathbb{C}^n$  denotará una vecindad compleja adecuada del punto 0.

**Definición 1.1.1.** Sea  $\mathcal{E}$  una gavilla casi-coherente de  $\mathcal{O}_S$ -módulos. Una conexión en  $\mathcal{E}$  es un homomorfismo  $\mathbb{C}$ -lineal

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E} := \Omega_S^1(\mathcal{E})$$

el cual satisface la identidad de Leibnitz

$$\nabla(gs) = dg \otimes s + g\nabla s$$

donde  $g$  y  $s$  son secciones locales de las gavillas  $\mathcal{O}_S$  y  $\mathcal{E}$  respectivamente. El homomorfismo  $\nabla$  es llamado *diferenciación covariante*.

**Definición 1.1.2.** Sean  $w$  un campo vectorial en  $S$ , es decir, una sección de la gavilla  $\Theta_S := \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^1, \mathcal{O}_S)$ . Sea también  $s$  una sección de la gavilla  $\mathcal{E}$ . La **derivada covariante** de  $s$  a lo largo de  $w$  está definida por

$$\nabla_w(s) = \langle \nabla s, w \rangle$$

## 1. Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin

donde  $\langle, \rangle$  es inducido por el apareamiento

$$\Omega_S^1 \times \Theta_S \rightarrow \mathcal{O}_S$$

**Nota 1.1.1.** Se tiene que  $\nabla_w$  define un  $\mathbb{C}$ -homomorfismo lineal

$$\nabla_w : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

el cual cumple la identidad de Leibnitz dada por

$$\nabla_w(gs) = w(g)s + g\nabla_w(s)$$

Para tener una descripción más de una conexión en la gavilla casi-coherente  $\mathcal{E}$ , basta considerar la nota anterior para tener la conexión como un  $\mathcal{O}$ -homomorfismo lineal:

$$Der_{\mathbb{C}} = (\Theta_S) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}), w \mapsto \nabla_w$$

donde  $\nabla_w$  satisface la identidad de Leibnitz.

**Nota 1.1.2.** Si  $dim S = 1$  y  $w = \frac{d}{dt}$  define una base para los campos vectoriales en  $S$ , entonces proporcionar una conexión en  $\mathcal{E}$  es equivalente a proporcionar un operador  $D := \nabla_w : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  que satisface la identidad de Leibnitz.

### 1.1.2. Sistemas locales y conexiones

**Proposición 1.1.1.** Sean  $E$  un sistema local en una variedad compleja  $S$ . Supóngase además que la gavilla de secciones holomorfas de  $E$ ,  $\mathcal{E} := \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} E$ , es localmente libre de rango  $\mu$ . Entonces existe una conexión canónica  $\nabla$  en  $\mathcal{E}$  para la cual la gavilla de secciones horizontales coincide con  $E$ , es decir,  $\ker \nabla = E$ .

*Demostración.* Basta definir  $\nabla$  de tal manera que  $\nabla(gs) = dg \otimes s$  para  $g$  y  $s$  secciones de  $\mathcal{O}_S$  y  $\mathcal{E}$ , respectivamente. □

Recíprocamente,

**Teorema 1.1.1.** Sea  $S$  una variedad compleja y  $\mathcal{E}$  una gavilla localmente libre de rango  $\mu$  sobre  $S$ . Sea también  $\nabla$  una conexión en  $\mathcal{E}$ . Sea  $E = \ker \nabla$ , esto es,  $E = \{s \in \mathcal{E} : \nabla(s) = 0\}$ . En estas condiciones se tiene que si  $\nabla$  es integrable, entonces  $E$  es un sistema local en  $S$  y se cumple que  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} E$ .

*Demostración.* Para una demostración de éste teorema ver [35]. □

### 1.1.3. Conexiones meromorfas

Sean  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{S,0} = \mathbb{C}\{t\}$  y  $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{(t)} = \mathcal{O}[t^{-1}]$  el campo de gérmenes de funciones meromorfas en el punto  $0 \in S \subset \mathbb{C}$ , más aún,  $\mathbb{A}$  es el campo de fracciones del anillo  $\mathcal{O}$ . Sea también  $\mathcal{M} = \bigoplus_0^\mu \mathbb{A}e_j$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{A}$ , con  $\dim_{\mathbb{A}} \mathcal{M} = \mu$ .

**Definición 1.1.3.** Una conexión meromorfa en  $\mathcal{M}$  es un mapeo  $\mathbb{C}$ -lineal

$$\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_{S,0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{M}$$

tal que el mapeo

$$D = \nabla_{\frac{d}{dt}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

satisface la identidad de Leibnitz

$$D(gm) = \frac{dg}{dt}m + gD(m)$$

**Nota 1.1.3.** Se tiene que  $D$  esta determinada por una matriz  $\Gamma(t) = (\Gamma_{ij}(t))$  respecto a la base  $e_1, \dots, e_\mu$  del  $\mathbb{A}$ -espacio vectorial  $\mathcal{M}$ , es decir,  $D(e_j) = \sum_{i=1}^\mu \Gamma_{ij}(t)e_i$ . Asimismo, la condición de horizontalidad  $s = \mathbf{e}y \in \ker D$  esta dada por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\mathbf{y}' = -\Gamma(t)\mathbf{y}$$

el cual posee una singularidad en el punto  $0 \in S$ , y las funciones componente  $\Gamma_{ij}(t)$  son funciones meromorfas.

#### 1.1.3.1. Conexión meromorfa asociada a un par $(E, F)$

**Definición 1.1.4.** Sean  $E, F$   $\mathcal{O}_{S,0}$ -módulos tales que  $E \subset F$ . Supongamos además que  $D : E \rightarrow F$  es un mapeo  $\mathbb{C}$ -lineal, el cual satisface la regla de Leibnitz

$$D(gv) = \frac{dg}{dt}v + gD(v),$$

para cada  $v \in E$  y  $g \in \mathcal{O}_{S,0}$ . Entonces  $(D, E, F)$  es llamada la conexión asociada al par  $(E, F)$ .

**Lema 1.1.1** (B. Malgrange [33]). Sea  $(D, E, F)$  es una conexión del par  $(E, F)$ . Supóngase que  $E, F$  poseen rango finito sobre  $\mathcal{O}_{S,0}$ , y que el cociente  $\frac{F}{E}$ , es libre de torsión (o bien, de rango finito sobre  $\mathbb{C}$ ). Entonces

i) Se satisface la igualdad

$$E \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{A} = F \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{A}.$$

## 1. Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin

ii) Se tiene definida una conexión meromorfa

$$D : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega_{S,0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{M} ,$$

$$\text{con } \mathcal{M} := F \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{A}.$$

*Demostración.* Para una demostración ver [33, pág.,408]. □

**Definición 1.1.5.** Sea  $\mathcal{M}$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{A}$  tal que  $\dim_{\mathbb{A}} \mathcal{M} = \mu < \infty$ . Supóngase que  $E \subset \mathcal{M}$  es un  $\mathcal{O}_{S,0}$ -submódulo de rango  $\mu$ , es decir,  $E$  es un  $\mathcal{O}_{S,0}$ -submódulo finitamente generado tal que

$$\mathbb{A}E = \mathcal{M}$$

Con estas hipótesis se dice que  $E$  es una **retícula** en el espacio vectorial  $\mathcal{M}$ .

### 1.2. Fibración de Milnor

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie.

**Notación.** Definimos lo siguiente:

- i) La bola de radio  $\varepsilon$ :  $B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| \leq \varepsilon\}$ .
- ii) El disco de radio  $\delta$ :  $S := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \delta\}$ .
- iii)  $X := B_\varepsilon \cap f^{-1}(S)$ .
- iv)  $S' := S \setminus 0$
- v) Las fibras  $X_t := f^{-1}(t) \cap B_\varepsilon$ , para cada  $t \in S'$ .
- vi) La fibra singular  $X_0 := f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$ .
- vii)  $X' := X \setminus X_0$
- viii) La restricción  $f' := f : X' \rightarrow S'$ .

**Definición 1.2.1.** Definimos el número de Milnor de  $f$  como

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}}{(f_0, \dots, f_n)} < \infty$$

donde  $f_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$  respecto a un sistema de coordenadas complejas  $(z_0, \dots, z_n)$  de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ .

**Proposición 1.2.1.** Existen constantes  $0 < \varepsilon, \delta \ll 1$  tales que :

1. Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin

- i)  $f : X' \rightarrow S'$  es una fibración  $C^\infty$  localmente trivial.
- ii) Las fibras  $X_t$  tienen tipo de homotopía de un bouquet de  $\mu$   $n$ -esferas.
- iii) Las fibras  $X_t$  son variedades complejas  $(n - 1)$ -dimensionales con frontera regular.

*Demostración.* Para una demostración de i) véase [20]. Así mismo, para una demostración de ii) ver [39]. Para una demostración de iii) ver [16]. □

**Definición 1.2.2.** La aplicación  $f : X \rightarrow S$  que satisface la Proposición 1.2.1 la llamaremos la fibración de Milnor.

De la Proposición 1.2.1 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 1.2.1.** Sea  $f : X \rightarrow S$  la fibración de Milnor de una singularidad aislada  $f$ . Tenemos las siguientes afirmaciones:

1. La cohomología reducida de las fibras  $X_t$  esta dada por el isomorfismo inducido

$$\tilde{H}^k(X_t) \xrightarrow{\sim} \delta_{k,n} \mathbb{Z}^\mu,$$

con  $\delta_{k,n}$  el símbolo de Kronecker.

2. Los espacios de cohomología  $H(U) := H^n(X_U)$  con  $X_U := f^{-1}(U)$ , con  $U \subset S'$ , forman una  $\mathbb{Z}$ -gavilla localmente libre de rango  $\mu$ .
3. El espacio  $\underline{H} := H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  es un sistema local complejo de dimensión  $\mu$ .
4. La gavilla de secciones holomorfas de  $\underline{H}$ ,

$$\mathcal{H} := \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S'},$$

es una  $\mathcal{O}_{S'}$ -gavilla de rango  $\mu$ .

5. Existe una conexión definida de manera natural, (Conexión de Gauss Manin)

$$\nabla : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \Omega_{S'}^1,$$

la cual es plana, y cuya gavilla de secciones planas esta dada por  $\ker(\nabla) = \underline{H}$ .

### 1.3. Conexión de Gauss-Manin de una singularidad aislada de hipersuperficie

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie con fibración de Milnor  $f : X \rightarrow S$ .

#### 1.3.1. Retículas de Brieskorn

En esta sección definiremos las retículas de Brieskorn siguiendo [37].

Consideremos el sistema local definido sobre  $S'$ :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= R^n f'_* \mathbb{C}_{X'} \\ &= \bigcup_{t \in S'} H^p(X_t, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

el cual induce la gavilla,

$$\mathcal{H} = \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}.$$

Consideremos  $\mathcal{H}_{DR}^n(X/S)$  (con respecto a la singularidad  $f$ ) como en la Definición A.2.3. El Corolario A.2.1 y el Teorema A.2.1 permiten la

**Definición 1.3.1.** *Definimos las retículas de Brieskorn como los  $\mathcal{O}_S$ -módulos siguientes:*

**a)** *La gavilla de Hipercohomología del complejo de De Rham relativo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(-2)} &:= \mathcal{H}_{DR}^n(X/S) \\ &:= \mathcal{H}^n(f_* \Omega_{X/S}^\bullet) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

**b)** *La gavilla inducida por el funtor imagen directa  $f_*$ :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(-1)} &:= \mathcal{H}' \\ &:= \frac{f_* \Omega_{X/S}^n}{d(f_* \Omega_{X/S}^{n-1})} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

**c)** *La gavilla inducida por el funtor imagen directa:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &:= \mathcal{H}'' \\ &:= \frac{f_* \Omega_X^{n+1}}{df \wedge d(f_* \Omega_X^{n-1})} \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

1. Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin

**Proposición 1.3.1.** *Se tienen las siguientes afirmaciones:*

- i) Las retículas de Brieskorn  $\mathcal{H}^{(-2)}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$  son  $\mathcal{O}_S$ -módulos localmente libres de rango  $\mu$ , donde  $\mu$  es el número de Milnor de la singularidad  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .
- ii) Las fibras, de las retículas de Brieskorn, en el punto  $0 \in S$  están dadas como sigue:

$$\mathcal{H}_0^{(-2)} \simeq H^n \left( \frac{\Omega_{X,0}^\bullet}{df \wedge \Omega_{X,0}^{\bullet-1}} \right) \quad (1.3.4)$$

$$\mathcal{H}'_0 \simeq \frac{\Omega_{X,0}^n}{d(\Omega_{X,0}^{n-1}) + df \wedge \Omega_{X,0}^{n-1}} \quad (1.3.5)$$

$$\mathcal{H}''_0 \simeq \frac{\Omega_{X,0}^{n+1}}{df \wedge d\Omega_{X,0}^{n-1}} \quad (1.3.6)$$

iii) Se tienen  $\mathcal{O}_S$ -inclusiones

$$\mathcal{H}^{(-2)} \xhookrightarrow{id} \mathcal{H}' \xhookrightarrow{df \wedge \bullet} \mathcal{H}'' , \quad (1.3.7)$$

dadas por el mapeo identidad y la multiplicación exterior por  $df$ , respectivamente.

iv) Las restricciones de Ec. 1.3.7 son  $\mathcal{O}_{S'}$ -isomorfismos

$$\mathcal{H} \xleftarrow{\simeq} \mathcal{H}^{(-2)}|_{S'} \xrightarrow[\simeq]{id} \mathcal{H}'|_{S'} \xrightarrow[\simeq]{df \wedge \bullet} \mathcal{H}''|_{S'} , \quad (1.3.8)$$

donde el primer isomorfismo esta dado por el Corolario A.2.1.

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [6, Thm 1.4.5. Pág.,29] □

**Lema 1.3.1.** *Se tienen las siguientes afirmaciones:*

1. El mapeo identidad induce un  $\mathcal{O}_S$ -isomorfismo

$$\mathcal{H}''/\mathcal{H}' \xrightarrow{\simeq} f_*\Omega_X^{n+1}/df \wedge f_*\Omega_X^n$$

2. La derivada exterior  $d$ , induce un  $\mathcal{O}_S$ -isomorfismo

$$\mathcal{H}'/\mathcal{H}^{(-2)} \xrightarrow{\simeq} f_*\Omega_X^{n+1}/df \wedge f_*\Omega_X^n$$

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [6, Prop.1.4.6, pág.,29] □

Del Lema 1.3.1 se sigue el



1. Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin

**Corolario 1.3.1.** *El cociente*

$$\mathcal{H}''/\mathcal{H}',$$

tiene dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  igual a  $\mu$ , el número de Milnor de la singularidad aislada  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

**1.3.2. Conexión de Gauss-Manin vía las retículas de Brieskorn**

**1.3.2.1. Conexión de Gauss-Manin topológica**

Consideremos la conexión asociada al sistema local  $\underline{H} = R^n f_* \mathbb{C}_{X'} = \bigcup_{t \in S'} H^n(X_t, \mathbb{C})$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\xrightarrow{\nabla} \Omega_{S'}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{H} \\ g \cdot v &\longmapsto \nabla(g \cdot v) := dg \otimes v \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

**Definición 1.3.2.** *La conexión canónica dada por Ec. 1.3.9 es llamada la **conexión topológica de Gauss-Manin**. Denotaremos por*

$$\partial_t := \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}$$

a la derivada covariante a lo largo del campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial t}$ , con respecto a una carta coordenada  $t$  en  $S \subset \mathbb{C}$ .

**Corolario 1.3.2.** *La conexión topológica de Gauss-Manin 1.3.9 se extiende a una conexión meromorfa asociada al par  $(\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}''_0)$ ,*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_{S,0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{M}$$

donde  $\mathcal{M} := \mathcal{H}''_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ .

*Demostración.* De la Proposición 1.3.1 se tiene que las retículas  $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$  son  $\mathcal{O}_S$ -módulos localmente libres de rango  $\mu$ . Por otra parte, del Corolario 1.3.1  $\mathcal{H}''/\mathcal{H}'$  es finito dimensional sobre  $\mathbb{C}$ . Por tanto, del Lema 1.1.1 se sigue el resultado.  $\square$

**Proposición 1.3.2.** *La derivada covariante  $\partial_t$  actúa como un isomorfismo en las retículas de Brieskorn como indica el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_0^{(-2)} & \xrightarrow[\simeq]{\partial_t} & \mathcal{H}'_0 & \xrightarrow[\simeq]{\partial_t} & \mathcal{H}''_0 \\ [\eta] & \longmapsto & [\frac{d\eta}{df}] & & \\ [df \wedge \eta] & \longmapsto & [d\eta] & & \end{array}$$

1. *Fibración de Milnor y Conexión meromorfa de Gauss-Manin*

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [6, Prop.1.4.8, pág.,30]

□

# Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie con fibración de Milnor  $f : X \rightarrow S$ . En este capítulo se desarrollarán los conceptos de residuo de Leray y apareamiento de Grothendieck asociados a la singularidad  $f$ ; también se enuncia los teorema del residuo de Leray y el teorema de dualidad local de Grothendieck. El material presentado puede ser encontrado en [4], [28], [27] y [40].

## 2.1. Residuo de Leray

Definiremos en esta sección el residuo de Leray (residuo de Poinaré), y presentaremos algunas de sus propiedades, para ello seguimos [40] y [4].

Sea  $K$  una hipersuperficie no singular de una variedad compleja  $M$  de dimensión compleja  $\dim_{\mathbb{C}} M = n+1$ . Supongamos que  $K$  esta dada localmente por una ecuación  $h = 0$ , donde  $h$  es una función holomorfa y su derivada para cada  $x \in K$  es tal que  $dh_x \neq 0$ .

Sea  $\omega \in \Omega^{k+1}(M \setminus K)$  una forma  $C^\infty$  complejo valuada, la cual posee un polo de a lo más orden 1 en  $K$ , equivalentemente, la forma que se obtiene de multiplicar  $f$  por  $\omega$ ,  $f\omega$ , se extiende a una forma suave (global) en  $M$ .

Con las condiciones anteriores tenemos el siguiente resultado.

## 2. Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck

**Lema 2.1.1.** (i) Si  $\omega$  es cerrada entonces tenemos una representación local en coordenadas dada por

$$\omega = \frac{dh}{h} \wedge \mathbf{r} + \theta, \quad (2.1.1)$$

donde  $\mathbf{r}$  y  $\theta$  son formas  $C^\infty$  en  $K$  que no contienen factor  $dh$ .

(ii) La  $k$ -forma  $\mathbf{r}|_K$  no depende de las coordenadas ni de la ecuación que define la hipersuperficie  $K$ .

(iii) La  $k$ -forma  $\mathbf{r}|_K$  esta definida globalmente, es decir,  $\mathbf{r}|_K \in \Omega^k(K)$ .

Sea  $\omega$  como en el Lema 2.1.1.

**Definición 2.1.1.** Definimos el **Residuo de Leray** de  $\omega$  como la  $k$ -forma

$$Res(\omega) = \mathbf{r}|_K.$$

**Lema 2.1.2.** La clase de  $Res(\omega)$  en el grupo de cohomología  $H^k(K)$  depende únicamente de la clase de  $\omega$  en  $H^{k+1}(M \setminus K)$ .

**Nota 2.1.1.** Denotaremos el Residuo de Leray por  $Res(\omega) := \frac{\omega}{dh}$ .

### 2.1.1. Teorema del Residuo de Leray

Usaremos la notación y resultados anteriores para enunciar el siguiente resultado.

**Operador co-frontera de Leray:**

Ahora bien, sea  $\mathbf{T}_\epsilon \subset M$  un entorno tubular de la subvariedad  $K$  en  $M$ , de tal manera que  $\mathbf{T}_\epsilon$  fibra en discos.

Entonces, la frontera  $\partial\overline{\mathbf{T}}_\epsilon$  de la cerradura de  $\mathbf{T}_\epsilon$  es una fibración en círculos sobre  $K$ .

Por otra parte,  $K \subset M$  es una subvariedad de codimensión compleja 1, y por tanto, codimensión real 2.

Entonces cada  $(k-2)$ -ciclo  $\sigma$  en  $K$ , induce un  $k$ -cadena  $\tilde{\sigma}$  en  $\overline{\mathbf{T}}_\epsilon$ . Por tanto, tomando la frontera  $\partial\tilde{\sigma}$  en  $\partial\overline{\mathbf{T}}_\epsilon$  tenemos la asignación:

$$[\sigma] \xrightarrow{\delta} [\partial\tilde{\sigma}] \in H_{k+1}(M \setminus K)$$

**Definición 2.1.2.** Definimos la aplicación

$$\delta : H_k(K) \rightarrow H_{k+1}(M \setminus K)$$

como el **operador co-frontera de Leray**.

## 2. Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck

**Teorema 2.1.1** (Teorema del Residuo de Leray). *Sea  $[\sigma] \in H_p(K)$  una clase de homología. Sea también  $\omega$  una  $(p+1)$ -forma  $d$ -cerrada definida en  $M \setminus K$ , la cual posee singularidades polares de a lo más orden 1 en  $K$ . Entonces*

$$\int_{\delta[\sigma]} \omega = 2\pi i \int_{\sigma} Res(\omega)$$

### 2.1.2. Residuo de Leray para $(n+1)$ -formas holomorfas

Manteniendo la notación previa, supóngase que  $M := U \subset \mathbb{C}^{n+1}$  es un conjunto abierto, y por tanto una subvariedad compleja; asimismo, centraremos nuestra atención al caso de  $(n+1)$ -formas holomorfas con a lo más un polo simple en  $K$ .

Sin perder generalidad, supóngase que  $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$  es algún abierto (adecuado) de  $z = 0$ . Sea  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1}(U \setminus K)$ . Supóngase además que  $\omega$  tiene la siguiente representación en coordenadas locales:

$$\omega = \frac{g}{h} dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

Como  $dh_z \neq 0$  para cada  $z \in K$ , entonces,  $\frac{\partial h}{\partial z_k} \neq 0$  en algún entorno de  $K = \{h = 0\}$ .

Por tanto, en algún entorno de  $U \setminus K$ , tenemos que se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{g}{h} dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n \\ &= (-1)^{k-1} \frac{g}{h} dz_k \wedge dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_k} \wedge \cdots \wedge dz_n \\ &= (-1)^{k-1} \frac{g}{h} \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial z_k}} \frac{\partial h}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_k} \wedge \cdots \wedge dz_n \\ &= (-1)^{k-1} \frac{g}{h} \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial z_k}} \left( \frac{\partial h}{\partial z_0} dz_0 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial z_k} dz_k + \cdots + \frac{\partial h}{\partial z_n} dz_n \right) \wedge dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_k} \wedge \cdots \wedge dz_n \\ &= (-1)^{k-1} \frac{g}{h} \frac{dh}{\frac{\partial h}{\partial z_k}} \wedge dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_k} \wedge \cdots \wedge dz_n \end{aligned}$$

Entonces de acuerdo con la Definición 2.1.1 tenemos que el Residuo de Leray de  $\omega$  esta dado por:

$$\begin{aligned} Res(\omega) &:= Res_K(\omega) \\ &= (-1)^{k-1} \frac{g}{\frac{\partial h}{\partial z_k}} \wedge dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_k} \wedge \cdots \wedge dz_n \end{aligned}$$

## 2.2. Residuo de Leray para una singularidad aislada de hipersuperficie

Sea  $f : X \rightarrow S$  la fibración de Milnor de una singularidad aislada de hipersuperficie  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

Consideremos el sistema local  $\underline{H} = \bigcup_{t \in S'} H^n(X_t, \mathbb{C})$  con gavilla de secciones holomorfas  $\mathcal{H}^n$ .

**Lema 2.2.1.** *Cada forma holomorfa  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$  induce una sección holomorfa*

$$\begin{array}{c} \underline{H} \\ \uparrow s[\omega] \\ S' \end{array}$$

tal que

$$s[\omega](t) \in H^n(X_t, \mathbb{C}) \quad (2.2.1)$$

para cada  $t \in S'$ .

*Demostración.* Para cada  $t \in S'$ , se tiene que  $X_t$  es una variedad compleja no singular de codimensión 1. Sea  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1} = \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ . Consideremos la  $(n+1)$ -forma diferencial

$$\frac{\omega}{f-t} \in \Omega^{n+1}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus X_t),$$

la cual posee un polo de orden 1 a lo largo de la variedad  $X_t \subset X$ . Del Lema 2.1.2 se tiene que

$$Res\left(\frac{\omega}{f-t}\right) \in \Omega_{X_t}^n$$

determina una clase de cohomología

$$\left[ Res\left(\frac{\omega}{f-t}\right) \right] \in H^n(X_t, \mathbb{C}),$$

la cual depende únicamente de la clase de cohomología  $\left[ \frac{\omega}{f-t} \right] \in H^{n+1}(X \setminus X_t)$ . Entonces definimos la sección

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{s[\omega]} & \underline{H} \\ t \longmapsto & \left( s[\omega](t) := \left[ Res\left(\frac{\omega}{f-t}\right) \right] \right) & \in H^n(X_t, \mathbb{C}). \end{array}$$

□

**Definición 2.2.1.** *Definimos  $s[\omega](t) := \left[ \frac{\omega}{df} \Big|_{X_t} \right]$ .*

## 2.3. Residuo de Grothendieck y teorema de dualidad local

En este apartado usaremos [28] para definir residuo (apareamiento) de Grothendieck, como también algunas de sus propiedades.

### 2.3.1. Residuo de Grothendieck

Supondremos válidas las siguientes condiciones:

- $B_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| < \varepsilon\}$  es una bola centrada en  $z = 0$ , en la cual el radio  $\varepsilon$  será arbitrariamente pequeño según convenga en las afirmaciones subsecuentes.
- $f_0, \dots, f_n : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  son gérmenes de funciones holomorfas en algún entorno abierto de la cerradura  $\overline{B}_\varepsilon(0)$ , de  $B_\varepsilon(0)$ .
- El sistema de ecuaciones:  $f_0 = 0 = \dots = f_n$  posee una solución aislada en  $z = 0$ .

**Nota 2.3.1. Notación:**

- $D_j = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f_j(z) = 0\}$  para cada  $j = 0, \dots, n$ .
- $D = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$
- $U_j = B_\varepsilon \setminus D_j$
- $B_\varepsilon^* := B_\varepsilon \setminus \{0\} = \bigcup_{j=0}^n U_j$ .

Observamos además que  $\underline{U} = \{U_j\}$  proporciona una cubierta abierta de  $U^* := B_\varepsilon^*$ .

Sea  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$  con  $\varepsilon_j$  suficientemente pequeño para  $0 \leq i \leq n$ . Consideremos el conjunto

$$\Gamma_{\vec{\varepsilon}} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} : |f_j(z)| = \varepsilon_j, 0 \leq j \leq n \right\},$$

el cual es una subvariedad diferenciable compacta de  $B_\varepsilon(0) \setminus D$ . Por tanto,  $\Gamma_{\vec{\varepsilon}}$  es un  $(n+1)$ -ciclo real, el cual orientamos de tal manera que

$$d(\arg f_0) \wedge d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n) \geq 0.$$

**Lema 2.3.1.** *Tenemos que  $\Gamma_{\vec{\varepsilon}}$  determina un elemento en homología*

$$[\Gamma_{\vec{\varepsilon}}] \in H_{n+1}(B_\varepsilon \setminus D),$$

*el cual es independiente de los  $\varepsilon_i$ .*

## 2. Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck

Por otra parte, sea  $\beta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1}(U)$  con  $U$  algún entorno del origen  $z = 0$ .

Consideremos la  $(n + 1)$ -forma

$$\omega = \frac{\beta}{f_0 \cdot \dots \cdot f_n} \tag{2.3.1}$$

Entonces,

$$\omega = \frac{g}{f_0 \cdot \dots \cdot f_n} dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

para alguna función holomorfa  $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}(U)$ .

**Nota 2.3.2.** *Observamos que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,  $\omega$  es una  $n + 1$ -forma meromorfa en  $B_\varepsilon(0)$  tal que  $\omega|_{B_\varepsilon \setminus D}$  es holomorfa. Entonces, por razones de dimensión tenemos que  $\partial(\omega|_{B_\varepsilon \setminus D}) = 0$ . Como  $\omega|_{(B_\varepsilon \setminus D)}$  es holomorfa, entonces  $\bar{\partial}(\omega|_{B_\varepsilon \setminus D}) = 0$ . Por tanto, en  $B_\varepsilon \setminus D$ ,*

$$\begin{aligned} d\omega &= (\bar{\partial} + \partial)\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego,  $\omega|_{B_\varepsilon \setminus D}$  es cerrada. En consecuencia,  $\omega$  determina un elemento en cohomología

$$[\omega|_{B_\varepsilon \setminus D}] \in H_{DR}^{n+1}(B_\varepsilon \setminus D).$$

En base a las condiciones establecidas previamente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.3.1.** *El residuo de Grothendieck de la forma  $\omega$  (dada por Ec. 2.3.1) en  $z = 0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , se define como*

$$Res_0(\omega) := \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{n+1} \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega$$

Sea  $I_f = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}(f_0, \dots, f_n) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$  el ideal generado por las funciones  $f_0, \dots, f_n$ .

**Lema 2.3.2.** *Sea*

$$\omega = \frac{g}{f_0 \cdot \dots \cdot f_n} dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Entonces,

$$g \in I_f \Rightarrow Res_0(\omega) = 0.$$

### 2.3.2. Apareamiento de Grothendieck para singularidades aisladas de hipersuperficie

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie, con fibración de milnor  $f : X \rightarrow S$ .

Supongamos que  $z_0, \dots, z_n$  es un sistema de coordenadas holomorfas para  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ .

Definimos:



## 2. Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck

- $f_j := \frac{\partial f}{\partial z_j}$  para  $j = 0, \dots, n$ ,
- $\underline{dz} := dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ .

Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1}$  formas con coordenadas locales,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= g_1(z) \underline{dz}, \\ \omega_2 &= g_2(z) \underline{dz}.\end{aligned}$$

**Definición 2.3.2.** *El residuo de las formas  $\omega_1, \omega_2$  en la singularidad  $z = 0$  (con respecto a la singularidad  $f$ , se define por*

$$Res_{f,0}(\omega_1, \omega_2) := Res_0 \left( \frac{g_1(z)g_2(z) \underline{dz}}{\prod_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}} \right) \quad (2.3.2)$$

Donde  $Res_0(-)$  denota el residuo de Grothendieck de la Definición 2.3.1 con respecto a  $f_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$ .

**Lema 2.3.3.** *El residuo de dos formas meromorfas dado por la Ec. 2.3.2 no depende del el sistema de coordenadas locales.*

### 2.3.2.1. El apareamiento de Grothendieck

Definimos el siguiente apareamiento:

$$\begin{aligned}Res_{f,0} : \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1} \times \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto Res_{f,0}(\omega_1, \omega_2)\end{aligned}$$

Del Lema 2.3.2, tenemos una forma bilineal inducida:

$$\frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n} \times \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n} \xrightarrow{res_{f,0}(\bullet, \bullet)} \mathbb{C} \quad (2.3.3)$$

$$([\omega_1], [\omega_2]) \longmapsto Res_{f,0}(\omega_1, \omega_2)$$

donde

$$\begin{aligned}\Omega^f &:= H^{n+1}(f) \\ &= \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n} \\ &\simeq \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}}{(f_0, \dots, f_n)}\end{aligned}$$

## 2. Residuo de Leray y Residuo de Grothendieck

es al álgebra de Milnor (ver Definición A.3.1).

**Definición 2.3.3.** *El apareamiento  $\text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet)$  dado por Ec. 2.3.3, será llamado el **apareamiento de Grothendieck**.*

**Teorema 2.3.1** (Teorema de Dualidad Local). *El apareamiento de Grothendieck es no degenerado.*

# Filtración de Hodge límite de $W$ .

## Schmid

En este capítulo presentaremos la construcción de la filtración de Hodge límite  $F_\infty^\bullet$  de un cuerno con  $W$ . Schmid [34, pág., 255]; se usará el teorema de extensión canónica de Deligne [35] para interpretar  $F_\infty^\bullet$ . Para los resultados presentados en este capítulo usaremos en gran parte V. Kulikov [13, pág., 67] y [9].

### 3.1. Fibra canónica de Milnor

Consideremos un morfismo proyectivo

$$\pi : Y \rightarrow S. \tag{3.1.1}$$

Supongamos que  $\pi$  es liso sobre  $S'$ . Sea  $\underline{H} = R^n \pi_* \mathbb{C}_{Y'}$ . Sea  $\nabla$  la conexión de Gauss-Manin asociada a la gavilla  $\mathcal{H} = \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$ . Sea también

$$h_t : Y_t \rightarrow Y_t \tag{3.1.2}$$

la transformación de monodromía de Picard-Lefschetz, el cual es un difeomorfismo. Se tienen transformaciones de monodromía inducidas

$$M_t = (h_t)_* : H_n(Y_t, \mathbb{C}) \rightarrow H_n(Y_t, \mathbb{C}) \tag{3.1.3}$$

y

$$T_t = (h_t^*)^{-1} : H^n(Y_t, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(Y_t, \mathbb{C}) \tag{3.1.4}$$

### 3. Filtración de Hodge límite de W. Schmid

en homología y cohomología respectivamente.

**Lema 3.1.1.** *Sea  $U = \{u \in \mathbb{C} : \text{Im } u > 0\}$  el semiplano superior en  $\mathbb{C}$ . Entonces  $U$  es el espacio cubriente universal de  $S'$  con transformación cubriente*

$$e : U \rightarrow S', u \mapsto t = e^{2\pi i u} \quad (3.1.5)$$

Sea  $Y' := \pi^{-1}(S')$ . Hacemos

$$Y_\infty := Y' \times_{S'} U. \quad (3.1.6)$$

Asimismo, para cada  $u \in U$  consideramos el encajamiento

$$j_u : Y_t \rightarrow Y_\infty, y \mapsto j_u(y) = (y, u) \quad (3.1.7)$$

con  $t = e(u)$ .

Consideremos la fibración localmente trivial

$$\begin{array}{ccc} Y_\infty & & (y, u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & & u \end{array}$$

con fibras difeomorfas a  $Y_t$ . Al ser  $U$  contractible, tenemos que los encajamientos  $j_u$  son equivalencias de homotopía, lo que nos permite obtener el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.1.** *Tenemos las identificaciones:*

$$H_n(Y_t, \mathbb{C}) \xrightarrow[\simeq]{(j_u)_*} H_n(Y_\infty, \mathbb{C}) \quad (3.1.8)$$

y

$$H^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow[\simeq]{(j_u)^*} H^n(Y_t, \mathbb{C}) \quad (3.1.9)$$

para cada  $t \in S'$ .

**Definición 3.1.1.** *Llamaremos al espacio fijo  $Y_\infty$  la **fibra canónica de Milnor** de la familia  $\pi$ ; y el espacio fijo  $H := H^n(Y_\infty)$  le llamaremos la **fibra canónica** del fibrado vectorial  $\underline{H}$ .*

### 3.1.1. Trivialización canónica

Bajo las hipótesis de la sección 3.1 tenemos el diagrama de fibrados vectoriales

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{H}_U & \longrightarrow & \underline{H} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U & \xrightarrow{\exp(2\pi i \bullet)} & S'
 \end{array}$$

donde  $\underline{H}_U = \underline{H} \times_{S'} U$ ; y para cada  $t \in S'$  se tiene la inclusión

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(Y_t, \mathbb{C}) = \underline{H}_t & \xrightarrow{j_u} & \underline{H}_U \\
 u \longmapsto & & \longmapsto j_u(\omega) = (\omega, u).
 \end{array}$$

Sea  $A : U \rightarrow \underline{H}_U$  una sección de  $\underline{H}_U$ . Entonces  $A(u) \in (\underline{H}_U)_u = \underline{H}_t \times \{u\}$  para cada  $u \in U$  y  $t = e(u)$ . Entonces, de Ec. 3.1.9 definimos

$$A_t := (j_u)^*(A(u)) \in \underline{H}_t \tag{3.1.10}$$

Recíprocamente, dada una sección  $\omega : S' \rightarrow \underline{H}$ , tenemos que  $\omega_t \in H^n(Y_t, \mathbb{C})$  para cada  $t \in S'$ . Entonces definimos

$$A(u) := ((j_u)^*)^{-1}(\omega_t) \in \underline{H}_U \tag{3.1.11}$$

donde  $e(u) = t$ .

Por tanto, tenemos una trivialización canónica dada por

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{H}_U & \xrightarrow{\cong} & H \times U \\
 ((\omega, u)_t) & \longmapsto & ((j_u^*)^{-1}\omega_t, u)
 \end{array}$$

donde  $j_u^*$  esta dado por Ec. 3.1.9 y  $t = e(u)$ .

### 3.1.2. Transformación de Monodromía en la fibra canónica $H$

Consideremos la transformación  $u \mapsto u + 1$  definida en el semiplano superior  $U$ . Tenemos, por tanto, un difeomorfismo inducido

$$\underline{H}_U \xrightarrow{h} \underline{H}_U,$$

$$(\omega, u) \longmapsto (\omega, u + 1)$$

Asimismo, tenemos un isomorfismo inducido

$$h^* : H \rightarrow H,$$

tal que: dada una sección  $A$  de  $H$  con

$$A(u + 1) = A_0,$$

entonces

$$h^* A$$

es una sección de  $H$  tal que  $h^* A(u) = A_0$ .

**Lema 3.1.2.** *Sea  $u \in U$ . El isomorfismo (3.1.9), implica que la transformación de monodromía*

$$\underline{H}_t \xrightarrow{T_t} \underline{H}_t$$

*se corresponde con la transformación  $h^*$ , en otras palabras, se tiene el diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{h^*} & H \\ \downarrow j_u^* & & \downarrow j_u^* \\ \underline{H}_t & \xrightarrow{T_t} & \underline{H}_t \end{array} \quad (3.1.12)$$

**Definición 3.1.2.** *De acuerdo con el Lema 3.1.2, definimos*

$$T := h^* : H \rightarrow H$$

*y la llamaremos la transformación de monodromía de la fibra canónica  $H$ .*

## 3.2. Teorema de la Órbita Nilpotente: filtración de Hodge Límite

Bajo las hipótesis de la sección 3.1, consideremos el fibrado vectorial (de filtraciones de Hodge) en  $\mathcal{H} = \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$

3. Filtración de Hodge límite de W. Schmid

$$\mathcal{F}^\bullet = \left\{ F_t^\bullet : t \in S' \right\} \hookrightarrow \mathcal{H} \quad (3.2.1)$$

$$\downarrow$$

$$S'$$

tal que

$$F_t^p := F^p H^n(Y_t, \mathbb{C}) \subset \underline{H}_t = H^n(Y_t, \mathbb{C})$$

para cada  $t \in S'$ .

Sea  $z \in U$  y  $t = e(z)$ . Usando el isomorfismo (3.1.9), definimos

$$F_z^\bullet := (j_z^*)^{-1} F_t^\bullet \subset H.$$

Por tanto, obtenemos un mapeo de periodos

$$U \rightarrow \mathcal{D}, \quad z \mapsto \tilde{\phi}(z) := F_z^\bullet \quad (3.2.2)$$

**Lema 3.2.1.** *Sea  $z \in U$  y  $T$  la transformación de monodromía de  $H$ . Entonces*

$$\tilde{\phi}(z+1) = T^{-1} \tilde{\phi}(z) \quad (3.2.3)$$

A nivel de coordenadas, consideremos una matriz  $R$  tal que

$$T = e^{2\pi i R}. \quad (3.2.4)$$

Sea también  $\tilde{\phi}$  el mapeo de periodos dado por la ecuación (3.2.2). Entonces tenemos un nuevo mapeo de periodos

$$\tilde{\psi} : U \rightarrow \check{D}, \quad z \mapsto \tilde{\psi}(z) := e^{2\pi i z R} \cdot \tilde{\phi}(z) \quad (3.2.5)$$

**Nota 3.2.1.** *Es importante notar que en la ecuación (3.2.4)  $R$  no está definida de manera única, ya que su parte semi-simple  $R_s$  no es única. Ahora bien, dada una descomposición*

$$R = -R_s - N \quad (3.2.6)$$

con  $-R_s$  una parte semi-simple y  $-N$  una parte nilpotente de  $R$ , se tiene que

### 3. Filtración de Hodge límite de W. Schmid

$$\begin{aligned}
 T &= e^{-2\pi i R} \\
 &= e^{-2\pi i(-R_s - N)} \\
 &= T_s T_u
 \end{aligned}$$

donde  $T_s = e^{-2\pi i R_s}$  y  $T_u = e^{-2\pi i N}$ . Entonces  $T = T_s T_u$  con  $T_s$  semi-simple y  $T_u$  unipotente.

**Lema 3.2.2.** El mapeo de periodos  $\tilde{\psi}$  es periódico, i.e.  $\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}(z+1)$  para cada  $z \in U$ .

*Demostración.* Sea  $z \in U$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(z+1) &= e^{2\pi i(z+1)R} \cdot \tilde{\phi}(z+1) \\
 &= e^{2\pi i z R} \cdot e^{2\pi i R} \cdot T^{-1} \tilde{\phi}(z) \\
 &= e^{2\pi i z R} \cdot T \cdot T^{-1} \tilde{\phi}(z) \\
 &= e^{2\pi i z R} \cdot \tilde{\phi}(z) \\
 &= \tilde{\psi}(z)
 \end{aligned}$$

□

Usando el Lema 3.2.2 definimos el mapeo de periodos:

$$\psi : S' \rightarrow \check{D}, \psi(t) := \tilde{\psi}(u) \quad (3.2.7)$$

con  $e(u) = t$ .

**Lema 3.2.3.** Los valores propios de la transformación de monodromía  $T$ , definida en la fibra canónica  $H$ , son raíces de la unidad.

**Corolario 3.2.1.** Existe  $m$  entero positivo tal que  $T_s^m = 1$

*Demostración.* Es una consecuencia del Lema 3.2.3. □

**Lema 3.2.4.** El operador nilpotente

$$N = -\frac{1}{2\pi i} \log T_u \quad (3.2.8)$$

está definido de manera única por la transformación  $T$ .



Finalmente, en el siguiente resultado enunciamos el **Teorema de la Órbita Nilpotente** de W. Schmid [34].

**Teorema 3.2.1** (Caso de una variable compleja). *El mapeo de periodos dado por la ecuación (3.2.7) puede ser continuado, sobre el punto  $0 \in S$ , a un mapeo holomorfo. Además el punto  $\psi(0) \in \check{D}$  es un punto fijo de  $T_s$ .*

*Demostración.* Una demostración alternativa de este resultado la proporciona la regularidad de la conexión de Gauss-Manin. En efecto, si nos restringimos a  $S'$ , entonces  $d\psi(z) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\sigma_z)$  para cada  $z \in S'$ , con  $\sigma_z$  una sección de  $\check{D}$ . Entonces como  $\nabla$  es regular se tiene que el mapeo  $\psi$  es meromorfo. La prueba concluye al observar que  $\check{D}$  esta contenido en un producto de Grasmanianas.  $\square$

**Definición 3.2.1.** *La filtración  $\psi(0) \in \check{D}$  sera llamada una **filtración de Hodge límite**, y la denotamos por  $F_\infty^\bullet$*

### 3.3. Extensión canónica de Deligne: una variable compleja

Siguiendo Deligne [35, Pág., 93], procedemos a dar una descripción explícita de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , la extensión del fibrado  $\mathcal{H}$ , al disco completo  $S$ .

Sea  $\omega_1, \dots, \omega_\mu$  un sistema local de secciones planas para  $\mathcal{H}$ , el cual esta definido sobre  $S'$ .

Las fibras de la extension canónica  $\tilde{\mathcal{H}}$  están dadas de la siguiente manera:

1. Para cada  $t \in S'$  consideremos el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial

$$\tilde{\mathcal{H}}_t := \mathcal{O}_{S'} \left\langle t^N \cdot \omega_1(t), \dots, t^N \cdot \omega_\mu(t) \right\rangle \quad (3.3.1)$$

donde  $t^N \cdot \omega_j(t)$  es una sección monovaluada respecto a la monodromía  $T$  para cada  $j = 1, \dots, \mu$ .

Entonces

$$\tilde{\mathcal{H}}_t = \underline{H}_t \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S'}$$

2. Para  $t = 0 \in S$  consideremos el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 := \mathcal{O}_{S,0} \langle \omega_1(t), \dots, \omega_\mu(t) \rangle \quad (3.3.2)$$

Equivalentemente, si tomamos el limite directo sobre los abiertos que contienen a  $t = 0$  entonces

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \lim_{S \supset V \ni 0} \tilde{\mathcal{H}}_V \quad (3.3.3)$$

**Definición 3.3.1.** Sea  $s_j : S \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  la sección definida por

$$s_j(t) := \begin{cases} t^N \cdot \omega_j(t) & \text{si } t \in S' \\ \sum_{j=1}^{\mu} \lim_{t \rightarrow 0} t^N \cdot \omega_j(t) & \text{si } t = 0 \in S \end{cases}$$

para cada  $j = 1, \dots, \mu$ ; donde  $N$  es el automorfismo de la fibra canónica  $H$  dado por la ecuación (3.2.8).

**Proposición 3.3.1.** Tenemos la trivialización  $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \simeq \tilde{\mathcal{H}}$ .

*Demostración.* Sea  $A_1, \dots, A_{\mu}$  una base de secciones locales de  $H$ . Consideremos el diagrama conmutativo (3.1.12). Entonces el isomorfismo deseado esta determinado por la aplicación tal que

$$A_j(u) \mapsto t^N \cdot j_u^*(A_j(u)) = t^N \cdot \omega_j(t) \quad (3.3.4)$$

para cada  $j = 1, \dots, \mu$ . Esto completa la prueba.  $\square$

**Corolario 3.3.1.** Respecto a la Proposición 3.3.1, tenemos los siguientes resultados.

1.  $\mathcal{H} \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S'}$ .
2.  $\tilde{\mathcal{H}}_0 \simeq H$ .

### 3.4. La filtración de Hodge límite en términos de la extensión de Deligne

Los resultados presentados en esta sección estan basados en [9], [8] y [13].

**Proposición 3.4.1** (C. Schnell [9]). *Las secciones  $\omega$  de  $\mathcal{H} \rightarrow S'$  estan en correspondencia con mapeos holomorfos*

$$s : U \rightarrow \mathbb{C}^{\mu}$$

tales que

$$s(u+1) = T \cdot s(u) \quad (3.4.1)$$

para cada  $u \in U$ , y viceversa; donde  $U \subset \mathbb{C}$  es el semiplano superior y  $T$  es la transformación de monodromía en la fibra canónica  $H$  de la Definición 3.1.2.

Ahora bien, sea  $v \in \mathbb{C}^{\mu}$ . Definimos el mapeo

$$\tilde{s}_v : U \rightarrow \mathbb{C}^{\mu}, u \mapsto \tilde{s}_v(u) = e^{-2\pi i u N} v \quad (3.4.2)$$

### 3. Filtración de Hodge límite de W. Schmid

**Lema 3.4.1.** *Para cada  $v \in \mathbb{C}^\mu$ , la aplicación  $\tilde{s}_v : U \rightarrow \mathbb{C}^\mu$  dada por la ecuación (3.4.2) define una sección de  $\mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Sin perder generalidad supongamos que  $T = T_u$ . Del Lema 3.4.1 basta probar que  $\tilde{s}_v$  satisface la ecuación (3.4.1). En efecto, sea  $v \in \mathbb{C}^\mu$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{s}_v(u+1) &= e^{-2\pi i(u+1)N} \cdot v \\ &= e^{-2\pi iuN} \cdot e^{-2\pi iN} \cdot v \\ &= e^{-2\pi iN} \cdot e^{-2\pi iuN} \cdot v \\ &= e^{-2\pi iN} \cdot \tilde{s}_v(u) \\ &= T_u \cdot \tilde{s}_v(u) \end{aligned}$$

Lo cual completa la prueba. □

**Nota 3.4.1.** *El fibrado vectorial  $\tilde{\mathcal{H}}$  está generado por las secciones correspondientes a las aplicaciones  $\tilde{s}_v$ . Más aún, a nivel de fibrados vectoriales, tenemos el isomorfismo*

$$\tilde{\mathcal{H}} \simeq S \times \mathbb{C}^\mu, \quad \tilde{s}_v(u) \mapsto (t, v) \tag{3.4.3}$$

donde  $S \times \mathbb{C}^\mu$  es el fibrado trivial al proyectar al primer factor y  $t = \exp(2\pi iu)$ .

Una base de secciones locales para  $\tilde{\mathcal{H}}$  está dada por los vectores canónicos de  $\mathbb{C}^\mu$ , es decir, para cada  $t \in S$

$$\tilde{\mathcal{H}}_t = \mathbb{C} \left\langle \tilde{s}_{e_1}(u), \dots, \tilde{s}_{e_\mu}(u) \right\rangle \tag{3.4.4}$$

como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, con  $t = \exp(2\pi iu)$ .

Por otra parte, la parte imaginaria de  $u$  es positiva. Entonces la ecuación

$$\begin{aligned} t &= e^{2\pi iu} \\ &= e^{2\pi i \operatorname{Re} u} \cdot e^{2\pi i^2 \operatorname{Im} u} \\ &= e^{-2\pi \operatorname{Im} u} \cdot e^{2\pi i \operatorname{Re} u} \end{aligned}$$

implica que

$$t \rightarrow 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \rightarrow \infty \tag{3.4.5}$$

### 3. Filtración de Hodge límite de W. Schmid

Ahora bien, tenemos particular interés en  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ , la fibra sobre  $t = 0$ . De acuerdo con las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5), tenemos una base para  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ . Explícitamente,

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{s}_{e_1}(u), \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{s}_{e_\mu}(u) \right\rangle \quad (3.4.6)$$

Asimismo, de la ecuación (3.4.2) tenemos que para cada  $j = 1, \dots, \mu$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{s}_{e_j}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-2\pi i u N} e_j \quad (3.4.7)$$

Finalmente podemos concluir el resultado siguiente.

**Teorema 3.4.1.** *Consideremos el fibrado vectorial filtración sobre el disco agujerado  $S'$  dado por la ecuación 3.2.1. Entonces*

i) *La filtración  $\mathcal{F}^\bullet$  en  $\mathcal{H}$  se extiende a una filtración :*

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathcal{F}}^\bullet, \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

*en la extensión canónica de Deligne  $\tilde{\mathcal{H}}$  .*

ii) *La filtración fibra  $\mathcal{F}_0^\bullet \subset \tilde{\mathcal{H}}_0$  en  $t = 0$ , es precisamente la filtración límite de W. Schmid, i.e.*

$$\begin{aligned} F_\infty^\bullet &= \mathcal{F}_0^\bullet \\ &:= \lim_{t \rightarrow 0} F_t^\bullet \end{aligned}$$

*Demostración.* Para una demostración completa ver [13, Pág. 69]

□

# Estructuras de Hodge Mixtas

## Polarizadas

En este capítulo supondremos que  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  es una singularidad aislada de hipersuperficie con fibración de Milnor  $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ . Describiremos la Estructura de Hodge Mixta Polarizada (PMHS) que posee la cohomología evanescente asociada a la singularidad  $f$ . Los resultados aquí presentados son clásicos y pueden ser encontrados en [17], [18], [34], [10],[11], [13], [6] y [19], además daremos una cita concreta según sea necesario.

### 4.1. Categoría de MHS

**Definición 4.1.1.** Sean  $V_1, V_2$  espacios vectoriales filtrados, y  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  una transformación lineal.

- i)  $\phi$  es un morfismo de espacios filtrados si  $\phi(F^p V_1) \subset F^p V_2$ , para cada  $p$ .
- ii)  $\phi$  es un morfismo estricto si  $\phi(F^p V_1) = \text{im} \phi \cap F^p V_2$ , para cada  $p$ .
- iii) Si  $V_1, V_2$  son espacios vectoriales graduados, entonces  $\phi$  es un morfismo graduado si  $\phi(V_1^p) \subset V_2^p$ , para cada  $p$ .

**Definición 4.1.2.** Sea  $V$  un  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial de dimensión finita con complejificación  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ . Una estructura de Hodge pura (HS) de peso  $k$ , es una descomposición

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q},$$

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

en la cual, para cada  $p, q$ , se satisface la condición

$$V^{p,q} = \overline{V^{p,q}}.$$

Aquí, el símbolo  $\bar{\phantom{x}}$  denota el operador de conjugación compleja.

**Nota 4.1.1.** 1. El operador de conjugación compleja en la Definición 4.1.2 está bien definido. En efecto, sea  $e_1, \dots, e_m$  una  $\mathbb{Q}$ -base del espacio  $V \subset V_{\mathbb{C}}$ . Entonces para vectores en  $V_{\mathbb{C}}$ , la conjugación está definida por

$$\overline{\sum c_j e_j} = \sum \overline{c_j} e_j.$$

2. Supongamos válida la Definición 4.1.2. Entonces se tiene la filtración de Hodge asociada:

$$F^p V := \bigoplus_{r \geq p} V^{r,s}.$$

Recíprocamente, sea  $F^\bullet$  una filtración (de hodge) decreciente en  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$V_{\mathbb{C}} \supset \dots \supset F^p V \supset F^{p+1} V \supset \dots$$

Supongamos además que

$$F^p \cap \overline{F^q} = 0,$$

siempre que  $p + q = k + 1$ ; o equivalentemente,

$$V_{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}}.$$

Entonces, si definimos  $V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$ , se tiene una Estructura de Hodge Pura de peso  $k$  en  $V_{\mathbb{C}}$  como en la Definición 4.1.2. Concluimos que podemos definir una HS de peso  $k$  en  $V_{\mathbb{C}}$  dando su descomposición en espacios  $(p, q)$ , o bien, proporcionando una filtración de Hodge.

Esto nos permite denotar una HS de peso  $k$  por el par  $(V, F)$ .

**Definición 4.1.3.** Sean  $(V_i, F_i)$ ,  $i = 1, 2$  dos espacios con estructuras de Hodge puras y  $r$  un entero. Un morfismo de Estructuras de Hodge puras de grado  $r$  es una aplicación lineal  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que:

1. Para cada  $v \in V_1$ ,  $\phi(\overline{v}) = \overline{\phi(v)}$ .
2. Para cada  $p$ ,  $F_1^p V_1 \subset F_2^{p+r} V_2$ .

Un morfismo de HS será definido como un morfismo de HS de grado  $r = 0$ .

**Nota 4.1.2.** De las condiciones de la Definición 4.1.3 se sigue que, para cada  $p$ ,

$$\overline{F^p V_1} \subset \overline{F^{p+r} V_2}.$$

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

**Definición 4.1.4.** Sea  $H_{\mathbb{Q}}$  un  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Sea  $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ . Una estructura de Hodge mixta (MHS) en  $H_{\mathbb{Q}}$  consiste de la siguiente información:

(i) Una filtración creciente  $W_{\bullet}^{\mathbb{Q}}$  en  $H_{\mathbb{Q}}$ :

$$0 \subset \cdots \subset W_j^{\mathbb{Q}} \subset W_{j+1}^{\mathbb{Q}} \subset \cdots \subset H_{\mathbb{Q}}.$$

Definimos  $W_j := W_j^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ .

(ii) Una filtración decreciente  $F^{\bullet}$  en  $H_{\mathbb{C}}$ :

$$H_{\mathbb{C}} \supset F^0 \supset F^1 \cdots \supset F^j \supset F^{j+1} \supset \cdots \supset 0.$$

(iii) Definimos los espacios graduados

$$\begin{aligned} Gr_j^W &:= Gr_j^W H \\ &:= \frac{W_j}{W_{j-1}}. \end{aligned}$$

Entonces la filtración  $F^{\bullet}$  induce una filtración  $F^{\bullet} Gr_k^W$  en  $Gr_k^W$ :

$$F^p Gr_k^W = \frac{F^p \cap W_k + W_{k-1}}{W_{k-1}}.$$

(iv) Para cada  $k$ , los espacios  $Gr_k^W$  poseen una estructura de Hodge pura de peso  $k$ , es decir, se satisface la condición:

$$Gr_k^W H = F^p Gr_k^W \oplus \overline{F^{k-p+1} Gr_k^W},$$

para cada  $p$ , donde  $\bar{\phantom{x}}$  denota la conjugación compleja.

La filtración  $F^{\bullet}$  es llamada **filtración de Hodge**, y  $W_{\bullet}$  es llamada **filtración por peso**. Denotaremos tal MHS como la tripleta  $(H_{\mathbb{Q}}, W_{\bullet}, F^{\bullet})$ .

**Definición 4.1.5.** Sean  $H_1, H_2$  espacios vectoriales, cada uno de los cuales posee una Estructura de Hodge Mixta. Una transformación lineal  $\phi : H_1 \rightarrow H_2$  es llamada un morfismo de MHS si se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\phi(\bar{\omega}) = \overline{\phi(\omega)}$
2.  $\phi$  es un morfismo de espacios filtrados con respecto a las filtraciones  $W_{\bullet} H_i$  y  $F^{\bullet} H_i$  para  $i = 1, 2$ , esto es,

$$\phi(W_j H_1) \subset W_j H_2 \tag{4.1.1}$$

$$\phi(F^j H_1) \subset F^j H_2. \tag{4.1.2}$$

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

En otras palabras,  $\phi$  es compatible con ambas filtraciones  $W_\bullet$  y  $F^\bullet$  ( y por ende, compatible con  $\overline{F}^\bullet$  ).

**Definición 4.1.6.** El graduado asociado a la filtración  $W_\bullet$  será denotado por  $Gr^W = \bigoplus_l Gr_l^W$ .

**Nota 4.1.3.** Un morfismo  $\phi$  de MHS induce morfismos

$$Gr_l^W \phi : Gr_l^W(H_1) \longrightarrow Gr_l^W(H_2)$$

de Estructuras de Hodge puras de peso  $l$ .

**Teorema 4.1.1.** (P. Deligne [36, Thm 2.3.5])

- La categoría de Estructuras de Hodge Mixtas es abeliana; kernels y cokernels de morfismos de MHS son dotados con las filtraciones inducidas.
- Cada morfismo de MHS

$$\phi : H_1 \longrightarrow H_2,$$

es estrictamente compatible con ambas filtraciones  $W^\bullet$  y  $F^\bullet$ .

## 4.2. Descomposición tipo Lefschetz

**Lema 4.2.1** (Lema de Jacobson-Morozov). Sea  $N : V \rightarrow V$  un endomorfismo nilpotente sobre un espacio vectorial finito dimensional  $V$ . Entonces existe una única filtración creciente de  $V$ :

$$W = \left( W_j(N, k) \right),$$

caracterizada por las siguientes propiedades:

- $N : W_j \rightarrow W_{j-2} \quad j \geq 2$ ,
- Los mapeos inducidos

$$N^l : Gr_{k+l}^W(V) \rightarrow Gr_{k-l}^W(V)$$

son isomorfismos para cada  $l \geq 0$ .

- Mas aún, se tiene una descomposición de tipo Lefschetz:

$$Gr^W V = \bigoplus_{l=0}^k \bigoplus_{j=0}^l N^j PV_{k+l}$$

donde,  $PV_{k+l} := Ker(N^{l+1} : Gr_{k+l}^W V \rightarrow Gr_{k-l-2}^W V)$ .



#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

- El operador  $N$  tiene un número  $\dim[PV]_{k+l}$  de bloques de Jordan de tamaño  $l+1$  para  $l = 0 \dots k$ .

*Demostración.* Una demostración es dada por W. Schmid [34]. □

Un resultado más fuerte está dado por el

**Lema 4.2.2** (W. Schmid [34]). *Supongamos que:*

- i)  $m \in \mathbb{N}$
- ii)  $H_{\mathbb{Q}}$  un  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial de dimensión finita.
- iii)  $S : H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$  es una forma bilineal no-degenerada, la cual es  $(-1)^m$ -simétrica, i.e.  
 $S$  es simétrica para  $m$  par, y antisimétrica si  $m$  es impar.
- iv)  $N : H_{\mathbb{Q}} \rightarrow H_{\mathbb{Q}}$  es un endomorfismo nilpotente con  $N^{m+1} = 0$ , el cual es una isometría infinitesimal, i.e.

$$S(Na, b) + S(a, Nb) = 0, \quad \forall a, b \in H_{\mathbb{Q}}.$$

Entonces tenemos los siguientes resultados:

- a) Existe una única filtración creciente (que depende de  $N$ )

$$W_{\bullet} : \{0\} = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{2k-1} \subset W_{2k} = H_{\mathbb{Q}},$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

- $N(W_l) \subset W_{l-2}$
- El operador inducido

$$N^l : Gr_{m+l}^W \rightarrow Gr_{m-l}^W$$

es un isomorfismo para cada  $l \geq 0$  con  $Gr_j^W = W_j/W_{j-1}$ .

- b)  $S(W_l, W_{l'}) = 0$  siempre que  $l + l' < 2m$ .
- c) La filtración  $W_{\bullet}$  es auto-dual en el sentido de que cada  $W_l$  es el complemento ortogonal de  $W_{2k-l-1}$  respecto a la forma bilineal  $S$ .
- d) Para cada  $l \geq 0$  los espacios  $Gr_{m+l}^W$  poseen formas bilineales  $(-1)^{m+l}$ -simétricas y no-degeneradas

$$S_l : Gr_{m+l}^W \otimes Gr_{m+l}^W \rightarrow \mathbb{Q}$$

las cuales están determinadas de forma única por las siguientes condiciones:

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

- Si  $l \geq 0$ , y  $\bar{u}, \bar{v}$  son elementos en  $Gr_{m+l}^W$  con representantes  $u$  y  $v$  en  $W_{m+l}$ , respectivamente, entonces

$$S_l(\bar{u}, \bar{v}) = S(u, N^l v).$$

- Si  $l < 0$ , entonces  $N^{-l} : Gr_{m-l}^W \rightarrow Gr_{m+l}^W$  es una isometría.

e) Definimos los espacios primitivos  $P_{m+l}(H_{\mathbb{Q}})$  de  $Gr_{m+l}^W$  de la siguiente manera:

- $P_{m+l} = \ker(N^{l+1} : Gr_{m+l}^W \rightarrow Gr_{m-l-2}^W)$  siempre que  $l \geq 0$ ,
- $P_{m+l} = 0$  para  $l < 0$ .

Entonces tenemos la descomposición

$$Gr_{m+l}^W H_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i \geq 0} N^i(P_{m+l+2i}) \quad (4.2.1)$$

f) La descomposición dada por (4.2.1) es una descomposición ortogonal con respecto a  $S_l$  para  $l \geq 0$ .

**Definición 4.2.1.** La descomposición dada por la ecuación (4.2.1) será llamada **descomposición de tipo Lefschetz**.

### 4.3. Descomposición de una estructura de Hodge Mixta polarizada

**Definición 4.3.1** (E. Cattani, A. Kaplan y W. Schmid [18]). Una **descomposición** de una estructura de Hodge Mixta  $(H_{\mathbb{Z}}, W_{\bullet}, F^{\bullet})$  es una bigraduación en  $H_{\mathbb{C}}$

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q} J^{p,q}$$

tal que,

$$\begin{aligned} W_l &= \bigoplus_{k \leq l} \bigoplus_p J^{p, k-p}, \quad y \\ F^p &= \bigoplus_l \bigoplus_{p \leq q} J^{q, l-q}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Esta descomposición la denotaremos por  $\{J^{p,q}\}$ .

**Definición 4.3.2.** Sea  $\{J^{p,q}\}$  una descomposición de una MHS. Un  $(r, r)$ -morfismo  $\mathcal{N}$  de  $(W_{\bullet}, F^{\bullet})$  es compatible con la descomposición  $\{J^{p,q}\}$  si  $\mathcal{N}(J^{p,q}) \subset J^{p+r, q+r}$ .

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

**Lema 4.3.1.** *Cualquier descomposición  $\{J^{p,q}\}$  de una MHS satisface la ecuación*

$$J^{p,q} = \overline{J^{q,p}} \quad \text{mód } W_{p+q-1}$$

*Demostración.* Para una demostración, ver [18, Pág., 470] □

**Definición 4.3.3** (C. Hertling, [11]). *Una estructura de Hodge Mixta polarizada (PMHS) esta dada por la siguiente información:*

1. *Contamos con los datos siguientes:*

a) *Una reticula  $H_{\mathbb{Z}}$  con  $H_{\mathbb{Z}} \subset H_{\mathbb{Q}} \subset H_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ .*

b) *Una forma bilineal*

$$S : H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

c) *Un endomorfismo*

$$N : H_{\mathbb{Q}} \rightarrow H_{\mathbb{Q}}.$$

2. *Existe  $m \in \mathbb{N}$  de tal manera que  $(m, H_{\mathbb{Q}}, S, N, W_{\bullet}, S_l, P_{m+l})$  cumplen las las propiedades del Lema 4.2.2.*

3. *Existe una filtración decreciente (filtración de Hodge)  $F^{\bullet} \subset H_{\mathbb{C}}$ .*

4. *La filtración  $F^{\bullet}$  satisface las siguientes propiedades:*

(i) *La filtración  $F^{\bullet} Gr_k^W$ , inducida en el cociente  $Gr_k^W$ , proporciona una estructura de Hodge pura de peso  $k$ , i.e.<sup>1</sup>*

$$Gr_k^W = F^p Gr_k^W \oplus \overline{F^{k+1-p} Gr_k^W}.$$

(ii) *El endomorfismo  $N$  es un  $(-1, -1)$ -morfismo de estructuras de Hodge mixtas, i.e.*

$$N(F^p) \subset F^{p-1}.$$

(iii) *La forma bilineal  $S$  satisface la relación:*

$$S(F^p, F^{m+1-p}) = 0.$$

(iv) *La estructura de Hodge pura de peso  $m+l$  en  $P_{m+l}$  esta polarizada por  $S_l$ , es decir, se cumple lo siguiente<sup>2</sup>:*

---

<sup>1</sup>Notamos que en esta definición la tripleta  $(H_{\mathbb{Z}}, W_{\bullet}, F^{\bullet})$  es una MHS.

<sup>2</sup>De acuerdo con la definición de  $P_{m+l}$ , tenemos una filtración  $F^{\bullet} P_{m+l}$ , la cual también proporciona una estructura de Hodge pura de peso  $m+l$ , pues  $N^{m+l} : Gr_{m+l}^W \rightarrow Gr_{m-l-2}^W$  es un morfismo de estructuras de Hodge puras

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

$$(iv.1) \quad S_l(F^p P_{m+l}, F^{m+l+1-p} P_{m+l}) = 0, \quad y$$

$$(iv.2) \quad i^{2p-m-l} S_l(u, \bar{u}) \geq 0 \text{ siempre que } u \in F^p P_{m+l} \cap \overline{F^{m+l-p} P_{m+l}}, \quad u \neq 0.$$

**Definición 4.3.4** (E. Cattani, A. Kaplan, W. Schmid, [18]). Una **descomposición** de una PMHS es una descomposición  $\{J^{p,q}\}$  de la MHS  $(H_{\mathbb{Z}}, W_{\bullet}, F^{\bullet})$ , dada por Ec. 4.3.1 y que además cumple las siguientes propiedades:

1. La descomposición  $\{J^{p,q}\}$  es compatible con el endomorfismo  $N$ , es decir  $N(J^{p,q}) \subset J^{p-1,q-1}$ .
2. Consideremos la filtración corrimiento  $W[m] = W_{m+\bullet}$  y su graduación

$$H_l = \bigoplus_{p+q=m+l} J^{p,q}$$

Entonces  $S(H_i, H_j) = 0$  a menos que  $i + j = -1$ .

**Definición 4.3.5.** Sea  $(H_{\mathbb{Z}}, W_{\bullet}, F^{\bullet}, S, N)$  una PMHS. Definimos los espacios

$$I^{p,q} = (F^p \cap W_{p+q}) \cap (\overline{F^q} \cap W_{p+q} + \sum_{j \geq 1} \overline{F^{q-j}} \cap W_{p+q-j-1}) \quad (4.3.2)$$

Asímismo, para  $p + q \geq m$  definimos el subespacio primitivo de  $I^{p,q}$

$$I_0^{p,q} = \ker(N^{p+q-m+1} : I^{p,q} \rightarrow I^{m-q-1, m-p-1}) \quad (4.3.3)$$

**Proposición 4.3.1.** Cualquier MHS admite una descomposición compatible con cada uno de sus morfismos. Mas aún, una de estas descomposiciones esta dada por  $\{I^{p,q}\}$  de Ec. 4.3.2.

*Demostración.* Para una demostración, ver [18] □

**Proposición 4.3.2.** Sea  $(H_{\mathbb{Z}}, W_{\bullet}, F^{\bullet}, S, N)$  una PMHS, y consideremos los espacios  $I^{p,q}$ ,  $I_0^{p,q}$  dados por la Definición 4.3.5. Entonces tenemos los siguientes resultados:

1. Tenemos las descomposiciones en suma directa:

$$F^p = \bigoplus_{(i,q)} I^{i,q} = \bigoplus_{i \geq p} (\bigoplus_q I^{i,q}) \quad (4.3.4)$$

y

$$W_l = \bigoplus_{p+q \leq l} I^{p,q} \quad (4.3.5)$$

2.  $N$  satisface la condición:

$$N(I^{p,q}) \subset I^{p-1,q-1} \quad (4.3.6)$$

para cada  $p, q$ .

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

3.  $S(I^{p,q}, I^{r,s}) = 0$  para  $(r, s) \neq (m - p, m - q)$ .
4.  $I^{p,q} = \bigoplus_{j \geq 0} N^j I_0^{p+j, q+j}$ .
5.  $S(N^i I_0^{p,q}, N^j I_0^{r,s}) = 0$  para  $(r, s, i + j) \neq (q, p, p + q - m)$ .

*Demostración.* Una demostración de este resultado lo podemos encontrar en [11, pág.,6 Lem.2.3].  $\square$

**Definición 4.3.6.** La decomposición  $\{I^{p,q}\}$  de una PMHS dada por la Proposición 4.3.2 sera llamada la decomposición de Deligne.

### 4.4. PMHS de una singularidad aislada de hipersuperficie

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie con fibración de Milnor  $f : X \longrightarrow S$ . En esta sección se describe la Estructura de Hodge Mixta Polarizada asociada a la singularidad  $f$ .

#### 4.4.1. Fibra canónica de Milnor (local)

En este apartado estableceremos resultados análogos a los de la Sección 3.1.

1. Comenzaremos por considerar el cubriente universal

$$\begin{array}{ccc} S_\infty & \xrightarrow{u} & S' \\ \tau & \longmapsto & t = \exp(2\pi i \tau). \end{array}$$

2. Consideremos la fibra canónica de Milnor definida por el pullback

$$\begin{array}{ccc} X_\infty := X' \times_{S'} S_\infty & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow f \\ S_\infty & \xrightarrow{u} & S' \end{array}$$

3. Tenemos equivalencias de homotopía

$$X_{u(\tau)} \simeq (X_\infty)_\tau \xrightarrow{\subset} X_\infty. \tag{4.4.1}$$

**Definición 4.4.1.** Definimos la retícula de Milnor por  $H_n(X_\infty, \mathbb{Z})$ .

**Nota 4.4.1.** Para cada  $t \in S'$ ,

$$H^n(X_t, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\mu.$$

**Corolario 4.4.1.** *Se tienen isomorfismos*

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^n((X_\infty)_\tau, \mathbb{C}) \xrightarrow[\cong]{j_\tau^*} H(X_{u(\tau)}, \mathbb{C}).$$

**Definición 4.4.2.** *El espacio  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  es llamado la fibra canónica de Milnor en cohomología.*

Un lazo alrededor de  $0 \in S$ , orientado de manera positiva, induce una transformación de monodromía en cada fibra

$$H^n(X_t, \mathbb{C}) \xrightarrow{M^t} H^n(X_t, \mathbb{C}).$$

Esta transformación de monodromía determina de manera única el fibrado vectorial  $\underline{H}$  salvo isomorfismo, pues las fibras son difeomorfas y por tanto se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_t, \mathbb{C}) & \xrightarrow{M^t} & H^n(X_t, \mathbb{C}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^n(X_{t_1}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{M^{t_1}} & H^n(X_{t_1}, \mathbb{C}). \end{array}$$

**Teorema 4.4.1** (Teorema de Monodromía). *1. Cada valor propio  $\lambda$  de  $M_{t_0}$  es una raíz de la unidad.*

*En otras palabras, la transformación de Monodromía  $M_{t_0}$  es casi-unipotente, es decir, existe un entero positivo  $m$  tal que  $M_{t_0}^m$  es unipotente.*

*2. El tamaño de los bloques de la forma canónica de Jordan para  $M_{t_0}$  es a lo mas de  $n + 1 \times n + 1$ , i.e. el índice de casi-unipotencia de  $M_{t_0}$  es menor o igual que  $n+1$ ; en otras palabras, el entero  $k$  mas pequeño tal que*

$$(M_{t_0}^m - id)^k = 0,$$

*es menor o igual a  $n + 1$ .*

*3. El tamaño de los bloques de Jordan para  $M_{t_0}$  asociados al valor propio 1 son de tamaño a lo más  $n \times n$ .*

*Demostración.* Para una demostración ver [37] □

**Lema 4.4.1** (J. Briançon, H. Skoda [32]). *Supongamos que  $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  y  $f(0) = 0$ . Entonces  $f^{n+1} \in (f_0, \dots, f_n)$ , donde  $f_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ .*

En el teorema de Monodromía se puede decir un poco más de acuerdo al

**Teorema 4.4.2** (J. Sherk [23]). *Sea  $f_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ . Supongamos que  $f^{r+1} \in (f_0, \dots, f_n) \subset \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  para algún  $r \leq n$ , entonces el tamaño de los bloques de  $M_{t_0}$  en su forma de Jordan es a lo mas de  $r + 1 \times r + 1$ .*

4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

**Lema 4.4.2.** Para cada  $t \in S'$ , se tiene una descomposición  $M^t = M_s^t M_u^t$  es sus partes semi-simple y unipotente, respectivamente. Asimismo, se tiene una descomposición en subespacios propios generalizados en cada fibra

$$H^n(X_t, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda} H_{t,\lambda},$$

donde  $H_{t,\lambda} := \ker \left( M_s^t - \lambda : H^n(X_t, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_t, \mathbb{C}) \right)$ .

**Corolario 4.4.2.** Tenemos una aplicación de monodromía inducida

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{M} & H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \\ \simeq \downarrow j_{\tau}^* & & \simeq \downarrow j_{\tau}^* \\ H^n(X_t, \mathbb{C}) & \xrightarrow{M^t} & H^n(X_t, \mathbb{C}). \end{array} \quad (4.4.2)$$

$M$  actúa en  $H^n(X_{\infty}, \mathbb{C})$  con descomposición en subespacios generalizados

$$H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda},$$

con  $H_{\lambda} := \ker \left( M_s - \lambda : H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_{\infty}, \mathbb{C}) \right)$ .

**Nota 4.4.2.** Consideremos el fibrado vectorial en cohomología asociado a la fibración de Milnor  $f : X \rightarrow S$

$$\underline{H} = R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \rightarrow S'.$$

Por tanto, tenemos un fibrado vectorial (inducido por el pullback del mapeo  $u : S_{\infty} \rightarrow S'$ )

$$u^* \underline{H} \rightarrow S_{\infty}.$$

Las secciones holomorfas multivaluadas de estos fibrados vectoriales se relacionan de acuerdo al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A(\tau) \in H^n((X_{\infty})_{\tau}, \mathbb{C}) & \hookrightarrow & u^* \underline{H} & \xrightarrow{pr} & \underline{H} & \longleftarrow & H^n(X_t, \mathbb{C}) \ni \omega_t \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{\tau\} & \hookrightarrow & S_{\infty} & \xrightarrow{u} & S' & \longleftarrow & \{t\} \\ & & & & & & \uparrow \text{exp}(2\pi i \bullet) \\ & & & & & & \end{array}$$

$\omega = pr \circ A$

donde  $A$  es una sección holomorfa multivaluada de  $u^* \underline{H}$ , y  $\omega$  es una sección holomorfa multivaluada de  $\underline{H}$ .

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

**Definición 4.4.3.** Denotaremos por  $\mathcal{H}^n := \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$  la gavilla de secciones holomorfas multivaluadas.

**Lema 4.4.3.** El espacio de cohomología  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  se identifica con  $\mathcal{H}^n := \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$ .

*Demostración.* Una demostración de este resultado se encuentra en [3]. □

Por otra parte, del Lema 4.4.1 y siguiendo [16], tenemos objetos canónicos definidos en el espacio de homología entera  $H_n(X_\infty, \mathbb{Z})$ :

- Un operador de monodromía inducida:  $M_* : H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X_\infty, \mathbb{Z})$ .
- La Forma de intersección de ciclos:  $q : H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \times H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$
- La Forma de Seifert:  $L : H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \times H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$
- El homomorfismo variación:  $Var_f : H_n(X_\infty, \partial X_\infty) \longrightarrow H_n(X_\infty, \mathbb{Z})$

$$A \longmapsto M_* A - A$$

**Teorema 4.4.3.** Se satisfacen los siguientes resultados:

1. La forma de intersección  $q : H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \times H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  es  $(-1)^n$ -simétrica.
2. Si  $A, B$  son dos ciclos relativos (con intersección vacía en la frontera  $\partial X_\infty$ ) entonces

$$q\left(M_* A, M_* B\right) = q(A, B).$$

3. El mapeo variación  $Var_f$  es un isomorfismo.
4. Si  $A, B \in H_n(X_\infty, \mathbb{Z})$ , entonces  $L(A, B) = q\left(Var_f^{-1} A, B\right)$ .
5. La forma de Seifert determina la monodromía  $M$ :

$$L(M_* A, B) = (-1)^{n+1} L(A, B)$$

6. La forma de Seifert determina la forma de intersección:

$$q(A, B) = -L(A, B) + (-1)^{n+1} L(B, A)$$

7. Considérese la inclusión  $X_\infty \xrightarrow{i} (X_\infty, \partial X_\infty)$ . Entonces

$$M_* - id = Var_f \circ i_*$$

donde  $i_* : H_n(X_\infty, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X_\infty, \partial X_\infty)$  es el homomorfismo inducido.

*Demostración.* Una demostración de ese resultado puede ser consultada en [2, Sec 4.2, pág., 65]. □

**Nota 4.4.3.** Denotaremos por  $q^* : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  la forma bilineal (dual) inducida por la forma de intersección  $q$ .



#### 4.4.2. La Filtración por peso para una singularidad aislada de Hipersuperficie: caso local

Del teorema de monodromía se tiene el

**Corolario 4.4.3.** *El operador  $N := -\frac{\log M_u}{2\pi i} : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  es nilpotente. Mas aún, tenemos los siguientes casos:*

1. *El operador  $N$  tiene grado de nilpotencia menor o igual a  $n + 1$ , es decir,  $N^{n+1} \equiv 0$ .*
2. *La restricción  $N|_{H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1}$  tiene grado de nilpotencia menor o igual que  $n$ , i.e.  $N^n|_{H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1} \equiv 0$ .*

Del Lema 4.2.1 y del Corolario 4.4.3, se tiene el

**Lema 4.4.4** ([29, 15, 19, 17]). *existen dos filtraciones crecientes*

$$W_{\bullet}^{\neq 1} \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$$

y

$$W_{\bullet}^1 \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1.$$

definidas sobre  $\mathbb{Q}$ .

Además, la filtración por peso  $W_{\bullet} H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  es la filtración creciente dada por la suma

$$W_{\bullet}^1[-n-1]H^n(X_\infty, \mathbb{Q})_1 \bigoplus W_{\bullet}^{\neq 1}[-n]H^n(X_\infty, \mathbb{Q})_{\neq 1},$$

donde el corrimiento en el índice esta dado por

$$W_{\bullet}[l] := W_{\bullet+l}$$

con  $l = -n$  o bien  $l = -(n+1)$ .

#### 4.4.3. MHS de W. Schmid vs MHS J. Steenbrink

##### 4.4.3.1. Compactificación de las fibras $X_t$

**Lema 4.4.5** (Brieskorn [37]). *Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie con fibración de Milnor  $f : X \longrightarrow S$ . Entonces existe un cambio de coordenadas tal que:*

- i)  *$f$  es un polinomio de grado  $\deg(f) := d$  suficientemente grande.*
- ii) *0 es el único punto singular de la cerradura  $Y_0 := \overline{f^{-1}(0)} \subset \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C}$ .*
- iii) *La cerradura  $Y_t := \overline{f^{-1}(t)} \subset \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C}$  es lisa para cada  $t \in \Delta' := \Delta'_\epsilon$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.*

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

iv) Tenemos una fibración  $\mathcal{C}^\infty$  localmente trivial

$$\pi_f : Y' \longrightarrow \Delta' \tag{4.4.3}$$

definida de la siguiente manera:

- Definimos el polinomio homogéneo

$$F(z_0, \dots, z_{n+1}) = z_{n+1}^d \cdot f\left(\frac{z_0}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right) \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_{n+1}],$$

- Consideramos la variedad

$$\begin{aligned} Y &:= \{(z, t) \in \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C} \times \Delta \mid F(z) - t \cdot z_{n+1}^d = 0\} \\ &= \{(z, t) \mid z \in Y_t, t \in \Delta\} \end{aligned}$$

- Finalmente, tenemos la aplicación proyección en el segundo factor

$$\pi_f : Y \longrightarrow \Delta$$

$$(z, t) \longmapsto t$$

$$\text{con } Y' = \pi_f^{-1}(\Delta')$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\Delta = S$ .

#### 4.4.3.2. Forma de intersección en $P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$ : aplicación de los resultados de W. Schmid

Aplicando los resultados de la Sección 3.1 a la familia proyectiva  $\pi : Y \longrightarrow S$ , tenemos los siguientes objetos canónicos:

- La fibra canónica de Milnor,  $Y_\infty := Y' \times_{S'} S_\infty$ .
- La transformación de monodromía en cohomología primitiva,  $M_Y : P^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$ .
- La descomposición de  $M_Y = M_{Y,s} M_{Y,u}$  en sus partes semi-simple y unipotente, respectivamente.
- El logaritmo de la parte unipotente,  $N_Y := -\frac{\log M_{Y,u}}{2\pi i}$ ; el cual es nilpotente con  $N_Y^{n+1} = 0$ .

**Lema 4.4.6** (Dualidad de Poincaré). *Con respecto a cada fibra compacta  $Y_t$  existe una forma de intersección*

$$q_t^* : P^n(Y_t, \mathbb{C}) \times P^n(Y_t, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

la cual es no degenerada y  $(-1)^n$ -simétrica. Mas aún, estas formas de intersección inducen una forma bilineal

$$q_Y^* : P^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \times P^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

la cual es no-degenerada,  $(-1)^n$ -simétrica y no depende de los isomorfismos dados por el Corolario 3.1.1.

*Demostración.* Para una demostración ver [29, Sección 2.17. Pág.,540]. □

**Nota 4.4.4.** De la Sección 3.2 tenemos que existe una filtración (de Hodge límite)  $F_\infty^\bullet$  del espacio  $P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$ .

**Definición 4.4.4.** Definimos la forma bilineal

$$\mathcal{S}_Y := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot q_Y^*$$

**Teorema 4.4.4.** Se tiene que  $\mathcal{S}_Y, N_Y, W_\bullet$ , y  $F_\infty^\bullet$  dotan a la cohomología primitiva  $P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$  de una PMHS de peso  $m = n$ , la cual es invariante respecto a  $M_{Y,s}$ .

*Demostración.* Para una demostración ver [34, Teorema 6.16, pág., 255]. □

**Nota 4.4.5.** La filtración por peso  $W_\bullet$  del Teorema 4.4.4 es la filtración determinada por el operador nilpotente  $N_Y$ , con un corrimiento por  $n$ , esto es

$$\begin{aligned} W_\bullet &:= W(N)_\bullet[-n] \\ &= W(N)_\bullet-n \end{aligned}$$

**Teorema 4.4.5** (J. Scherck [23]). Supóngase que  $f$  es un polinomio de grado suficientemente grande con las propiedades ii)-iv) como en el Lema 4.4.5. La inclusión canónica

$$X_\infty \hookrightarrow Y_\infty \xrightarrow{i}$$

induce una aplicación sobreyectiva

$$P^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{i^*} H^n(X_\infty, \mathbb{C})$$

cuyo kernel esta dado por

$$\ker i^* = \ker(M_Y - id).$$

#### 4. Estructuras de Hodge Mixtas Polarizadas

**Teorema 4.4.6** (J. Steenbrink). *Sea  $f$  como en el Teorema 4.4.5. Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \ker(M_Y - id) \hookrightarrow P^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{i^*} H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta de estructuras de Hodge Mixtas. Donde*

- $P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$  *esta dotado con la MHS de W. Schmid  $(W_\bullet, F_\infty^\bullet)$ .*
- $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  *posee la MHS de Steenbrink (usando una resolución de singularidades)  $(W_\bullet, F_{st}^\bullet)$ .*

*Estas MHS son invariantes con respecto a las partes semi-simples  $M_{Y,s}$  y  $M_s$ , respectivamente.*

*Demostración.* Para una demostración ver [29, Sección 3.3. Pág., 543] □

#### 4.4.4. PMHS en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$

Del Teorema 4.4.6, dado  $(A, B) \in H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ , existen  $a, b \in P^n(Y_\infty, \mathbb{C})$  tales que  $i^*(a) = A$  y  $i^*(b) = B$ . Definimos

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathbb{C},$$

por

$$\mathcal{S}(A, B) = \begin{cases} S_Y(a, b) & \text{siempre que } (A, B) \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} \times H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} \\ S_Y(a, N_Y b) & \text{para } (A, B) \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 \times H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

**Lema 4.4.7.** *El apareamiento  $\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  esta bien definido.*

*Demostración.* Para una demostración, ver [11, pág., 13]. □

**Definición 4.4.5.** *Consideremos el mapeo*

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\vartheta} H^n(X_\infty, \mathbb{C}),$$

*definido por las condiciones:*

$$\vartheta = \begin{cases} (M - id)^{-1} & \text{en } H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} \\ \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} (M - id)^{k-1} & \text{en } H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1. \end{cases}$$

**Nota 4.4.6.** *Notemos que  $\vartheta$  es un isomorfismo invariante bajo monodromía.*

**Proposición 4.4.1.** *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. El apareamiento  $\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{Q}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$  es no degenerado e invariante bajo la acción de la transformación de monodromía.
2. El endomorfismo  $N$  es una isometría infinitesimal, i.e.  $\mathcal{S}(Nu, v) + \mathcal{S}(u, Nv) = 0, \quad \forall u, v \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ .
3. Para cada  $(A, B) \in H^n(X_\infty, \mathbb{Q}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{Q})$ :

$$\mathcal{S}(A, B) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^* \left( A, \text{Var} \circ \vartheta(B) \right)$$

4. La forma bilineal  $\mathcal{S}$  es independiente de la fibración proyectiva  $Y' \longrightarrow S'$ .
5. La restricción de  $\mathcal{S}$  a  $H^n(X_\infty, \mathbb{Q})_{\neq 1}$  es  $(-1)^n$ -simétrica, y esta dada por

$$\mathcal{S}(\bullet, \bullet) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^*(\bullet, \bullet) \tag{4.4.5}$$

6. La restricción de  $\mathcal{S}$  a  $H^n(X_\infty, \mathbb{Q})_1$  es  $(-1)^{n+1}$ -simétrica.
7. La descomposición

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) = H_1 \oplus H_{-1} \bigoplus_{\text{Im}(\lambda) > 0} \left( H_\lambda \oplus H_{\bar{\lambda}} \right)$$

es una descomposición ortogonal con respecto al apareamiento  $\mathcal{S}$ .

*Demostración.* Este es un resultado de Hertling, para su demostración ver [11, Lema 3.4, pág., 13].  $\square$

**Teorema 4.4.7** (Hertling [11]). *La estructura de Hodge Mixta de Steenbrink y el apareamiento  $\mathcal{S}$  permiten concluir los siguientes resultados:*

1. Tenemos una PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  de peso  $m = n$ .
2. Tenemos una PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$  de peso  $m = n + 1$ .

**Nota 4.4.7.** *El Teorema de W. Schmid [34] es un resultado clave, ta que establece que en el caso compacto la PMHS en  $P^n(Y_\infty \mathbb{C})$  tiene peso global  $m = n$ , lo cual no ocurre en el caso local, pues el Teorema 4.4.7 implica hacer una distinción entre los valores propios  $\lambda = 1$  y  $\lambda \neq 1$ , en virtud de que los pesos son  $m = n + 1, m = n$ , respectivamente.*

**Definición 4.4.6.** *La suma de las dos PMHS en el Teorema 4.4.7 sera llamada una PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ .*

**Nota 4.4.8.** *La PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  dada por el Teorema 4.4.7 es invariante respecto la parte semi-simple,  $M_s$ , de la transformación de monodromía.*

# La $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración y el apareamiento de orden superior de K. Saito

En este capítulo consideraremos una singularidad aislada de hipersuperficie  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  con fibración de Milnor  $f : X \rightarrow S$ . Con respecto a  $f$ , introducimos el concepto de  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración y conexión de Gauss Manin local. Asimismo, definimos el apareamiento de orden superior de K. Saito, el cual denotamos por  $P_S$  en virtud de que está definido a partir de la forma bilineal no degenerada en cohomología evanescente,

$$S : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

caracterizada por la Proposición 4.4.1.

También establecemos un resultado (descubierto inicialmente por A. Varchenko [17]) que conecta el apareamiento  $P_S$  con el apareamiento de Grothendieck  $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$  (dado por Ec. 2.3.3), vía la retícula de Brieskorn; para esto utilizamos los trabajos de Hertling [11] y [12], como también parte del material presentado en [13, Part II. Sec. 6, pág., 95], [3, Cap. 10, pág., 165] y [6].

Consideremos la transformación de Monodromía dada por Ec. 4.4.2

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{M} H^n(X_\infty, \mathbb{C}).$$

En este capítulo  $N := -\frac{\log M_u}{2\pi i}$ , la parte nilpotente de  $M$ .

## 5.1. La noción de $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración y la fibra canónica de Milnor

**Nota 5.1.1.** Los valores propios de  $M$ ,  $\lambda = e^{-2\pi i\beta}$ , son raíces de la unidad, y por tanto, las sucesiones aritméticas

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \log \lambda,$$

son números racionales ordenados de manera natural.

**Lema 5.1.1.** Para  $A \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})_\lambda$  y  $\alpha \in \mathbb{Q}$  tales que  $e^{-2\pi i\alpha} = \lambda$ , se tiene que

$$s(A, \alpha)(t) = t^\alpha \cdot t^N A(t)$$

es una sección holomorfa monovaluada de  $\underline{H}$ , con

$$\begin{aligned} t^N &:= \exp(\log t \cdot N) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(N \log t)^k}{k!} \end{aligned}$$

*Demostración.* Para una demostración ver [6, Lemma.1.3.1,pág.,21]. □

**Definición 5.1.1.** Las secciones  $s(A, \alpha)$  serán llamadas secciones elementales.

**Lema 5.1.2.** El conjunto de gérmenes

$$\left\{ s(A, \alpha)_0 \in (i_* \mathcal{H}^n)_0 : \lambda_\alpha = \exp(-2\pi i\alpha) \text{ es valor propio de } M \right\}$$

de secciones  $s(A, \alpha)(t)$  genera un  $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ -espacio vectorial  $\mathcal{G}_0$ , de dimensión  $\mu$ ; donde  $\mu$  es el número de Milnor de la singularidad  $f$ .

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [13, Parte II. Pág.,95] □

**Proposición 5.1.1.** El  $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ -espacio vectorial  $\mathcal{G}_0$  satisface las siguientes propiedades:

- Es invariante con respecto al operador diferencial

$$\partial_t : (i_* \mathcal{H})_0 \rightarrow (i_* \mathcal{H})_0,$$

el cual es inducido por la derivada covariante  $\nabla_{\frac{d}{dt}}$  de la conexión de Gauss-Manin en  $\underline{H}$ .

- Es un  $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ -módulo singular regular.

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [13, Parte II. Pág.,95] □

5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito

Consideremos los espacios generalizados

$$H_{\lambda_\alpha} := H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha}.$$

**Definición 5.1.2.** Elegimos logaritmos  $\alpha \in (-1, 0]$  de los valores propios de la transformación de Monodromía  $M$ .

i) Para cada  $\lambda_\alpha = e^{-2\pi i\alpha}$ , definimos el mapeo

$$H_{\lambda_\alpha} \xrightarrow{\psi_\alpha} \mathcal{G}_0$$

$$A \longmapsto \psi_\alpha(A) := s(A, \alpha)_0$$

ii) Para cada  $k \in \mathbb{N}$  y cada  $\alpha \in (-1, 0]$  definimos

$$\psi_{\alpha+k} = t^k \circ \psi_\alpha$$

**Definición 5.1.3.** Sea  $\beta \in \mathbb{Q}$  tal que  $\lambda_\beta$  es un valor propio de  $M$ . Definimos los subespacios

$$C_\beta := \ker(t\partial_t - \beta \cdot id)^{n+1} \subset \mathcal{G}_0$$

**Definición 5.1.4.** Para cada  $\beta \in \mathbb{Q} \cap (-1, \infty)$ , definimos el nivel de  $s(A, \beta)_0 \in C_\beta$  como el entero  $k := k_\beta$  no negativo tal que

$$\beta - k \in (-1, 0].$$

**Lema 5.1.3.** Sea  $\alpha \in \mathbb{Q}$  tal que  $\lambda_\alpha$  es un valor propio de la monodromía en la fibra canónica  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . Entonces,

- El operador multiplicación por  $t$ ,  $C_\alpha \xrightarrow{t} C_{\alpha+1}$  es un isomorfismo.
- El operador inducido por la conexión de Gauss Manin,  $C_\alpha \xrightarrow{\partial_t} C_{\alpha-1}$ , es un isomorfismo siempre que  $\alpha \neq 0$ .

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [13, Parte II. Pág.,97] □

**Lema 5.1.4.** 1. Los mapeos  $\psi_\alpha$  son inyectivos para cada  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

2. La imagen  $\psi_\alpha(H_{\lambda_\alpha})$  es igual a  $C_\alpha$ , es decir,

$$\psi_\alpha : H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha} \longrightarrow C_\alpha,$$

es un isomorfismo, para cada  $\alpha \in (-1, 0]$ .



5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito

*Demostración.* Para una demostración de este resultado ver [13, Parte II. Pág.,99] □

**Nota 5.1.2.** Observamos que los lemas 5.1.2, 5.1.4 y 5.1.3, junto con la Definición 5.1.2 implican que  $\mathcal{G}_0 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]C_\alpha$ . Además,  $\mathcal{G}_0$  es un  $\mathbb{C}\{t\}[\partial_t]$ -módulo regular.

**Definición 5.1.5.** El espacio  $\mathcal{G}_0$  es llamado la *conexión de Gauss Manin local*.

**Lema 5.1.5.** Se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Para cada  $\alpha \in (-1, 0]$  y cada  $k \geq 1$ ,

$$\psi_{\alpha+k}^{-1} = \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} \quad (5.1.1)$$

2. Para cada  $\alpha \in (-1, 0]$  y cada  $k \geq 0$ ,

$$(t\partial_t - (\alpha + k) \cdot id) \circ \psi_{\alpha+k} = \psi_{\alpha+k} \circ N,$$

$$\begin{array}{ccc} H_{\lambda_{\alpha+k}} & \xrightarrow{N} & H_{\lambda_{\alpha+k}} \\ \psi_{\alpha+k} \downarrow & & \downarrow \psi_{\alpha+k} \\ C_{\alpha+k} & \xrightarrow{t\partial_t - (\alpha+k)id} & C_{\alpha+k}. \end{array}$$

Equivalentemente,

$$\partial_t = t^{-1} \circ \left( (\alpha + k) \cdot id + \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right). \quad (5.1.2)$$

3.  $\partial_t \circ \psi_\alpha = \psi_{\alpha-1}(\alpha \cdot id + N)$

*Demostración.* Estos resultados siguen directamente de la definición de los mapeos  $\psi_\alpha$ . Ver también [6, Lemma 1.3.4, pág.,21]. □

**Definición 5.1.6.** Para cada  $\alpha \in (-1, 0]$  y cada entero  $k \geq 0$ , definimos operadores  $L_\alpha^k : H_{\lambda_\alpha} \rightarrow H_{\lambda_\alpha}$ :

$$L_\alpha^0 := id$$

$$L_\alpha^k := \prod_{j=1}^k (\alpha + j + N) \quad \forall k \geq 1$$

**Corolario 5.1.1.** Para cada  $\alpha \in (-1, 0]$  y cada entero  $k \geq 1$  se satisface la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \partial_t^k \circ \psi_{\alpha+k} &= \psi_\alpha \circ (\alpha + 1 + N) \circ (\alpha + 2 + N) \circ \cdots \circ (\alpha + k + N) \\ &=: \psi_\alpha \circ L_\alpha^k, \end{aligned}$$

5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito

*Demostración.* El resultado se sigue de la parte 3) del Lema 5.1.5 por inducción. □

**Nota 5.1.3.** Observemos que para cada  $k \geq 1$ :

1.  $L_\alpha^k \circ N = N \circ L_\alpha^k$ .
2.  $L_\alpha^k = L_\alpha^{k-1} \circ (\alpha + k + N)$

**Lema 5.1.6.** Para cada  $\alpha \in (-1, 0]$  y cada  $k \geq 1$ ,

$$(\alpha + k + N) \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} = \left( \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} \right) \circ \left( \alpha + k + \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right)$$

*Demostración.* Por una parte se tiene que,

$$(\alpha + k + N) \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} = (\alpha + k) \psi_{\alpha+k}^{-1} + N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}.$$

Y por tanto, de Ec. 5.1.1,

$$(\alpha + k + N) \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} = (\alpha + k) \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} + N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}.$$

Entonces,

$$(\alpha + k + N) \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} = (\alpha + k) \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} + \psi_{\alpha+k}^{-1} \circ \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1},$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} (\alpha + k + N) \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} &= (\alpha + k) \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} + \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} \circ \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \\ &= \left( \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} \right) \circ \left( \alpha + k + \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right) \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

**Corolario 5.1.2.** Tenemos un isomorfismo

$$\psi : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda} H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} C_\alpha \quad (5.1.3)$$

tal que,  $\psi|_{H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha}} = \psi_\alpha$  para cada  $-1 < \alpha \leq 0$ .

*Demostración.* Se sigue del Lema 5.1.4. □

**5.1.1. La  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración en  $\mathcal{G}_0$**

De la Nota 5.1.2 tenemos la descomposición  $\mathcal{G}_0 = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]C_\alpha$ . Entonces para cada  $\omega \in \mathcal{G}_0$ ,

$$\omega = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \omega_\alpha$$

con  $\omega_\alpha \in \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]C_\alpha$ . Tenemos la siguiente definición.

**Definición 5.1.7.** Sea  $\omega \in \mathcal{G}_0$ .

i) El **orden** de  $\omega$  es el número racional

$$\alpha(\omega) := \min\{\alpha \mid \omega_\alpha \neq 0\}.$$

ii) La **parte principal** de  $\omega$  es definida como el primer término  $\omega_1 := \omega_{\alpha(\omega)}$  no cero.

**Definición 5.1.8.** La  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración, denotada por  $\mathcal{V}^\bullet \mathcal{G}_0$ , estará definida por los espacios

- i)  $\mathcal{V}^\alpha \mathcal{G}_0 := \{\omega \in \mathcal{G}_0 \mid \alpha(\omega) \geq \alpha\}$
- ii)  $\mathcal{V}^{>\alpha} \mathcal{G}_0 := \{\omega \in \mathcal{G}_0 \mid \alpha(\omega) > \alpha\}$

**Lema 5.1.7.** Tenemos los siguientes resultados:

- $\mathcal{V}^\alpha \mathcal{G}_0 = \bigoplus_{\alpha \leq \beta < \alpha+1} \mathbb{C}\{t\} C_\beta$
- $\mathcal{V}^{>\alpha} \mathcal{G}_0 = \bigoplus_{\alpha < \beta \leq \alpha+1} \mathbb{C}\{t\} C_\beta$
- $\frac{\mathcal{V}^\alpha \mathcal{G}_0}{\mathcal{V}^{>\alpha} \mathcal{G}_0} \simeq C_\alpha$
- Los espacios  $\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^{>\alpha}$  son  $\mathbb{C}\{t\}$ -módulos de rango  $\mu$ .

*Demostración.* Para una demostración consultar [6, Prop 1.3.8, pág.,24]. □

**Nota 5.1.4.** Observamos que del Lema 5.1.3 se tienen los siguientes operadores inducidos:

1. La multiplicación por  $t$ ,  $\mathcal{V}^{>-1} \xrightarrow{t} \mathcal{V}^{>0}$ , el cual es un isomorfismo.
2. El inducido por la derivada covariante de la conexión de Gauss-Manin,  $\mathcal{V}^{>-1} \xrightarrow{\partial_t} \mathcal{V}^{>-2}$  cuya restricción  $\mathcal{V}^{>0} \xrightarrow{\partial_t} \mathcal{V}^{>-1}$  es biyectiva.

### 5.1.2. Operadores Microdiferenciales y la $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración

De acuerdo con el Lema B.3.1, consideremos el conjunto de operadores microdiferenciales con coeficientes constantes

$$R := \mathbb{C} \left\{ \left\{ \partial_t^{-1} \right\} \right\}$$

respecto al operador diferencial  $\partial_t$ , el cual es anillo de valuación discreta.

**Nota 5.1.5.** De la Sección B.2 tenemos una acción

$$\circ : R \times \mathbb{C}\{t\}C_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}\{t\}C_\alpha, \quad (5.1.4)$$

inducida por

$$(\partial_t^{-1}, s(A, \alpha)_0) \longrightarrow \partial_t^{-1} \cdot s(A, \alpha)$$

**Lema 5.1.8.** 1. Los subespacios  $\mathbb{C}\{t\} \cdot C_\alpha$  son  $R$ -módulos libres de rango  $\dim_{\mathbb{C}} C_\alpha$ , siempre que  $\alpha \notin \mathbb{Z}_{<0}$ .

2. El subespacio  $\mathcal{V}^{>-1}$  es un  $R$ -módulo libre de rango  $\mu$ , y por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{>-1} &= \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} \mathbb{C}\{t\} \cdot C_\alpha \\ &= \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} R \circ C_\alpha \end{aligned}$$

donde  $R \circ C_\alpha$  denota la acción inducida por ecuación 5.1.4.

*Demostración.* Una demostración de estos resultados puede ser consultada en [6, Prop 1.3.11, pág., 24]. □

## 5.2. El residuo superior de K. Saito en $\mathcal{V}^{>-1}$

Recordemos los siguientes resultados:

- De la Proposición 4.4.1 se tiene la forma bilineal  $\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  inducida por el producto cup.
- Del Lema 5.1.8 se tiene que  $\mathcal{V}^{>-1} = \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} R \circ C_\alpha$  es un  $R$ -módulo de rango  $\mu$ .
- Del Corolario 5.1.3 tenemos el isomorfismo  $\psi : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} C_\alpha$ .

**Nota 5.2.1.** Consideremos el subanillo de  $R$  definido por

$$R \cdot \partial_t^{-1} := \left\{ g \cdot \partial_t^{-1} \mid g = g(\partial_t^{-1}) \in R \right\}. \quad (5.2.1)$$

Como  $\mathcal{V}^{>-1} = \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} R \cdot C_\alpha$  es un  $R$ -módulo, definiremos un apareamiento

$$P_S : R \cdot C_\alpha \times R \cdot C_\beta \longrightarrow R \cdot \partial_t^{-1},$$

para cada  $-1 < \alpha, \beta \leq 0$ , lo cual determinará un apareamiento

$$P_S : \mathcal{V}^{>-1} \times \mathcal{V}^{>-1} \longrightarrow R \cdot \partial_t^{-1}, \quad (5.2.2)$$

inducido por la forma bilineal  $\mathcal{S}$ .

Siguiendo [11], establecemos la siguiente definición.

**Definición 5.2.1.** Sean  $\alpha, \beta \in (-1, 0]$ . Sean también,  $(a, b) \in C_\alpha \times C_\beta$ . Para definir  $P_S$  consideramos los siguientes casos:

i) Si  $\alpha + \beta \notin \mathbb{Z}$  hacemos  $P_S^{\alpha, \beta}(a, b) = 0$ .

ii) Si  $\alpha + \beta = -1$  definimos

$$P_S^{\alpha, \beta}(a, b) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \mathcal{S}(\psi^{-1}(a), \psi^{-1}(b)) \cdot \partial_t^{-1}, \quad (5.2.3)$$

es decir, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H(X_\infty, \mathbb{C})_\lambda \times H(X_\infty, \mathbb{C})_{\bar{\lambda}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\psi_\alpha, \psi_\beta) \downarrow & & \downarrow \bullet \frac{1}{(2\pi i)^n} \partial_t^{-1} \\ C_\alpha \times C_\beta & \xrightarrow{P_S^{\alpha, \beta}} & R \cdot \partial_t \end{array}$$

con  $\lambda \neq 1$ .

iii) Si  $\alpha = \beta = 0$ , definimos

$$P_S^{\alpha, \beta}(a, b) := \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \mathcal{S}(\psi^{-1}(a), \psi^{-1}(b)) \cdot \partial_t^{-2}, \quad (5.2.4)$$

es decir, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H(X_\infty, \mathbb{C})_1 \times H(X_\infty, \mathbb{C})_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\psi_\alpha, \psi_\beta) \downarrow & & \downarrow \bullet \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \partial_t^{-2} \\ C_0 \times C_0 & \xrightarrow{P_S^{\alpha, \beta}} & R \cdot \partial_t \end{array}$$

5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito

iv) Sean  $g_1(\partial_t^{-1}), g_2(\partial_t^{-1}) \in R$ . De los incisos i) – iii), definimos

$$P_S : R \cdot C_\alpha \times R \cdot C_\beta \longrightarrow R \cdot \partial_t^{-1} \quad (5.2.5)$$

por la regla de asignación

$$P_S(g_1(\partial_t^{-1})a, g_2(\partial_t^{-1})b) := g_1(\partial_t^{-1})g_2(-\partial_t^{-1}) \cdot P_S^{\alpha, \beta}(a, b) \quad (5.2.6)$$

donde  $g_1(\partial_t^{-1})g_2(-\partial_t^{-1})$  es el producto formal de series.

v) Finalmente, para cada  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{V}^{>-1} \times \mathcal{V}^{>-1}$ , definimos

$$P_S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{-1 < \alpha, \beta} P_S(g_\alpha \mathbf{a}_\alpha, g_\beta \mathbf{b}_\beta) \quad (5.2.7)$$

donde,

$$\mathbf{a} = \sum_{-1 < \alpha} g_\alpha \mathbf{b}_\alpha$$

y

$$\mathbf{b} = \sum_{-1 < \beta} g_\beta \mathbf{b}_\beta$$

con  $g_\alpha, g_\beta \in R$  para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap (-1, \infty)$ .

**Definición 5.2.2.** El apareamiento  $P_S$  será llamado el **residuo (apareamiento) de orden superior de Saito** en  $\mathcal{V}^{>-1}$ .

**Nota 5.2.2.** Observamos que dados  $g_1(\partial_t^{-1}), g_2(\partial_t^{-1}) \in R$ , tenemos que

$$g_1 = \sum_{j \geq 0} a_j \cdot \partial_t^{-j}$$

y

$$g_2 = \sum_{l \geq 0} b_l \cdot \partial_t^{-l}$$

con  $a_i, b_l \in \mathbb{C}$  para cada  $i, l \geq 0$ . Entonces

$$g_1(\partial_t^{-1}) \cdot g_2(-\partial_t^{-1}) = \sum_{i, l} (-1)^l a_i b_l \cdot \partial_t^{-i-l},$$

de lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} P_S(g_1(\partial_t^{-1})a, g_2(\partial_t^{-1})b) &= \left( \sum_{i, l} (-1)^l a_i b_l \cdot \partial_t^{-i-l} \right) \cdot c_n \cdot \mathcal{S}(\psi_\alpha^{-1}(a), \psi_\beta^{-1}(b)) \cdot \partial_t^{-k_0} \\ &= \sum_{i, l} \left( (-1)^l \left( a_i b_l \cdot c_{n, k_0} \cdot \mathcal{S}(\psi_\alpha^{-1}(a), \psi_\beta^{-1}(b)) \right) \right) \cdot \partial_t^{-i-l-k_0} \end{aligned}$$

## 5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito

con  $k_0 = 1$  y  $c_{n,k_0} = (\frac{1}{2\pi i})^n$ , o bien  $k_0 = 2$  y  $c_{n,k_0} = (\frac{1}{2\pi i})^{n+1}$ . Entonces, para cada  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{V}^{-1} \times \mathcal{V}^{-1}$ , denotaremos por

$$P_S^{(-j)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

a la parte en  $\mathbb{C} \cdot \partial_t^{-j}$  de  $P_S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

### 5.2.1. Descripción del residuo superior de Saito

En este apartado dare una explicación más profunda de la definición del apareamiento  $P_S$ . Para ello, trataremos los siguientes casos:

- **CASO I.** Para  $a, b \in C_\alpha \times C_\beta$  con  $\alpha, \beta \in (-1, 0]$ , solo recordamos las partes *i*)-*iii*) de la Definición 5.2.1.
- **CASO II.** Sea  $(a, b) \in C_\alpha \times C_\beta$  con  $(\alpha, \beta) \in (-1, 0] \times (0, 1]$ . Notamos que, por el Corolario 5.1.3

$$C_\beta = \partial_t^{-1} C_{\beta-1}.$$

Por tanto,  $(a, \partial_t b) \in C_\alpha \times C_{\beta-1}$  y  $\beta - 1 \in (-1, 0]$ . Luego, del inciso *iv*) de la Definición 5.2.1, tenemos que

$$P_S(a, b) = -\partial_t^{-1} \cdot P_S^{\alpha, \beta-1}(a, \partial_t b) \quad (5.2.8)$$

- **CASO III.** Sea  $(a, b) \in C_\alpha \times C_\beta$  con  $(\alpha, \beta) \in (0, 1] \times (0, 1]$ . En forma análoga al caso anterior, vemos que

$$C_\alpha = \partial_t^{-1} C_{\alpha-1}, \quad C_\beta = \partial_t^{-1} C_{\beta-1}$$

con  $(\alpha - 1, \beta - 1) \in (-1, 0] \times (-1, 0]$ . Así, el inciso *iv*) de la Definición 5.2.1 nos permite concluir que:

$$P_S(a, b) = \partial_t^{-1} \cdot (-\partial_t^{-1}) \cdot P_S^{\alpha-1, \beta-1}(\partial_t a, \partial_t b) \quad (5.2.9)$$

- **CASO IV.** Sea  $(a, b) \in C_\alpha \times C_\beta$  con  $(\alpha, \beta) \in (0, 1] \times (1, 2]$ . En forma análoga al caso anterior, vemos que

$$C_\alpha = \partial_t^{-1} C_{\alpha-1}, \quad C_\beta = \partial_t^{-2} C_{\beta-2}$$

con  $(\alpha - 1, \beta - 2) \in (-1, 0] \times (-1, 0]$ .

Por tanto, nuevamente de la Definición 5.2.1 se tiene que:

$$P_S(a, b) = \partial_t^{-1} \cdot ((-1)^2 \partial_t^{-2}) \cdot P_S^{\alpha-1, \beta-2}(\partial_t a, \partial_t^2 b) \quad (5.2.10)$$

- **CASO V.** Aquí generalizamos las ideas dadas en los casos previos. Sean  $(a, b) \in C_\alpha \times C_\beta$  y  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $(\alpha, \beta) \in (p - 1, p] \times (q - 1, q]$ . En forma análoga a los casos anteriores, vemos que

$$C_\alpha = \partial_t^{-p} C_{\alpha-p}, \quad C_\beta = \partial_t^{-q} C_{\beta-q}$$

con  $(\alpha - p, \beta - q) \in (-1, 0] \times (-1, 0]$ . De lo cual obtenemos que:

$$P_S(a, b) = \partial_t^{-p} \cdot ((-1)^q \partial_t^{-q}) \cdot P_S^{\alpha-p, \beta-q}(\partial_t^p a, \partial_t^q b) \quad (5.2.11)$$

Lo anterior lo formularemos como un corolario, a fin de citarlo mas adelante.

**Corolario 5.2.1.** Sean  $(a, b) \in C_\alpha \times C_\beta$  y  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $(\alpha, \beta) \in (p - 1, p] \times (q - 1, q]$ . Entonces,

$$P_S(a, b) = \partial_t^{-p} \cdot ((-1)^q \partial_t^{-q}) \cdot P_S^{\alpha-p, \beta-q}(\partial_t^p a, \partial_t^q b)$$

### 5.3. La retícula de Brieskorn y la $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración

Consideremos una  $(n + 1)$ -forma holomorfa  $\omega \in \Omega_X^{n+1}$ . Tenemos del apartado 2.2 una sección holomorfa

$$\begin{array}{c} \underline{H} \\ \uparrow s[\omega] \\ S' \end{array}$$

tal que

$$s[\omega](t) = \left[ \frac{\omega}{df} \Big|_{X_t} \right] \in H^n(X_t, \mathbb{C}), t \in S'. \quad (5.3.1)$$

Por otra parte, a nivel de gérmenes, tenemos el

**Lema 5.3.1** (E. Brieskorn [37]). Si  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$ , entonces el germen  $s[\omega]_0 \in (i_* \mathcal{H})_0$  correspondiente a  $s[\omega](t)$  es un elemento de  $\mathcal{G}_0$ .



**Lema 5.3.2** (A. Varchenko [25], B. Malgrange [33]). Sea  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$ , tenemos la descomposición

$$s[\omega](t) = \sum_{\alpha > -1} s(A_\alpha^\omega, \alpha), \quad (5.3.2)$$

donde

- Los coeficientes  $A_\alpha^\omega$  son secciones planas que dependen de  $\omega$ .
- Los números  $\alpha$  son números racionales.
- La serie converge en cada sector finito  $\theta_1 < \arg t < \theta_2$  siempre que el módulo de  $t$ ,  $|t|$ , sea suficientemente pequeño.

Así mismo, de Malgrange [33], tenemos el

**Lema 5.3.3.** Sea  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$ . Entonces:

- El germen  $s[\omega]_0 \in (i_*\mathcal{H})_0$  correspondiente a  $s[\omega](t)$  es un elemento de  $\mathcal{V}^{>-1}$ .
- Más aún, respecto la aplicación

$$\mathfrak{T} : \Omega_{X,0}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{V}^{>-1}, \omega \mapsto s[\omega]_0,$$

se satisface la ecuación:

$$\ker(\mathfrak{T}) = df \wedge d\Omega_{X,0}^{n-1}$$

Del Lema 5.3.3, tenemos un encajamiento de la retícula de Brieskorn

$$\mathcal{H}_0'' \simeq \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge d\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n-1}},$$

en  $\mathcal{V}^{>-1}$ .

Por tanto, tenemos un isomorfismo

$$\mathcal{H}_0'' \simeq \mathfrak{T}(\mathcal{H}_0'').$$

**Definición 5.3.1.** Definiremos  $H_0'' := \mathfrak{T}(\mathcal{H}_0'')$  y le llamaremos la **retícula microdiferencial de Brieskorn**.

La definición anterior esta motivada por los resultados de la siguiente proposición.

**Proposición 5.3.1.** Sea  $\mu$  el número de Milnor de la singularidad aislada  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . Se satisfacen las siguientes afirmaciones:

- (i)  $H_0'' \subset \mathcal{V}^{>-1}$

5. Dualidad de Grothendieck y Residuo superior de K. Saito

(ii) La condición de reticula en  $\mathcal{G}_0$ :

$$\mathcal{K} \cdot H_0'' = \mathcal{G}_0,$$

con  $\mathcal{K} = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$  el campo de series de Laurent en  $t$ .

(iii) Invariancia respecto a la acción de multiplicación por  $t$ :

$$t \cdot H_0'' \subset H_0''.$$

(iv) Se satisface la siguiente ecuación

$$s[d\eta]_0 = \partial_t s[df \wedge \eta]_0, \quad (5.3.3)$$

para cada  $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$ .

(v)  $H_0''$  es un  $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo libre de rango  $\mu$ .

(vi) Invariancia con respecto a la acción de  $\partial_t^{-1}$ :

$$\partial_t^{-1} \cdot H_0'' \subset H_0''.$$

(vii)  $H_0''$  es un  $R$ -módulo libre de rango  $\mu$ .

*Demostración.* Para una demostración ver [11]. □

**Lema 5.3.4.** *La aplicación*

$$\mathcal{T} : \Omega_{X,0}^{n+1} \rightarrow H_0'' \subset \mathcal{V}^{>-1}, \omega \mapsto s[\omega]_0,$$

induce un isomorfismo

$$s : \Omega^f \rightarrow \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}, \quad (5.3.4)$$

donde  $\Omega^f$  es el álgebra de Milnor.

*Demostración.* De la proposición anterior tenemos que  $\partial_t^{-1} \cdot H_0'' \subset H_0''$ . Por otra parte, de la Proposición 5.3.1 (iv), se tiene que

$$s[d\eta] = \partial_t s[df \wedge \eta],$$

para cada  $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$ .

Ahora bien, el complejo de De Rham  $(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^\bullet, d)$  es exacto, de donde se tiene que  $d(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n) = \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ . Entonces tenemos un morfismo inducido

$$s : \Omega^f \rightarrow H_0''$$

tal que  $s[df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n] = \partial_t^{-1} H_0''$ . El cual evidentemente es un isomorfismo. Esto completa la prueba. □

## 5.4. Relación entre el apareamiento de Grothendieck y el apareamiento superior de K. Saito

Mantendremos fijas la hipótesis de los apartados anteriores de este capítulo para proporcionar una relación entre el apareamiento de Grothendieck, el residuo de Leray del Capítulo 2 y el apareamiento de orden superior de K. Saito.

De la Definición 2.3.3, se tiene el apareamiento de Grothendieck

$$\text{res}_{f,0} : \Omega^f \times \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$([\omega_1], [\omega_2]) \longmapsto \text{Res}_{f,0}(\omega_1, \omega_2),$$

donde  $[\omega_1], [\omega_2]$  denotan clases en  $\Omega^f$ .

Asimismo, se tiene del Lema 5.3.4 una aplicación

$$\begin{aligned} s : \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{H}^n \\ \omega &\longmapsto \left( s[\omega] : t \longmapsto \left[ \text{LerayRes} \left( \frac{\omega}{f-t} \right) \right] := \left[ \frac{\omega/(f-t)}{df} \right] \in H^n(X_t, \mathbb{C}) \right), \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

inducido por el residuo de Leray.

**Lema 5.4.1** (C. Hertling [11]). *Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ , tales que  $\lambda_\alpha = \exp(-2\pi i\alpha)$  y  $\lambda_\beta = \exp(-2\pi i\beta)$  son valores propios de la Monodromía. Entonces,*

i) *Si  $\alpha, \beta > -1$  y  $\alpha + \beta \notin \mathbb{Z}$ , entonces  $P_S(C_\alpha, C_\beta) = 0$ .*

ii) *Si  $\alpha, \beta > -1$  y  $\alpha = -\beta + k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces el apareamiento inducido*

$$P_S : C_\alpha \times C_\beta \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \partial_t^{-\alpha-\beta-2}$$

*es un apareamiento perfecto.*

iii) *Para  $l \geq 1$ , los apareamientos inducidos*

$$P_S^{(-l)} : \mathcal{V}^{>-1} \times \mathcal{V}^{>-1} \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \partial_t^{-k}$$

*son  $(-1)^{n+1+l}$ -simétricos. En particular  $P_S^{(-n-1)}$  es simétrico.*

**Teorema 5.4.1** (A. Varchenko [17], M. Saito [15], C. Hertling [11]). *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega_{\mathbb{C}^{n+1,0}}^{n+1} \times \Omega_{\mathbb{C}^{n+1,0}}^{n+1} & \hookrightarrow & \mathcal{H}_0'' \times \mathcal{H}_0'' & \xrightarrow[\simeq]{(s,s)} & H_0'' \times H_0'' \hookrightarrow \mathcal{V}^{\geq -1} \times \mathcal{V}^{\geq -1} & \xrightarrow{P_S} & R \cdot \partial_t^{-1} \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^f \times \Omega^f & \xrightarrow[\simeq]{(s,s)} & \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \times \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} & \xrightarrow{P_S^{-n-1}} & \mathbb{C} \cdot \partial_t^{-n-1} \\
 \searrow^{res_{f,0}} & & \searrow & & \searrow & & \\
 & & \mathbb{C} & \xrightarrow{P_S^{(-n-1)}(s[\omega_1]_0, s[\omega_2]_0)} & & & 
 \end{array}$$

Figura 5.1.: Relación entre  $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$ ,  $s[\bullet]$  y  $P_S^{(-n-1)}$  en el álgebra de Milnor

i) La restricción del residuo superior de saito  $P_S$  a la retícula microdiferencial de Brieskorn toma valores en  $R \cdot \partial_t^{-n-1}$ . Esto es,

$$P_S(H_0'', H_0'') \subset R \cdot \partial_t^{-n-1}. \quad (5.4.2)$$

Consecuentemente, para  $1 \leq l \leq n$ , se tiene la igualdad

$$P_S^{(-l)}(H_0'', H_0'') = 0.$$

ii) Para cada  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1,0}}^{n+1}$ , se tiene que

$$P_S^{(-n-1)}(s[\omega]_0, s[\omega_2]_0) = res_{f,0}(\omega_1, \omega_2) \cdot \partial_t^{-n-1}$$

**Corolario 5.4.1** (C. Hertling, C. Stahlke [12]). *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1.  $P_S^{(-n-1)}(H_0'', \partial_t^{-1} H_0'') = P_S^{(-n-1)}(H_0'', \partial_t^{-1} H_0'') = 0$
2. El apareamiento inducido

$$P_S^{(-n-1)} : \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \times \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \partial_t^{-n-1}$$

$$(s[\omega]_0, s[\omega_2]_0) \longmapsto res_{f,0}(\omega_1, \omega_2) \cdot \partial_t^{-n-1}$$

es no-degenerado.

# Estructura de Hodge Mixta Asintótica de Varchenko

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie con fibration de Milnor  $f : X \rightarrow S$ . Históricamente, J. Steenbrink [31] dotó a  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  de una MHS usando resolución de singularidades; posteriormente, A. Varchenko [25] usó la conexión de Gauss-Manin y la retícula de Brieskorn para construir la llamada Estructura de Hodge Mixta asintótica. Las filtraciones por peso de estas MHS corresponden en cierto sentido a los bloques de Jordan de la transformación de monodromía y son en esencia iguales; sin embargo, la filtración de Hodge asintótica de A. Varchenko, denotada por  $\tilde{F}^\bullet$ , no coincide en general con la filtración de Hodge de J. Steenbrink denotada por  $F_{st}^\bullet$ . Poco después, F. Pham [21], J. Scherk y J. Steenbrink [19], y M. Saito [15] hicieron una notable modificación de las ideas de Varchenko, con el fin de obtener la igualdad de estas filtraciones de Hodge. En este capítulo consideraremos esta modificación, y presentamos la filtración de Hodge correcta que dotará a la fibra canónica  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  de una MHS ( más aún, de una PMHS); esta modificación es necesaria, pues permitirá combinar los resultados del apartado 4.4 con resultados del Capítulo 5 como se verá en breve. Asimismo, desarrollaremos propiedades del invariante discreto asociado a la singularidad  $f$ , llamado espectro y denotado por  $sp(f)$ .

De acuerdo con el Capítulo 5, sea  $\partial_t : (i_*\mathcal{H})_0 \rightarrow (i_*\mathcal{H})_0$  como en la Proposición 5.1.1.

Asimismo, consideremos el isomorfismo

$$\psi : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} C_\alpha$$

dado por Ec. 5.1.3.

Consideremos también, la retícula de Brieskorn  $\mathcal{H}_0''$ , y su identificación  $H_0'' = \mathfrak{T}(\mathcal{H}_0'') \subset \mathcal{V}^{>-1}$ .

## 6.1. Filtración Asintótica de Varchenko: versión modificada

**Lema 6.1.1** (A. Varchenko [22, 25], J. Scherk y J. Steenbrink[19]). *Los subespacios  $C_\alpha \simeq \frac{\mathcal{V}^\alpha \mathcal{G}_0}{\mathcal{V}^{>\alpha} \mathcal{G}_0}$  son generados por las partes principales de secciones geométricas  $s[\omega] = \sum_{\beta > -1} s(\omega, \beta) \in H_0''$  de orden  $\alpha$ .*

**Definición 6.1.1** (Filtración de Steenbrink). *Tenemos la filtración  $F^\bullet \subset \mathcal{V}^{>-1}$ :*

1. Para cada  $-1 < \beta \leq 0$ ,

$$Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' := \frac{\mathcal{V}^\beta \cap H_0'' + \mathcal{V}^{>\beta}}{\mathcal{V}^{>\beta}} \subset C_\beta \quad (6.1.1)$$

2. Para cada  $-1 < \alpha \leq 0$

$$F^p C_\alpha := \partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \quad (6.1.2)$$

3. Finalmente tenemos una filtración en  $\mathcal{V}^{>-1}$ :

$$F^p(\mathcal{V}^{>-1}) := \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} F^p C_\alpha \quad (6.1.3)$$

**Nota 6.1.1.** Como  $H_0'' \subset \mathcal{V}^{>-1}$  entonces  $Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' = 0$  para cada  $\beta < -1$ . Consecuentemente, para cada  $p > n$  tenemos que  $F^p C_\alpha = 0$  y  $F^p \mathcal{V}^{>-1} = 0$ .

**Nota 6.1.2.** Para  $\beta > -1$ , el isomorfismo  $\partial_t^{-1} : C_\beta \rightarrow C_{\beta+1}$  induce el morfismo inclusión

$$Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' \xrightarrow{\partial_t^{-1}} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta+1} H_0''.$$

Más aún,  $\partial_t^{-1} Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' = Gr_{\mathcal{V}}^{\beta+1} \partial_t^{-1} H_0''$ .

## 6.2. PMHS asintótica en la Fibra canónica de Milnor

**Proposición 6.2.1.** *Existe una filtración decreciente  $F^\bullet \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ .*

*Demostración.* Consideremos el isomorfismo

$$\psi : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} C_\alpha$$

## 6. MHS de Varchenko

Sea  $\alpha \in (-1, 0]$  tal que  $\exp(-2\pi i\alpha) = \lambda$  es un valor propio de la monodromía  $M$ . Para cada  $p \geq 0$ , definimos

$$F^p H_\lambda^n := \psi_\alpha^{-1}(F^p C_\alpha)$$

con  $F^p C_\alpha$  dado por (6.1.2). Por otra parte, definimos

$$F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C}) := \bigoplus_{\lambda} F^p H_\lambda^n \tag{6.2.1}$$

□

**Lema 6.2.1** (J. Scherk y J. Steenbrink[19]). *La filtración  $F^\bullet H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  es invariante con respecto a la parte semi-simple,  $M_s$ , de la transformación de monodromía  $M : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ .*

**Definición 6.2.1.** *La filtración de la Proposición 6.2.1 será denotada por  $F_{H_0}^\bullet$  y la llamaremos la Filtración de Hodge (modificada).*

**Teorema 6.2.1** (F. Pham [21], J. Scherk y J. Steenbrink [19], M. Saito [15]). *Sea  $F_{st}^\bullet$  la filtración como en el Teorema 4.4.6. Entonces, la filtración de Hodge  $F_{H_0}^\bullet$  coincide con la filtración de Steenbrink  $F_{st}^\bullet$ .*

*Demostración.* Una demostración completa y muy técnica es dada por F. Pham [21, pág., 278]. □

**Corolario 6.2.1.** *Respecto a la estructura de Hodge Mixta  $\left( H^n(X_\infty, \mathbb{Z}), F_{H_0}^\bullet, W_\bullet H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \right)$  definida en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ , y la definición del apareamiento  $\mathcal{S}$ , tenemos las siguientes afirmaciones:*

1.  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  posee una PMHS de peso  $m = n$ .
2.  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$  posee una PMHS de peso  $m = n + 1$ .

*Demostración.* Del Teorema 6.2.1 tenemos que  $F_{H_0}^\bullet = F_{st}^\bullet$ . Por tanto, del Teorema 4.4.7 se tiene la conclusión deseada. Esto completa la demostración. □

### 6.3. Filtración de Hodge de Steenbrink vs Filtración de Hodge de Varchenko

A continuación, definimos la filtración de Hodge asintótica de A. Varchenko [22], y establecemos una relación con la filtración de Steenbrink dada por la Definición 6.1.1.

**Definición 6.3.1** (Filtración de Varchenko). *Definimos la filtración  $\tilde{F}^\bullet \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ :*

## 6. MHS de Varchenko

1. Para  $-1 \leq \alpha \leq 0$ ,  $\tilde{F}^p C_\alpha := t^{-(n-p)} \cdot Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0''$ .

2. Para  $-1 \leq \alpha \leq 0$  con  $\lambda_\alpha := \exp(-2\pi i \alpha)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{F}^p H_{\lambda_\alpha} &:= \psi_{\alpha+(n-p)}^{-1} \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \right) \\ &= \psi_\alpha^{-1} \circ t^{-(n-p)} \cdot Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \\ &= \psi_\alpha^{-1} (\tilde{F}^p C_\alpha). \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

3. Finalmente,  $\tilde{F}^p H^n(X_\infty, \mathbb{C}) := \bigoplus_{\lambda_\alpha} \tilde{F}^p H_{\lambda_\alpha}$ .

La relación entre las filtraciones  $F_{H_0''}^\bullet$  y  $\tilde{F}^\bullet$  se ve en el

**Lema 6.3.1.**

i)  $F_{H_0''}^{n+1} = \tilde{F}^{n+1} = 0$ .

ii) Para  $p$  tal que  $n-p \geq 0$  se satisface la siguiente ecuación:

$$F_{H_0''}^p H_{\lambda_\alpha} = L_\alpha^{n-p} (\tilde{F}^p H_{\lambda_\alpha}),$$

con  $\lambda = \exp(-2\pi i \alpha)$  y  $-1 < \alpha \leq 0$ .

*Demostración.* La primera afirmación se sigue de la Nota 6.1.1 para  $p = n+1$ , es decir,  $n-p = -1$  y  $Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha-1} H_0'' = 0$ . Del Corolario 5.1.1 se tiene que

$$\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)} = \psi_\alpha \circ L_\alpha^{n-p}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_t^{n-p} &= \partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}^{-1} \\ &= \psi_\alpha \circ L_\alpha^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}^{-1} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} F_{H_0''}^p H_{\lambda_\alpha} &= \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t^{n-p} \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \right) \\ &= L_\alpha^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}^{-1} \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} H_0'' \right) \\ &= L_\alpha^{n-p} \tilde{F}^p H_{\lambda_\alpha} \end{aligned}$$

□



## 6.4. La filtración de Hodge y el espectro de una singularidad aislada

**Definición 6.4.1.** • Sea  $\beta \in \mathbb{Q}$ . La multiplicidad de  $\beta$  sera definida como

$$d_\beta := \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{Gr^\beta H_0''}{Gr^\beta \partial_t^{-1} \cdot H_0''} \right)$$

• Definimos el espectro de la singularidad  $f$  como

$$sp(f) := \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} d_\beta(\beta) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Q}]$$

**Lema 6.4.1.** Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si  $d_\beta \neq 0$  entonces  $-1 < \beta < n$ .
2. Tenemos la propiedad de simetría  $d_{n-1-\beta} = d_\beta$

*Demostración.* Para una demostración ver [19, 7.3(i). Pág., 657]. □

**Corolario 6.4.1.** Para cada  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$  tenemos una expansión

$$s[\omega]_0 = \left[ \sum_{-1 < \beta < n} s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1} H_0'')$$

*Demostración.* De Ec. 5.3.2, para cada  $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$  tenemos una expansión

$$s[\omega]_0 = \left[ \sum_{-1 < \beta} s(A_\alpha^\omega, \beta) \right]_0 \in \mathcal{V}^{>-1}$$

Del Lema 6.4.1 se tiene que  $d_\beta = 0$  para  $\beta \geq n$ . Entonces  $\mathcal{V}^n \subset \partial_t^{-1} H_0''$ . Esto completa la demostración. □

**Lema 6.4.2.** Para cada entero  $p$  tal que  $n - p \geq 0$ , se tiene el isomorfismo inducido

$$Gr_{F^\bullet}^p C_\alpha \xleftarrow[\partial_t^{n-p}]{\simeq} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} \partial_t^{-1} H_0''} \xrightarrow{\simeq} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right).$$

El segundo isomorfismo es el canónico con respecto a la  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración inducida en el cociente  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ .

*Demostración.* Sabemos que,

$$\partial_t^{-1} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta-1} H_0'' = Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 Gr_{F^\bullet}^p C_\alpha &= \frac{F^p C_\beta}{F^{p+1} C_\beta} \\
 &= \frac{\partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0''}{\partial_t^{n-(p+1)} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-(p+1))} H_0''} \\
 &= \frac{\partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0''}{\partial_t^{n-p-1} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p-1)} H_0''} \\
 &= \frac{\partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0''}{\partial_t^{n-p} \partial_t^{-1} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p-1)} H_0''} \\
 &= \frac{\partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0''}{\partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} \partial_t^{-1} H_0''}
 \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.  $\square$

**Lema 6.4.3.** Sea  $\alpha \in (-1, 0]$  y  $p$  un entero tal que  $n - p \geq 0$ . Sea también  $\beta = \alpha + (n - p)$ . Entonces

$$Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j=0}^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right).$$

*Demostración.* Como  $\partial_t^{-1} : C_{\alpha+j-1} \rightarrow C_{\alpha+j}$  es un isomorfismo,

$$\begin{aligned}
 Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} H_0'' &\xrightarrow{\cong} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} \partial_t^{-1} H_0'' \bigoplus \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} \partial_t^{-1} H_0''} \\
 &= \partial_t^{-1} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j-1} H_0'' \bigoplus \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} \partial_t^{-1} H_0''} \\
 &\xrightarrow{\cong} \partial_t^{-1} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j-1} H_0'' \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \\
 &\xrightarrow{\cong} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j-1} H_0'' \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+j} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right)
 \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Aplicando Ec. 6.4.1,

$$\begin{aligned}
 Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' &\xrightarrow{\cong} \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p-1} H_0'' \right) \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \\
 &\xrightarrow{\cong} \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p-2} H_0'' \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p-1} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \right) \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+n-p} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \\
 &= \left( Gr_{\mathcal{V}}^{\beta-2} H_0'' \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\beta-1} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \right) \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^\beta \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \\
 &\vdots \quad (\text{por inducción}) \\
 &= Gr_{\mathcal{V}}^\alpha H_0'' \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+1} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \bigoplus \cdots \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^{\beta-1} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \bigoplus Gr_{\mathcal{V}}^\beta \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right)
 \end{aligned}$$

## 6. MHS de Varchenko

Observamos que  $Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha} \partial_t^{-1} H_0'' = 0$ , ya que  $\alpha \in (-1, 0]$ ,  $\partial_t^{-1} H_0'' \subset H_0''$  y  $H_0'' \subset \mathcal{V}^{>-1}$ . Por tanto,  $\frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha} \partial_t^{-1} H_0''} \simeq Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha} H_0''$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Corolario 6.4.2.** *Sea  $\alpha \in (-1, 0]$  y  $p$  un entero tal que  $n - p \geq 0$ . Sea también  $\beta = \alpha + (n - p)$ .*

*Entonces*

- i)*  $\dim_{\mathbb{C}} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} H_0'' = d_{\alpha} + d_{\alpha+1} + \cdots + d_{\alpha+(n-p)}$
- ii)*  $\dim_{\mathbb{C}} F^p H_{\lambda_{\alpha}} = \sum_{j=0}^{n-p} d_{\alpha+j}$
- iii)*  $\dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{F^p H_{\lambda_{\alpha}}}{F^{p+1} H_{\lambda_{\alpha}}} \right) = d_{\alpha+(n-p)}$

*Demostración.* El inciso *i)* se sigue directamente del Lema 6.4.3. El inciso *ii)* se sigue del inciso *i)* y de notar que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} H_0'' &= \dim_{\mathbb{C}} \partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} H_0'' \quad (\partial_t^{n-p} \text{ es un isomorfismo}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} F^p C_{\alpha} \quad (\text{por definición}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} F^p H_{\lambda_{\alpha}} \quad (\text{por definición}) \end{aligned}$$

Finalmente, el inciso *iii)* se sigue del Lema 6.4.2. Esto completa la demostración.  $\square$

**Nota 6.4.1.** *La Definición 6.4.1, el Lema 6.4.1 y el Corolario 6.4.2 permiten definir el espectro como  $\mu$  números racionales (ordenados)*

$$-1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_{\mu} < n,$$

*con multiplicidades*

$$d_{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{F^p H_{\lambda_{\alpha}}}{F^{p+1} H_{\lambda_{\alpha}}} \right),$$

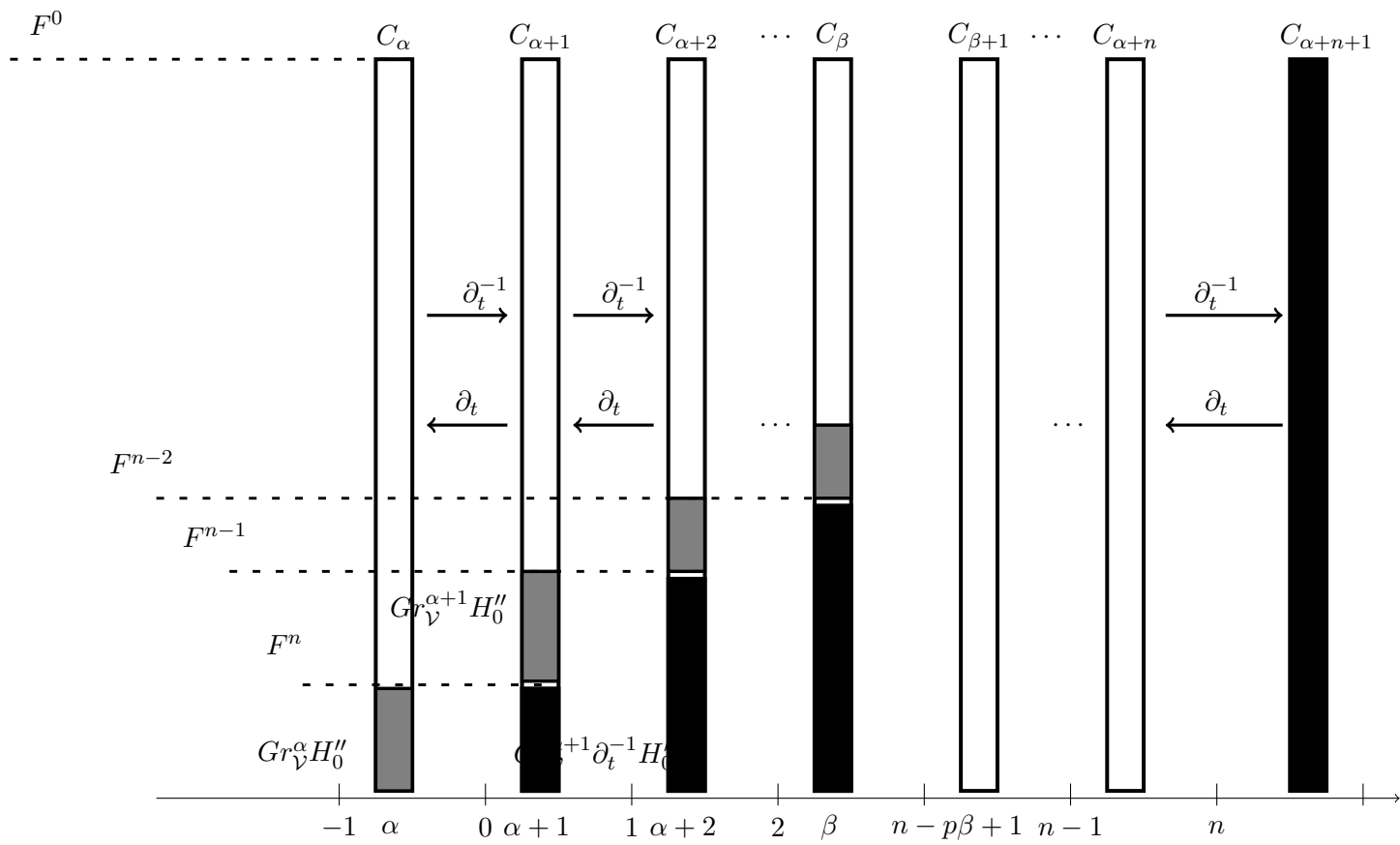
*donde los  $\lambda_{\alpha_j} = \exp(-2\pi i \alpha_j)$  son valores propios de la transformación de Monodromía, y  $\mu$  el número de Milnor de la singularidad aislada de hipersuperficie  $f$ .*

Una propiedad importante del espectro esta dada por el

**Lema 6.4.4.** *([3, Pág., 108]) Los números espectrales  $-1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_{\mu} < n$  satisfacen la propiedad*

$$\alpha_i + \alpha_{\mu+1-i} = n - 1.$$

Figura 6.1.: Filtración de Hodge  $F^\bullet$



# Dualidad de Grothendieck vs el producto cup en cohomología evanescente

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie. De acuerdo con A. Varchenko [24], en el álgebra de Milnor existe una transformación nilpotente denotada por  $\{f\}$ , llamada la multiplicación por  $f$ , con índice de nilpotencia menor o igual a  $n + 1$ . Por otra parte, el Teorema de Monodromía 4.4.1 implica que el operador  $-\frac{\log M_u}{2\pi i}$  es nilpotente con grado de nilpotencia menor o igual a  $n + 1$ , el cual actúa en la cohomología evanescente  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . A. Varchenko demuestra que las transformaciones  $Gr_{\mathcal{V}}\{f\}$  y  $-\frac{\log M_u}{2\pi i}$  poseen la misma forma canónica de Jordan, donde  $Gr_{\mathcal{V}}\{f\}$  es el morfismo (graduado) inducido por la  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración en el álgebra de Milnor.

En este capítulo demostraremos los resultados originales de esta tesis; el principal resultado que proporcionamos, establece una relación entre el apareamiento inducido por dualidad de Grothendieck (con descripción algebraica)

$$res_{f,0}(Gr_{\mathcal{V}}\{f\} \bullet, \bullet) : \Omega^f \times \Omega^f \rightarrow \mathbb{C} \quad (7.0.1)$$

con  $\Omega^f$  el álgebra de Milnor, de acuerdo con A.3.1; y el apareamiento inducido por el producto cup (con interpretación geométrica) en cohomología evanescente

$$\mathcal{S}\left(\frac{-1}{2\pi i} \log M_u \bullet, \bullet\right) : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \times H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

En este capítulo el símbolo  $N$  tendrá dos connotaciones, la primera denotará al operador nilpotente  $-\frac{\log M_u}{2\pi i}$ , y la segunda únicamente el operador  $\log M_u$ , lo que será especificado al inicio de la sección correspondiente .

Por cuestiones de notación denotaremos Ec. 7.0.1 simplemente por

$$\text{res}_{f,0}(f \bullet, \bullet) : \Omega^f \times \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}.$$

### 7.1. Cálculo del apareamiento $\text{res}_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ vía el producto cup en cohomología

En esta sección establecemos una formula que permite calcular el apareamiento  $\text{res}_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ , en términos del apareamiento  $\mathcal{S}$  dado por Ec. 4.4.4; para este resultado utilizamos las propiedades del Teorema 5.4.1 sobre el apareamiento de orden superior de K. Saito. En esta sección  $N := -\frac{\log M_u}{2\pi i}$ .

#### 7.1.1. Un buen representante en el Álgebra de Milnor

En este apartado presentamos uno de nuestros resultados, el Lema principal, el cual esta inspirado en ideas originales de A. Varchenko [24]; para ello usamos el lenguaje de C. Hertling [11].

**Definición 7.1.1.** De acuerdo con el Lema 5.1.5, para cada  $\beta \in \mathbb{Q}$  con  $\lambda_\beta = \exp(-2\pi i\beta)$ , definimos

$$\tilde{N}_\alpha := \psi_\beta \circ N \circ \psi_\beta^{-1}.$$

De lo cual tenemos una aplicación

$$\tilde{N} : \mathcal{V}^{>-1} \longrightarrow \mathcal{V}^{>-1},$$

tal que  $\tilde{N}|_{C_\beta} = \tilde{N}_\beta$  para cada  $\beta \in \mathbb{Q}$ .

**Lema 7.1.1.** Se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\beta s(A_\beta^\omega, \beta)_0 &:= \left[ \tilde{N}_\beta s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\ &= s(NA_\beta^\omega, \beta)_0 \end{aligned}$$

*Demostración.* Por definición,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\beta s(A_\beta^\omega, \beta) &= (\psi_\beta \circ N \circ \psi_\beta^{-1}) \circ \psi_\beta(A_\beta^\omega) \\ &= \psi_\beta \circ N(A_\beta^\omega) \\ &= s(NA_\beta^\omega, \beta) \end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Luego, se tiene la igualdad deseada en gérmenes. □

**Proposición 7.1.1 (Lema Principal).** *Supongamos que  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  y  $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$  son tales que  $d\eta = \omega$ . Sea también  $\alpha(\omega) \in \mathbb{Q}$  el orden de  $\omega$  tal que  $\lambda_{\alpha(\omega)} = \exp(-2\pi i\alpha(\omega))$ . Entonces*

$$s[f \cdot \omega]_0 - (\alpha(\omega) + 1)s[df \wedge \eta]_0 = \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N}s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1, \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} \partial_t^{-1}(\beta - \alpha(\omega))s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \quad (7.1.1)$$

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ . Consideremos  $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$  tal que  $\omega = d\eta$ . Entonces de Ec. 5.3.3 se sigue que

$$\partial_t s[df \wedge \eta]_0 = s[d\eta]_0 = s[\omega]_0$$

Por otra parte,  $t \cdot s[\omega]_0 = s[f \cdot \omega]_0$ ; y  $\partial_t$  satisface Leibnitz

$$\partial_t t = id + t\partial_t.$$

Consideremos la expansión del representante  $s[\omega](t) = \sum_{\beta > -1} s(A_\beta^\omega, \beta)$  del germen  $s[\omega]_0$ . Sea  $A := \partial_t(s[f \cdot \omega]_0 - (\alpha(\omega) + 1)s[df \wedge \eta]_0)$ . Entonces tenemos las siguientes igualdades a nivel de gérmenes:

$$\begin{aligned} A &= \partial_t s[f \cdot \omega]_0 - (\alpha(\omega) + 1)\partial_t s[df \wedge \eta]_0 \\ &= (s[\omega]_0 + t\partial_t s[\omega]_0) - (\alpha(\omega) + 1)s[\omega]_0 \\ &= t\partial_t s[\omega]_0 - \alpha(\omega)s[\omega]_0 \\ &= t\partial_t \left[ \sum_{\beta > -1} s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 - \alpha(\omega) \left[ \sum_{\beta > -1} s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\ &= \left[ t\partial_t s(A_{\alpha(\omega)}^\omega, \alpha(\omega)) - \alpha(\omega)s(A_{\alpha(\omega)}^\omega, \alpha(\omega)) \right]_0 + \\ &\quad + \left[ (t\partial_t - \alpha(\omega)) \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\ &= \left[ (t\partial_t - \alpha(\omega) \cdot id)s(A_{\alpha(\omega)}^\omega, \alpha(\omega)) \right]_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} (t\partial_t - \alpha(\omega))s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\ &= \tilde{N}_{\alpha(\omega)}s(A_{\alpha(\omega)}^\omega, \alpha(\omega))_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} (\tilde{N}_\beta + \beta - \alpha(\omega))s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\ &= \left( \tilde{N}_{\alpha(\omega)}s(A_{\alpha(\omega)}^\omega, \alpha(\omega))_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} \tilde{N}_\beta s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \right) + \\ &\quad + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} (\beta - \alpha(\omega))s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Entonces,

$$\begin{aligned}
 A &= \left[ \sum_{\beta > -1} \tilde{N}_\beta s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} (\beta - \alpha(\omega)) s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\
 &= \tilde{N} \left[ \sum_{\beta > -1} s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 + \left[ \sum_{\beta > -1, \beta \neq \alpha(\omega)} (\beta - \alpha(\omega)) s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \\
 &= \tilde{N} s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1 \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} (\beta - \alpha(\omega)) s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0
 \end{aligned}$$

Aplicamos el isomorfismo  $\partial_t^{-1}$  a la última igualdad para obtener lo deseado. Esto completa la demostración.  $\square$

**Corolario 7.1.1.** *Supongamos válidas las condiciones de la Proposición 7.1.1. Entonces*

$$s[f \cdot \omega]_0 \equiv \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N} s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\beta > -1, \beta \neq \alpha} \partial_t^{-1} (\beta - \alpha) s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \quad \text{mód } \partial_t^{-1} H_0''$$

*Demostración.* Es suficiente observar que de Ec. 5.3.3 se tiene que

$$\partial_t^{-1} s[d\eta]_0 = s[df \wedge \eta]_0 \in \partial_t^{-1} H_0''$$

Con lo que se prueba lo deseado.  $\square$

**Definición 7.1.2.** *En virtud del Corolario 7.1.1, el isomorfismo dado por el Lema 5.3.4, y las propiedades subsecuentes, le llamaremos a*

$$s[f \cdot \omega]_0 \equiv \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N} s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\beta > -1, \beta \neq \alpha} \partial_t^{-1} (\beta - \alpha) s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \quad \text{mód } \partial_t^{-1} H_0''$$

*un buen representante en el álgebra de Milnor.*

### 7.1.2. Propiedades inducidas por producto cup vía el Lema principal

**Lema 7.1.2.** *Sea  $\alpha \in (-1, 0]$  con  $\lambda_\alpha$  un valor propio de la monodromía  $M : H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ .*

*Entonces, para cada entero  $k \geq 0$  se satisfacen la siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_{\alpha+k} &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ L_\alpha^k \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \\
 &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ L_\alpha^k \circ N \circ \psi_\alpha^{-1} \circ t^{-k}
 \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_{\alpha+k} &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t^k \\
 &= \partial_t^{-k} \circ \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^k
 \end{aligned} \tag{7.1.3}$$



## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

*Demostración.* Sea  $\mathbf{a} \in C_{\alpha+k}$ ,  $k \geq 1$ . Entonces por definición,

$$\tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}(\mathbf{a}).$$

Aplicando el operador  $\partial_t^k$  tenemos la igualdad:

$$\partial_t^k \circ \tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \partial_t^k \circ \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}(\mathbf{a}).$$

Por otra parte, del Corolario 5.1.1 obtenemos que

$$\partial_t^k \circ \tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \psi_\alpha \circ L_\alpha^k \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}(\mathbf{a})$$

Finalmente, aplicamos el operador  $\partial_t^{-k}$  para concluir que

$$\tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ L_\alpha^k \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}(\mathbf{a}).$$

Esto prueba Ec. 7.1.2.

Ahora bien, de *i*) y la Nota 5.1.3 tenemos que

$$\tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^k \circ \psi_{\alpha+k}^{-1}(\mathbf{a}).$$

De la Nota 5.1.3, se tiene que

$$\tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-1} \circ \left( (\alpha + k + N) \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right)(\mathbf{a}) \quad (7.1.4)$$

Del Lema 5.1.6 se tiene la igualdad

$$\tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) = \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-1} \circ \left( \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} \right) \circ \left( \alpha + k + \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right)(\mathbf{a})$$

Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-1} \circ \left( \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \circ t^{-1} \right) \circ \left( \alpha + k + \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right)(\mathbf{a}) \\ &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-1} \circ \left( \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \right) \circ t^{-1} \left( \alpha + k + \psi_{\alpha+k} \circ N \circ \psi_{\alpha+k}^{-1} \right)(\mathbf{a}) \\ &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-1} \circ \left( \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} (\mathbf{a}) \quad (\text{por ec. (5.1.2)}) \\ &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-2} \circ \left( (\alpha + k - 1 + N) \circ \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} (\mathbf{a}) \end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Nuevamente, del Lema 5.1.6 se sigue que

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{\alpha+k}(\mathbf{a}) &= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-2} \circ \left( \psi_{\alpha+k-2}^{-1} \circ t^{-1} \right) \circ \left( \alpha + k - 1 + \psi_{\alpha+k-1} \circ N \circ \psi_{\alpha+k-1}^{-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \\
&= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-2} \circ \left( \psi_{\alpha+k-2}^{-1} \right) \circ t^{-1} \left( \alpha + k - 1 + \tilde{N}_{\alpha+k-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \\
&= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-2} \circ \left( \psi_{\alpha+k-2}^{-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k-1}} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \text{ (por ec. (5.1.2))} \\
&= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-3} \circ \left( (\alpha + k - 2 + N) \psi_{\alpha+k-2}^{-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k-1}} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \\
&= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ L_\alpha^{k-3} \circ \psi_{\alpha+k-3}^{-1} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k-2}} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k-1}} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \\
&\vdots \\
&= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ \left( (\alpha + 1 + N) \psi_{\alpha+1}^{-1} \right) \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+2}} \circ \cdots \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \\
&= \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha \circ N \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+1}} \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+2}} \circ \cdots \circ \partial_t \Big|_{C_{\alpha+k}} \quad (\mathbf{a}) \\
&= \partial_t^{-k} \circ \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^k(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Lo cual prueba Ec 7.1.3; lo cual completa la demostración. □

**Corolario 7.1.2.** Sean  $\alpha \in (-1, 0] \cap \mathbb{Q}$  y  $k \geq 0$ . Entonces,

- i)  $\tilde{N}_{\alpha+k+1} \circ \partial_t^{-1} = \partial_t^{-1} \circ \tilde{N}_{\alpha+k}$
- ii)  $\partial_t^k \circ \tilde{N}_{\alpha+k} = \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^k$

*Demostración.* Primero demostraremos i). Observamos que es suficiente demostrar que

$$\partial_t \circ \tilde{N}_{\alpha+k+1} = \tilde{N}_{\alpha+k} \circ \partial_t \quad (7.1.5)$$

En efecto, primeramente tenemos de Ec. 7.1.3 que

$$\begin{aligned}
\partial_t \circ \tilde{N}_{\alpha+k+1} &= \partial_t \circ \partial_t^{-k-1} \circ \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^{k+1} \\
&= \partial_t^{-k} \circ \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^{k+1} \\
&= \partial_t^{-k} \circ \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^k \circ \partial_t \\
&= (\partial_t^{-k} \circ \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^k) \circ \partial_t \\
&= \tilde{N}_{\alpha+k} \circ \partial_t
\end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Ahora demostramos *ii*). En efecto, de Ec. 7.1.5,

$$\begin{aligned}
 \partial_t^k \circ \tilde{N}_{\alpha+k} &= \partial_t^{k-1} \partial_t \circ \tilde{N}_{\alpha+k} \\
 &= \partial_t^{k-1} \circ \tilde{N}_{\alpha+k-1} \circ \partial_t \\
 &= \partial_t^{k-2} \circ \partial_t \circ \tilde{N}_{\alpha+k-1} \circ \partial_t \\
 &= \partial_t^{k-2} \circ \tilde{N}_{\alpha+k-2} \circ \partial_t \circ \partial_t \\
 &= \partial_t^{k-3} \partial_t \circ \tilde{N}_{\alpha+k-2} \circ \partial_t \circ \partial_t \\
 &= \partial_t^{k-3} \circ \tilde{N}_{\alpha+k-3} \circ \partial_t \circ \partial_t \circ \partial_t \\
 &\vdots \quad (\text{por inducción}) \\
 &= \partial_t^{k-k} \circ \tilde{N}_{\alpha+k-k} \circ \partial_t^k \\
 &= \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^k
 \end{aligned}$$

Hemos completado la demostración. □

**Nota 7.1.1.** *Observamos que los Corolarios 7.1.2 y 7.1.1 muestran que multiplicar por  $f$  la forma  $\omega$  implica aplicar el operador  $N$  en cohomología, de acuerdo con el Lema 7.1.1, ya que se satisface la ecuación*

$$s[f \cdot \omega]_0 \equiv \tilde{N} \partial_t^{-1} s[\omega]_0 + \left[ \sum_{\substack{\beta > -1, \\ \beta \neq \alpha(\omega)}} \partial_t^{-1} (\beta - \alpha(\omega)) s(A_\beta^\omega, \beta) \right]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1} H''_0) \quad (7.1.6)$$

### 7.1.3. El operador de multiplicación por $f$ en $\Omega^f$

En este apartado definiremos el operador de multiplicación por  $f$ ,  $\{f\}$  en  $\Omega^f$ . También estableceremos un resultado de A. Varchenko [24], el cual relaciona la parte nilpotente de la transformación de monodromía  $N = \frac{-\log M_u}{2\pi i}$ , con el operador  $\{f\}$ ; para esto utilizaremos los resultados de J. Scherk y J. Steenbrink [19], como se verá en seguida.

**Definición 7.1.3.** *El operador de multiplicación por  $f$  se define como*

$$\begin{aligned}
 \Omega^f &\xrightarrow{\{f\}} \Omega^f \\
 g &\longmapsto f \cdot g
 \end{aligned}$$

7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

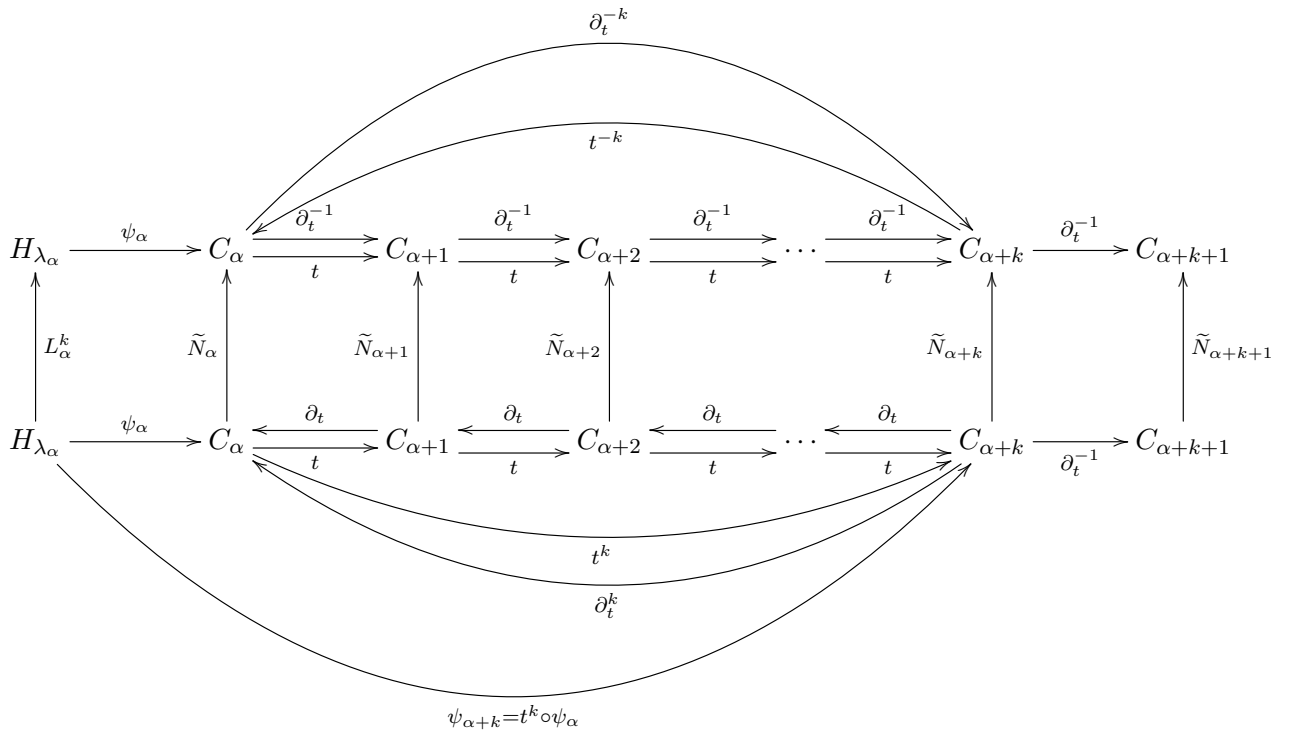


Figura 7.1.: Interacción entre  $\psi_\alpha$ ,  $\psi_{\alpha+k}$ ,  $L_\alpha^k$ ,  $\tilde{N}_{\alpha+k}$ ,  $\partial_t^{-k}$ ,  $t^k$ ,  $\partial_t^k$  y  $t^{-k}$ , para  $\alpha \in (-1, 0]$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

**Lema 7.1.3.** *Sea  $-1 < \alpha \leq 0$  tal que  $\lambda_\alpha = \exp(-2\pi i\alpha)$  es un valor propio de la transformación de Monodromía. Entonces, se tiene la igualdad de transformaciones*

$$\tilde{N}_\alpha \equiv t\partial_t : Gr_{F^\bullet}^p C_\alpha \longrightarrow Gr_{F^\bullet}^{p-1} C_\alpha.$$

*Demostración.* Por definición,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\alpha \circ (\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}) &= (t\partial_t - \alpha) \circ (\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}) \\ &= t\partial_t \circ (\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}) + \partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}(-\alpha \text{ id}). \end{aligned}$$

Entonces, el mapeo inducido  $\tilde{N}_\alpha : Gr_{F^\bullet}^p C_\alpha \longrightarrow Gr_{F^\bullet}^{p-1} C_\alpha$  es tal que

$$\tilde{N}_\alpha \circ (\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}) \equiv t\partial_t \circ (\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}),$$

ya que

$$\partial_t^{n-p} \circ \psi_{\alpha+(n-p)}(-\alpha A) \in \partial_t^{n-p} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0'' = F^p C_\alpha \subset C_\alpha$$

para cada  $A \in H_{\lambda_\alpha}$ . Luego,

$$\tilde{N}_\alpha \equiv t\partial_t : Gr_{F^\bullet}^p C_\alpha \longrightarrow Gr_{F^\bullet}^{p-1} C_\alpha.$$

□

**Nota 7.1.2.** *El isomorfismo (dado por Ec. 5.3.4)*

$$\Omega^f \xrightarrow[\simeq]{s} \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{-1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''}$$

*induce una graduación para  $\Omega^f$  con respecto a la  $\mathcal{V}$ -filtración:*

$$\Omega^f \simeq \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f,$$

donde

$$Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f \xrightarrow{\simeq} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''}$$

El operador de multiplicación por  $\{f\} : \Omega^f \longrightarrow \Omega^f$  induce un operador  $Gr_{\mathcal{V}}\{f\}$  de acuerdo con el

**Lema 7.1.4.** *El operador graduado inducido por  $\{f\}$ :*

$$Gr_{\mathcal{V}}\{f\} : \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f \longrightarrow \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta \Omega^f,$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

esta definido de tal manera que, para cada entero  $p$  con  $n - p \geq 0$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}\Omega_f & \xrightarrow{Gr_{\mathcal{V}}\{f\}} & Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}\Omega_f \\
 \cong \downarrow s & & \cong \downarrow s \\
 \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}\partial_t^{-1}H_0''} & \xrightarrow{t} & \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}\partial_t^{-1}H_0''} \\
 \partial_t^{n-p} \downarrow \cong & & \partial_t^{n-p+1} \downarrow \cong \\
 Gr_{F\bullet}^p C_\alpha & \xrightarrow{\tilde{N}_\alpha} & Gr_{F\bullet}^{p-1} C_\alpha
 \end{array}$$

es conmutativo, donde  $s$  es inducido por el isomorfismo del Lema 5.3.4.

*Demostración.* El diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}\Omega_f & \xrightarrow{Gr_{\mathcal{V}}\{f\}} & Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}\Omega_f \\
 \cong \downarrow s & & \cong \downarrow s \\
 \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)}\partial_t^{-1}H_0''} & \xrightarrow{t} & \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)+1}\partial_t^{-1}H_0''}
 \end{array}$$

conmuta en virtud de la ecuación  $s[f\omega]_0 = t \cdot s[\omega]_0$  para cada  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ . Ahora bien, del Corolario 7.1.2:

$$\tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^{n-p} = \partial_t^{n-p} \circ \tilde{N}_{\alpha+(n-p)} \quad (7.1.7)$$

Además, como  $s[f\omega] = t \cdot s[\omega]$  para cada  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ , se sigue del Corolario 7.1.1 que

$$t \equiv \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha+(n-p)} \pmod{\partial_t^{-1}H_0''}.$$

Entonces, mód  $\partial_t^{-1}H_0''$ , de Ec. 7.1.7 se tiene que

$$\begin{aligned}
 \partial_t^{(n-p)+1} \circ t &\equiv \partial_t^{(n-p)+1} \circ (\partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha+(n-p)}) \\
 &\equiv \partial_t^{n-p} \circ \tilde{N}_{\alpha+(n-p)} \\
 &= \tilde{N}_\alpha \circ \partial_t^{n-p}.
 \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

**Teorema 7.1.1.** *Las transformaciones  $Gr_{\mathcal{V}}\{f\}$  y  $N$  poseen la misma forma canónica de Jordan.*

*Demostración.* Se sigue del Lema 7.1.3. Para una demostración completa ver [19, 7.1. Pág., 656] y [24]. □

### 7.1.4. Cálculo de $res_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ en el álgebra de Milnor vía expansiones en $\mathcal{V}^{>-1}$

En este apartado presentaremos una fórmula que pone relación estrecha entre el álgebra jacobiana, y la cohomología evanescente.

**Lema 7.1.5.** *Sean  $\alpha_1, \alpha_2 \in (-1, 0]$ . Supongamos además que  $\mathbf{a} = \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1})$  y  $\mathbf{b} = \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2})$ , con niveles  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente. Entonces,*

$$P_S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (-1)^{k_1} \partial_t^{-k_1-k_2-l} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(A_{\alpha_2+k_2}) \right).$$

con

$$c_{n,l} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n & \text{si } l = 1 \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} & \text{si } l = 2 \end{cases}$$

*Demostración.* Sean  $\mathbf{a} = \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1})$  y  $\mathbf{b} = \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2})$ , con niveles  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente. Del Corolario 5.2.1,

$$P_S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2} P_S(\partial_t^{k_1} \circ \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \partial_t^{k_1} \circ \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2}))$$

Así, del Corolario 5.1.1 y la Definición 5.2.1,

$$\begin{aligned} P_S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2} P_S(\partial_t^{k_1} \circ \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \partial_t^{k_1} \circ \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2} P_S(\psi_{\alpha_1} \circ L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \psi_{\alpha_2} \circ L_{\alpha_2}^{k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(\psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \psi_{\alpha_1} \circ L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \psi_{\alpha_2} \circ L_{\alpha_2}^{k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \end{aligned}$$

con  $l = 1$  y  $c_{n,l} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n$ , o bien  $l = 2$  y  $c_{n,l} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1}$ . Esto completa la demostración. □

**Lema 7.1.6.** *Sea  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in C_{\alpha_1+k_1} \times C_{\alpha_2+k_2}$  con  $\alpha_1, \alpha_2 \in (-1, 0]$ , donde  $k_1, k_2$  son los niveles de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente. Además, supongamos que*

$$\mathbf{a} = \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}) \text{ y } \mathbf{b} = \psi_{\alpha_2+k_2}(B_{\alpha_2+k_2})$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Entonces

$$P_S(\partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_1+k_1} \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(NL_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(B_{\alpha_2+k_2}))$$

con  $l = 1$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^n$ , o bien  $l = 2$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^{n+1}$ .

*Demostración.* Sea  $A = P_S(\partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_1+k_1} \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Entonces,

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\partial_t^{k_1+1} \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_1+k_1} \mathbf{a}, \partial_t^{k_2} \mathbf{b}) \quad (\text{por Lema 5.2.1}) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\partial_t^{k_1} \tilde{N}_{\alpha_1+k_1} \mathbf{a}, \partial_t^{k_2} \mathbf{b}) \quad (\text{por Lema 5.2.1}) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\partial_t^{k_1} \circ \partial_t^{-k_1} \circ \psi_{\alpha_1} \circ L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ \psi_{\alpha_1+k_1}^{-1} \mathbf{a}, \partial_t^{k_2} \mathbf{b}) \quad (\text{por Lema 7.1.2}) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\psi_{\alpha_1} \circ L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ \psi_{\alpha_1+k_1}^{-1} \mathbf{a}, \partial_t^{k_2} \mathbf{b}) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ \psi_{\alpha_1+k_1}^{-1} \mathbf{a}, \psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \partial_t^{k_2} \mathbf{b}) \quad (\text{por Definición 5.2.1}) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ \psi_{\alpha_1+k_1}^{-1} \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \partial_t^{k_2} \psi_{\alpha_2+k_2}(B_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ (A_{\alpha_1+k_1}), \psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \partial_t^{k_2} \circ \psi_{\alpha_2+k_2}(B_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ (A_{\alpha_1+k_1}), \psi_{\alpha_2}^{-1} \psi_{\alpha_2} \circ L_{\alpha_2}^{k_2}(B_{\alpha_2+k_2})) \quad (\text{por Cor 5.1.1}) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1} \circ N \circ (A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(B_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(NL_{\alpha_1}^{k_1} \circ (A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(B_{\alpha_2+k_2})) \quad (\text{por Nota 5.1.3}) \end{aligned}$$

con  $l = 1$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^n$ , o bien  $l = 2$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^{n+1}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Lema 7.1.7.** Sea  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in C_{\alpha_1+k_1} \times C_{\alpha_2+k_2}$  con  $\alpha_1, \alpha_2 \in (-1, 0]$ , donde  $k_1, k_2$  son los niveles de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente. Además, supongamos que

$$\mathbf{a} = \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \psi_{\alpha_2+k_2}(B_{\alpha_2+k_2})$$

Entonces

$$P_S(\partial_t^{-1} \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(B_{\alpha_2+k_2}))$$

con  $l = 1$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^n$ , o bien  $l = 2$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^{n+1}$ .

*Demostración.* Del Corolario 5.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} P_S(\partial_t^{-1} \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\partial_t^{k_1+1} \cdot \partial_t^{-1} \cdot \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \partial_t^{k_1} \cdot \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \\ &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\partial_t^{k_1} \cdot \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \partial_t^{k_2} \cdot \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \end{aligned}$$



## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Por lo tanto, del Corolario 5.1.1, y de la Definición 5.2.1,

$$\begin{aligned}
P_S(\partial_t^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\partial_t^{k_1} \cdot \psi_{\alpha_1+k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \partial_t^{k_2} \cdot \psi_{\alpha_2+k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \\
&= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-1} P_S(\psi_{\alpha_1} \circ L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), \psi_{\alpha_2} \circ L_{\alpha_2}^{k_2}(A_{\alpha_2+k_2})) \\
&= (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}(L_{\alpha_1}^{k_1}(A_{\alpha_1+k_1}), L_{\alpha_2}^{k_2}(A_{\alpha_2+k_2}))
\end{aligned}$$

con  $l = 1$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^n$ , o bien  $l = 2$  y  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^{n+1}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Proposición 7.1.2.** Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  con expansiones en  $\mathcal{V}^{>-1}$ :

$$s[\omega_1]_0 = \left[ \sum_{-1 < \alpha_1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1) \right]_0 \quad y \quad s[\omega_2]_0 = \left[ \sum_{-1 < \alpha_2} s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2) \right]_0. \quad (7.1.8)$$

Entonces, módulo  $\partial_t^{-1}H_0''$ , se tiene la equivalencia

$$\begin{aligned}
P_S(s[f \cdot \omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &\equiv \sum_{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n} (-1)^{k_2} \cdot c_{n,l} \cdot \left\{ \mathcal{S}\left( NL_{\alpha_1-k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2-k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S}(L_{\alpha_1-k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2-k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2})) \right\} \cdot \partial_t^{-k_1-k_2-l-1}, \quad (7.1.9)
\end{aligned}$$

con  $\alpha_1 - k_1, \alpha_2 - k_2 \in (-1, 0]$  y  $0 \leq k_1, k_2 \leq n - 1$ ; además,  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^n$  si  $l = 1$ , o bien,  $c_{n,l} = (\frac{1}{2\pi i})^{n+1}$  si  $l = 2$ , cuya elección depende de  $\alpha_1, \alpha_2$  según la Definición 5.2.1 de  $P_S$ .

*Demostración.* Consideremos la expansiones

$$s[\omega_1]_0 = \left[ \sum_{-1 < \alpha_1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1) \right]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1}H_0'') \quad y \quad s[\omega_2]_0 = \left[ \sum_{-1 < \alpha_2} s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2) \right]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1}H_0'').$$

como en el Corolario 6.4.1. Del Corolario 7.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned}
s[f \cdot \omega_1]_0 &\equiv \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N}s[\omega_1]_0 + \left[ \sum_{\substack{-1 < \alpha_1 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} \partial_t^{-1}(\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1))s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1) \right]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1}H_0'') \\
&= \left[ \sum_{-1 < \alpha_1 < n} \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N}s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1) \right]_0 + \left[ \sum_{\substack{-1 < \alpha_1 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \partial_t^{-1}s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1) \right]_0 \\
&= \sum_{-1 < \alpha_1 < n} \partial_t^{-1} \cdot \tilde{N}s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0 + \sum_{\substack{-1 < \alpha_1 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \partial_t^{-1}s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0
\end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Por lo tanto, módulo  $\partial_t^{-1}H_0''$ , se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
P_S(s[f \cdot \omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &= P_S\left(\sum_{-1 < \alpha_1 < n} \partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, \sum_{-1 < \alpha_2 < n} s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) + \\
&+ P_S\left(\sum_{\substack{-1 < \alpha_1 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} \partial_t^{-1}(\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, \sum_{-1 < \alpha_2 < n} s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) \\
&= \sum_{-1 < \alpha_1 < n} \left( \sum_{-1 < \alpha_2 < n} P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{-1 < \alpha_1 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} \left( \sum_{-1 < \alpha_2 < n} (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) P_S\left(\partial_t^{-1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) \right) \\
&= \sum_{-1 < \alpha_2 < n} P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1(\omega_1)}^{\omega_1}, \alpha_1(\omega_1))_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) + \\
&+ \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) + \\
&+ \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) P_S\left(\partial_t^{-1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) \\
&= \sum_{-1 < \alpha_2 < n} P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1(\omega_1)}^{\omega_1}, \alpha_1(\omega_1))_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) + \\
&+ \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} \left\{ P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) + \right. \\
&\left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) P_S\left(\partial_t^{-1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) \right\}
\end{aligned}$$

Sean  $k, k_1, k_2$  los niveles de  $s(A_{\alpha_1(\omega_1)}^{\omega_1}, \alpha_1(\omega_1))_0, s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0$  y  $s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0$  respectivamente. Definimos

$$\sum_{\mathbf{1}} := \sum_{-1 < \alpha_2 < n} P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1(\omega_1)}^{\omega_1}, \alpha_1(\omega_1))_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right).$$

Entonces, del Lema 7.1.6 se sigue que

$$\sum_{\mathbf{1}} = \sum_{-1 < \alpha_2 < n} (-1)^{k_2} \partial_t^{-k-k_2-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}\left(NL_{\alpha_1(\omega_1)-k}^k(A_{\alpha_1(\omega_1)}^{\omega_1}), L_{\alpha_2-k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2})\right),$$

donde  $\alpha_1(\omega_1) - k, \alpha_2 - k_2 \in (-1, 0]$  con  $0 \leq k, k_2 \leq n - 1$ . Asimismo, definimos

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{2}} &:= \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} \left\{ P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) + \right. \\
&\left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) P_S\left(\partial_t^{-1} s(A_{\alpha_1}^{\omega_1}, \alpha_1)_0, s(A_{\alpha_2}^{\omega_2}, \alpha_2)_0\right) \right\}
\end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Análogamente, aplicando los lemas 7.1.6 y 7.1.7, respectivamente, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_2 &= \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} \left\{ (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1 - k_2 - l - 1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1 - k_2 - l - 1} \cdot c_{n,l} \cdot (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right\} \\
&= \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1)}} (-1)^{k_2} \partial_t^{-k_1 - k_2 - l - 1} \cdot c_{n,l} \cdot \left\{ \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right\},
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_1 - k_1, \alpha_2 - k_2 \in (-1, 0]$  con  $0 \leq k_1, k_2 \leq n - 1$ . Por tanto,

$$P_S(s[f \cdot \omega_1]_0, s[\omega_2]_0) = \sum_1 + \sum_2 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1} H_0''),$$

lo que completa la demostración. □

Los resultados anteriores implican de manera canónica y más explícita la acción del apareamiento  $res_{f,0}(f \bullet, \bullet)$ . Esto lo establecemos con el siguiente resultado.

**Teorema 7.1.2.** *Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  con expansiones como en Proposición 7.1.2. Entonces*

$$\begin{aligned}
res_{f,0}(f \cdot \omega_1, \omega_2) &= \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1) \\ -k_1 - k_2 - l - 1 = -n - 1}} (-1)^{k_2} \cdot c_{n,l} \cdot \left\{ \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right\} \quad (7.1.10)
\end{aligned}$$

*Demostración.* Del Teorema 5.4.1 se tiene que

$$P_S^{(-n-1)}(s[f \cdot \omega_1]_0, s[\omega_2]_0) = res_{f,0}(f \cdot \omega_1, \omega_2) \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.1.11)$$

Por otra parte, de Ec. 7.1.9,

$$\begin{aligned}
P_S^{(-n-1)}(s[f \cdot \omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &= \left\{ \sum_{\substack{-1 < \alpha_2 < n \\ -k - k_2 - l - 1 = -n - 1}} (-1)^{k_2} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1(\omega_1) - k}^k(A_{\alpha_1(\omega_1)}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right. \\
&= \sum_{\substack{-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n \\ \alpha_1 \neq \alpha_1(\omega_1) \\ -k_1 - k_2 - l - 1 = -n - 1}} (-1)^{k_2} \cdot c_{n,l} \cdot \left\{ \mathcal{S} \left( NL_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_1(\omega_1)) \mathcal{S} \left( L_{\alpha_1 - k_1}^{k_1}(A_{\alpha_1}^{\omega_1}), L_{\alpha_2 - k_2}^{k_2}(A_{\alpha_2}^{\omega_2}) \right) \right\} \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.1.12)
\end{aligned}$$

Finalmente, igualando Ec. 7.1.11 y Ec. 7.1.12, y aplicando el operador  $\partial_t^{n+1}$  completamos la demostración.  $\square$

## 7.2. Condiciones de ortogonalidad en cohomología vía el apareamiento de orden superior de Saito

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie. En consistencia con la Sección 6.4, en esta sección denotaremos por

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_\mu$$

los números espectrales asociados a  $f$ , a menos que se especifique lo contrario. También consideremos  $N := \frac{-1}{2\pi i} \log M_u$ .

**Lema 7.2.1** (C. Hertling, C. Stahlke [12]). *Los apareamientos inducidos*

$$P_S^{(-n-1)} : \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} \times \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{n-1-\beta} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{n-1-\beta} \partial_t^{-1} H_0''} \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \partial_t^{-n-1}$$

son no degenerados para  $-1 < \beta < n$ .

**Proposición 7.2.1** (Hertling [11]). *Para  $i = 1, 2, \dots, \mu$ , existen elementos  $s_i \in C_{\alpha_i}$ , los cuales satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *El conjunto  $\{s_1, s_2, \dots, s_\mu\}$  se proyecta sobre una  $\mathbb{C}$ -base para*

$$\bigoplus_{-1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''}$$

2. *Definimos  $s_{\mu+1} := 0$ . Entonces existe una aplicación*

$$\nu : \{1, \dots, \mu\} \longrightarrow \{1, \dots, \mu, \mu + 1\}$$

*tal que*

$$(t - (\alpha_i + 1)\partial_t^{-1})s_i = s_{\nu(i)} \tag{7.2.1}$$

*para cada  $i = 1, \dots, \mu$ .*

3. *Existe una involución*

$$\kappa : \{1, \dots, \mu\} \longrightarrow \{1, \dots, \mu\}$$

7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

$$k(i) = \begin{cases} \mu + 1 - i & \text{si } \alpha_i \neq \frac{1}{2}(n-1) \\ \mu + 1 - i \text{ ó } i & \text{si } \alpha_i = \frac{1}{2}(n-1) \end{cases}$$

tal que

$$P_S(s_i, s_j) = \delta_{\kappa(i),j} \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.2.2)$$

donde  $\delta_{l,k}$  denota la delta de Kronecker.

**Lema 7.2.2.** Sean  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, \mu$ , como en la Proposición 7.2.1. Entonces para cada  $i \in \{1, \dots, \mu\}$  se tiene que la intersección

$$\left( s_i + \sum_{\substack{j,p \\ p \geq 1 \\ \alpha_i < \alpha_j - p}} \mathbb{C} \cdot \partial_t^p s_j \right) \cap H_0''$$

consiste de un único elemento,

$$h_i := s_i + \sum_{\substack{j,p \\ p \geq 1 \\ \alpha_i < \alpha_j - p}} a_{ij}^{(p)} \cdot \partial_t^p s_j.$$

Más aún, el conjunto  $\{h_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  forma una  $R$ -base para la retícula  $H_0''$ .

*Demostración.* Para una demostración ver [11, Lema 5.2. Pág., 24] □

**Definición 7.2.1.** Sea  $\underline{h} := (h_i)_{1 \leq i \leq \mu}$  la  $R$ -base para  $H_0''$ .

El siguiente resultado es muy importante, ya que muestra (en un lenguaje más sofisticado) la relación entre el operador de multiplicación por  $f$  (o bien multiplicación por  $t$ ) y la parte nilpotente de la transformación de monodromía.

**Proposición 7.2.2.** Existen matrices  $A_0, A_1 \in \text{Mat}_{\mu \times \mu}(\mathbb{C})$ , tales que la aplicación natural

$$(R^\mu, A_0 + A_1 \partial_t^{-1} + s^2 \partial_s) \xrightarrow{\underline{h}} (H_0'', t)$$

con  $s := \partial_t^{-1}$  y  $\partial_s$  definido por la ecuación  $t = s^2 \partial_s$ , es un isomorfismo. Además,

1.  $A_1$  es semi-simple y sus valores propios son los números espectrales aumentados por 1:  $\alpha_i + 1$ ,  $1 \leq i \leq \mu$ .
2. El endomorfismo graduado de  $A_0$  con respecto a la  $\mathcal{V}$ -filtración,  $\text{Gr}_{\mathcal{V}} A_0$ , se identifica con  $N$ .

*Demostración.* Para una demostración ver [5, Prop. 13. Pág., 142]. □

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

**Corolario 7.2.1.** Sean  $s_i, i = 1, \dots, \mu$  como en la Propocisión 7.2.1. Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

1.

$$\tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot s_i = \begin{cases} s_{\nu(i)} \in \{s_1, s_2, \dots, s_\mu\} & \text{si } \nu(i) \neq \mu + 1 \\ 0 & \text{si } \nu(i) = \mu + 1 \end{cases}$$

2.

$$P_S \left( \tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot s_i, s_j \right) = \begin{cases} \delta_{\kappa \circ \nu(i), j} \cdot \partial_t^{-n-1} & \text{si } \nu(i) \neq \mu + 1 \\ 0 & \text{si } \nu(i) = \mu + 1 \end{cases}$$

*Demostración.* Del Lema 5.1.5 se sigue que  $(t\partial_t - (\alpha_i + 1)id) = \tilde{N}_{\alpha_i+1}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} &= (t\partial_t - (\alpha_i + 1)id) \partial_t^{-1} \\ &= (t\partial_t \partial_t^{-1} - (\alpha_i + 1)\partial_t^{-1}) \\ &= (t - (\alpha_i + 1))\partial_t^{-1} \end{aligned}$$

Por tanto, de Ec. 7.2.1 se tiene que

$$\tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} s_i = (t - (\alpha_i + 1))\partial_t^{-1} s_i = s_{\nu(i)}.$$

Si  $\nu(i) \neq \mu + 1$ , entonces  $s_{\nu(i)} \in \{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ . Si  $\nu(i) = \mu + 1$ , por definición  $s_{\nu(i)} = 0$ . La demostración termina observando que de Ec. 7.2.2,

$$\begin{aligned} P_S \left( \tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot s_i, s_j \right) &= P_S \left( s_{\nu(i)}, s_j \right) \\ &= \delta_{\kappa \circ \nu(i), j} \cdot \partial_t^{-n-1} \end{aligned}$$

□

**Nota 7.2.1.** De la Proposición 7.2.1 tenemos que  $s_1, s_2, \dots, s_\mu$  se proyectan sobre una base para

$$\begin{aligned} \bigoplus_{-1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} &\xrightarrow{\sim} \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \quad (\text{vía la proyección canónica}) \\ &\xrightarrow{\sim} \Omega^f \quad (\text{vía el Lema 5.3.4}) \end{aligned}$$

Sea  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  la base inducida. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\tilde{s}_i \in Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha_i} H_0''$  para cada  $i = 1, \dots, \mu$ . Entonces, para  $i = 1, \dots, \mu$  se tienen las siguientes afirmaciones:

**a)** Existen clases de cohomología

$$A_i \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\lambda_{\alpha_i}}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

tales que

$$\psi_{\alpha_i}(A_i) = \tilde{s}_i$$

**b)** Existen formas diferenciales  $\tilde{\omega}_i \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  tales que  $\tilde{s}_i = s[\tilde{\omega}_i]_0$  con  $\alpha(\tilde{\omega}_i) = \alpha_i$  ver también [12, Pág., 161].

**Corolario 7.2.2.** Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si perder generalidad se tiene que  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  es una  $\mathbb{C}$ -base para  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1}H_0''}$ .

2. Para  $i = 1, \dots, \mu$ ,

$$\tilde{N}_{\alpha_{i+1}} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i = \begin{cases} \tilde{s}_{\nu(i)} \in \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_\mu\} & \text{si } \nu(i) \neq \mu + 1 \\ 0 & \text{si } \nu(i) = \mu + 1 \end{cases}$$

3. Para cada  $\tilde{s}_i, \tilde{s}_j \in \{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ ,

$$P_S \left( \tilde{N}_{\alpha_{i+1}} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \tilde{s}_j \right) = \begin{cases} \delta_{\kappa \circ \nu(i),j} \cdot \partial_t^{-n-1} & \text{si } \nu(i) \neq \mu + 1 \\ 0 & \text{si } \nu(i) = \mu + 1 \end{cases} \quad (7.2.3)$$

4. Para cada  $\tilde{s}_i, \tilde{s}_j \in \{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ ,

$$P_S(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \delta_{\kappa(i),j} \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.2.4)$$

*Demostración.* La prueba de cada afirmación, se sigue directamente de la Proposición 7.2.1 y de la Nota 7.2.1 al pasar al cociente  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1}H_0''}$ . □

**Lema 7.2.3.** Consideremos las aplicaciones  $\kappa$  y  $\nu$  de la Proposición 7.2.1. Sean  $\tilde{s}_i, \tilde{s}_j \in \{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  con  $\nu(i) \neq \mu + 1$ . Supongamos que  $l_i, l_j$  son los niveles de  $\tilde{s}_i$  y  $\tilde{s}_j$  respectivamente. Entonces

a) **Condición de ortogonalidad 1.**

$$(-1)^{l_j} c_{n,l} \mathcal{S} \left( N \circ L_{\alpha_i - l_i}^{l_i+1}(B_i), L_{\alpha_j - l_j}^{l_j}(A_j) \right) = \delta_{\kappa \circ \nu(i),j} \quad (7.2.5)$$

donde:

- $B_i = \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1}(s_i)$ ,
- $s(A_j, \alpha_j) = \tilde{s}_j$
- $-l_i - l_j - l - 1 = -n - 1$  con  $l = 1$  o bien  $l = 2$ .

b) **Condición de ortogonalidad 2.**

$$(-1)^{l_j} c_{n,l} \mathcal{S} \left( L_{\alpha_i - l_i}^{l_i}(A_i), L_{\alpha_j - l_j}^{l_j}(A_j) \right) = \delta_{\kappa(i),j} \quad (7.2.6)$$

con:

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

- $s(A_i, \alpha_j) = \tilde{s}_i$
- $s(A_j, \alpha_j) = \tilde{s}_j$
- $-l_i - l_j - l = -n - 1$  con  $l = 1$  o bien  $l = 2$ .

En ambos casos tenemos que

$$c_{n,l} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n & \text{si } l = 1 \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} & \text{si } l = 2. \end{cases}$$

*Demostración.* Sean  $\tilde{s}_i, \tilde{s}_j \in \{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  con  $\nu(i) \neq \mu + 1$ . Supongamos que  $l_i, l_j$  son los niveles de  $\tilde{s}_i$  y  $\tilde{s}_j$  respectivamente. Observamos que de la Nota 7.2.1, existen  $A_i \in H_{\lambda_{\alpha_i}}^n$  y  $A_j \in H_{\lambda_{\alpha_j}}^n$  tales que

$$\tilde{s}_i = \psi_{\alpha_i}(A_i) \text{ y } \tilde{s}_j = \psi_{\alpha_j}(A_j).$$

Demostraremos primeramente la condición de ortogonalidad 1. En efecto, de la Ec. 7.2.3,

$$P_S\left(\tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \tilde{s}_j\right) = \delta_{\kappa \circ \nu(i)j} \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.2.7)$$

Por otra parte, del Corolario 5.2.1,

$$\begin{aligned} P_S\left(\tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \tilde{s}_j\right) &= (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\partial_t^{l_i+1} \tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \partial_t^{l_j} \tilde{s}_j\right) \\ &= (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\partial_t^{l_i+1} \circ \psi_{\alpha_i+1} \circ N \circ \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \partial_t^{l_j} \psi_{\alpha_j}(A_j)\right) \end{aligned}$$

Luego, del Lema 7.1.5

$$\begin{aligned} P_S\left(\tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \tilde{s}_j\right) &= (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\partial_t^{l_i+1} \circ \psi_{\alpha_i+1} \circ N \circ \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, \partial_t^{l_j} \psi_{\alpha_j}(A_j)\right) \\ &= (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}\left(L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1} \circ N \circ \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, L_{\alpha_j-l_j}^{l_j}(A_j)\right) \\ &= (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}\left(N \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1} \circ \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1} \cdot \tilde{s}_i, L_{\alpha_j-l_j}^{l_j}(A_j)\right) \\ &= (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-l-1} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}\left(N \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1}(B_i), L_{\alpha_j-l_j}^{l_j}(A_j)\right) \end{aligned}$$

donde  $B_i = \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1}(s_i)$  y con

$$c_{n,l} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n & \text{si } l = 1 \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} & \text{si } l = 2. \end{cases}$$

Esto prueba la condición de ortogonalidad 1.

Ahora demostraremos la condición de ortogonalidad 2. De la Ec. 7.2.4 tenemos que

$$P_S(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \delta_{\kappa(i)j} \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.2.8)$$



## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Del Corolario 5.2.1,

$$P_{\mathcal{S}}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j} P_{\mathcal{S}}(\partial_t^{l_i} \psi_{\alpha_i}(A_i), \partial_t^{l_j} \psi_{\alpha_j}(A_j))$$

Luego, del Lema 7.1.5

$$P_{\mathcal{S}}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = (-1)^{l_j} \partial_t^{-l_i-l_j-l} \cdot c_{n,l} \cdot \mathcal{S}\left(L_{\alpha_i-l_i}^{l_i}(A_i), L_{\alpha_2-l_j}^{l_j}(A_j)\right),$$

con

$$c_{n,l} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n & \text{si } l = 1 \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} & \text{si } l = 2. \end{cases}$$

Por tanto, la Ec. 7.2.8 implica que

$$(-1)^{l_j} c_{n,l} \mathcal{S}\left(L_{\alpha_i-l_i}^{l_i}(A_i), L_{\alpha_2-l_j}^{l_j}(A_j)\right) = \delta_{\kappa(i),j},$$

$-l_i - l_j - l = -n - 1$  con  $l = 1$  o bien  $l = 2$ . Esto prueba la Ec. 7.2.6. □

**Nota 7.2.2.** *El Lema 7.2.3 nos proporciona condiciones de ortogonalidad en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  respecto al apareamiento  $\mathcal{S}$  inducido por el producto cup.*

### 7.3. La descomposición (primitiva) de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ y las condiciones de ortogonalidad en cohomología

Algunos puntos importantes de la demostración de la Proposición 7.2.1 serán presentados en esta sección, lo cual está basado en la demostración de Hertling [11, pág., 22]. Uno de los puntos clave es comprender como se obtiene la base en la retícula de Brieskorn mediante una base en la fibra canónica de Milnor  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . Posteriormente, veremos que la comprensión de esta base simplifica notablemente las condiciones del Lema 7.2.3. Dividimos este apartado en subsecciones, las cuales ponen en concreto las herramientas para la descripción de la base en cuestión. En este apartado  $N = \log M_u$ .

#### 7.3.1. Descomposición de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$

Consideremos la PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$ . La Definición 4.3.5 permite definir los espacios

$$(I^{p,q})_{\neq 1} = \left(F_{H_0''}^p \cap W_{p+q}^{\neq 1}[-n]\right) \cap \left(\overline{F_{H_0''}^q} \cap W_{p+q}^{\neq 1}[-n] + \sum_{j \geq 1} \overline{F_{H_0''}^{q-j}} \cap W_{p+q-j-1}^{\neq 1}[-n]\right)$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

y

$$(I_0^{p,q})_{\neq 1} = \ker \left( N^{p+q-n+1} : (I^{p,q})_{\neq 1} \longrightarrow (I^{n-q-1, n-p-1})_{\neq 1} \right)$$

Entonces de la Proposición 4.3.2 se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Tenemos las descomposiciones en suma directa:

$$F_{H_0''}^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} = \bigoplus_{(i,q)} (I^{i,q})_{\neq 1} = \bigoplus_{i \geq p} (\bigoplus_q (I^{i,q})_{\neq 1}) \quad (7.3.1)$$

y

$$W_l^{\neq 1}[-n] = \bigoplus_{p+q \leq l} (I^{p,q})_{\neq 1} \quad (7.3.2)$$

2.  $N$  satisface la condición:

$$N((I^{p,q})_{\neq 1}) \subset (I^{p-1, q-1})_{\neq 1} \quad (7.3.3)$$

para cada  $p, q$ .

3.  $S\left((I^{p,q})_{\neq 1}, (I^{r,s})_{\neq 1}\right) = 0$  para  $(r, s) \neq (n-p, n-q)$ .

4.

$$(I^{p,q})_{\neq 1} = \bigoplus_{j \geq 0} N^j (I_0^{p+j, q+j})_{\neq 1}. \quad (7.3.4)$$

5.

$$S\left(N^i (I_0^{p,q})_{\neq 1}, N^j (I_0^{r,s})_{\neq 1}\right) = 0 \text{ para } (r, s, i+j) \neq (q, p, p+q-n). \quad (7.3.5)$$

### 7.3.2. Descomposición de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$

Consideremos la PMHS en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$ . La Definición 4.3.5 permite definir los espacios

$$(I^{p,q})_1 = \left( F_{H_0''}^p \cap W_{p+q}^1[-n-1] \right) \cap \left( \overline{F}_{H_0''}^q \cap W_{p+q}^1[-n-1] + \sum_{j \geq 1} \overline{F}_{H_0''}^{q-j} \cap W_{p+q-j-1}^1[-n-1] \right)$$

y

$$\begin{aligned} (I_0^{p,q})_1 &= \ker \left( N^{p+q-(n+1)+1} : (I^{p,q})_1 \longrightarrow (I^{(n+1)-q-1, (n+1)-p-1})_1 \right) \\ &= \ker \left( N^{p+q-n} : (I^{p,q})_1 \longrightarrow (I^{n-q, n-p})_1 \right) \end{aligned}$$

Nuevamente, la Proposición 4.3.2 implica las siguientes propiedades:

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

1. Tenemos las descomposiciones en suma directa:

$$F_{H_0}^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 = \bigoplus_{(i,q)} (I^{i,q})_1 = \bigoplus_{i \geq p} (\bigoplus_q (I^{i,q})_1) \quad (7.3.6)$$

y

$$W_l^1[-n-1] = \bigoplus_{p+q \leq l} (I^{p,q})_1 \quad (7.3.7)$$

2.  $N$  satisface la condición:

$$N((I^{p,q})_1) \subset (I^{p-1,q-1})_1 \quad (7.3.8)$$

para cada  $p, q$ .

3.  $S\left((I^{p,q})_1, (I^{r,s})_1\right) = 0$  para  $(r, s) \neq (n+1-p, n+1-q)$ .

4.

$$(I^{p,q})_1 = \bigoplus_{j \geq 0} N^j(I_0^{p+j,q+j})_1. \quad (7.3.9)$$

5.

$$S\left(N^i(I_0^{p,q})_1, N^j(I_0^{r,s})_1\right) = 0 \text{ para } (r, s, i+j) \neq (q, p, p+q-n-1). \quad (7.3.10)$$

### 7.3.3. La descomposición inducida en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$

Por una parte, de Ec. 7.3.2, Ec. 7.3.4 y del hecho de que los espacios  $(I_0^{p,q})_{\neq 1}, (I^{p,q})_{\neq 1}$  son invariantes respecto a  $M_s$ , obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} &= W_{2n}^{\neq 1}[-n] H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} \\ &= \bigoplus_{p+q \leq 2n} (I^{p,q})_{\neq 1} \\ &= \bigoplus_{p+q \leq 2n} \bigoplus_{j \geq 0} N^j(I_0^{p+j,q+j})_{\neq 1} \\ &= \bigoplus_{p+q \leq 2n} \bigoplus_{j \geq 0} N^j \bigoplus_{\lambda \neq 1} (I_0^{p+j,q+j})_\lambda \\ &= \bigoplus_{p+q \leq 2n} \bigoplus_{j \geq 0} \bigoplus_{\lambda \neq 1} N^j(I_0^{p+j,q+j})_\lambda \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

donde  $(I_0^{p+j,q+j})_\lambda = H^n(X_\infty, \mathbb{C})_\lambda \cap (I_0^{p+j,q+j})_{\neq 1}$ .

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Por otra parte, Ec. 7.3.7 y Ec. 7.3.9 implican las igualdades:

$$\begin{aligned}
 H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 &= W_{2n+1}^1[-n-1]H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 \\
 &= \bigoplus_{p+q \leq 2n+1} (I^{p,q})_1 \\
 &= \bigoplus_{p+q \leq 2n+1} \bigoplus_{j \geq 0} N^j(I_0^{p+j, q+j})_1
 \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Finalmente de las ecuaciones Ec. 7.3.12, Ec. 7.3.11 obtenemos la descomposición

$$\begin{aligned}
 H^n(X_\infty, \mathbb{C}) &= \left( \bigoplus_{p+q \leq 2n+1} \bigoplus_{j \geq 0} N^j(I_0^{p+j, q+j})_1 \right) \oplus \left( \bigoplus_{p+q \leq 2n} \bigoplus_{j \geq 0} \bigoplus_{\lambda \neq 1} N^j(I_0^{p+j, q+j})_\lambda \right) \\
 &:= \bigoplus_{j, p, q, \lambda} N^j(I_0^{p+j, q+j})_\lambda
 \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

### 7.3.4. El apareamiento $\mathcal{S}$ y la descomposición de Deligne en $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$

**Nota 7.3.1. a)** De la Ec. 7.3.5, tenemos que para  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta \neq 1$ ,

$$\mathcal{S}\left(N^i(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^j(I_0^{r,s})_{\lambda_\beta}\right) = 0 \text{ para } (r, s, i+j) \neq (q, p, p+q-n). \tag{7.3.14}$$

Entonces

1. Si  $(r, s, i+j) \neq (q, p, p+q-n)$  se tiene que los espacios  $N^i(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^j(I_0^{r,s})_{\lambda_\beta}$  son ortogonales respecto al apareamiento  $\mathcal{S}$ .
2. Los espacios  $N^i(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}$  y  $N^j(I_0^{r,s})_{\bar{\lambda}_\alpha}$  son duales, siempre que  $(r, s, i+j) = (q, p, p+q-n)$ .  
Por tanto, como  $\mathcal{S}(N \bullet, \bullet) = -\mathcal{S}(\bullet, N \bullet)$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}\left(N^i(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^j(I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}_\alpha}\right) &= (-1) \mathcal{S}\left(N^{i-1}(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^{j+1}(I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}_\alpha}\right) \\
 &= (-1)^2 \mathcal{S}\left(N^{i-2}(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^{j+2}(I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}_\alpha}\right) \\
 &= (-1)^3 \mathcal{S}\left(N^{i-3}(I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^{j+3}(I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}_\alpha}\right) \\
 &\vdots \\
 &= (-1)^i \mathcal{S}\left((I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^{j+i}(I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}_\alpha}\right) \\
 &= (-1)^i \mathcal{S}\left((I_0^{p,q})_{\lambda_\alpha}, N^{p+q-n}(I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}_\alpha}\right)
 \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

**b)** Análogamente, de la Ec. 7.3.10,

7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

$$\mathcal{S}\left(N^i(I_0^{p,q})_1, N^j(I_0^{r,s})_1\right) = 0 \text{ para } (r, s, i + j) \neq (q, p, p + q - n - 1).$$

Por lo tanto,

1. Si  $(r, s, i + j) \neq (q, p, p + q - n - 1)$  se tiene que los espacios  $N^i(I_0^{p,q})_1$  y  $N^j(I_0^{r,s})_1$  son ortogonales respecto al apareamiento  $\mathcal{S}$ .
2. Los espacios  $N^i(I_0^{p,q})_1$  y  $N^j(I_0^{r,s})_1$  son duales, siempre que  $(r, s, i + j) = (q, p, p + q - n - 1)$ ; además,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\left(N^i(I_0^{p,q})_1, N^j(I_0^{q,p})_1\right) &= (-1) \mathcal{S}\left(N^{i-1}(I_0^{p,q})_1, N^{j+1}(I_0^{q,p})_1\right) \\ &= (-1)^2 \mathcal{S}\left(N^{i-2}(I_0^{p,q})_1, N^{j+2}(I_0^{q,p})_1\right) \\ &= (-1)^3 \mathcal{S}\left(N^{i-3}(I_0^{p,q})_1, N^{j+3}(I_0^{q,p})_1\right) \\ &\vdots \\ &= (-1)^i \mathcal{S}\left((I_0^{p,q})_1, N^{j+i}(I_0^{q,p})_1\right) \\ &= (-1)^i \mathcal{S}\left((I_0^{p,q})_1, N^{p+q-n-1}(I_0^{q,p})_1\right) \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

Ahora bien, de la Proposición 4.4.1 tenemos que el apareamiento

$$\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 \times H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$  es  $(-1)^{n+1}$ -simétrico; como también el apareamiento

$$\mathcal{S} : H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} \times H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1} \longrightarrow \mathbb{C}$$

en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})_{\neq 1}$  es  $(-1)^n$ -simétrico.

**Definición 7.3.1.** La Nota 7.3.1 permite definir:

- El apareamiento

$$\mathcal{S}_{p,q}^1 : (I_0^{p,q})_1 \times (I_0^{q,p})_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

mediante la regla de asignación:

$$\mathcal{S}_{p,q}^1(\bullet, \bullet) := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} (-1)^{p-1} \mathcal{S}\left(\bullet, \left(\frac{-N}{2\pi i}\right)^{p+q-n-1} \bullet\right) \quad (7.3.17)$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

- El apareamiento

$$\mathcal{S}_{p,q}^\lambda : (I_0^{p,q})_\lambda \times (I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

para  $\lambda \neq 1$ , mediante la regla de asignación:

$$\mathcal{S}_{p,q}^\lambda(\bullet, \bullet) := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n (-1)^p \mathcal{S}\left(\bullet, \left(\frac{-N}{2\pi i}\right)^{p+q-n} \bullet\right) \quad (7.3.18)$$

**Lema 7.3.1.** *Los apareamientos  $\mathcal{S}_{p,q}^1$ ,  $\mathcal{S}_{p,q}^\lambda$  dados por Ec. 7.3.17 y Ec. 7.3.18, respectivamente, son apareamientos perfectos. Además, los apareamientos  $\mathcal{S}_{p,q}^{\pm 1}$  son simétricos.*

### 7.3.5. Isomorfismo entre $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ y $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$

Consideremos la descomposición dada por Ec. 7.3.13

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{j,p,q,\lambda} N^j(I_0^{p+j,q+j})_\lambda.$$

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} N^j(I_0^{p+j,q+j})_\lambda &\xrightarrow{\Xi_{j,p,q,\lambda}} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0'' \\ A &\longmapsto \partial_t^{-(n-p)} \circ \psi_\alpha(A) \end{aligned} \quad (7.3.19)$$

donde  $p \leq n$ .

Consideramos la composición

$$N^j(I_0^{p+j,q+j})_\lambda \xrightarrow{\Xi_{j,p,q,\lambda}} Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0'' \xrightarrow{Proy} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha+(n-p)} \partial_t^{-1} H_0''} \quad (7.3.20)$$

$$A \longmapsto \partial_t^{-(n-p)} \circ \psi_\alpha(A) \longmapsto class(\partial_t^{-(n-p)} \circ \psi_\alpha(A))$$

donde *Proy* es la proyección canónica al cociente.

Entonces tenemos una aplicación inducida,

$$\Xi : \bigoplus_{j,p,q,\lambda} N^j(I_0^{p+j,q+j})_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{-1 < \beta < n} Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0'' \longrightarrow \bigoplus_{-1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} \quad (7.3.21)$$

con  $\Xi := \bigoplus_{j,p,q,\lambda} \Xi_{j,p,q,\lambda}$ .

**Lema 7.3.2.** *La aplicación dada por Ec. 7.3.21 es un isomorfismo de  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales.*

**Corolario 7.3.1.** *Tenemos un isomorfismo inducido*

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Xi} \bigoplus_{-1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} \xrightarrow{\simeq} \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \quad (7.3.22)$$

### 7.3.6. Una buena base en la cohomología $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$

Hasta el momento tenemos reunidos los ingredientes necesarios para definir una base en  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  que proporcione las propiedades que se ponderan en la Proposición 7.2.1.

Consideremos la descomposición

$$H^n(X_\infty, \mathbb{C}) := \bigoplus_{j,p,q,\lambda} N^j(I_0^{p+j,q+j})_\lambda \quad (7.3.23)$$

dada por la Ec. 7.3.13.

Dividimos la construcción de esta base en varios pasos como se muestra en seguida.

**Paso 1** Sea  $\lambda \neq 1$ . Supongamos que  $(I_0^{p+j,q+j})_\lambda \neq (I_0^{q+j,p+j})_{\bar{\lambda}}$ . Sean  $\{w_i^\lambda\}_{1 \leq i \leq l_\lambda}$ ,  $\{w_i^{\bar{\lambda}}\}_{1 \leq i \leq l_{\bar{\lambda}}}$  bases para los espacios  $(I_0^{p+j,q+j})_\lambda$  y  $(I_0^{q+j,p+j})_{\bar{\lambda}}$ , respectivamente; debido al Lema 7.3.1, podemos elegir tales bases duales una a la otra, respecto al apareamiento  $\mathcal{S}_{p+j,q+j}^\lambda$ .

**Paso 2** Supongamos que  $p = q$  y  $\lambda \in \{\pm 1\}$ . Entonces tenemos del Lema 7.3.1 los siguientes casos:

**2.1** Podemos elegir, o bien, una base ortonormal para el espacio  $(I_0^{p+j,p+j})_{\pm 1}$  con respecto al apareamiento simétrico  $\mathcal{S}_{p+j,p+j}^{\pm 1}$ , o bien,

**2.2** una base en la cual cada elemento es dual a otro, siempre que  $\dim(I_0^{p+j,q+j})_{\pm 1}$  sea par; o bien, si  $\dim(I_0^{p+j,q+j})_{\pm 1}$  es impar, se puede elegir una base donde cada elemento es dual a otro salvo uno que es auto-dual.

**Paso 3** Usamos las bases obtenidas en **Paso 1** y **Paso 2** a fin de obtener bases respectivas para los subespacios  $(-\frac{N}{2\pi i})^j (I_0^{p+j,q+j})_\lambda \subset (I_0^{p,q})_\lambda$ .

Ahora bien, sean  $\alpha \in (-1, 0]$  y  $k \geq 1$ . De la Ec. 7.1.3, tenemos que

$$\tilde{N}_{\alpha+k+1} = \partial_t^{-k-1} \circ \psi_\alpha \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t^{k+1} \quad (7.3.24)$$

Además, por definición,

$$\tilde{N}_{\alpha+k+1} = (t\partial_t - (\alpha + k + 1))$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

por lo cual,

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{\alpha+k+1} \circ \partial_t^{-1} &= (t\partial_t - (\alpha + k + 1)) \circ \partial_t^{-1} \\ &= (t - (\alpha + k + 1))\partial_t^{-1}\end{aligned}\tag{7.3.25}$$

Luego, de Ec. 7.3.24 y Ec. 7.3.25,

$$\begin{aligned}(t - (\alpha + k + 1))\partial_t^{-1} &= \partial_t^{-k-1} \circ \psi_\alpha \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t^{k+1} \circ \partial_t^{-1} \\ &= \partial_t^{-k-1} \circ \psi_\alpha \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t^k\end{aligned}\tag{7.3.26}$$

Entonces, de Ec. 7.3.26,

$$\begin{aligned}(t - (\alpha + k + 1))\partial_t^{-1} \circ \partial_t^{-k} \circ \psi_\alpha &= \partial_t^{-k-1} \circ \psi_\alpha \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \psi_\alpha^{-1} \circ \partial_t^{k+1} \circ \partial_t^{-1} \\ &= \partial_t^{-k-1} \circ \psi_\alpha \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \\ &= \partial_t^{-k-1} \circ \psi_\alpha \left( -\frac{N}{2\pi i} \right)\end{aligned}\tag{7.3.27}$$

**Lema 7.3.3.** Sean  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in C_\alpha \times C_\beta$  con  $\alpha, \beta > -1$ . Entonces

$$P_S \left( (t - (\alpha + 1))\partial_t^{-1} \mathbf{a}, \mathbf{b} \right) = P_S \left( \mathbf{a}, (t - (\beta + 1))\partial_t^{-1} \mathbf{b} \right)\tag{7.3.28}$$

**Nota 7.3.2.** La Ec. 7.3.27, la definición de  $P_S$ , y la Ec. 7.3.28 implican que con una adecuada reetiquetación, la unión de todas las bases obtenidas en el **Paso 3** forman una  $\mathbb{C}$ -base para  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ , que bajo el isomorfismo  $\Xi$  dado por la Ec. 7.3.21, se mapea a una base que satisface las propiedades de la Proposición 7.2.1.

### 7.3.7. Base inducida en $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1}H_0''}$ y condiciones de ortogonalidad

Sea  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq \mu} \subset H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  la base como en la Nota 7.3.2. Con respecto a la Ec. 7.3.27, se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{s}_i &:= \Xi(w_i) \\ &= \partial_t^{-l_i} \circ \psi_{\alpha_i - l_i}(w_i)\end{aligned}\tag{7.3.29}$$

con  $i = 1, \dots, \mu$ , forman una  $\mathbb{C}$ -base para

$$\bigoplus_{1 < \beta < n} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^\beta H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \partial_t^{-1} H_0''} \simeq \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''},$$



## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

la cual satisface las propiedades de la Proposición 7.2.1, y por tanto, el Corolario 7.2.2.

La propiedad 2 del Corolario 7.2.2, se transforma en la ecuación

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{\nu(i)} &= \tilde{N}_{\alpha_i+1} \circ \partial_t^{-1} \circ \partial_t^{-l_i} \circ \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i) \\ &= \partial_t^{-l_i-1} \circ \psi_{\alpha_i-l_i} \left( \left( \frac{-N}{2\pi i} \right) w_i \right)\end{aligned}\tag{7.3.30}$$

**Nota 7.3.3.** *La relación que existe entre las clases de cohomología  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  de la Nota 7.2.1, y la base  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  se aprecia como sigue. Primeramente, se satisfacen las ecuaciones,*

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha_i}(A_i) &= \tilde{s}_i \quad (\text{por la Nota 7.2.1}) \\ &= \partial_t^{-l_i} \circ \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i) \quad (\text{por Ec. 7.3.29}).\end{aligned}\tag{7.3.31}$$

Entonces,

$$\partial_t^{l_i} \circ \psi_{\alpha_i}(A_i) = \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i).$$

Por otra parte, del Corolario 5.1.1

$$\partial_t^{l_i} \circ \psi_{\alpha_i}(A_i) = \psi_{\alpha_i-l_i} \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i}(A_i),$$

y por tanto,

$$\psi_{\alpha_i-l_i}(w_i) = \psi_{\alpha_i-l_i} \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i}(A_i).\tag{7.3.32}$$

Finalmente, de la Ec. 7.3.32, concluimos que la relación mencionada esta dada por la ecuación

$$w_i = L_{\alpha_i-l_i}^{l_i}(A_i)\tag{7.3.33}$$

**Nota 7.3.4.** *Otra relación que es importante mencionar esta dada por las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\partial_t^{l_i} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i &= \partial_t^{l_i} \circ \partial_t^{-l_i} \circ \psi_{\alpha_i-l_i} \circ \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \circ \psi_{\alpha_i-l_i}^{-1} \circ \partial_t^{l_i} \tilde{s}_i \quad (\text{por Ec. 7.1.3}) \\ &= \psi_{\alpha_i-l_i} \circ \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \circ \psi_{\alpha_i-l_i}^{-1} \circ \partial_t^{l_i} \tilde{s}_i \\ &= \psi_{\alpha_i-l_i} \circ \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \circ \psi_{\alpha_i-l_i}^{-1} \circ \partial_t^{l_i} \circ \partial_t^{-l_i} \circ \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i) \quad (\text{por Ec. 7.3.31}) \\ &= \psi_{\alpha_i-l_i} \circ \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \circ \psi_{\alpha_i-l_i}^{-1} \circ \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i) \\ &= \psi_{\alpha_i-l_i} \circ \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) (w_i)\end{aligned}\tag{7.3.34}$$

Lo anterior nos proporciona un refinamiento de las condiciones de ortogonalidad presentadas en el Lema 7.2.3.

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

**Corolario 7.3.2.** *Supongamos válidas las hipótesis del Lema 7.2.3. Entonces las condiciones de ortogonalidad que obtenemos son:*

**Condición 1:**

$$(-1)^{l_j} c_{n, l_{ij}} \mathcal{S} \left( \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) w_i, w_j \right) = \delta_{\kappa \circ \nu(i), j} \quad (7.335)$$

con  $-l_i - l_j - l_{ij} - 1 = -n - 1$  con  $l_{ij} = 1$  o bien  $l_{ij} = 2$ .

**Condición 2:**

$$(-1)^{l_j} c_{n, l_{ij}} \mathcal{S} \left( w_i, w_j \right) = \delta_{\kappa(i), j} \quad (7.336)$$

con  $-l_i - l_j - l_{ij} = -n - 1$  con  $l_{ij} = 1$  o bien  $l_{ij} = 2$ .

*Demostración.* Comenzaremos por demostrar la **condición 1**. En efecto, de la Ec. 7.2.5 se tiene que

$$B_i = \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1}(\tilde{s}_i).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} B_i &= \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1}(\tilde{s}_i) \\ &= \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-1}(\partial_t^{-l_i} \circ \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i)) \\ &= \psi_{\alpha_i+1}^{-1} \circ \partial_t^{-l_i-1}(\psi_{\alpha_i-l_i}(w_i)) \end{aligned}$$

De lo cual se tiene que

$$\partial_t^{l_i+1} \circ \psi_{\alpha_i+1}(B_i) = \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i) \quad (7.337)$$

Del Corolario 5.1.1

$$\partial_t^{l_i+1} \circ \psi_{\alpha_i+1}(B_i) = \psi_{\alpha_i-l_i} \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1}(B_i)$$

Entonces obtenemos

$$\psi_{\alpha_i-l_i} \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1}(B_i) = \psi_{\alpha_i-l_i}(w_i),$$

es decir,

$$L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1}(B_i) = w_i.$$

por tanto, de Ec. 7.2.5 y Ec. 7.3.33 se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_{\kappa \circ \nu(i), j} &= (-1)^{l_j} c_{n, l} \mathcal{S} \left( \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) \circ L_{\alpha_i-l_i}^{l_i+1}(B_i), L_{\alpha_j-l_j}^{l_j}(A_j) \right) \\ &= (-1)^{l_j} c_{n, l} \mathcal{S} \left( \left( -\frac{N}{2\pi i} \right) w_i, w_j \right) \end{aligned}$$

Esto prueba la **condición 1**.

La **condición 2** se sigue de la Ec. 7.2.6 y de Ec. 7.3.33, esto es,

$$\begin{aligned}\delta_{\kappa(i),j} &= (-1)^{l_j} c_{n,l} \mathcal{S}\left(L_{\alpha_i - l_i}^{l_i}(A_i), L_{\alpha_j - l_j}^{l_j}(A_j)\right) \\ &= (-1)^{l_j} c_{n,l} \mathcal{S}(w_i, w_j)\end{aligned}$$

□

## 7.4. Cálculo de $res_{f,0}(f\bullet, \bullet)$ vía expansiones en la base $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$

En esta sección calcularemos el apareamiento

$$res_{f,0}(f\bullet, \bullet) : \Omega^f \times \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C},$$

usando combinaciones  $\mathbb{C}$ -lineales respecto la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  del Corolario 7.2.3, siguiendo una estrategia análoga a la demostración de la Proposición 7.1.1; esto nos proporcionará una mejoría en las fórmulas obtenidas en el Teorema 7.1.2. Para ahorrar notación, a diferencia de las secciones anteriores, en esta sección definiremos  $N := -\frac{\log M_u}{2\pi i}$ .

De manera evidente se tiene el,

**Lema 7.4.1.** Sean  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ . Supongamos que  $s[\omega]_0 \in \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ . Entonces,

$$s[\omega]_0 = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \tag{7.4.1}$$

respecto a la  $\mathbb{C}$ -base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  para  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ .

El siguiente resultado es un corolario del **Lema principal** dado por la Proposición 7.1.1.

**Corolario 7.4.1.** Sea  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$ . Consideremos la combinación lineal para  $s[\omega]_0$  como en el Lema 7.4.1. Entonces,

$$s[f\omega]_0 \equiv \partial_t^{-1} \tilde{N} \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \right) \quad (\text{mód } \partial_t^{-1} H_0'')$$

*Demostración.* Sea  $s[\omega]_0 = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i$ . De acuerdo con la Nota 7.2.1 existen formas diferenciales  $\omega_i \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  tales que  $s[\tilde{\omega}_i]_0 = \tilde{s}_i \in \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha_i} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha_i} \partial_t^{-1} H_0''}$  para cada  $i = 1, \dots, \mu$ . Por tanto, existen formas  $\eta_i \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^n$  con  $d\eta_i = \tilde{\omega}_i$  y  $\alpha(\omega_i) = \alpha_i$ . Entonces de la Proposición 7.1.1 se tiene que

$$s[f\tilde{\omega}_i]_0 - (\alpha_i + 1)s[df \wedge \eta_i]_0 = \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} s[\tilde{\omega}_i]_0.$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

De lo que se obtiene

$$s[f\tilde{\omega}_i] \equiv \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} s[\tilde{\omega}_i]_0 \quad (\text{mód } \partial_t^{-1} H_0'')$$

Entonces módulo  $\partial_t^{-1} H_0''$ ,

$$\begin{aligned} s[f\omega]_0 &\equiv t \cdot s[\omega]_0 \\ &\equiv t \cdot \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} a_i t \cdot \tilde{s}_i \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} a_i t \cdot s[\tilde{\omega}_i]_0 \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} a_i s[f \cdot \tilde{\omega}_i]_0 \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} a_i \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} s[\tilde{\omega}_i]_0 \\ &\equiv \partial_t^{-1} \tilde{N} \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_i s[\tilde{\omega}_i]_0 \right) \\ &\equiv \partial_t^{-1} \tilde{N} s[\omega]_0 \end{aligned}$$

Lo anterior completa la demostración. □

**Proposición 7.4.1.** Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}$  con combinaciones  $\mathbb{C}$ -lineales

$$s[\omega_1]_0 = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \quad y \quad s[\omega_2]_0 = \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j.$$

Entonces

$$P_S \left( s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]_0 \right) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} a_i b_j \delta_{\kappa(\nu(i)), j} \cdot \partial_t^{-n-1} \quad (7.4.2)$$

*Demostración.* Del Corolario 7.4.1 se tiene que

$$\begin{aligned} s[f\omega]_0 &\equiv \partial_t^{-1} \tilde{N} \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_i \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i \right) \end{aligned}$$

Del Corolario 7.1.2 tenemos que  $\partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} = \tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1}$ . Por tanto,

$$s[f\omega_1]_0 = \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} \tilde{s}_i \right)$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Del Corolario 7.2.1,

$$\begin{aligned} P_S(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]) &= P_S\left(\sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} \tilde{s}_i, \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} a_i b_j P_S\left(\tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} \tilde{s}_i, \tilde{s}_j\right) \end{aligned}$$

Por tanto, Ec. 7.2.3 implica que

$$\begin{aligned} P_S(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]) &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1=-n-1}}^{\mu} a_i b_j \delta_{\kappa(\nu(i)),j} \cdot \partial_t^{-n-1} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1 \neq -n-1}}^{\mu} a_i b_j \cdot 0 \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\mu} a_i b_j \delta_{\kappa(\nu(i)),j} \cdot \partial_t^{-n-1} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1 \neq -n-1}}^{\mu} a_i b_j \cdot 0 \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\mu} a_i b_j \delta_{\kappa(\nu(i)),j} \cdot \partial_t^{-n-1} \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

**Nota 7.4.1.** Al considerar la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ , las cuentas en la Proposición 7.1.1 se simplifican notablemente, como puede apreciarse en la demostración del Corolario 7.4.1. Además, en este refinamiento ya no lidiamos con todos los espacios  $C_\beta$  que contribuyen en la expansión de  $s[\omega]_0$  como elemento de  $\mathcal{V}^{>-1}$ , sino únicamente con los espacios  $C_{\alpha_i}$ , para  $\alpha_i \in sp(f)$  (el espectro de la singularidad aislada  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ).

El siguiente resultado es una versión simplificada del Teorema 7.1.2.

**Teorema 7.4.1.** Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}$ . Consideremos las expansiones

$$s[\omega_1]_0 = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \quad y \quad s[\omega_2]_0 = \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j.$$

Entonces,

$$res_{f,0}\left(f\omega_1, \omega_2\right) = \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \tag{7.4.3}$$

donde:

- $\{w_k\}_{1 \leq k \leq \mu}$  es la base para  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  como en la Nota 7.3.2.

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

- $l_j$  es el nivel de  $\tilde{s}_j$  de acuerdo con la Definición 5.1.4.
- Los  $l_{ij}$  toman únicamente el valor 1 o bien 2, de acuerdo con la Definición 5.2.1.
- Las constantes  $c_{n,l_{ij}}$  son tales que:

$$c_{n,l_{ij}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n & \text{si } l_{ij} = 1 \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1} & \text{si } l_{ij} = 2 \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos expansiones (módulo  $\partial_t^{-1}H_0''$ )

$$s[\omega_1]_0 \equiv \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \quad \text{y} \quad s[\omega_2]_0 \equiv \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j.$$

Del Corolario 7.4.1 y la definición de  $P_S$  se tiene que se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} P_S(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &\equiv P_S\left(\sum_{i=1}^{\mu} a_i \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i, \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j\right) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} a_i b_j P_S\left(\partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i, \tilde{s}_j\right) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\partial_t^{l_i+1} \cdot \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i, \partial_t^{l_j} \tilde{s}_j\right) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\partial_t^{l_i} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i, \partial_t^{l_j} \tilde{s}_j\right) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\partial_t^{l_i} \tilde{N}_{\alpha_i} \tilde{s}_i, \psi_{\alpha_j-l_j}(w_j)\right) \quad (\text{por Ec. 7.3.31}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j \partial_t^{-l_i-l_j-1} P_S\left(\psi_{\alpha_i-l_i} \circ Nw_i, \psi_{\alpha_j-l_j}(w_j)\right) \quad (\text{por Ec. 7.3.34}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j \cdot c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P_S(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1=-n-1}}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1 \neq -n-1}}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} \end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

Entonces,

$$\begin{aligned}
 P_{\mathcal{S}}(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]_0) &= \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-n-1} + \\
 &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1 \neq -n-1}}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} \quad (7.4.4)
 \end{aligned}$$

De Ec. 7.4.2 y Ec. 7.4.4 se tiene que

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ -l_i-l_j-l_{ij}-1 \neq -n-1}}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-l_i-l_j-l_{ij}-1} = 0.$$

Entonces,

$$P_{\mathcal{S}}(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]_0) = \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \cdot \partial_t^{-n-1}.$$

Finalmente, del Teorema 5.4.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{res}_{f,0}(f\omega_1, \omega_2) \cdot \partial_t^{-n-1} &= P_{\mathcal{S}}^{-n-1}(s[f\omega_1]_0, s[\omega_2]_0) \\
 &= \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(N(w_i), w_j) \cdot \partial_t^{-n-1}
 \end{aligned}$$

Aplicando el operador  $\partial_t^{n+1}$ , completamos la demostración. □

**Teorema 7.4.2.** *Consideremos para  $i = 1, \dots, \mu$  formas diferenciales  $\tilde{\omega}_i \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}$  como en la Nota 7.2.1. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones*

i) *Para cada  $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$  se tiene que*

$$\text{res}_{f,0}(f \cdot \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) = (-1)^{l_j} c_{n,l_{ij}} \cdot \mathcal{S}(Nw_i, w_j)$$

con  $l_{ij} = n - l_i - l_j$ , tal que

$$l_{ij} = 1 \quad \text{y} \quad c_{n,l_{ij}} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n,$$

o bien,

$$l_{ij} = 2 \quad \text{y} \quad c_{n,l_{ij}} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n+1}.$$

ii) *Sean  $\kappa : \{1, \dots, \mu\} \rightarrow \{1, \dots, \mu\}$  la involución y  $\nu : \{1, \dots, \mu\} \rightarrow \{1, \dots, \mu, \mu + 1\}$  la aplicación de la Proposición 7.2.1. Entonces para cada  $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$  se satisfacen las ecuaciones:*

$$\begin{aligned}
 \text{res}_{f,0}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) &= \delta_{\kappa(i),j} \\
 \text{res}_{f,0}(f \cdot \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) &= \delta_{\kappa \circ \nu(i),j}
 \end{aligned}$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

iii) Definimos la matriz  $Q := \left( Q_{ij} \right) : \mathbb{C}^\mu \longrightarrow \mathbb{C}^\mu$  con  $Q_{ij} = \text{res}_{f,0} \left( \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j \right)$ . Denótese por  $[N]$  la  $\underline{w}$ -matriz del operador  $N$ . Entonces, la matriz asociada al apareamiento  $\text{res}_{f,0}(f\bullet, \bullet)$  con respecto a la base  $(\tilde{\omega}_i)_{1 \leq i \leq \mu}$  esta dada por el producto de matrices:

$$\left( \text{res}_{f,0}(f\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) \right)_{1 \leq i, j \leq \mu} = [N]^T \cdot Q,$$

donde  $[N]^T$  es la matriz transpuesta de  $[N]$ .

*Demostración.* Esta demostración se obtiene directamente el aplicando el Teorema 7.4.1, el Corolario 7.3.2 y el Proposición C.1.1. □

**Nota 7.4.2.** Las constantes  $c_{n,l_{ij}}$  correspondientes a los sumandos no nulos en el Teorema 7.4.1, son elegidas de acuerdo a lo siguiente:

i) Supongamos que  $\lambda \neq 1$ , y

$$(Nw_i, w_j) \in N^{k_i} (I_0^{p+k_i, q+k_i})_\lambda \times N^{k_j} (I_0^{q+k_i, p+k_i})_{\bar{\lambda}} \subset (I_0^{p,q})_\lambda \times (I_0^{q,p})_{\bar{\lambda}}.$$

Entonces

$$c_{n,l_{ij}} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n,$$

con  $k_j = p + q + k_i - n$ .

ii) Análogamente, si  $\lambda = 1$  y

$$(Nw_i, w_j) \in N^{k_i} (I_0^{p+k_i, q+k_i})_1 \times N^{k_j} (I_0^{q+k_i, p+k_i})_1 \subset (I_0^{p,q})_1 \times (I_0^{q,p})_1.$$

Entonces

$$c_{n,l_{ij}} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{n+1},$$

con  $k_j = p + q + k_i - n - 1$ .

### 7.5. Descripción de la Matriz asociada al apareamiento $\text{res}_{f,0}(f\bullet, \bullet)$

En esta sección detallaremos cómo a partir de la información que proporcionan las aplicaciones  $\nu$  y  $\kappa$  podemos comprender el apareamiento  $\text{res}_{f,0}(f\bullet, \bullet) : \Omega_f \times \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ .



**7.5.1. Matriz asociada al apareamiento**  $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$

De acuerdo con la Proposición 7.2.1, la involución  $\kappa : \{1, \dots, \mu\} \longrightarrow \{1, \dots, \mu\}$  esta definida por

$$k(i) = \begin{cases} \mu + 1 - i & \text{si } \alpha_i \neq \frac{1}{2}(n - 1) \\ \mu + 1 - i \text{ ó } i & \text{si } \alpha_i = \frac{1}{2}(n - 1) \end{cases}$$

Esto nos permite hacer una partición del conjunto  $\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_\mu\} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}^c$ , donde

$$\mathcal{B} := \left\{ \tilde{s}_i \mid \kappa(i) = \mu + 1 - i \right\},$$

$$\mathcal{B}^c := \left\{ \tilde{s}_i \mid \kappa(i) = i \right\}.$$

Tenemos el siguiente reetiquetamineto de la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ :

a) Sin perder generalidad supongamos que el cardinal de  $\mathcal{B}$  es  $2k_0$  con  $k_0 \geq 1$ , cuyos elementos son reetiquetados de la siguiente manera:

1. Sea  $i_1 := \text{mín}\{i \mid \tilde{s}_i \in \mathcal{B}\}$ .
2. Definimos  $i_2 := \mu + 1 - i_1 = \kappa(i_1)$ .
3. Consideremos el conjunto  $\mathcal{B}_{2k_0-2} := \mathcal{B} \setminus \{\tilde{s}_{i_1}, \tilde{s}_{i_2}\}$ .
4. Sea  $i_3 := \text{mín}\{i \mid \tilde{s}_i \in \mathcal{B}_{2k_0-2}\}$ .
5. Definimos  $i_4 := \mu + 1 - i_3 = \kappa(i_3)$ .
6. Consideremos el conjunto  $\mathcal{B}_{2k_0-4} := \mathcal{B} \setminus (\{\tilde{s}_{i_1}, \tilde{s}_{i_2}\} \cup \{\tilde{s}_{i_3}, \tilde{s}_{i_4}\})$ .
7. Sea  $i_5 := \text{mín}\{i \mid \tilde{s}_i \in \mathcal{B}_{2k_0-4}\}$ .
8. Definimos  $i_6 := \mu + 1 - i_5 = \kappa(i_5)$ .
9. De manera inductiva obtenemos un reordenamiento de los elementos de  $\mathcal{B}$  de acuerdo la  $2k_0$ -tupla ordenada  $(i_1, i_2, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_{2k_0-1}, i_{2k_0})$ .

b) Consideremos ahora el complemento  $\mathcal{B}^c$ . Definimos

1.  $i_{2k_0+1} := \text{mín}\{i \mid \tilde{s}_i \in \mathcal{B}^c\}$
2.  $i_{2k_0+2} := \text{mín}\{i \mid \tilde{s}_i \in \mathcal{B}^c \setminus \{\tilde{s}_{i_{2k_0+1}}\}\}$
3.  $i_{2k_0+r} := \text{mín}\{i \mid \tilde{s}_i \in \mathcal{B}^c \setminus \{\tilde{s}_{i_{2k_0+1}}, \dots, \tilde{s}_{i_{2k_0+(r-1)}}\}\}$

c) Finalmente, enumeramos el conjunto  $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}^c$  de acuerdo al orden de la  $\mu$ -tupla:

$$(i_1, i_2, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_{2k_0-1}, i_{2k_0}, i_{2k_0+1}, i_{2k_0+2}, \dots, i_\mu), \quad (7.5.1)$$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

i.e. consideraremos la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  en el orden:

$$\underline{rs} : \tilde{s}_{i_1}, \tilde{s}_{i_2}, \dots, \tilde{s}_{i_l}, \tilde{s}_{i_{l+1}}, \dots, \tilde{s}_{i_{2k_0-1}}, \tilde{s}_{i_{2k_0}}, \tilde{s}_{i_{2k_0+1}}, \tilde{s}_{i_{2k_0+2}}, \dots, \tilde{s}_{i_\mu} \quad (7.5.2)$$

**Nota 7.5.1.** *Tenemos las siguientes observaciones:*

**i)** *Notar que al ser  $\kappa$  una involución, se satisface que  $\kappa(\kappa(i_k)) = i_k$  para cada  $k = 1, \dots, \mu$ . Mas aún, se tiene que:*

$$k(i_k) = \begin{cases} i_{k+1} & \text{si } k \in \{1, 3, 5, \dots, 2k_0 - 1\} \\ i_{k-1} & \text{si } k \in \{2, 4, 6, \dots, 2k_0\} \\ i_k & \text{si } k \in \{2k_0, 2k_0 + 1, 2k_0 + 2, \dots, \mu - 1, \mu\} \end{cases}$$

**iii)** *Ahora bien, en el Corolario 7.4.2 obtuvimos que para cada  $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$ ,  $res_{f,0}(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j) = \delta_{\kappa(i)j}$ .*

*Entonces en la nueva reetiquetación dada por Ec. 7.5.2 Para cada  $k, l = 1, \dots, \mu$ . Así,*

$$res_{f,0}(\tilde{\omega}_{i_k}, \tilde{\omega}_{i_l}) = \delta_{\kappa(i_k)i_l} = \begin{cases} \delta_{i_{k+1}i_l} & \text{si } k \in \{1, 3, 5, \dots, 2k_0 - 1\} \\ \delta_{i_{k-1}i_l} & \text{si } k \in \{2, 4, 6, \dots, 2k_0\} \\ \delta_{i_k i_l} & \text{si } k \in \{2k_0, 2k_0 + 1, 2k_0 + 2, \dots, \mu - 1, \mu\} \end{cases}$$

De acuerdo con la Nota 7.5.1, obtenemos una representación matricial para la forma bilineal  $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$

## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

con respecto a la base(ordenada) dada por Ec. 7.5.2; dicha matriz es diagonal a bloques de la forma

$$\tilde{Q} := \left[ \text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet) \right] = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\omega}_{i_1}, \tilde{\omega}_{i_2} \rangle & \langle \tilde{\omega}_{i_3}, \tilde{\omega}_{i_4} \rangle & \cdots & \langle \tilde{\omega}_{i_{2k_0-1}}, \tilde{\omega}_{i_{2k_0}} \rangle & & \langle \tilde{\omega}_{i_{2k_0+1}}, \dots, \tilde{\omega}_{i_\mu} \rangle \\ \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & & & & & \\ & \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & & \\ & & & & & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

### 7.5.2. Matriz asociada al operador mutiplicación por $t$

Como  $t = (\alpha + 1)\partial_t^{-1} + \tilde{N}_\alpha \partial_t^{-1}$  en cada espacio  $C_\alpha$  y  $s[f\tilde{\omega}_i] = t \cdot \tilde{s}_i$ , se tiene que, módulo  $\partial_t^{-1}H_0''$ :

$$\begin{aligned} s[f\tilde{\omega}_i] &\equiv \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} s[\tilde{\omega}_i] \\ &\equiv \tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} s[\tilde{\omega}_i] \\ &\equiv \tilde{s}_{\nu(i)}. \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{s}_{\nu(i)} = t\tilde{s}_i \in \frac{Gr_Y^{\alpha_i+1} H_0''}{Gr_Y^{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} H_0''}. \tag{7.5.4}$$

**7.5.2.1. Cadenas inducidas por la aplicación  $\nu$**

Como el operador  $t$  es nilpotente se tiene que la aplicación  $\nu$  no es cíclica. Mas aún, para cada  $i = 1, \dots, \mu$  podemos construir una cadena  $C(i) := \{i, \nu(i), \nu^2(i), \dots, \nu^{r_i}(i)\}$ , cuya acción de  $t$  esta dada por el diagrama:

$$\tilde{s}_i \xrightarrow{t} \tilde{s}_{\nu(i)} \xrightarrow{t} \tilde{s}_{\nu^2(i)} \xrightarrow{t} \tilde{s}_{\nu^3(i)} \cdots \xrightarrow{t} \tilde{s}_{\nu^{r_i-1}(i)} \xrightarrow{t} \tilde{s}_{\nu^{r_i}(i)}$$

lo cual es reflejo de cómo se usa la Ec. 7.5.4. Podemos explicar esto en el siguiente **Algoritmo**:

**Paso 0.** Elegimos  $\tilde{s}_i \in \frac{Gr_{\mathcal{Y}}^{\alpha_i} H_0''}{Gr_{\mathcal{Y}}^{\alpha_i} \partial_t^{-1} H_0''}$ .

**Paso 1.** Aplicamos el operador  $t$ :

**1.1)** Si  $\alpha_i + 1$  **NO** es un número espectral, por definición, se tiene que  $\nu(i) = \mu + 1$ , es decir,  $\tilde{s}_{\nu(i)} = 0$ . Entonces se define  $r_i := 0$ . Y la cadena asociada a  $i$  se define como el conjunto unitario  $C(i) := \{i\}$ , y el proceso termina.

**1.2)** Si  $\alpha_i + 1$  es un número espectral, entonces  $\nu(i) = i_k$  para algún  $i_k \in \{i + 1, \dots, \mu\}$ . Por tanto,  $\alpha_i + 1 = \alpha_{i_k}$  y  $\tilde{s}_{\nu(i)} \neq 0$ . Pasar a el **Paso 3**.

**Paso 3.** Aplicamos  $t$  a  $\tilde{s}_{\nu(i)}$ :

**3.1)** Si  $\alpha_{i_k} + 1$  no es un número espectral, entonces  $\nu^2(i) = \nu(i_k) = \mu + 1$ . Entonces,  $\tilde{s}_{\nu^2(i)} = 0$ . En este caso definimos  $r_i := 1$ . Asi la cadena de  $i$  será  $C(i) := \{i, \nu(i)\} = \{i, i_k\}$ , y el proceso termina.

**3.2)** Si  $\alpha_{i_k} + 1$  es un número espectral, entonces  $\nu(i_k) = i_l$  para algún  $i_l \in \{i + 2, \dots, \mu\}$ . Por tanto,  $\alpha_{i_k} + 1 = \alpha_{i_l}$  y  $\tilde{s}_{\nu^2(i)} = \tilde{s}_{\nu(i_k)} \neq 0$ . Aplicar el **Paso 0**. al vector  $\tilde{s}_{\nu(i)}$ .

**Nota 7.5.2.** Observamos que el hecho de que  $t^{n+1} \equiv 0$  en  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ , implica que el proceso anterior termina, y para cada cadena  $C(i)$  se tiene que  $r_i \leq n$ .

**7.5.2.2. Matriz para el operador  $t$  con respecto a las cadenas  $C(i)$**

Sea  $\tilde{s}_i \in \frac{Gr_{\mathcal{Y}}^{\alpha_i} H_0''}{Gr_{\mathcal{Y}}^{\alpha_i} \partial_t^{-1} H_0''}$  tal que su cadena asociada  $C(i)$  no es un conjunto unitario.

Consideremos el conjunto

$$CAD_i := \{\tilde{s}_i, \tilde{s}_{\nu(i)}, \dots, \tilde{s}_{\nu^{r_i}(i)}\}$$

La matriz asociada al operador de multiplicación por  $t$ , restringida los conjuntos  $CAD_i$  esta dada



## 7. Dualidad de Grothendieck vs producto cup

**Lema 7.5.1.** *Con respecto a la base  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ , existe un isomorfismo que hace el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^\mu & \xrightarrow{A_0} & \mathbb{C}^\mu \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} & \xrightarrow{t} & \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}
 \end{array} .$$

Además, con respecto a este isomorfismo, la matriz  $A_0$  se identifica con  $N = -\frac{\log M_u}{2\pi i}$ , la parte nilpotente de la monodromía.

*Demostración.* Este resultado es un corolario directo de Proposición 7.2.2. □

El Lema 7.5.1 implica el

**Corolario 7.5.2.** *La matriz asociada al apareamiento  $\text{res}(f\bullet, \bullet)$  **sin considerar** la reetiquetación 7.5.2 se obtiene de la multiplicación de matrices*

$$\left[ \text{res}(f\omega_i, \omega_j) \right] := A_0^T \cdot Q,$$

donde  $A_0^T$  denota la matriz transpuesta de  $A_0$ , y  $Q$  es como en el Teorema 7.4.2.

# Cohomología de De Rham relativa

## A.1. Hipercohomología

En esta sección usaremos [30] y [14].

### A.1.1. Functor imagen directa

**Definición A.1.1.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua de espacios topológicos  $X, Y$ . Sea también  $\mathcal{F}$  una gavilla de grupos abelianos sobre  $X$ . Consideramos la gavilla que a cada abierto  $V \subset Y$  le hace la asignación:

$$V \subset Y \rightsquigarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)),$$

la cual denotamos por  $f_*\mathcal{F}$ .

Se tiene que  $f_*$  es un funtor  $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$  exacto por la izquierda. A  $f_*$  se le llama **functor imagen directa** y va de la categoría de gavillas de grupos abelianos sobre  $X$  a la categoría de grupos abelianos sobre  $Y$ . Asimismo, denotamos por  $R^p f_*$  los funtores derivados del funtor  $f_*$ .

**Lema A.1.1.** Los funtores  $R^p f_*$  pueden ser calculados como la gavilla asociada a la pre-gavilla

$$V \mapsto H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F})$$

*Demostración.* Esto es debido a los resultados siguientes:

- i) La restricción de una gavilla inyectiva a un conjunto abierto es también inyectiva
- ii) La operación de asociar una gavilla a una pre-gavilla es un funtor exacto.

□

**Nota A.1.1.** En forma análoga se pueden establecer las ideas anteriores para un morfismo de espacios anillados  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ . En este caso se tiene que si  $\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo, entonces las gavillas  $R^p f_* \mathcal{F}$  pueden ser calculadas como funtores derivados de  $f_*$  en la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, consiguiendo de este modo, que los  $R^p f_* \mathcal{F}$  tengan estructura de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos.

## A.1.2. Imagen inversa topológica

**Definición A.1.2.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua de espacios topológicos  $X, Y$ . Para una gavilla abeliana  $G$  en  $Y$ , denotaremos como  $f^{-1}G$  a la gavilla en  $X$ , que actúa de la siguiente manera:

Para cada abierto  $U \subset X$ ,

$$f^{-1}G(U) := \lim_{V \supseteq f(U)} G(V).$$

La gavilla  $f^{-1}G$  se llama **imagen inversa topológica** de  $G$ .

**Nota A.1.2.** Si  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  es un morfismo de espacios localmente anillados, entonces definimos la **imagen inversa**  $f^*$  como

$$f^*G := f^{-1}G \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

## A.1.3. Hipercohomología e Hiperimagen directa

### A.1.3.1. Resolución inyectiva

**Definición A.1.3.** Sea  $\mathcal{F}^\bullet$  un complejo de gavillas de  $\mathcal{O}$ -módulos sobre un espacio topológico  $X$ , donde  $\mathcal{O}$  es una gavilla sobre  $X$  de anillos conmutativos. Suponer además que  $\mathcal{F}^\bullet$  está acotado inferiormente, es decir, se tienen los datos siguientes:

i) Una familia de gavillas  $\mathcal{F}^i, i \in \mathbb{Z}$  con  $\mathcal{F}^i = 0 \forall i < 0$ .

ii) Una familia de morfismos  $\mathcal{F}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{F}^{i+1}$  tales que  $d^{i+1}d^i = 0$  para cada  $i$ .

Definimos la  $i$ -ésima cohomología del complejo  $\mathcal{F}^\bullet$  como la gavilla,  $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$ , asociada a la pregavilla

$$U \mapsto \frac{\ker(\Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet))}{\text{im}(\Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet))}$$

con respecto a la topología dada para  $X$ , donde  $\Gamma$  es el functor de secciones.



**Definición A.1.4.** Sea  $\varrho : \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$  un mapeo de  $\mathcal{O}$ -módulos entre complejos que están acotados inferiormente. Consideremos el mapeo inducido en cohomología:

$$\mathcal{H}^i(\varrho) : \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet).$$

Si  $\mathcal{H}^i(\varrho)$  es un isomorfismo para cada  $i$ , entonces diremos que  $\varrho$  es un casi-isomorfismo.

**Definición A.1.5.** Sea  $\mathcal{F}$  una gavilla de  $\mathcal{O}$ -módulos. Diremos que  $\mathcal{F}$  es una gavilla inyectiva si para cada mapeo

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

de gavillas de  $\mathcal{O}$ -módulos, se tiene que el mapeo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$$

es sobreyectivo.

**Definición A.1.6** (Resolución inyectiva). Supongamos que  $\mathcal{F}^\bullet$  es un complejo como en la definición A.1.3. Diremos que un mapeo  $\varrho : \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  entre complejos es una resolución inyectiva de  $\mathcal{F}^\bullet$  si se cumplen las siguientes propiedades:

- i) El complejo  $\mathcal{I}^\bullet$  es un complejo de  $\mathcal{O}$ -módulos acotado inferiormente.
- ii) El mapeo  $\varrho$  es un casi-isomorfismo.
- iii) Las gavillas  $\mathcal{I}^i$  son inyectivas para cada  $i$ .

**Proposición A.1.1.** Supongamos que  $\mathcal{O}$  es una gavilla localmente constante sobre en el espacio topológico  $X$  (ejm.  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ ). Entonces cada complejo de  $\mathcal{O}$ -módulos que es acotado inferiormente posee una resolución inyectiva.

#### A.1.4. Hipercohomología

En el contexto anterior, sea  $\mathcal{O}$  una gavilla constante en  $X$ . Sea  $\mathcal{F}^\bullet$  un complejo de  $\mathcal{O}$ -módulos acotado inferiormente. Luego, de la proposición A.1.1 tenemos que  $\mathcal{F}^\bullet$  posee una resolución inyectiva

$$\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\varrho} \mathcal{I}^\bullet,$$

lo cual nos permite definir el  $\mathcal{O}$ -módulo

$$\mathbb{H}^p(X, \mathcal{F}^\bullet) := \frac{\ker(\Gamma(X, \mathcal{I}^p) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^{p+1}))}{\mathrm{im}(\Gamma(X, \mathcal{I}^{p-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^p))}$$

Tenemos de este modo la

**Definición A.1.7.** La  $p$ -ésima **Hipercohomología** del complejo  $\mathcal{F}^\bullet$  esta definida como

$$\mathbb{H}^p(X, \mathcal{F}^\bullet) := \mathcal{H}^p(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)).$$

Finalmente, en base a lo anterior se puede generalizar el concepto de imagen directa dado en la definición (A.1.1).

**Definición A.1.8.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre espacios topológicos  $X, Y$ . Supóngase también que  $\mathcal{F}^\bullet$  es un complejo de gavillas sobre  $X$  acotado inferiormente. Denotaremos por

$$\mathbb{R}^p f_*,$$

a los funtores derivados de  $f_*$  respecto a Hipercohomología.

**Definición A.1.9.** Las gavillas  $\mathbb{R}^p f_*(\mathcal{F}^\bullet)$  son llamadas gavillas de **Hiperimagen directa**.

**Lema A.1.2.** Para cada  $p$ , la gavilla  $\mathbb{R}^p f_*(\mathcal{F}^\bullet)$  es calculada como la gavilla asociada a la pre-gavilla

$$V \subset Y \rightarrow \mathbb{H}^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}^\bullet)$$

## A.2. Cohomología de De Rham relativa

Esta sección posee las ideas de Brieskorn en [37] (ver también [13]).

**Definición A.2.1.** Sea  $f : X \rightarrow S$  un morfismo entre variedades complejas. La gavilla de  $p$ -formas diferenciales relativas sera dada por

$$\begin{aligned} \Omega_f^p &:= \Omega_{X/S}^p \\ &:= \frac{\Omega_X^p}{f^* \Omega_S^1 \wedge \Omega_X^{p-1}} \end{aligned}$$

Consideramos ahora el complejo de De Rham

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_X^{n+1} \rightarrow 0$$

donde la diferencial  $d$  esta dada por la diferencial usual de  $p$ -formas. Entonces se consigue el complejo inducido

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_f^1 \xrightarrow{d} \Omega_f^2 \xrightarrow{d} \dots \tag{A.2.1}$$

Tenemos así la

## A. Cohomología de De Rham relativa

**Definición A.2.2.** El complejo dado por A.2.1 será llamado complejo de De Rham relativo.

Por otra parte, aplicando el funtor imagen directa  $f_*$ , se obtiene el complejo  $f_*(\Omega_f^\bullet)$ .

**Definición A.2.3.** La Cohomología de De Rham relativa sera dada por la Hipercohomología ( con respecto al funtor imagen directa  $f_*$ )

$$\mathcal{H}_{DR}^p(X/S) := \mathbb{R}^p f_*(\Omega_f^\bullet)$$

### A.2.1. Cohomología de De Rham relativa para Morfismos Stein

**Lema A.2.1. (Lema de Poincaré relativo)** Sea  $f : X \rightarrow S$  un morfismo liso. Entonces la sucesión

$$0 \rightarrow f^{-1}\mathcal{O}_S \rightarrow \Omega_f^1 \xrightarrow{d} \Omega_f^2 \xrightarrow{d} \Omega_f^3 \xrightarrow{d} \dots$$

es exacta.

**Proposición A.2.1.** Supongamos que  $f : X \rightarrow S$  es un morfismo liso. Entonces

$$\mathcal{H}_{DR}^p(X/S) \simeq R^p f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{O}_S$$

*Demostración.* Por el lema de Poincaré relativo tenemos que el complejo  $\Omega_f^\bullet$  es una resolución de la gavilla  $f^{-1}\mathcal{O}_S$ . Por tanto,

$$\mathbb{R}^p f_*(\Omega_f^\bullet) = R^p f_*(f^{-1}\mathcal{O}_S).$$

Por otra parte, consideremos el homomorfismo canónico

$$h : R^p f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{O}_S \rightarrow R^p f_*(f^{-1}\mathcal{O}_S) \tag{A.2.2}$$

inducido por

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots$$

Observamos que  $h$  es un isomorfismo y por tanto,

$$R^p f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{O}_S \simeq R^p f_*(f^{-1}\mathcal{O}_S),$$

es decir,

$$\mathbb{R}^p f_*(\Omega_f^\bullet) \simeq R^p f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{O}_S.$$

Ahora bien, por definición  $\mathcal{H}_{DR}^p(X/S) = \mathbb{R}^p f_*(\Omega_f^\bullet)$ , por tanto,  $\mathcal{H}_{DR}^p(X/S) \simeq R^p f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{O}_S$ . Lo que completa la demostración.  $\square$

## A. Cohomología de De Rham relativa

De la proposición anterior se tiene el

**Corolario A.2.1.** *Supongamos que  $f : X \rightarrow S$  es la fibración de milnor de una singularidad  $f : (\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . Consideremos el mapeo  $f' : X' \rightarrow S'$ , el cual es morfismo suave. Asimismo, consideremos las gavillas*

$$\mathcal{H}_{DR}^p(X/S)$$

y

$$\mathcal{H} = R^p f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$$

definidas en  $S$  y  $S'$  respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{DR}^p(X/S)|_S &= \mathcal{H}_{DR}^p(X'/S') \\ &\simeq R^p f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'} \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}_{DR}^p(X'/S')$  es la cohomología relativa respecto a  $f' : X' \rightarrow S'$ .

El concepto de cohomología de De Rham relativa dado por la Definición A.2.3 puede ser redefinido mediante el siguiente resultado:

**Teorema A.2.1.** *Supongamos que  $f : X \rightarrow S$  es la fibración de milnor de una singularidad  $f : (\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . Entonces*

$$\mathcal{H}^p(X/S) \simeq \mathcal{H}^p(f_* \Omega_f^\bullet) \tag{A.2.3}$$

*Demostración.* Ver [13]. □

### A.3. Lema de division de De Rham

Sean  $X$  una variedad compleja de dimension  $n + 1$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $X$ .

Consideramos el complejo de gavillas  $(\Omega_X, df)$  dado por:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{df \wedge} \Omega_X^1 \xrightarrow{df \wedge} \Omega_X^2 \xrightarrow{df \wedge} \dots \xrightarrow{df \wedge} \Omega_X^{n+1} \rightarrow 0$$

donde la diferencial esta dada por la multiplicación exterior  $df \wedge \cdot$ . Denotamos la cohomología de este complejo como:

$$H^p(f) = \frac{\ker(\Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^{p+1})}{\text{im}(\Omega_X^{p-1} \rightarrow \Omega_X^p)}$$

## A. Cohomología de De Rham relativa

Para cada  $x \in X$  tenemos el complejo inducido de fibras:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \Omega_{X,x}^1 \rightarrow \Omega_{X,x}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X,x}^{n+1} \rightarrow 0,$$

el cual es un complejo de tipo Koszul, es decir, tiene la forma

$$K^\cdot(g) : 0 \rightarrow A \rightarrow A^m \rightarrow \bigwedge^2 A^m \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^p A^m \xrightarrow{g^\wedge} \bigwedge^{p+1} A^m \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^m A^m \rightarrow$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{O}_{X,x} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^m &= \Omega_{X,x}^1 \\ &= \bigoplus_{i=0}^n \Omega_{X,x}^1 dx_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_m) \\ &= df \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \end{aligned}$$

En este contexto enunciamos el

**Teorema A.3.1** (Lema de División de De Ram). *Si  $g_1, \dots, g_m$  es una sucesión regular en el anillo conmutativo  $A$ , entonces las cohomologías del complejo de Koszul  $K^\cdot(g)$  son:*

$$H^p(K^\cdot(g)) = \begin{cases} 0 & p < m \\ \frac{A}{(g_1, \dots, g_m)A} & p = m \end{cases}$$

La información relevante de este resultado la codificamos en la

**Nota A.3.1.** *Si  $\omega \in \bigwedge^p A^m$  y  $p < m$  entonces*

$$g \wedge \omega = 0 \text{ si y solo si } \omega = g \wedge \eta \text{ para algún } \eta \in \bigwedge^{p-1} A^m. \quad (\text{A.3.1})$$

### A.3.1. Lema de De Rham para una Singularidad Aislada de Hipersuperficie

Consideremos la notación anterior, solo que ahora vamos a suponer que  $X \xrightarrow{f} S$  es la fibración de Milnor de una singularidad  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}, 0)$ .

Asimismo, dado  $h$  en  $A$ ,  $I = (h)$  denotará el ideal en  $A$  generado por  $h$ , y  $V(h)$  la variedad asociada al ideal  $I$ .

**Proposición A.3.1.** *Las derivadas parciales  $f_0 = \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, f_n = \frac{\partial f}{\partial z_n}$  forman una sucesión regular en el anillo  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$ , donde  $(z_0, \dots, z_n)$  es un sistema de coordenadas complejas centrado en 0.*

Finalmente, del Teorema A.3.1 obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema A.3.2.** *En las condiciones anteriores tenemos que:*

1. *Para cada  $p \leq n$  se cumple  $H^p(f) = 0$ , equivalentemente, si  $\omega$  es una sección de  $\Omega_X^p$  y  $p \leq n$ , entonces*

$$df \wedge \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = df \wedge \xi$$

*para alguna sección  $\xi$  de  $\Omega_X^{p-1}$ .*

2. *La gavilla  $H^{n+1}(f)$  esta concentrada en el punto  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ .*

**Definición A.3.1.** *EL espacio*

$$\begin{aligned} \Omega^f &:= H^{n+1}(f) \\ &= \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^n} \\ &\simeq \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}}{(f_0, \dots, f_n)} \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

*con  $f_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$ , respecto a un sistema de coordenadas complejas  $(z_0, \dots, z_n)$  de  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ , será llamado el álgebra de Milnor o el álgebra Jacobiana.*

# Operadores micro-diferenciales

## B.1. Operadores micro-diferenciales

Siguiendo [26], sea  $D$  un operador diferencial invertible.

**Definición B.1.1.** *Un germen de un operador micro-diferencial en el origen  $0 \in \mathbb{C}$  es una serie formal*

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k D^k,$$

tal que se satisface lo siguiente:

1. Los coeficientes son series convergentes:  $a_k \in \mathbb{C}\{t\}$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$ .
2. Los coeficientes  $a_k \in \mathbb{C}\{t\}$  poseen disco de convergencia común.
3.  $P$  es de orden finito, es decir, existe un entero  $m$  tal que  $a_k = 0$  para cada  $k > m$ .
4.  $P$  converge en el siguiente sentido:

Existen  $\rho, \theta \geq 0$  tales que<sup>1</sup>

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{-j}| \rho^{\frac{\theta^j}{j!}} < \infty$$

donde  $||_{\rho} = \sup\{|t| : |t| \leq \rho\}$ .

**Definición B.1.2.** *Denotaremos por  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$  al espacio de gérmenes de operadores micro-diferenciales.*

---

<sup>1</sup>De hecho  $\rho = \inf\{\rho_k : \rho_k \text{ radio de convergencia de } a_k\}$

## B.2. La estructura de Anillo en $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$

Para conocer la manera de multiplicar elementos en  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$  basta definir una multiplicación

$$\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$$

$$(D^{-1}, b) \longrightarrow D^{-1} \circ b,$$

para lo cual procedemos como sigue

1. Imponemos la condición de que  $D^{-1} \circ b$  tenga grado  $\leq -1$ .
2. Establecemos la ecuación

$$D^{-1} \circ b = \sum_{j \geq 0} (-1)^j b^{(j)} D^{-j-1} \quad (\text{B.2.1})$$

con coeficientes  $b^{(j)}$  a determinar.

**Proposición B.2.1.** (F. Pham [26, Pág., 119]) *La ecuación B.2.1 tiene coeficientes  $b^{(j)}$  dados de la siguiente manera*

$$b^{(j)} = \begin{cases} b & , j = 0 \\ \frac{\partial b^{(j-1)}}{\partial t} & , j > 0 \end{cases} \quad (\text{B.2.2})$$

**Corolario B.2.1.** *La convergencia de la serie formal  $D^{-1} \circ b = \sum_{j \geq 0} (-1)^j b^{(j)} D^{-j-1}$  es equivalente a la convergencia de la serie de Taylor para  $b \in \mathbb{C}\{t\}$ .*

*Demostración.* Este resultado se sigue directamente usando la recurrencia (B.2.2). En efecto,

$$\begin{aligned} b^{(0)} = b & \Rightarrow b^{(1)} = \frac{\partial b}{\partial t} \\ & \Rightarrow b^{(2)} = \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \\ & \Rightarrow b^{(3)} = \frac{\partial^3 b}{\partial t^3} \\ & \vdots \\ & \Rightarrow b^{(j)} = \frac{\partial^j b}{\partial t^j} \end{aligned}$$

□

## B.3. Operadores micro-diferenciales con coeficientes constantes

Sea  $\mathbb{C}[[D^{-1}]]$  el conjunto de operadores micro-diferenciales con coeficientes constantes.



B. Operadores micro-diferenciales

Sea  $R := \mathbb{C}\{\{D^{-1}\}\} \subset \mathbb{C}[[D^{-1}]]$  el conjunto de operadores micro-diferenciales de orden  $\leq 0$ . La manera fácil de entender el conjunto  $R$  se tiene del,

**Lema B.3.1.** *El conjunto  $R$  tiene estructura de anillo con respecto a la multiplicación de series formales en indeterminada  $D^{-1}$ . Mas aún,*

$$\mathbb{C}\{\{D^{-1}\}\} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j D^{-j} \mid \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \in \mathbb{C}\{t\} \right\}$$

*Demostración.* Es suficiente observar que de la Proposición B.2.1 se tiene que si  $a \in \mathbb{C}$ , entonces  $D^{-1} \circ a = aD^{-1}$ . Entonces para cada  $P \in R$ ,

$$D^{-1} \circ P = \sum_{j \geq 0} a_j D^{-j-1}.$$

□

## Formas bilineales

En este apartado presentamos una propiedad elemental de formas bilineales definidas en un espacio vectorial de dimensión finita. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $k$  sobre un campo  $\mathbb{F}$ . Sea  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  una forma bilineal, y  $L : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Considérese una  $\mathbb{F}$ -base  $\underline{b} : b_1, b_2, \dots, b_k$  de  $V$ . Para un vector coordenadas  $[v] \in Mat_{k \times 1}(\mathbb{F})$ , denotaremos por  $[v]^T$  su vector transpuesto en  $Mat_{1 \times k}(\mathbb{F})$ , y viceversa.

**Lema C.0.1.** Sean  $[B], [L] \in Mat_{k \times k}(\mathbb{F})$  las  $\underline{b}$ -representaciones matriciales de  $B$  y  $L$ , respectivamente. Entonces la forma bilineal

$$V \times V \xrightarrow{\hat{B}} \mathbb{F}$$

$$(u, v) \longmapsto B(Lu, v)$$

tiene como  $\underline{b}$ -representación matricial el producto de matrices

$$[\hat{B}] = [L]^T \cdot [B],$$

donde  $[L]^T$  es la matriz transpuesta de  $[L]$ .

*Demostración.* Sean  $u, v \in V$ . Consideremos combinaciones lineales

$$u = \sum_{i=1}^k u_i b_i, \quad v = \sum_{j=1}^k v_j b_j \in V,$$

con coordenadas  $[u] = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{pmatrix}^T$  y  $[v] = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}^T$ . Asimismo, para  $1 \leq i \leq k$ , se tiene una combinación lineal  $Lb_i = \sum_{l=1}^k c_{li} b_l$ , con coordenadas  $[Lb_i] = \begin{pmatrix} c_{1i} & c_{2i} & c_{3i} & \cdots & c_{ki} \end{pmatrix}^T$ .

C. Formas bilineales

Entonces,  $[L] = \left( c_{li} \right)_{1 \leq l, i \leq k}$  y por tanto,

$$\begin{aligned}
 \widehat{B}(u, v) &= B(Lu, v) \\
 &= B\left(L \sum_{i=1}^k u_i b_i, \sum_{j=1}^k v_j b_j\right) \\
 &= B\left(\sum_{i=1}^k u_i L b_i, \sum_{j=1}^k v_j b_j\right) \quad (\text{L es lineal}) \\
 &= B\left(\sum_{i=1}^k u_i \sum_{l=1}^k c_{li} b_l, \sum_{j=1}^k v_j b_j\right) \\
 &= B\left(\sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k c_{li} u_i b_l, \sum_{j=1}^k v_j b_j\right) \\
 &= B\left(\sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^k c_{li} u_i\right) b_l, \sum_{j=1}^k v_j b_j\right) \\
 &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\left(\sum_{i=1}^k c_{li} u_i\right) \cdot B(b_l, b_j) \cdot v_j\right) \quad (\text{B es bilineal}) \\
 &= \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}^T \cdot [B] \cdot [v] \tag{C.0.1}
 \end{aligned}$$

En la Ec. C.0.1 se tiene que  $[w]^T = \left( w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_k \right)$  con  $w_l := \sum_{i=1}^k c_{li} u_i$ ,  $1 \leq l \leq k$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 [w] &= \left( \sum_{i=1}^k c_{1i} u_i \quad \sum_{i=1}^k c_{2i} u_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^k c_{li} u_i \right)^T \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{k1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \\
 &= [L] \cdot [u].
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $[w]^T = [u]^T \cdot [L]^T$ . La demostración sigue de Ec. C.0.1, pues

$$\begin{aligned}
 \widehat{B}(u, v) &= \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}^T \cdot [B] \cdot [v] \\
 &= [u]^T \cdot [L]^T \cdot [B] \cdot [v]
 \end{aligned}$$

□

### C.1. La forma bilineal inducida por $N$

En este apartado se establecerá un resultado para poder probar completamente la parte *iii*) del Teorema 7.4.2. Supondremos validos todos los resultados e hipótesis pertinentes como se verá en breve. Sea  $f : (C, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una singularidad aislada de hipersuperficie. Sea también,  $N = -\frac{\log M_u}{2\pi i}$ .

Sean  $u, v \in H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ . Entonces, con respecto a la  $\mathbb{C}$ -base de la Nota 7.3.2, se tienen combinaciones lineales

$$u = \sum_{i=1}^{\mu} a_i w_i \quad y \quad v = \sum_{j=1}^{\mu} b_j w_j.$$

Por tanto, usando el isomorfismo  $\Xi$ , dado por Ec. 7.3.22, y la Ec. 7.3.29 se tiene que

$$\begin{aligned} \Xi \cdot u &= \sum_{i=1}^{\mu} a_i \Xi \cdot w_i \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

$$\Xi \cdot v = \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j. \tag{C.1.2}$$

Entonces, con respecto a la base inducida en  $\Omega^f$  de acuerdo con la Nota 7.2.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \Xi \cdot u &= \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} a_i s[\tilde{\omega}_i]_0 \\ &= s \left[ \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{\omega}_i \right]_0 \\ &= s[\omega]_0 \end{aligned} \tag{C.1.3}$$

con  $\omega = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \tilde{\omega}_i$ . Análogamente,

$$\begin{aligned} \Xi \cdot v &= \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{s}_j \\ &= \sum_{j=1}^{\mu} a_j s[\tilde{\omega}_j]_0 \\ &= s \left[ \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{\omega}_j \right]_0 \\ &= s[\eta]_0 \end{aligned} \tag{C.1.4}$$

C. Formas bilineales

con  $\eta = \sum_{j=1}^{\mu} b_j \tilde{\omega}_j$ . Aplicando el Teorema 7.4.1,

$$\text{res}_{f,0}(f\omega, \eta) = \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j). \quad (\text{C.1.5})$$

Por otra parte, de forma análoga a como se demostró el Teorema 7.4.1, tenemos que

$$\text{res}_{f,0}(\omega, \eta) = \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(w_i, w_j).$$

Entonces, definimos

$$B(u, v) := \text{res}_{f,0}(\omega, \eta) = \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(w_i, w_j),$$

la cual es una forma bilineal. En particular,

$$B(w_i, w_j) = (-1)^{l_j} c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(w_i, w_j),$$

para cada par de vectores básicos  $w_i, w_j$ .

Sea también,  $\widehat{B}(u, v) := B(Nu, v)$ .

Del Lema C.0.1 se tiene el

**Corolario C.1.1.** Sean  $[N], [B]$  las  $\underline{w}$ -representaciones matriciales de  $N$  y  $B$ , respectivamente. Entonces

$$[\widehat{B}] = [N]^T \cdot [B].$$

**Proposición C.1.1.** Sean  $u, v$  tales que se cumplen las ecuaciones C.1.1, C.1.2, C.1.3 y C.1.4. Entonces

$$\text{res}_{f,0}(f\omega, \eta) = [u]^T \cdot [N]^T \cdot [B] \cdot [v]$$

*Demostración.* Para cada  $w_i$  se tiene una combinación lineal  $Nw_i = \sum_{l=1}^{\mu} d_{li} w_l$ . De Ec. C.1.5, y procediendo de forma análoga al Lema C.0.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{res}_{f,0}(f\omega, \eta) &= \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}(Nw_i, w_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \mathcal{S}\left(\sum_{l=1}^{\mu} d_{li} w_l, w_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\mu} (-1)^{l_j} a_i b_j c_{n,l_{ij}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{\mu} d_{li} \mathcal{S}(w_l, w_j)\right) \end{aligned}$$

C. Formas bilineales

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \text{res}_{f,0}(f \omega, \eta) &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \left( \sum_{l=1}^{\mu} a_i d_{li} b_j \cdot (-1)^{l_j} c_{n, l_{ij}} \mathcal{S}(w_l, w_j) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \left( \sum_{l=1}^{\mu} a_i d_{li} b_j \cdot B(w_l, w_j) \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \left( \left( \sum_{i=1}^{\mu} d_{li} a_i \right) \cdot B(w_l, w_j) b_j \right) \\
 &= [u]^T \cdot [N]^T \cdot [B] \cdot [v]
 \end{aligned}$$

□

## Ejemplos

En este apartado, a modo de ejemplo, ilustraremos parte de los resultados de esta tesis. Para ello haremos uso de algoritmos desarrollados por M. Schulze [6, 5, 10] usando el sistema computacional de álgebra SINGULAR<sup>1</sup>.

De manera concreta trabajaremos con el germen

$$(\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

$$(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) := x^5 + y^5 + x^2y^2,$$

para calcular lo siguiente:

1. El número de Milnor de  $f$ .
2. Verificar que en efecto  $f$  es una singularidad aislada no casi-homogénea.
3. Espectro de  $f$ .
4. Una buena base para el álgebra de milnor  $A_f := \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{J_f}$ , con  $J_f := \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ .
5. La  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración inducida en  $\Omega^f$ .
6. Con respecto a la buena base:
  - (a) La matriz asociada al operador de multiplicación por  $t$ .
  - (b) La matriz asociada a la forma bilineal  $res_{f, 0}(\bullet, \bullet)$ .
  - (c) La matriz asociada a la forma bilineal  $res_{f, 0}(f\bullet, \bullet)$ .

---

<sup>1</sup><http://www.singular.uni-kl.de>

## Número de Milnor

Utilizando SINGULAR, tenemos:

```
> LIB "gmssing.lib";
> ring R=0,(x,y),ds;
> poly f=x5+y5+x2y2;
> number mu=milnor(f);mu; // numero de Milnor
11
```

Entonces tenemos que  $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^f = 11$ .

## El polinomio $f$ no es casi-homogéneo

Para verificar que  $f$  no es casi homogéneo basta ver que  $f \neq 0$  en  $A_f$ . El siguiente algoritmo regresa la potencia mínima de  $f$  tal que  $f^k$  que es un elemento de  $J_f$ . En este caso particular  $k = 2$ .

```
> LIB"sing.lib";
> LIB"gmssing.lib";
> LIB"mondromy.lib";
> ring R=0,(x,y),ds;
> poly f=x5+y5+x2y2;
> jacoblift(f);
[1]:// minima potencia de f tal que f^k esta en J_f
2
```

Entonces  $f \notin J_f$ , esto es,  $f$  no es casi-homogéneo.

## Espectro de $f$

Para calcular es espectro de  $f$ , usamos el siguiente algoritmo.

```
> LIB"sing.lib";
> LIB "gmssing.lib";
> ring R=0,(x,y),ds;
```



## D. Ejemplos

```
> poly f=x5+y5+x2y2;
> spprint(spectrum(t)); // numeros espectrales con multiplicidades
(-1/2,1), (-3/10,2), (-1/10,2), (0,1), (1/10,2), (3/10,2), (1/2,1)
```

Entonces, se tiene que de acuerdo con la Sección 6.4, los números espectrales son:

$$\alpha: \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{-3}{10} \quad \frac{-1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{2}$$

$$d_\alpha: \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

tenemos por tanto que el espectro esta dado por:

$$sp(f) : \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5 \leq \alpha_6 \leq \alpha_7 \leq \alpha_8 \leq \alpha_9 \leq \alpha_{10} \leq \alpha_{11}$$

$$sp(f) : \frac{-1}{2} < \frac{-3}{10} = \frac{-3}{10} < \frac{-1}{10} = \frac{-1}{10} < 0 < \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < \frac{3}{10} = \frac{3}{10} < \frac{1}{2}$$

Observamos que se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $sp(f) \subset (-1, 1)$
2. La propiedad de simetría:

$$\begin{aligned} d_{n-1-\alpha_i} &= d_{(1-1-\alpha_i)} \\ &= d_{(-\alpha_i)} \\ &= d_{\alpha_i}. \end{aligned}$$

3. La ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_{\mu+1-i} &= \alpha_i + \alpha_{11+1-i} \\ &= \alpha_i + \alpha_{12-i} \\ &= 0 \\ &= 1 - 1 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

## La $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración en el álgebra de Milnor

De acuerdo con el Corolario 7.2.2, existe una (buena) base en el álgebra de Milnor determinada por la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  para  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ ; por otra parte, los trabajos de M. Schulze [6, 5] permiten calcular de manera explícita esta base. A continuación presentamos un algoritmo de M. Schulze que calcula esta base y la  $\mathcal{V}^\bullet$ -filtración en  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$  (y por ende en  $\Omega^f$ ).

## D. Ejemplos

```
LIB "gmssing.lib";
ring R=0,(x,y),ds;
poly t=x5+x2y2+y5;
vfilt(t);
```

```
[1]: \\NUMEROS ESPECTRALES
```

```
_ [1]=-1/2
_ [2]=-3/10
_ [3]=-1/10
_ [4]=0
_ [5]=1/10
_ [6]=3/10
_ [7]=1/2
```

```
[2]: \\MULTIPLICIDAD DE CADA NUMERO ESPECTRAL
```

```
1,2,2,1,2,2,1
```

```
[3]: \\ LA BASE EN EL ALGEBRA DE MILNOR
```

```
[1]:
```

```
_ [1]=gen(11)
```

```
[2]:
```

```
_ [1]=gen(10)
```

```
_ [2]=gen(6)
```

```
[3]:
```

```
_ [1]=gen(9)
```

```
_ [2]=gen(4)
```

```
[4]:
```

```
_ [1]=gen(5)
```

```
[5]:
```

```
_ [1]=gen(3)
```

```
_ [2]=gen(8)
```

```
[6]:
```

```
_ [1]=gen(2)
```

```
_ [2]=gen(7)
```

## D. Ejemplos

```
[7]:
  _[1]=gen(1)
[4]:  \\ REPRESENTANTES DE LOS ELEMENTOS EN EL ALGEBRA DE MILNOR
  _[1]=y5
  _[2]=y4
  _[3]=y3
  _[4]=y2
  _[5]=xy
  _[6]=y
  _[7]=x4
  _[8]=x3
  _[9]=x2
  _[10]=x
  _[11]=1
```

La información que regresa este algoritmo la explicaremos como sigue:

1. La salida

```
vfilt(t)[1]:
  _[1]=-1/2
  _[2]=-3/10
  _[3]=-1/10
  _[4]=0
  _[5]=1/10
  _[6]=3/10
  _[7]=1/2
```

proporciona el espectro de  $f$ , es decir, los  $\beta$  tales que  $\dim_{\mathbb{C}} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \neq 0$ .

## D. Ejemplos

2. La salida

`vfilt(t) [2]`:

1,2,2,1,2,2,1

regresa las dimensiones  $\dim_{\mathbb{C}} Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \neq 0$ .

3. Finalmente las salidas

`vfilt(t) [3]`, `vfilt(t) [4]`

proporciona una  $\mathbb{C}$ -base para los espacios graduados  $Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right)$ ,  $\beta \in sp(f)$ :

$$Gr_{\mathcal{V}}^{-1/2} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_1 \rangle$$

$$Gr_{\mathcal{V}}^{-3/10} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[x dx \wedge dy]_0, s[y dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_2, \tilde{s}_3 \rangle$$

$$Gr_{\mathcal{V}}^{-1/10} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[x^2 dx \wedge dy]_0, s[y^2 dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_4, \tilde{s}_5 \rangle$$

$$Gr_{\mathcal{V}}^0 \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[xy dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_6 \rangle$$

$$Gr_{\mathcal{V}}^{1/10} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[y^3 dx \wedge dy]_0, s[x^3 dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_7, \tilde{s}_8 \rangle$$

$$Gr_{\mathcal{V}}^{3/10} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[y^4 dx \wedge dy]_0, s[x^4 dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_9, \tilde{s}_{10} \rangle$$

$$Gr_{\mathcal{V}}^{1/2} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) = \mathbb{C} \left\langle s[y^5 dx \wedge dy]_0 \right\rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{s}_{11} \rangle$$

Concluimos que lo anterior determina la  $\mathcal{V}^{\bullet}$ -filtración en  $\frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$ .

## Matriz asociada al operador de multiplicación por $t$

Consideremos la base  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{11}$  para

$$\begin{aligned} \Omega^f &\simeq \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \\ &\simeq \bigoplus_{\beta \in \{-1/2, -3/10, -1/10, 0, 1/10, 3/10, 1/2\}} \frac{Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} H_0''}{Gr_{\mathcal{V}}^{\beta} \partial_t^{-1} H_0''} \\ &= \mathbb{C}\langle \tilde{s}_1 \rangle \oplus \mathbb{C}\langle \tilde{s}_2, \tilde{s}_3 \rangle \oplus \mathbb{C}\langle \tilde{s}_4, \tilde{s}_5 \rangle \oplus \mathbb{C}\langle \tilde{s}_6 \rangle \oplus \mathbb{C}\langle \tilde{s}_7, \tilde{s}_8 \rangle \oplus \mathbb{C}\langle \tilde{s}_9, \tilde{s}_{10} \rangle \oplus \mathbb{C}\langle \tilde{s}_{11} \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.0.1})$$

El operador  $t : \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \rightarrow \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''}$  es tal que

$$t \equiv \partial_t^{-1} \tilde{N}.$$

Por tanto, de los Corolarios 7.2.2 y 7.1.2 se tiene que

$$\begin{aligned} t\tilde{s}_i &= \tilde{N}_{\alpha_i+1} \partial_t^{-1} s_i = \tilde{s}_{\nu(i)} \\ &= \partial_t^{-1} \tilde{N}_{\alpha_i} s_i = \tilde{s}_{\nu(i)}. \end{aligned}$$

Entonces,  $t$  actúa en la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq 11}$  de la siguiente manera:

1. Para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} t \cdot s_1 &= \tilde{N}_{(-1/2)+1} \partial_t^{-1} \tilde{s}_1 \\ &= \tilde{s}_{\nu(1)} \\ &= \tilde{s}_{11} \in \mathbb{C}\langle \tilde{s}_{11} \rangle \subset C_{1/2} \end{aligned}$$

En coordenadas, y con respecto a la base ordenada  $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{11}$ ,

$$[t \cdot \tilde{s}_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Mat_{11 \times 1}(\mathbb{C}).$$

2. Observamos que  $\alpha_i + 1 \notin \{0, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}\}$ , para  $i = 2, \dots, 5$ . Por tanto,

$$t \cdot \tilde{s}_i = \tilde{s}_{\nu(i)} = 0 \in Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha_i+1} \left( \frac{H_0''}{\partial_t^{-1} H_0''} \right) \subset C_{\alpha_i+1}.$$

### D. Ejemplos

En coordenadas, para  $i = 2, \dots, 5$ ,

$$[t \cdot \tilde{s}_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Mat_{11 \times 1}(\mathbb{C}).$$

3. Para  $i = 6, \dots, 11$ ,  $\alpha_i + 1 \geq 1 = n$ . Entonces, en este caso,  $Gr_{\mathcal{V}}^{\alpha_i} \left( \frac{H_0''}{\partial_i^{-1} H_0''} \right) = 0$ , pues  $sp(f) \subset (-1, 1)$ .

Obtenemos nuevamente que

$$[t \cdot \tilde{s}_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Mat_{11 \times 1}(\mathbb{C}).$$

Entonces, con respecto a la base ordenada  $\underline{s} : \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{11}$ , el operador  $t$  tiene la representación matricial

$$A = \left[ t \right]_{\underline{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{11 \times 11}(\mathbb{C}) \quad (D.0.2)$$

### Matriz inducida por la involución $\kappa$

De la Proposición 7.2.1 se tiene la involución

$$\kappa : \{1, \dots, 11\} \longrightarrow \{1, \dots, 11\}$$

$$k(i) = \begin{cases} 11 + 1 - i & \text{si } \alpha_i \neq \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \\ 11 + 1 - i \text{ ó } i & \text{si } \alpha_i = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \end{cases}$$

Reetiquetando la base  $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$  de acuerdo con Ec. 7.5.2 se obtiene:

$$\underline{rs} : \tilde{s}_1, \tilde{s}_{11}, \tilde{s}_2, \tilde{s}_{10}, \tilde{s}_3, \tilde{s}_9, \tilde{s}_4, \tilde{s}_8, \tilde{s}_5, \tilde{s}_7, \tilde{s}_6$$

## D. Ejemplos

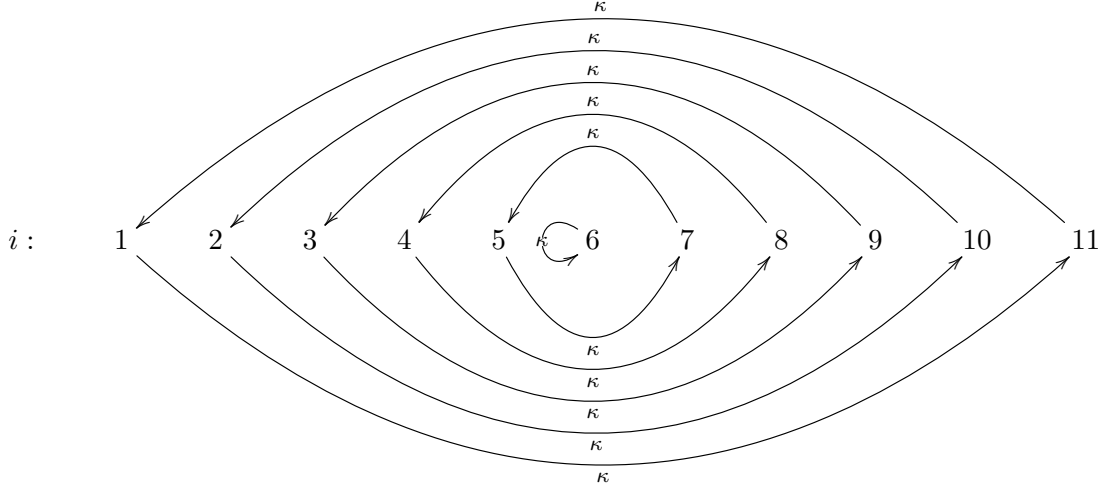


Figura D.1.: Acción de la involución  $\kappa$

Entonces con respecto a la base ordenada  $\underline{rs}$ , el operador  $t$  tiene la representación matricial

$$\tilde{A}_0 = \left[ t \right]_{\underline{rs}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{11 \times 11}(\mathbb{C}) \quad (D.0.3)$$

### Representación matricial de la forma bilineal $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$

El inciso *ii*) del Teorema 7.4.2, proporciona dos representaciones para  $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$ , con respecto a las bases inducidas en  $\Omega^f$  (via el isomorfismo  $s : \omega \mapsto s[\omega]_0$ ) por las bases ordenadas  $\underline{s}$  y  $\underline{rs}$ , respectivamente.

En efecto,

1. Con respecto a las base  $\underline{s}$ :

$$\begin{aligned} \left[ res_{f,0}(\bullet, \bullet) \right]_{\underline{s}} &= \left( \delta_{\kappa(i),j} \right)_{1 \leq i,j \leq 11} \\ &:= Q \end{aligned}$$

D. Ejemplos

Entonces,

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{pmatrix}
 \delta_{11,1} & \delta_{11,2} & \delta_{11,3} & \delta_{11,4} & \delta_{11,5} & \delta_{11,6} & \delta_{11,7} & \delta_{11,8} & \delta_{11,9} & \delta_{11,10} & \delta_{11,11} \\
 \delta_{10,1} & \delta_{10,2} & \delta_{10,3} & \delta_{10,4} & \delta_{10,5} & \delta_{10,6} & \delta_{10,7} & \delta_{10,8} & \delta_{10,9} & \delta_{10,10} & \delta_{10,11} \\
 \delta_{9,1} & \delta_{9,2} & \delta_{9,3} & \delta_{9,4} & \delta_{9,5} & \delta_{9,6} & \delta_{9,7} & \delta_{9,8} & \delta_{9,9} & \delta_{9,10} & \delta_{9,11} \\
 \delta_{8,1} & \delta_{8,2} & \delta_{8,3} & \delta_{8,4} & \delta_{8,5} & \delta_{8,6} & \delta_{8,7} & \delta_{8,8} & \delta_{8,9} & \delta_{8,10} & \delta_{8,11} \\
 \delta_{7,1} & \delta_{7,2} & \delta_{7,3} & \delta_{7,4} & \delta_{7,5} & \delta_{7,6} & \delta_{7,7} & \delta_{7,8} & \delta_{7,9} & \delta_{7,10} & \delta_{7,11} \\
 \delta_{6,1} & \delta_{6,2} & \delta_{6,3} & \delta_{6,4} & \delta_{6,5} & \delta_{6,6} & \delta_{6,7} & \delta_{6,8} & \delta_{6,9} & \delta_{6,10} & \delta_{6,11} \\
 \delta_{5,1} & \delta_{5,2} & \delta_{5,3} & \delta_{5,4} & \delta_{5,5} & \delta_{5,6} & \delta_{5,7} & \delta_{5,8} & \delta_{5,9} & \delta_{5,10} & \delta_{5,11} \\
 \delta_{4,1} & \delta_{4,2} & \delta_{4,3} & \delta_{4,4} & \delta_{4,5} & \delta_{4,6} & \delta_{4,7} & \delta_{4,8} & \delta_{4,9} & \delta_{4,10} & \delta_{4,11} \\
 \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \delta_{3,4} & \delta_{3,5} & \delta_{3,6} & \delta_{3,7} & \delta_{3,8} & \delta_{3,9} & \delta_{3,10} & \delta_{3,11} \\
 \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \delta_{2,4} & \delta_{2,5} & \delta_{2,6} & \delta_{2,7} & \delta_{2,8} & \delta_{2,9} & \delta_{2,10} & \delta_{2,11} \\
 \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} & \delta_{1,4} & \delta_{1,5} & \delta_{1,6} & \delta_{1,7} & \delta_{1,8} & \delta_{1,9} & \delta_{1,10} & \delta_{1,11}
 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.0.4}$$

2. Con respecto a la base  $\underline{rs}$ :

$$\begin{aligned}
 \left[ \text{res}_{f,0}(\bullet, \bullet) \right]_{\underline{rs}} &= \left( \delta_{\kappa(i),j} \right)_{1 \leq i,j \leq 11} \\
 &:= \tilde{Q}
 \end{aligned}$$



D. Ejemplos

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q} &= \begin{pmatrix}
 \delta_{11,1} & \delta_{11,11} & \delta_{11,2} & \delta_{11,10} & \delta_{11,3} & \delta_{11,9} & \delta_{11,4} & \delta_{11,8} & \delta_{11,5} & \delta_{11,7} & \delta_{11,6} \\
 \delta_{1,1} & \delta_{1,11} & \delta_{1,2} & \delta_{1,10} & \delta_{1,3} & \delta_{1,9} & \delta_{1,4} & \delta_{1,8} & \delta_{1,5} & \delta_{1,7} & \delta_{1,6} \\
 \delta_{10,1} & \delta_{10,11} & \delta_{10,2} & \delta_{10,10} & \delta_{10,3} & \delta_{10,9} & \delta_{10,4} & \delta_{10,8} & \delta_{10,5} & \delta_{10,7} & \delta_{10,6} \\
 \delta_{2,1} & \delta_{2,11} & \delta_{2,2} & \delta_{2,10} & \delta_{2,3} & \delta_{2,9} & \delta_{2,4} & \delta_{2,8} & \delta_{2,5} & \delta_{2,7} & \delta_{2,6} \\
 \delta_{9,1} & \delta_{9,11} & \delta_{9,2} & \delta_{9,10} & \delta_{9,3} & \delta_{9,9} & \delta_{9,4} & \delta_{9,8} & \delta_{9,5} & \delta_{9,7} & \delta_{9,6} \\
 \delta_{3,1} & \delta_{3,11} & \delta_{3,2} & \delta_{3,10} & \delta_{3,3} & \delta_{3,9} & \delta_{3,4} & \delta_{3,8} & \delta_{3,5} & \delta_{3,7} & \delta_{3,6} \\
 \delta_{8,1} & \delta_{8,11} & \delta_{8,2} & \delta_{8,10} & \delta_{8,3} & \delta_{8,9} & \delta_{8,4} & \delta_{8,8} & \delta_{8,5} & \delta_{8,7} & \delta_{8,6} \\
 \delta_{4,1} & \delta_{4,11} & \delta_{4,2} & \delta_{4,10} & \delta_{4,3} & \delta_{4,9} & \delta_{4,4} & \delta_{4,8} & \delta_{4,5} & \delta_{4,7} & \delta_{4,6} \\
 \delta_{7,1} & \delta_{7,11} & \delta_{7,2} & \delta_{7,10} & \delta_{7,3} & \delta_{7,9} & \delta_{7,4} & \delta_{7,8} & \delta_{7,5} & \delta_{7,7} & \delta_{7,6} \\
 \delta_{5,1} & \delta_{5,11} & \delta_{5,2} & \delta_{5,10} & \delta_{5,3} & \delta_{5,9} & \delta_{5,4} & \delta_{5,8} & \delta_{5,5} & \delta_{5,7} & \delta_{5,6} \\
 \delta_{6,1} & \delta_{6,11} & \delta_{6,2} & \delta_{6,10} & \delta_{6,3} & \delta_{6,9} & \delta_{6,4} & \delta_{6,8} & \delta_{6,5} & \delta_{6,7} & \delta_{6,6}
 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix} \tag{D.0.5}
 \end{aligned}$$

### Representación matricial para la forma bilineal $res_{f,0}(f\bullet, \bullet)$

Tenemos dos representaciones matriciales para el operador de multiplicación por  $t$ , de acuerdo con Ec. D.0.2 y Ec D.0.3, con respecto a las bases ordenadas  $\underline{s}$  y  $\underline{rs}$ , respectivamente. Por tanto, del Lema C.0.1 se tienen las siguientes dos representaciones matriciales para la forma bilineal  $res_{f,0}(\bullet, \bullet)$ :

$$[res_{f,0}(f\bullet, \bullet)]_{\underline{s}} = A^T \cdot Q \quad \text{y} \quad [res_{f,0}(f\bullet, \bullet)]_{\underline{rs}} = \tilde{A}_0^T \cdot \tilde{Q}$$

D. Ejemplos

Es decir,

$$\begin{aligned}
 [res_{f,0}(f\bullet, \bullet)]_{\underline{s}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$[res_{f,0}(f\bullet, \bullet)]_{\underline{s}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{D.0.6}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
 [res_{f,0}(f\bullet, \bullet)]_{rs} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{D.0.7}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, del inciso *ii*) del Teorema 7.4.2 se tiene que

$$[res_{f,0}(f\bullet, \bullet)]_{\underline{s}} = \left( \delta_{\kappa(\nu(i)),j} \right)_{1 \leq i,j \leq 11}$$

### D. Ejemplos

Por otra parte, consideremos la base  $\underline{s} : \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{11}$ . Entonces del apartado 7.5.2.1 se sigue que

$$C(i) = \begin{cases} \{1, 11\} & \text{si } i = 1 \\ \{i\} & \text{si } i \in \{2, 3, 4, \dots, 11\} \end{cases}$$

Entonces,  $\kappa(\nu(i))$  esta definido si y sólo si  $i = 1$ . Entonces,  $\kappa(\nu(1)) = 11 + 1 - \nu(1) = 11 + 1 - 11 = 1$ .

Así,

$$\delta_{\kappa(\nu(i)),j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 1 \\ 0 & \text{si } i, j \in \{2, 3, 4, \dots, 11\} \text{ (por vacuidad)} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} [res_{f,0}(f_{\bullet}, \bullet)]_{\underline{s}} &= \left( \delta_{\kappa(\nu(i)),j} \right)_{1 \leq i, j \leq 11} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.0.8}$$

Finalmente, de Ec. D.0.6, Ec. D.0.7 y D.0.8 se aprecia la esencia del Teorema 7.4.2 y el Corolario 7.5.1 y, por ende, del Teorema 7.4.1.

# Bibliografía

- [1] L. Giraldo, X. Gómez-Mont and P. Mardešić. **Flags in zero dimensional complete intersection algebras and indices of real vectors fields**. Math.Z.26077-91. (2008).
- [2] H. Zoladek. **The Monodromy Group**. Birkhäuser Verlag. 67 (2006).
- [3] C. Hertling. **Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities**. Cambridge Tracts in Math. 151 (2004).
- [4] L. I. Nicolaescu. **Residues and Hodge theory**. Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame. Lecture Notes. (2003). Web: LN.
- [5] M. Schulze. **The Differential Structure of the Brieskorn Lattice**. Cohen, A. et al. (Eds.), Mathematical Software-ICMS 2002. World Scientific, 136-146.
- [6] M. Schulze. **Algorithmic Gauss-Manin Connection**. Phd. Thesis. Promotion (2002). <http://www.mathematik.uni-kl.de/~mschulze/download/agmc.pdf>.
- [7] C. Voisin. **Hodge theory and complex algebraic geometry I,II**. Cambridge Stud. Adv. Math. 76.(2002).
- [8] R. Hain. **Periods of Limit Mixed Hodge Structures**. Current Developments in Mathematics (2001), 113-134.
- [9] C. Schnell, **Canonical Extensions of Local Systems**. arXiv:0710.2869. Mathematics Subject Classification. 14C30; 32S40. (2000).
- [10] M. Schulze and J. Steenbrink. **Computing Hodge-theoretic invariants of singularities**. New Developments in Singularity Theory. NATO Science Series , Kluwer (2001), 235-255.
- [11] C. Hertling. **Classifying Spaces for Polarized Mixed Hodge Structures and Brieskorne**

- Lattices.** *Compositio Mathematica.* 116 (1999), 1-37.
- [12] C. Hertling and C. Stahlke. **Bernstein Polynomial and Tjurina Number.** *Geometriae Dedicata.* 75 (1999) 137-176.
- [13] S. Kulikov. **Mixed Hodge Structures and Singularities.** Cambridge University Press. 132.(1998).
- [14] H. Esnault and E. Viehweg. **Lectures on vanishing Theorems.** Birkhauser.(1992).
- [15] M. Saito. **On the Structure of Brieskorn Lattices.** *Ann. Inst. Fourier Grenoble.* 39 (1989), 27-72.
- [16] V. I. Arnold , S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. **Singularities of differentiable mappings.** Birkhäuser, Basle. Vol. II (1988).
- [17] A. N. Varčenko. **On the local residue and the intersection form on the vanishing cohomology.** *Math USSR Izvestiya.* Vol. 26 (1986).
- [18] E. Cattani, A. Kaplan, W. Schmid. **Degeneration of Hodge Structures.** *Annals of Mathematics.* 123 (1986), 457-535.
- [19] J. Sherk and J. Steenbrink. **On the Mixed Hodge Structure on the Cohomology of the Milnor Fibre.** *Math. Ann.* 271 (1985), 641-665.
- [20] E. J. N. Looijenga. **Isolated Singular Points on Complete Intersections.** *Cambr. Univ. Press. LMS Lect. Note Series. Volume 77* (1984).
- [21] F. Pham. **Structure de Hodge Mixte associe a point critique isole.** *Asterisque* 101-102 (1983), 268-285.
- [22] A. N. Varčenko. **Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology.** *Math USSR Izvestiya.* Vol. 18 (1982).
- [23] J. Sherk. **On the Monodromy Theorem for Isolated Hypersurface Singularities.** *Inventiones Math.* 58 (1980), 289-301.
- [24] A. N. Varčenko. **On the monodromy operator in vanishing cohomology and the operator of multiplication by  $f$  in the local ring.** *Soviet Math. Dokl.* Vol. 24 (1981).
- [25] A. N. Varčenko. **The asymptotics of holomorphic forms determine a Mixed Hodge Structure.** *Soviet Math. Dokl.* Vol. 22 (1980), 772-775.
- [26] F. Pham. **Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin.** *Progress in Math.* Vol. 2, Birkhäuser, Boston (1979).

- [27] P. Griffiths. **Complex Analysis and Algebraic Geometry**. Bull. A.M.S. Vol. 1 (1979), 595-626.
- [28] P. Griffiths and J. Harris. **Principles of algebraic geometry**. Wiley.(1978).
- [29] J. Steenbrink. **Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology**. Nordic Summer School. Simposium in Mathematics. Oslo. (1976) 525-563.
- [30] R. Hartshorne. **Algebraic Geometry**. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. vol. 52 (1977).
- [31] J. Steenbrink. **Limits of Hodge Structures**. Inventiones math. 31 (1976), 229 - 257.
- [32] J. Briançon and H. Skoda. **Sur la cloture intégrable d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de  $\mathbb{C}^n$** . C. R. Acad. Sci (Paris) (1974), 278-949.
- [33] B. Malgrange. **Integrales Asymptotiques et Monodromie**. Ann. Scient. Éc.Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série, t.7 (1974), 405-430.
- [34] W. Schmid. **Variation of Hodge Structure: the singularities of the period mapping**. Invent. Math.22 (1973), 211-319.
- [35] P. Deligne. **Equations Differentielles a Points Singular Regular**. Lect. Notes in Math. Vol.163, Springer, Berlin (1970).
- [36] P. Deligne. **Théorie de Hodge II**. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no. 40 (1971), 5-57.
- [37] E. Brieskorn. **La monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces**. Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.
- [38] P. Griffiths. **Periods of integrals on algebraic manifolds I, II**. Amer. J. Math. 90(1968), 568-626, 805-865.
- [39] J. Milnor. **Singular Points on Complex Hypersurfaces**. Ann. Math. Stud. Princ. Univ. Press. Vol.61 (1968).
- [40] J. Leray. **Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe(Problème de Cauchy, III)**. Bull. Soc. Math. France (1959), 81-180.