Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Aportaciones a la teoría del valor para juegos cooperativos con estructuras coalicionales

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias
con Orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A :

William José Olvera López

Director de Tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

GUANAJUATO, GTO JUNIO 2007

A mi madre

Agradecimientos

Quisiera expresar mi gratitud al director de esta tesis, el Dr. Francisco Sánchez Sánchez, por su tiempo y trabajo dedicado a esta investigación. Muchas gracias por todo.

También quisiera agradecer a los revisores de este documento, Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez y Dr. Luis Hernández Lamoneda, por sus comentarios, sugerencias y observaciones, las cuales ayudaron a mejorar la calidad del trabajo realizado.

Igualmente quisiera extender mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haber aportado el financiamiento necesario para la realización de mis estudios de maestría, los cuales culminan con la elaboración del presente trabajo.

No podría faltar el agradecimiento hacia Selma, por su paciencia, porque a veces hace que yo pierda la mía, por su ternura, sus regaños, su sabiduría innata, por su habilidad en la cocina, por su corazón, sus ojos, su sonrisa, en fin... por su simple existencia: ¡no se qué hubiera hecho sin ella!.

Finalmente quisiera agradecer a una mujer que de haberla tenido como jefa, tía, abuela y hasta como suegra me hubiera hecho muy feliz, pero tuve la fortuna de tenerla como madre, y ése es el mejor regalo que la vida me ha dado; todo lo que soy se le debo a ella; atribuyo todos mis éxitos en la vida a la enseñanza moral, intelectual y física que recibí de ella: muchas gracias mamá.

Índice general

Introducción

Los conflictos de intereses y todo lo que rodea al proceso de toma de decisiones están presentes en la totalidad de las actividades humanas: en economía, sociología, política y en un gran número de actividades diversas se presentan situaciones de competencia entre los agentes que intervienen que a la vez necesitan de la cooperación entre los mismos para poder alcanzar sus objetivos. La relación competencia-cooperación se muestra indivisible al momento de tratar de explicar las relaciones entre esos agentes, sean individuos de una colectividad, empresas o incluso países.

En general, los problemas que se refieren a conflictos de intereses se caracterizan por la existencia de un grupo de personas que se encuentran en una situación que puede tener más de un desenlace, respecto a cada uno de los cuales cada individuo tiene una cierta preferencia. Además, cada uno de los individuos controla alguna de las variables que determina el resultado final, aunque no controla la totalidad de dicho resultado. Cada una de estas situaciones se conoce como un juego, en una idea muy intuitiva. Así, un juego puede representar situaciones tan diversas como un juego de cartas o la negociación de acuerdos internacionales entre países.

El inicio de la teoría matemática que estudia los conflictos de intereses se conoce como Teoría de Juegos, y se establece en el año de 1944 a raíz de la publicación del libro "Game Theory and Economic Behavior" de John Von Neumann y Oskar Morgenstern, aunque ya existía constancia de trabajos previos, como el de Von Neumann en 1944 donde se demuestra el teorema minimax en el contexto de los juegos bipersonales finitos de suma cero; cincuenta años más tarde, el gran impacto que la teoría de juegos ha tenido en el desarrollo de la economía moderna queda oficialmente reconocido al serle concedido el Premio Nobel de Economía a tres teóricos de esta disciplina: John Nash, Reinhard Selten y John Harsanyi. Desde sus inicios, la teoría de juegos ha evolucionado ampliamente, y los modelos que implica, se aplican principalmente a la economía y a la politíca, así como a otras ciencias sociales como la filosofía o psicología, ya que se ajustan muy bien al estudio de la conducta humana.

En general ha de suponerse que existe un número concreto de jugadores, que se conocen, que están determinados todos los posibles resultados del juego y que el objetivo de cada jugador es maximizar su utilidad tras el fin del juego. En el caso en que pueda haber comunicación entre los jugadores, de manera que puedan negociar o establecer acuerdos que permitan la formación de coaliciones, la situación se abarca dentro de los llamados juegos cooperativos. En estas situaciones, se considera como información básica la utilidad que cada coalición puede obtener coordinando las estrategias de sus integrantes, con independencia de la actuación del resto de los individuos del juego. Así, los acuerdos entre los miembros de cada coalición se encaminan a coordinar sus actuaciones o a redistribuir los pagos o ganancias obtenidas.

En el presente trabajo se estudiarán los juegos cooperativos cuando los jugadores se encuentran agrupados de una manera determinada, debido a intereses propios de ellos, en una estructura que se llamará *estructura coalicional*. Esto es, en un proceso antes de la negociación, los jugadores decidieron unirse a subconjuntos de jugadores de modo tal que se supone funcionan como un único individuo al momento de llevarse a cabo la negociación, con lo que se esperaría que el pago obtenido por esta unión sea mayor que la suma de los pagos individuales de los jugadores que la integran si la estructura coalicional no existiera. El primero de los trabajos dentro de la teoría de juegos donde se aborda este tipo de situaciones se debe a Guillermo Owen en 1977 (él los denominó *juegos con uniones a priori*) y a partir de entonces, se ha desarrollado una teoriía bastante profunda para esta clase de juegos. El estudio que se lleva a cabo en el presente trabajo de investigación se divide en tres capítulos, de los que a continuación se presenta un breve resumen:

- El primer capítulo contiene una introducción a los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos. Allí se recuerdan las soluciones para los juegos que se manejarán a lo largo del trabajo: Shapley, Banzhaf-Coleman, entre otros, para terminar con el concepto de potencial. Contiene una sección especialmente dedicada a los juegos de unanimidad, muy utilizados en axiomatizaciones y pruebas de teoremas de muy diversos valores. El contenido de este capítulo no es original y su inclusión se justifica por la pretensión de unificar en lo posible la notación, así como de lograr un elevado grado de autonomía de la totalidad de la obra.

- En el segundo capítulo, primeramente se abordan los conceptos necesarios para la definición de juegos con estructuras coalicionales. De igual manera, se presentan los diversos valores existentes para el pago de los jugadores cuando se tiene dicha situación, entre los que destacan el valor de Aumann-Drèze y de Owen, presentando de la misma manera algunas de las principales propiedades de estos valores; para este último caso, se incluyen varias de sus caracterizaciones y como parte del trabajo de investigación realizado, se están proponiendo dos nuevas propiedades que satisface este valor: la propiedad del juego *de lo que se deja de ganar* y del juego *de lo que se gana por asociación*, de las cuales se proporciona una explicación detallada, así como la demostraciones pertinentes, en la sección 2.3.2; la satisfacción de estas propiedades viene a proveer una mayor estabilidad a dicho valor, ya que se demuestra que es inmune ante cierto tipo de manipulaciones. Además, en el resto del capítulo se estudia una gama importante de valores no tan tradicionales, como son el valor colectivo, el valor de Banzhaf-Owen, y el τ-valor coalicional. También se dedica una sección al estudio de valores con opciones externas, que son una nueva manera de pagar sin tomar en cuenta en su totalidad la existencia de la estructura coalicional, enfocando el estudio al caso de los valores χ y de Wiese. Como parte de las aportaciones hechas en este capítulo, se están introduciendo nuevos valores para juegos con estructuras coalicionales derivados de valores conocidos de la teoría de juegos como son el valor solidario coalicional, el cual es una extensión natural del valor de solidaridad dado de la siguiente forma:

$$\varphi_i^{So}(v,\mathfrak{B},\psi) = \sum_{\substack{S\subseteq B_k \\ S\ni i}} \frac{(|B_k|-s)!(s-1)!}{|B_k|!} A^v(S,\mathfrak{B},\psi) \qquad \forall\ i \in B_k \in \mathfrak{B}$$

en donde

$$A^v(S,\mathfrak{B},\psi) = \frac{1}{s}\sum_{j\in S}\left[\psi(v^{\mathfrak{B}(S)})(S) - \psi(v^{\mathfrak{B}(S\backslash\{j\})})(S\backslash\{j\})\right]$$

y donde ψ es un valor acordado entre los jugadores para el pago en el juego de grupos $(M, v^{\mathfrak{B}})$ (para mayores detalles véanse las secciones 2.3 y 2.7) y además se demuestra que éste valor es el único que cumple con ciertos axiomas; también se extiende el valor de consenso para el caso de juegos con estructuras coalicionales (proporcionando de misma manera su caracterización) y varias formas de dividir los excesos, como son la división estándar y la igualitaria, tomando en cuenta el hecho de la existencia de estructuras coalicionales. Este capítulo se termina con un ejemplo de aplicación en donde se analiza, de alguna manera, el poder de cada uno de los partidos políticos que integran la Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unón en el marco de la aprobación de ciertos dictámenes, como por ejemplo las reformas a la Constitución.

- En el último capítulo se introduce una clase de juegos ad-hoc para tener estructuras coalicionales en el juego: los juegos en dos niveles, que son juegos cooperativos con estructuras coalicionales en donde el proceso de pago se hará primero entre las coaliciones que conforman la estructura para luego cada una de ellas repartir su pago asignado entre los jugadores que la integran, considerando en todo momento que cada coalición se comporta como una unidad indivisible cuando se establecen vínculos de negociación con otros jugadores, ya que se supone que ésta fue la razón fundamental para su formación; se justifica su importancia y aplicaciones, así como se muestran algunos de sus fundamentos teóricos; de igual forma se introducen los juegos coalicionales restringidos, que por construcción vienen a simplificar el proceso de negociación dentro de un juego en dos niveles y que provee una descomposición bastante amigable del espacio de juegos. Finalmente, aprovechando este hecho, se presenta una fórmula para todas las soluciones dentro de los juegos en dos niveles que satisfacen ciertos axiomas, a saber anonimato, eficiencia, simetría coalicional y linealidad, la cual viene enmarcada dentro del siguiente teorema:

Teorema: *Un valor $\varphi : G \times B \to \mathbb{R}^n$ cumple los axiomas de eficiencia, linealidad, simetría coalicional y anonimato sí y sólo si existen constantes β_p $(p = 1, \ldots, m-1)$ y donde para todo $B_k \in \mathfrak{B}$ existen constantes β_s^T $(s = 1, \ldots, n_k - 1)$ para todo $T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k$, tal que*

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \frac{\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k)}{n_k} + \sum_{T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{s} - \sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \not\ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{n_k - s} \right)$$

con

$$\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k) = \frac{v(N)}{m} + \sum_{\substack{P \subset \mathfrak{B} \\ P \ni B_k}} \beta_p \frac{v(A^P)}{p} - \sum_{\substack{P \subset \mathfrak{B} \\ P \not\ni B_k}} \beta_p \frac{v(A^P)}{m - p}$$

para todo $i \in N$ con $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ y todo $v \in G$, con $A^Q = \bigcup_{B_h \in Q} B_h$ para todo $Q \subseteq \mathfrak{B}$ y en donde (N, v) es un juego en dos niveles.

Para una explicación e interpretación de los términos que aparecen en la formulación proporcionada por el teorema anterior, refiérase a la sección 3.3. Para terminar el capítulo se presentan los valores de las constantes implicadas en la formulación para todas las soluciones estudiadas en el capítulo 2 que cumplen con los axiomas antes referidos (como por ejemplo el valor de Owen), y además se representan varias de las soluciones que no cumplen con este hecho (como es el valor de Aumann-Drèze), explicando con claridad los cambios necesarios y las consideraciones pertinentes para su escritura con la fórmula general.

El objetivo genérico que motiva el presente trabajo de investigación es contribuir al desarrollo de la teoría de juegos en el ámbito concreto de los juegos cooperativos con estructuras coalicionales. De entre los objetivos específicos, pueden destacarse los siguientes:

- Estudiar el comportamiento de algunas soluciones en determinadas situaciones de cooperación modificada, esto con el fin de proporcionar mayores propiedades a dichas soluciones.
- Extender conceptos de soluciones dentro de juegos cooperativos estándar a situaciones donde se encuentren presentes las estructuras coalicionales, utilizando fuertemente el proceso de asignación de pagos entre las coaliciones dentro del juego de grupos.

- Introducir un tipo especial de juegos en donde las coaliciones actúan como unidades indivisibles de negociación, los cuales serán una especificación de los juegos con estructuras coaliciones, justificando su importancia dentro de la teoría de juegos.
- Proporcionar una formulación para todas las soluciones que satisfacen una serie de axiomas determinados para ciertos juegos con estructuras coalicionales.

Capítulo 1

Preliminares y definiciones

Supóngase la siguiente situación: Ana y Beatriz pretenden guardar sus ahorros, \$80000 y \$60000 respectivamente, en cuentas bancarias; la tasa de interés ofrecida por el banco Z donde lo guardarán es de 10 % para cantidades menores a \$100000 y del 15 % para aquellas mayores o iguales a \$100000. Si cada una de ellas deposita su dinero por separado sólo obtienen, respectivamente, \$8000 y \$6000; pero si deciden abrir una única cuenta entre las dos juntando el capital con el que cuentan, obtendrían \$21000, lo cual es mayor a lo obtenido si actúan individualmente. Conclusión: la cooperación resulta conveniente en muchas ocasiones para quienes la llevan a cabo. Pero eso plantea un nuevo tipo de problema: encontrar la manera en la que se repartirá la utilidad obtenida gracias a la cooperación.

Es este capítulo primeramente se abordan conceptos básicos acerca de la teoría de juegos cooperativos, haciendo especial énfasis en los juegos de unanimidad, ampliamente utilizados en demostraciones de teoremas y axiomatizaciones de valores que cumplen la propiedad de linealidad; enseguida, se tratan las explicaciones y caracterizaciones de algunos de los principales valores conocidos dentro de los juegos cooperativos, como son el valor de Shapley y el valor de Banzhaf-Coleman; se termina este capítulo con una sección dedicada al potencial de un juego. El objetivo de tratar estos temas es preparar el campo para abarcar el estudio de juegos cooperativos con estructuras coalicionales, en los cuales, en muchas ocasiones, se extienden los conceptos que se tratarán en el presente capítulo.

1.1. Conceptos básicos de juegos cooperativos

Sea un conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ de jugadores. A todo $S \subseteq N$ tal que S sea no vacío se le llamará *coalición*. Denótese por $\mathcal{C}$ al conjunto potencia de N, esto es, al conjunto de subconjuntos de N y la idea es que $\mathcal{C}$ represente a todas las coaliciones que se puedan formar.

Definición 1.1. *Un juego cooperativo de n jugadores será una pareja* (N, ν) *en donde N es el conjunto de jugadores y* ν *una función real sobre los subconjuntos de N tal que* $\nu(\emptyset) = 0$

$$\nu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}.$$

Si se tiene una coalición $S \in \mathcal{C}$, la interpretación que se le da al juego es que los jugadores pertenecientes a S juegan unidos, y como tal, consiguen una valía conjunta $\nu(S)$. Como resultado del juego, se tiene un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$, en donde x_i representa el valor asignado al jugador i en el correspondiente juego. De ahí que el problema principal de los juegos cooperativos sea encontrar un vector de pagos que sea justo dadas las condiciones en que se llevó a cabo el juego.

Se planteará un ejemplo que se trabajará a lo largo de la investigación:

Ejemplo 1.1. *El granjero X produce* $8\frac{1}{3}$ *toneladas del cereal C; por su parte, el granjero Y produce* $16\frac{2}{3}$ *toneladas del mismo cereal. En el mercado nacional, cuando se venden menos de 20 toneladas, éstas se pagan a* \$1200 *cada una, y para tonelajes mayores el pago es de* \$2000*. El señor Z puede servir de intermediario entre agricultores y una empresa internacional que, a cambio de establecer un proceso extra durante la producción del cereal, paga la tonelada a* \$3200*, aunque el mínimo de tonelaje que compra es de 20. Si X y Y se unen a Z para llevar a cabo la venta de su cereal, la situación se plantea con un juego cooperativo en donde* $N = \{1, 2, 3\}$ *(1=X, 2=Y y 3=Z) y donde para todo* $S \subseteq N$*,* $v(S)$ *representa el monto obtenido por la venta del cereal cuando los jugadores en S intervienen en la negociación, y se muestra en la siguiente tabla:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
v(S)	10	20	0	50	0	0	80

Tabla 1.1: Representacion del juego (N, v) para la venta de cereal, donde las cantidades se expresan en miles.

El problema consiste ahora en repartir el monto obtenido por la venta del cereal entre los tres agentes que intervienen en el proceso de negociación (X,Y y Z).

Definición 1.2. *Un vector de pagos x es un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *cuya i-ésima coordenada representa el pago correspondiente en el juego cooperativo al i-ésimo jugador. Se denotará como* $x(S)$ *a*

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \qquad \forall\ S \subseteq N.$$

Se dice que un vector de pagos tiene *racionalidad individual* sí y sólo si $x_i \geq \nu(\{i\})$ para todo $i \in N$. A su vez, se dice que la racionalidad es *de grupo* sí y sólo si $x(S) \geq \nu(S)$ para toda $S \in \mathcal{C}$. Así mismo, se dirá que un vector de pagos x es *eficiente* sí y sólo si $x(N) = \nu(N)$.

Entonces, con un vector de pagos individualmente racional, cada jugador obtiene por lo menos lo que está garantizado si juega solo, mientras que en un vector con racionalidad de grupo, cada una de las coaliciones consigue al menos lo que ella garantiza si todos sus miembros jugaran como una sóla unidad.

A continuación se muestran definiciones concernientes a diversas modalidades de juegos cooperativos:

Definición 1.3. *Se dice que un juego* (N, ν) *es superaditivo sí y sólo si* $\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T)$ *siempre que* $S \cap T = \emptyset$*, con* $S, T \subset N$

Definición 1.4. *Se dirá que un juego* (N, ν) *es simétrico sí y sólo si, para cualesquiera dos coaliciones* S *y* T *de* N *con la misma cardinalidad, se tiene que* $\nu(S) = \nu(T)$.

Definición 1.5. *El juego* (N, ν) *es convexo sí y sólo si* $\nu(S) + \nu(T) \leq \nu(S \cup T) + \nu(S \cap T)$ *para todo* $S, T \subset N$.

Definición 1.6. *Se dice que un juego es simple sí y sólo si* $\nu(S) = 0$ *ó 1 para toda* $S \subset N$ *y* $\nu(N) = 1$. *Dado un juego simple se dirá que*

1. *S es una coalición ganadora sí y sólo si* $\nu(S) = 1$.
2. *i es un jugador vetador sí y sólo si está en toda coalición ganadora.*

Definición 1.7. *Se dice que un juego es monótono si* $v(S) \leq v(T)$ *para todo* T *y* S *subconjuntos de* N *tal que* $S \subseteq T$.

Definición 1.8. *Se dirá que un jugador* i *es nulo en* ν *sí y sólo si* $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S)$ *para toda* $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Otro concepto que será importante definir será el de *permutación de jugadores.* Denótese como

$$\Theta(N) = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}.$$

Puede verse que Θ contiene a todos los órdenes que son posibles definir sobre el conjunto N, o sea, a todas las permutaciones de los n jugadores. De tal forma, θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego. Esto es, el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. Así mismo, se denotará

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}.$$

1.2. Juegos de unanimidad

Tomése a G como el conjunto de todos los juegos superaditivos de n jugadores. Es fácil ver que G es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se definen la suma y el producto escalar sobre G de la siguiente manera:

1. $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$ para todo $\nu, \omega \in G$.

2. $(c\nu)(S) = c\nu(S)$ para todo $\nu \in G$ y $c \in \mathbb{R}$.

Para $S \subseteq N$ y $S \neq \emptyset$ el *juego de unanimidad* (N, u_S) se define como

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $T \subseteq N$.

Los juegos de unanimidad $\{(N, u_S) \mid S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}\}$ forman una base para los juegos cooperativos con n jugadores, en especial para G. La única descomposición lineal de la función característica v en términos de juegos de unanimidad viene dada por

$$v = \sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} c_S u_S$$

siendo $\{c_S\}$ números reales que representan los coeficientes de la combinación lineal, conocidos como coordenadas de unanimidad o coeficientes de Harsanyi, los cuales vienen dados por

$$c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$$

donde se representa a la cardinalidad de una coalición $S \subseteq N$ como $|S|$.

Ejemplo 1.2. *Considérese el juego cooperativo de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1. En este caso, la única descomposición en juegos de unanimidad es de la siguiente manera:*

$$v = 60u_{\{123\}} + 20u_{\{12\}} - 10u_{\{13\}} - 20u_{\{23\}} + 10u_{\{1\}} + 20u_{\{2\}}.$$

Existe otro punto de vista para ver a las coordenadas de unanimidad. Defínase la aplicación $\delta : \Omega \to \mathbb{R}$, donde $\Omega \subset 2^N$ con $\{\emptyset\} \in \Omega$, de la siguiente manera:

$$\delta(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \{\emptyset\} \\ v(S) - \sum_{T \subsetneq S} \delta(T) & \text{si } S \in \Omega \backslash \emptyset. \end{cases} \tag{1.1}$$

Puede interpretarse a $\delta(S)$ como los dividendos adicionales que la coalición S obtiene en caso de que ésta se forme, tomando en cuenta que todas las subcoaliciones de S ya han sido formadas. Con ello, se tiene que los coeficientes de la combinación lineal de un juego (N, v) utilizando como base a los juegos de unanimidad son precisamente estos dividendos, esto es

$$c_S = \delta(S); \text{ y con esto se tiene } v = \sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \delta(S) u_S$$

1.3. Valores para juegos cooperativos

Intuitivamente, una solución al juego (N, ν) puede verse como un vector de pagos, o alternativamente, un conjunto de vectores de pago asociados al juego (N, ν). El problema de encontrar soluciones puede enfocarse tomando a G como al conjunto de todos los juegos superaditivos de n jugadores y definiendo un operador $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que resuelva a todos los juegos de G; ahora sólamente bastará con definir *de buena manera* al operador φ, añadiéndole propiedades *deseables* (las cuales se considerarán como axiomas) y demostrar que existe un único operador que posee dichas propiedades.

Esta metodología convierte al problema de repartir el monto que consigue cada coalición al de si los jugadores aceptan o no los supuestos y características de la solución, y desde luego, los jugadores deben aceptar los resultados que de ellos se desprende.

Con el fin de simplificar la notación, se dirá en lo sucesivo que $\varphi(N, \nu) = (\varphi_i(N, \nu))_{i \in N}$ es una solución asociada al juego (N, ν). De igual forma, cuando se tenga un juego (N, ν) fijo y un subconjunto $S \subseteq N$, se escribirá $\varphi(\nu_S)$ para denotar $\varphi(S, \nu_S)$, en donde (S, ν_S) es el subjuego obtenido restringiendo a ν a los subconjuntos de S. Así mismo, se utilizarán las correspondientes letras minúsculas para referirse a la cardinalidad de las coaliciones (salvo en algunas ocasiones), las cuales se representarán con letras mayúsculas.

1.3.1. El valor de Shapley

En 1953, Lloyd S. Shapley establece una solución φ para juegos cooperativos que satisfaga los siguientes axiomas:

Axioma 1.1. (Aditividad). Para todo (N, ν) y $(N, \omega) \in G$

$$\varphi(\nu + \omega) = \varphi(\nu) + \varphi(\omega)$$

en donde el juego suma $(N, \nu + \omega)$ se define en la sección 1.2.

Este axioma puede interpretarse de la siguiente manera: la manera de repartir costos en dos procesos de negociación no cambia si se hace de manera conjunta o separadamente. Entonces, resulta natural pedir que lo que obtenga cada jugador en el juego suma sea exactamente la suma de lo que se obtenga en cada uno de los juegos individuales.

Para introducir el siguiente axioma se necesitan algunas definiciones. Para cada par $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$ se define un nuevo juego $\theta^* \nu$ como

$$(\theta^* \nu)(S) = \nu(\theta^{-1}(S)).$$

Esto es, lo que se quiere es que $\theta^* \nu$ represente un nuevo juego en donde los jugadores hayan cambiado papeles de acuerdo a la permutación θ; entonces, como los jugadores en $\theta(S)$ suplantan a los que están en S, el monto que puede conseguir $\theta(S)$ en $\theta^* \nu$ debe ser el mismo que podía conseguir S en ν. De la misma manera, para cada pareja $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ defínase un nuevo vector $\theta^* x \in \mathbb{R}^n$, donde su i-ésima coordenada está dada por

$$(\theta^* x)_i = x_{\theta(i)}.$$

Esto indica que el pago que recibe el jugador $\theta(i)$ con $\theta^* x$ es el mismo que recibía i con x.

Axioma 1.2. (Simetría). Para todo $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$, se tiene

$$\varphi(\theta^* \nu) = \theta^* \varphi(\nu).$$

En resumen, lo que pide este axioma es que la solución no dependa de las características personales del jugador. Por lo tanto, si los jugadores cambian roles durante el juego y cada coalición logra obtener exactamente la misma valía que la coalición a la que suplanta, entonces cada jugador en el nuevo juego debe obtener exactamente lo mismo que el jugador al cual suplanta.

Para introducir el siguiente axioma, denótese

$$\varphi(\nu)(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(\nu)$$

donde $\varphi(\nu) = (\varphi_1(\nu), \cdots, \varphi_n(\nu))$ es el vector φ asociado a ν. Entonces, $\varphi(\nu)(S)$ es el monto que obtiene la coalición S con la solución φ.

Axioma 1.3. (Eficiencia). Para todo $(N, \nu) \in G$ se tiene

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\nu) = \nu(N).$$

Lo que esta axioma está pidiendo que se cumpla es que el monto que se reparte entre todos los jugadores, sea exactamente el monto que puede conseguir la gran coalición.

Axioma 1.4. (Nulidad). Si i es un jugador nulo en (N, ν), entonces

$$\varphi_i(\nu) = 0.$$

Este axioma establece que a alguien que funge únicamente como observador dentro del juego no debe corresponderle pago alguno.

Teorema 1 (Shapley, 1953). *Existe un único valor φ sobre G, conocido como Valor de Shapley, que satisface los cuatro axiomas anteriores y que viene dado por la siguiente expresión:*

$$\varphi_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)\big] \qquad \forall\, i \in N. \tag{1.2}$$

DEMOSTRACIÓN.

Para demostrar la existencia del valor de Shapley, es suficiente mostrar que la solución propuesta satisface los axiomas citados con anterioridad. Se demostrará únicamente el axioma de simetría. Para ello basta demostrar que, siendo φ la solución dada, entonces debe cumplirse $\varphi(\theta^*\nu) = \theta^*\varphi(\nu)$ para todo $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$. Considérense θ y ν arbitrarios y supóngase que $\theta(i) = j$; entonces

$$
\begin{aligned}
(\theta^*\varphi(\nu))_i &= \varphi_{\theta(i)}(\nu) = \varphi_j(\nu) = \\
&= \sum_{S \subset N \setminus \{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[\nu(S \cup \{j\}) - \nu(S)] = \\
&= \sum_{\theta(S) \subset N \setminus \{j\}} \frac{|\theta(S)|!(n-|\theta(S)|-1)!}{n!}[\nu(\theta(S) \cup \theta(i)) - \nu(\theta(S))] \\
&= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[\theta^*\nu(S \cup \{i\}) - \theta^*\nu(S)] \\
&= \varphi_i(\theta^*\nu).
\end{aligned}
$$

Ahora se demostrará la unicidad. Utilizando el hecho de que los juegos de unanimidad forman una base para G, se puede descomponer a ν de la forma

$$\nu = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} c_S u_S$$

con valores $c_S \in \mathbb{R}$ definidos de manera única. Entonces, por el axioma de aditividad del valor de Shapley se tiene que

$$\varphi(\nu) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} \varphi(c_S u_S).$$

Y por lo tanto, sólo basta demostrar que el valor de Shapley es único para cada $c_S u_S$. Para ello, nótese que

1. Si $i \notin S$, entonces i es un jugador nulo en u_S.
2. $(c_S u_S)(N) = c_S$.
3. Si $i, j \in S$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(S) = S$, por el axioma de simetría se tiene

   $$\varphi_i(\theta^* u_S) = \varphi_{\theta(i)}(u_S) = \varphi_j(u_S)$$

   y dada la forma en que se tomó θ, esto es, $u_S = \theta^* u_S$, se tiene

   $$\varphi_i(\theta^* u_S) = \varphi_i(u_S)$$

   de donde

   $$\varphi_i(u_S) = \varphi_j(u_S).$$

Dado lo anterior, si se tiene que φ satisface los últimos tres axiomas, el único valor posible para $c_S u_S$ es

$$\varphi_i(c_S u_S) = \begin{cases} \frac{c_S}{s} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

□

Dada la última expresión obtenida en la demostración anterior, es posible expresar al valor de Shapley en términos de los dividendos introducidos en (1.1) de la siguiente manera:

$$\varphi_i(\nu) = \sum_{S \ni i} \frac{\delta(S)}{s} \qquad \forall\ i \in N. \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.3. *Considérese el juego cooperativo dado en el ejemplo 1.1. El valor de Shapley asignado a este juego es*

$$\varphi(v) = (35, 40, 5).$$

Para comprender mejor el significado del valor de Shapley, considérese la siguiente metodología: elíjase la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i-ésimo de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, \cdots, n-1\}$ (puede hacerse de n maneras), para luego elegir de manera aleatoria a una coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$ con la cardinalidad dada, también de acuerdo a una distribución uniforme sobre las coaliciones disponibles (es posible hacerlo de $\binom{n-1}{s}$ formas). En base al proceso anterior, si se le da al jugador i la contribución marginal que aporta al incorporarse a S, es decir, $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$, entonces el pago esperado para el i-ésimo jugador será el valor de Shapley.

También es posible ver al valor de Shapley según la siguiente expresión:

$$\varphi_i(\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{R}} (\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})) \tag{1.4}$$

donde $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$ es el conjunto de todos los jugadores que preceden al jugador i en el orden $\mathcal{R}$. Con esta expresión, se elige al azar un orden $\mathcal{R}$ de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y si se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$, entonces el pago esperado que obtiene es el valor de Shapley.

1.3.2. Axiomatizaciones alternas del valor de Shapley

Uno de los aspectos más elegantes de la metodología axiomática en teoría de juegos es que un mismo concepto de solución puede ser caracterizado por diferentes conjuntos de axiomas. A raíz de la publicación del artículo de Shapley en 1953, una gran cantidad de investigaciones se han llevado a cabo, y gran parte de ellas se enfocan a la reformulación axiomática del valor de Shapley porque consideran que algunos de los axiomas son insatisfactorios. A continuación se muestra una reaxiomatización propuesta por Young en [37] que introduce un concepto muy importante, la monotonía de un valor.

Sea

$$\nu^i(S) = \begin{cases} \nu(S) - \nu(S \backslash \{i\}) & \text{si } i \in S \\ \nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

una expresión para la contribución marginal de i a S.

Axioma 1.5. (Monotonía Fuerte). Se dirá que un valor φ es fuertemente monótono sí y sólo si para cada dos juegos $(N, \nu), (N, w) \in G$ tales que $\nu^i(S) \geq w^i(S)$ para toda $S \subseteq N$, entonces $\varphi_i(\nu) \geq \varphi_i(w)$.

Este axioma está diciendo que si el juego cambia de forma tal que la contribución marginal de un jugador a todas las coaliciones no decrezca, entonces el valor del jugador en el juego nuevo no debe decrecer.

Teorema 2 (Young, 1985)**.** *El valor de Shapley es la única solución fuertemente monótona que satisface los axiomas de simetría y eficiencia.*

Como el valor de Shapley satisface los axiomas de simetría y eficiencia y dado que es fuertemente monótono, la existencia queda demostrada. La unicidad se demuestra haciendo ver que el valor de Shapley es el único operador que cumple con las características enunciadas en el teorema y para ello se utilizan los juegos de unanimidad.

Myerson (1977) introduce un concepto muy importante en cuanto a la teoría del valor para juegos cooperativos, el cual puede verse en [23] para mayores explicaciones, y el cual es

Axioma 1.6. (Contribuciones balanceadas). Se dirá que un valor ϕ satisface el axioma de contribuciones balanceadas si para cualesquiera dos jugadores $i, j \in N$ y todo $(N, v) \in G$ se cumple

$$\phi_i(v) - \phi_i(v|_{N \backslash \{j\}}) = \phi_j(v) - \phi_j(v|_{N \backslash \{i\}})$$

en donde $(v|_{N \backslash \{j\}})$ representa el juego restringido a subconjuntos de $N \backslash \{j\}$. Con un valor que cumpla con el axioma anterior se tiene que el pago de un jugador, por ejemplo i, cambia de la misma manera cuando otro jugador, por ejemplo j, decide no participar, que el pago del jugador j cuando el que no decide participar es ahora el jugador i. Lo anterior puede interpretarse como que el hecho de que un jugador salga del juego perjudica de la misma manera a todos los jugadores que permanecieron, por lo que nadie se verá beneficiado con la salida de un jugador. Con esto, Myerson introduce un valor que asocia un vector de pagos a los juegos en donde se tiene un grafo que representa canales de comunicación entre los jugadores, y como resultado, propone la siguiente caracterización:

Teorema 3 (Myerson, 1977)**.** *El valor de Shapley es la única solución para juegos cooperativos que satisface las propiedades de eficiencia, simetría y contribuciones balanceadas.*

1.3.3. El valor de Shapley ponderado

Otro concepto de solución que además cumple con la propiedad de linealidad es el valor de Shapley ponderado. La principal consideración de este valor es tomar en cuenta el esfuerzo que los jugadores necesitan realizar. Teniendo esto en mente, la idea es repartir de acuerdo a ciertas ponderaciones establecidas. Esta metodología da lugar al valor de Shapley ponderado, un valor que no necesariamente satisface el axioma de simetría.

Por ejemplo, considérese un juego de dos jugadores: el valor de Shapley asigna exactamente la mitad del excedente a cada uno de los jugadores, más su valía individual. Pero podría ser que el jugador número uno necesite realizar un esfuerzo mucho mayor que el jugador número dos al momento de trabajar los dos juntos para poder conseguir la ganancia conjunta y por lo tanto, podría argumentar que a él le debiera corresponder un mayor porcentaje de dicho excedente. Otros ejemplos surgen cuando el jugador uno representa a alguna asociación con un gran número de afiliados y el jugador dos a una asociación con baja cantidad de asociados: pareciera viable solicitar que a la asociación con mayor número de afiliados le correspondiera un porcentaje mayor del excedente.

Como se vio en la sección 1.3.1, el valor de Shapley es una aplicación lineal que para cada juego de unanimidad u_S, con $S \subseteq N$ y $i \in N$ siendo N el conjunto de jugadores, se define como

$$\varphi_i(u_S) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Intuitivamente se puede ver que los miembros de S reparten una unidad entre los miembros que la conforman de manera igualitaria. El valor de Shapley ponderado generaliza esta situación proponiendo diferentes maneras de dividir esta unidad entre los miembros de S en u_S y para ello, se toma en cuenta un vector de pesos positivos $\lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$ y en cada u_S, los jugadores reparten la unidad proporcionalmente a sus pesos.

Definición 1.9. *El valor de Shapley ponderado con un sistema de ponderación simple $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, es un mapeo lineal $\psi^\lambda : G \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\varphi_i^\lambda(u_S) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda(S)} & \textit{si } i \in S \\ 0 & \textit{de otra forma} \end{cases} \tag{1.6}$$

en donde $\lambda(S) = \sum_{i \in S} \lambda_i$.

Obsérvese que φ^λ equivale al valor de Shapley sí y sólo si $\lambda = (1, 1, ..., 1)$.

Ejemplo 1.4. *Sea el juego de tres jugadores considerado en el ejemplo 1.1. Considérese el vector de pesos $\lambda = (1, 2, 3)$; el valor de Shapley ponderado para* *este vector λ es*

$$\varphi^{\lambda}(v) = (24\frac{1}{6}, 45\frac{1}{3}, 10\frac{1}{2}).$$

Puede verse en este ejemplo que el pago asignado al jugador 3 aumentó de manera considerable con respecto al valor de Shapley, dado que se considera que él es quien realiza el mayor esfuerzo dentro del trabajo en conjunto.

Al igual que sucede con el valor de Shapley, el valor de Shapley ponderado tiene un enfoque probabilístico. Sea λ un vector de pesos; para toda $i \in N$ se tiene

$$\varphi_i^{\lambda}(v) = \sum_{\mathcal{R}} pr^{\lambda}(\mathcal{R})(\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})) \tag{1.7}$$

en donde, para un orden dado $\mathcal{R} = (i_1, i_2, ..., i_n)$

$$pr^{\lambda}(\mathcal{R}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{i_j}}{\sum_{k=1}^{j} \lambda_{i_k}}.$$

Para obtener esta fórmula probabilística, considérese la situación en la que un jugador en N, digamos i_n, se selecciona de manera aleatoria utilizando una distribución de probabilidad tal que la probabilidad de que un jugador sea elegido sea proporcional a su peso, y se coloca al final del orden. Enseguida, se selecciona otro jugador, i_{n-1}, utilizando el mismo proceso para $n-1$ jugadores y se coloca en la penúltima posición. Continuando el mismo proceso $n-2$ veces, se obtiene un orden $\mathcal{R} = (i_1, i_2, ..., i_n)$ y la probabilidad de ocurrencia de dicho orden es justamente la fórmula anterior.

Se dirá que la coalición $S \subseteq N$ es una *coalición de socios* o *coalición tipo-p* en el juego (N, v), si para todo $T \subsetneq S$ y todo $R \subseteq N \backslash S$, $v(R \cup T) = v(R)$. Con esto, considerando a ϕ como una solución para juegos cooperativos, considérense los siguientes axiomas:

Axioma 1.7. (Asociación). Si S es una coalición tipo-p en (N, v) entonces

$$\phi_i(v) = \phi_i(\phi(v)(S)u_S) \quad \text{para todo } i \in S.$$

Una coalición tipo-p en el juego (N, v) se comporta en cierto sentido como un jugador individual en el juego, dado que todas sus subcoaliciones son carentes de poder. En este sentido, S se comporta internamente de la misma manera en v que en u_S y éste es el contenido del axioma anterior: $\phi(v)(S)u_S$ es el juego de unanimidad en el cual los miembros de S negocian sobre $\phi(v)(S)$, lo cual es lo que ellos reciben juntos en $\phi(v)$; $\phi_i(\phi(v)(S)u_S)$ es lo que recibe el jugador i en esta negociación y debiera ser exactamente lo mismo que lo que él recibe en (N, v).

Axioma 1.8. (Positividad). Si (N, v) es un juego monótono, entonces

$$\phi(v) \geq 0.$$

Teorema 4 (Kalai y Samet, 1987). *Una solución ϕ satisface los axiomas de eficiencia, aditividad, positividad, nulidad y asociación sí y sólo si existe un sistema de pesos λ tal que ϕ es el valor de Shapley ponderado φ^{λ}.*

La prueba del teorema anterior puede encontrarse en [16]. Así mismo, en la misma referencia es posible encontrar diversas axiomatizaciones del valor de Shapley ponderado.

1.3.4. El valor de Banzhaf-Coleman

En muchas ocasiones el axioma de eficiencia parece natural que debiera cumplirse, como por ejemplo cuando la finalidad de un juego es distribuir costos o repartir beneficios. En otras ocasiones, por ejemplo en el contexto de situaciones de votación modeladas como juegos cooperativos, no existe un beneficio a repartir, por lo que algunos autores establecen que en estos casos no tiene sentido el axioma de eficiencia, ya que la finalidad del juego es medir el poder, no distribuirlo. Para una discusión más detallada sobre este tema, véase [19].

A aquellos valores que miden el poder de los jugadores se les conoce como *Índices de poder*, y en esta sección se tratará uno de los índices de poder más conocidos y ampliamente estudiados, el valor de Banzhaf-Coleman, el cual viene dado por

$$\phi_i^B(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \big[v(S\cup\{i\}) - v(S)\big]. \tag{1.8}$$

Para cada coalición $T \subseteq N$ se deriva un nuevo juego v_T en donde los jugadores que se encuentren en T se juntan en uno sólo, llamado T' y por lo tanto, el espacio de jugadores para v_T es $N\backslash T \cup \{T'\}$, y el juego v_T se define como

$$\begin{aligned} v_T(S) &= v(S), \\ v_T(S\cup\{T'\}) &= v(S\cup T) \end{aligned}$$

donde $S \subseteq N\backslash T$.

Axioma 1.9. (Reducción). Para cualquier coalición de dos jugadores $T = \{i,j\} \subset N$

$$\phi_i(v) + \phi_j(v) \leq \phi_{T'}(v_T).$$

Lo que el axioma anterior está diciendo es que para cualquier coalición de dos jugadores $T = \{i,j\}$, la suma de los pagos obtenidos por ambos jugadores en el juego original es menor o igual al valor de T' en el nuevo juego $(N\backslash T\cup\{T'\}, v_T)$ en donde los jugadores se amalgaman en uno sólo. Dicho de otra manera, la unificación de cualesquiera dos jugadores siempre es productiva.

Teorema 5 (Lehrer, 1988). *El valor de Banzhaf-Coleman dado en (1.8) es la única solución para juegos cooperativos que satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad y reducción.*

Para detalles de la demostración, véase [20] y [31].

En un juego simple, el valor de Banzhaf-Coleman del i-ésimo jugador es el número de coaliciones perdedoras que se vuelven coaliciones ganadoras cuando se les incorpora el jugador i, dividido entre el número de coaliciones que no lo contienen (incluyendo el vacío), con el fin de normalizar el valor entre cero y uno. La expresión dada en (1.8) es una forma de generalizar esta idea.

Ejemplo 1.5. *Sea el juego de tres jugadores considerado en el ejemplo 1.1. El valor de Banzhaf-Coleman para este juego es*

$$\phi^B(v) = (30, 35, 0)$$

y como claramente se hace notar en el teorema anterior, puede verse que el valor no cumple el axioma de eficiencia.

A la vista de las dos soluciones proporcionadas (valor de Shapley y de Banzhaf-Coleman) en las secciones anteriores, se ve que ambos valores asignan a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones marginales que dicho jugador hace a todas las coaliciones a las que se incorpora. Para el valor de Shapley los pesos asignados a cada coalición dependen de su tamaño, mientras que en el valor de Banzhaf-Coleman todas las coaliciones son equiprobables.

Al igual que ocurre con el valor de Shapley, es posible citar diferentes axiomatizaciones del valor de Banzhaf-Coleman. Es inmediato comprobar que este valor también satisface el axioma de monotonía fuerte introducido por Young (1985), y con ello se tiene una nueva caracterización:

Teorema 6 (Young, 1985)**.** *El valor de Banzhaf-Coleman dado en (1.8) es la única solución para juegos cooperativos que satisface los axiomas de simetría, monotonía fuerte y reducción.*

1.4. El potencial de un juego

Una manera de abordar el problema de repartición muy usada en economía consiste en asignar a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición, esto es

$$\phi_i(v) = v(N) - v(N \backslash \{i\}).$$

Obviamente, esta regla de asignación no es posible de llevarse a cabo en general, simplemente porque la suma de estas contribuciones marginales pueden no ser iguales a la valía de la gran coalición, y no habrá forma de conseguirla (no cumple el axioma de eficiencia). Hart y Mas-Colell [13] introducen el concepto de *potencial*, propuesto como una aplicación que asigna un número real a cada subcoalición de N de modo tal que cada jugador reciba su contribución marginal a la gran coalicion calculada de acuerdo a esta función potencial; esto trae como consecuencia que el requerimiento de que la regla de asignación sea factible y eficiente determina al proceso de manera única.

Sea P una aplicación $P : G \to \mathbb{R}$ que asocia un número real $P(N, v)$ a cada juego $(N, v) \in G$; a fin de simplificar la notación, se escribirá $P(S)$ cuando se necesite hacer referencia a $P(S, v|_S)$ con $S \subseteq N$. Con ello, la contribución marginal respecto a P del i-ésimo jugador se define como

$$D^i P(N) = P(N) - P(N \backslash \{i\}).$$

La función P se conoce como *función potencial* si satisface las siguientes condiciones:

$$\sum_{i \in N} D^i P(N) = v(N) \qquad \text{y} \qquad P(\emptyset) = 0 \tag{1.9}$$

para todos los juegos $(N, v) \in G$. De esta manera, una función potencial es tal que la asignación de las contribuciones marginales de cada jugador con respecto a la gran coalición (de acuerdo a dicha función potencial) siempre sume exactamente la valía de la gran coalición.

Teorema 7 (Hart y Mas-Colell, 1989)**.** *Para todo juego $(N, v) \in G$, el vector de pago resultante $(D^i P(N))_{i \in N}$ coincide con el valor de Shapley del juego. Más aún, el potencial de cualquier juego está únicamente determinado por las condiciones dadas en (1.9) aplicadas únicamente al juego y a sus subjuegos (es decir, $(S, v|_S)$ para toda $S \subset N$).*

Debido a las condiciones dadas en (1.9), y aplicando la función potencial a toda $S \subseteq N$, se tiene

$$P(S) = \frac{1}{s} \left[v(S) + \sum_{i \in S} P(S \backslash \{i\}) \right].$$

Iniciando con $P(\emptyset) = 0$, entonces se tiene determinada a $P(S)$ con $S \subseteq N$ de manera recursiva. Con esto, y por el teorema anterior, se tiene un procedimiento recursivo determinado de manera única utilizando potenciales que equivale al valor de Shapley

$$\varphi_i(v) = P(N) - P(N \backslash \{i\}). \tag{1.10}$$

Ejemplo 1.6. *Considérese el juego de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1. Si se le asignara a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición se tiene*

$$\phi(v) = (80, 80, 30)$$

lo cual claramente no cumple el axioma de eficiencia. Los potenciales obtenidos para toda $S \subseteq N$ se muestran a continuación

$$P(\{i\}) = v(\{i\}); \qquad P(N) = 45;$$
$$P(\{12\}) = 40; \qquad P(\{13\}) = 5; \qquad P(\{23\}) = 10;$$

Con esto, se tiene que el valor de Shapley, utilizando la función potencial, viene dado por

$$\varphi(v) = (P(N) - P(\{23\}), P(N) - P(\{13\}), P(N) - P(\{12\})) = (35, 40, 5).$$

Al igual que ocurre con el valor de Shapley o el valor de Shapley ponderado, se procederá a dar una interpretación probabilística a la idea del potencial. Considérese el siguiente modelo para elegir un subconjunto $S \subseteq N$ con n elementos. Primeramente, se elige aleatoriamente un tamaño para la coalición $s = \{1, 2, ..., n\}$ (con probabilidad $1/n$ cada uno). Luego, se escoge aleatoriamente un subconjunto S de N de tamaño s (con probabilidad $1/\binom{n}{s}$). Equivalentemente, es posible ordenar los n elementos (existen $n!$ órdenes posibles), escoger un punto de corte s (es posible hacerlo de n maneras), y tomar los primeros s elementos en el orden. Entonces, siendo E el valor esperado con respecto a esta distribución de probabilidad se tiene

$$P(N) = E\left[\frac{n}{s}v(S)\right] \qquad \forall\ (N, v) \in G \tag{1.11}$$

Por lo tanto, el potencial es la valía esperada normalizada; equivalentemente, el potencial per-cápita $P(N)/n$ equivale a la valía promedio per-cápita $v(S)/s$. De aquí, el potencial proporciona una representación natural, mediante números únicos, del juego.

El concepto de potencial puede verse como una nueva caracterización del valor de Shapley, en donde únicamente se necesita un axioma dado por las propiedades (1.9). Además, la fórmula presentada provee una forma simple y recursiva del potencial, y por lo tanto, el uso del potencial se convierte en un algoritmo muy eficiente para el cálculo del valor de Shapley.

1.5. Conclusiones

Hasta ahora se han presentado los principales resultados en cuanto a soluciones de juegos cooperativos con un número finito de jugadores, haciendo especial hincapié en sus propiedades y axiomatizaciones, y a la vez sirviendo como una especie de repaso acerca de los conceptos básicos dentro de la teoría de juegos cooperativos. En la mayoría de los casos, los resultados presentados carecen de una demostración formal, mas sin embargo es posible localizarla en las referencias citadas.

Con el estudio de este capítulo se pretendía dar todas las bases necesarias para abordar de lleno el problema que surge cuando los jugadores se encuentran agrupados de cierta forma preestablecida, el cual se tratará en los siguientes dos capítulos.

Capítulo 2

Valores Coalicionales

Existen situaciones prácticas dentro de los juegos cooperativos en las que la unión de todos los jugadores (la gran coalición) no se lleva a cabo por diversas razones. Supóngase por ejemplo, el juego cooperativo definido como

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1 \\ 50 & \text{si } |S| = 2 \\ 60 & \text{si } |S| = 3 \end{cases}$$

con $|S| \in N$. En caso de que se forme la gran coalición, el vector de pagos correspondiente al valor de Shapley para este juego será de (20,20,20). Analícese el caso en que se desee excluir a un jugador, digamos, al jugador 3. Es claro que el vector de pagos asignado será de (25,25,0), y por lo tanto, es mejor para los jugadores 1 y 2 excluir al jugador 3 y así negociar entre ellos, ya que es mejor repartir 50 entre dos que 60 entre tres. Conclusión: la gran coalición no siempre se forma.

En el presente capítulo se presentará el estudio de algunos valores cuando los jugadores se agrupan en conjuntos con la finalidad de aumentar su ganancia individual. Primeramente se tratarán las definiciones y conceptos que conlleva que los jugadores se encuentren agrupados, para luego seguir con el estudio de los valores existentes para este tipo de juegos, tratando primero los valores de Aumann-Drèze y de Owen, considerados como soluciones clásicas, así como propiedades inherentes en este tipo de situaciones, como los índices de poder y la idea del potencial tratada en el capítulo anterior.

Como parte de las aportaciones, en este capítulo se están demostrando dos nuevas propiedades que cumple el valor de Owen, considerado una solución clásica para este tipo de situaciones, las cuales le proveen una mayor estabilidad ante situaciones de manipulación del juego (sección 2.3.2); de igual manera se proponen nuevas soluciones que corresponde a extensiones de valores ampliamente estudiados dentro de los juegos cooperativos, como son el valor de consenso, solidaridad y de división de excesos, en donde el juego entre las coaliciones desempeña un papel fundamental al momento de repartición de pagos (sección 2.7). Como parte de aplicación de las soluciones a situaciones reales se presenta un estudio acerca del poder de cada uno de los partidos políticos que integran la Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión (sección 2.10).

2.1. Conceptos generales

Una *estructura coalicional* es una partición de N en bloques disjuntos llamados coaliciones. Se representará de la forma $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$. Es decir, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ es una colección de coaliciones tal que $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = N$ y $B_k \cap B_j = \emptyset$ para $k \neq j$. La idea de una estructura coalicional es que los jugadores se agrupen en conjuntos de modo tal que el monto conseguido por la coalición sea mayor que la suma de los montos individuales de los integrantes de la coalición si éstos jugaran individualmente. Es claro, a partir de la definición, que cuando los jugadores están organizados acorde a una estructura coalicional cada jugador pertenece a una única coalición.

Existen otras posibles formas de organización que pueden tomar los jugadores: considerése un juego que modele las relaciones diplomáticas entre Estados Unidos, Siria e Israel: Israel y Siria tienen relaciones diplomáticas con Estados Unidos pero no entre ellos. En este caso, Estados Unidos pertenece a ambas coaliciones formadas ({Estados Unidos-Siria} y {Estados Unidos-Israel}). Claramente no se tiene una estructura coalicional, ya que un jugador (Estados Unidos) pertenece a más de una coalición. Para ello se introducirá un nuevo concepto: una *configuración coalicional* de N es una familia de coaliciones $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = N$, donde puede ocurrir que las coaliciones $B_k \in \mathfrak{B}$ no necesariamente sean disjuntas.

Es posible representar las configuraciones coaliciones mediante gráficas, donde los nodos representen a los jugadores y los arcos indican los lazos de cooperación que existen entre ellos. Así, por ejemplo, la siguiente gráfica

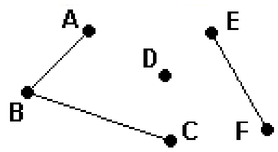

Figura 2.1: Configuración Coalicional

indica que A mantiene relaciones con B, pero no con C, ni con D,E o F; por su parte, B está coalicionado con A y C. D sería un jugador solitario.

Entonces, una estructura coalicional puede verse como una gráfica en donde cada uno de sus componentes es una gráfica totalmente conexa (existe un arco entre cualesquiera par de nodos); y en este contexto, un *valor para un juego con estructura coalicional* es una aplicación que asigna un vector ψ a cada terna $(N, v, \mathfrak{B})$, esto es $\psi : G \times B \to \mathbb{R}^n$, donde B representa a todas las posibles estructuras coalicionales que pueden formarse dado un número finito n

de jugadores. En caso de que no haya confusión respecto a cuál es el conjunto de jugadores, y con el afán de simplificar la notación, se escribirá $\psi(v|_S, \mathfrak{B}|_S)$ para denotar $\psi(S, v|_S, \mathfrak{B}|_S)$, esto para todo subconjunto $S \subseteq N$, y en donde $\mathfrak{B}|_S$ (o en algunas ocasiones, abusando de la notación, $\mathfrak{B}_S$) será la estructura coalicional restringida a S, i.e. $\mathfrak{B}|_S = \{B_k \cap S \mid k = 1 \ldots, m\}$.

Cuando se analizan estructuras coalicionales es natural que surja la pregunta de porqué los individuos forman coaliciones en lugar de formar un único grupo integrado por la sociedad entera (la gran coalición). Cuando el juego es superaditivo existen suficientes motivos para que los jugadores formen coaliciones ya que actuando juntos obtienen al menos lo que conseguirían si estuvieran separados.

Pero también existen razones para la existencia de ambientes donde los juegos no sean superaditivos: la primera y más fuerte es la ineficiencia inherente de la gran coalición, ya que actuar juntos puede ser difícil, costoso o ilegal, o bien algunos jugadores, por diversas razones personales, pueden no querer asociarse con ciertos jugadores: la cooperación puede cambiar la naturaleza del juego.

2.2. El valor de Aumann-Drèze

Dados un conjunto finito de jugadores N y una estructura coalicional $\mathfrak{B}$, Aumann y Drèze [3] definieron lo que ellos llamaron un $\mathfrak{B} - valor$ como una función $\phi : G \times B \to \mathbb{R}^n$ que satisface los siguiente axiomas:

Axioma 2.1. (Eficiencia Relativa). Para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\phi(v, \mathfrak{B})(B_k) \equiv \sum_{i \in B_k} \phi_i(v, \mathfrak{B}) = v(B_k).$$

El axioma anterior está indicando que cada coalición reparte exactamente su valía entre los jugadores que la conforman.

Axioma 2.2. (Simetría Local). Para todas las permutaciones θ de N bajo las cuales $\mathfrak{B}$ es invariante, se tiene que

$$\phi(\theta v, \mathfrak{B})(S) = \phi(v, \mathfrak{B})(\theta(S)) \qquad \forall\ S \subseteq B_k \in \mathfrak{B}$$

donde $\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$ y $(\theta v)(S) = v(\theta^{-1}(S))$.

En este caso, no se permite cualquier permutación de los jugadores, ya que si dos jugadores cualesquiera intercambian papeles, es posible que se forme una estructura coalicional diferente. Por lo tanto, únicamente son válidos aquellos intercambios de jugadores dentro de la misma coalición, lo cual dejará invariante a la estructura coalicional $\mathfrak{B}$.

Axioma 2.3. (Aditividad). Para dos juegos $(N, v, \mathfrak{B})$, $(N, w, \mathfrak{B}) \in G \times B$

$$\phi(v + w, \mathfrak{B}) = \phi(v, \mathfrak{B}) + \phi(w, \mathfrak{B}).$$

Axioma 2.4. (Nulidad). Si i es un jugador nulo en $(N, v, \mathfrak{B})$, entonces

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = 0.$$

Los axiomas 2.3 y 2.4 tienen la misma interpretación que para el valor de Shapley, dados en los axiomas 1.1 y 1.4.

Es claro que en el caso de que $\mathfrak{B} = \{N\}$, se tiene entonces que $\phi(v, \mathfrak{B}) = \mathrm{Sh}(v)$ (de aquí en adelante se denotará al valor de Shapley como Sh). Para cada $S \subseteq N$, denótese por $(S, v|_S)$ al juego en S definido para todo $T \subseteq S$ como $(v|_S)(T) = v(T)$.

Teorema 8 (Aumann y Drèze, 1974)**.** *Sea un juego $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ en donde se tiene la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Entonces, existe un único valor, conocido como valor de Aumann-Drèze (o $\mathfrak{B}-$valor), que satisface los axiomas de nulidad, linealidad, simetría local y eficiencia local, donde para todo $k \in \{1, 2, ..., m\}$ y todo $i \in B_k$ viene dado por*

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = \mathrm{Sh}_i(v|_{B_k}). \tag{2.1}$$

Demostración.

La existencia se demuestra verificando que el valor dado por (2.1) satisface los axiomas 2.1-2.4. Sólo falta demostrar la unicidad, y al igual que para el valor de Shapley, esto se hace utilizando la base para G de los juegos de unanimidad u_S; utilizando el hecho que el $\mathfrak{B}$-valor cumple con el axioma de aditividad, basta mostrar la unicidad para un juego de la forma $(N, c_S u_S)$ con $c_S \in \mathbb{R}$. Por nulidad se tiene que $\phi_i(c_S u_S, \mathfrak{B}) = 0$ si $i \notin S$. Por el axioma de simetría local, si i y j se encuentran en S y en el mismo miembro B_k de $\mathfrak{B}$ entonces

$$\phi_i(c_S u_S, \mathfrak{B}) = \phi_j(c_S u_S, \mathfrak{B}).$$

Por lo tanto, del axioma de eficiencia relativa, se tiene que si $i \in B_k$, entonces

$$\phi_i(c_S u_S, \mathfrak{B}) = \begin{cases} \frac{c_S}{s} & \text{si } S \subset B_k \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Lo anterior determina a $\phi(c_S u_S, \mathfrak{B})$, y entonces se termina la prueba. $\square$

Al igual que el valor de Shapley, derivado de la última expresión escrita en la prueba, es posible escribir el $\mathfrak{B}-$valor en función de dividendos (descritos en la sección 1.2) de la siguiente manera

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = \sum_{\substack{S \subseteq B_k \\ S \ni i}} \frac{\delta(S)}{s} \quad \text{con } i \in B_k. \tag{2.2}$$

La consideración que se está tomando con el valor de Aumann-Drèze es que el pago de cualquier jugador no depende de su contribución a otras coaliciones diferentes a la que él pertenece. Esto es, para cualquier $i \in B_k$, $\phi_i(v, \mathfrak{B})$ no depende de $v(S)$, con $S \nsubseteq B_k$, o de las contribuciones de i a algún S tal que $S \nsubseteq B_k$. Por lo tanto, la estructura coalicional puede pensarse como la representación de las relaciones contractuales que afectan los derechos de los jugadores sobre los recursos, es decir, los jugadores en $B_k \in \mathfrak{B}$ son los únicos "dueños" del recurso total $v(B_k)$, y donde transferir utilidades a jugadores de otras coaliciones está prohibido. Dicho de otra manera, los jugadores que conforman una coalición no pueden compartir beneficios con algún jugador de alguna otra coalición diferente a la propia.

Ejemplo 2.1. *Considérese el juego (N, v) dado en el ejemplo 1.1 y supóngase que se forma la estrutura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, lo cual indica que los granjeros se han asociado para negociar junto con el intermediario. En este juego es fácil comprobar que el vector de pagos asignado a los jugadores por la solución de Aumann-Drèze es*

$$\phi(v, \mathfrak{B}) = (30, 20, 0).$$

En el ejemplo anterior parece que se llevaron a cabo dos juegos cooperativos, uno de ellos en cada coalición, y en parte es así, ya que ésto es lo que sugiere el axioma 2.1. Por otro lado, puede verse que se están "desperdiciando" recursos ya que aunque todos los jugadores están involucrados en el juego, no se reparte el monto que se consiguiría si se formara la gran coalición.

2.3. El valor de Owen

Un valor de estructura coalicional (valor CS), es un operador que asigna a cada juego (N, v) con un número finito de jugadores, a toda estructura coalicional $\mathfrak{B}$ y a todo jugador $i \in N$, un número real $\varphi_i(v, \mathfrak{B})$. De manera equivalente, se puede pensar en $\varphi(v, \mathfrak{B})$ como una medida finita aditiva de N, definida como

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(v, \mathfrak{B}) \qquad \text{para } S \subseteq N.$$

En 1977, Owen define un valor para juegos cooperativos mediante la siguiente metodología: sea $(N, v) \in G$ y $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ una estructura coalicional, y sea $B_p \in \mathfrak{B}$; para todo $S \subseteq B_p$ se define

$$\mathfrak{B}(S) = \{B_1, \cdots, B_{p-1}, S, B_{p+1}, \cdots, B_m\}, \text{ y}$$

$$v^{\mathfrak{B}(S)}(T) = v(\bigcup_{B_k \in T} B_k) \quad \forall\, T \subseteq \mathfrak{B}(S)$$

o sea, $(M, v^{\mathfrak{B}(S)})$ es el juego restringido a $\mathfrak{B}(S)$ considerándolo como un conjunto de jugadores. Ahora considérese $v_p^{\mathfrak{B}}$ definido para todo $S \subseteq B_p$ de la siguiente manera

$$v_p^{\mathfrak{B}}(S) = \mathrm{Sh}_S(v^{\mathfrak{B}(S)})$$

o sea, $v_p^{\mathfrak{B}}(S)$ es el valor de Shapley del "jugador" S en $v^{\mathfrak{B}(S)}$; entonces, Owen define el valor coalicional del jugador $i \in B_p$, denotado como se dijo anteriormente, por $\varphi_i(v, \mathfrak{B})$ como el valor de Shapley del jugador i en el juego $(B_p, v_p^{\mathfrak{B}})$. Formalmente se escribe

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \mathrm{Sh}_i(v_p^{\mathfrak{B}}) \quad \forall\ i \in B_p.$$

Por lo anterior, la interpretación del valor de Owen puede verse como dos procesos de repartición utilizando el valor de Shapley: supóngase que se quiere calcular el valor de Owen para $i \in B_k \in \mathfrak{B}$; durante una primera etapa, se considera a cada coalición $B_r \in \mathfrak{B}\backslash B_k$ como un único jugador y entonces cada subcoalición $S \subseteq B_k$ funge como representante de B_k en el *juego de las coaliciones* (o juego de grupos) y lo que consigue dicha subcoalición S, pagando según el valor de Shapley, forma un juego, $v_p^{\mathfrak{B}}(S)$, que intuitivamente representa lo que cada subcoalición $S \subseteq B_k \in \mathfrak{B}$ puede conseguir por sí misma; entonces se paga en el nuevo juego utilizando el valor de Shapley.

Considérese la siguiente axiomatización del valor de Owen φ para todo juego (N, v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$, tal que $\varphi(v, \mathfrak{B}) \in \mathbb{R}^n$:

Axioma 2.5. (Eficiencia). Sean $\mathfrak{B}$ y N, entonces debe cumplirse que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v, \mathfrak{B}) = v(N).$$

La eficiencia del valor de Owen es un hecho esencial, ya que lo hace diferir de manera importante del valor de Aumann-Drèze, donde cada coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ obtiene únicamente su valor $v(B_k)$ y es repartido entre los miembros que la conforman, mientras que en el valor CS *todas* las coaliciones participan en la repartición del total conseguido por la gran coalición $v(N)$, pudiendo existir algún $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $\varphi(v, \mathfrak{B})(B_j) > v(B_j)$. La idea es que las coaliciones se formen para obtener una mejor posición cuando se negocia con las otras coaliciones sobre cómo dividir el monto conseguido por la gran coalición. Por lo tanto, se considera que el monto $v(N)$ será distribuido entre todos los jugadores y entonces todas las formaciones de coaliciones se realizan teniendo esto en mente. Una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ se forma cuando todos sus miembros se comprometen a negociar con los demás como una sóla unidad.

Axioma 2.6. (Nulidad). Si i es un jugador nulo en (N, v), entonces

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = 0.$$

La idea es muy exigible y tiene el mismo sentido que en la caracterización del valor de Shapley: aquel jugador que no aporte algo a alguna coalición, obtendrá un pago de cero.

Axioma 2.7. (Linealidad). Sean (N, v) y (N, w) dos juegos en G y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; entonces

$$\varphi(\lambda v + \mu w, \mathfrak{B}) = \lambda\varphi(v, \mathfrak{B}) + \mu\varphi(w, \mathfrak{B}).$$

Este axioma va en el mismo sentido que el axioma de aditividad introducido por Shapley.

Axioma 2.8. (Anonimato). Sea θ una permutación de N tal que $\theta(B_p) = B_p \ \forall \ B_p \in \mathfrak{B}$; entonces para todo $(N, v) \in G$ y toda $i \in N$ se tiene que

$$\varphi_i(\theta v, \mathfrak{B}) = \varphi_{\theta(i)}(v, \mathfrak{B}).$$

El axioma anterior puede entenderse de la misma manera que el axioma de simetría en el sentido manejado por Aumann-Drèze: sólo son válidas aquellas permutaciones que dejen invariante a la estructura coalicional.

Axioma 2.9. (Simetría Coalicional). Si $B_p, B_q \in \mathfrak{B}$ y son tales que $\forall \ C \subseteq \mathfrak{B} \backslash \{B_p, B_q\}$ se tiene que $v(B_p \cup \bigcup_{B_r \in C} B_r) = v(B_q \cup \bigcup_{B_r \in C} Br)$, entonces

$$\sum_{i \in B_r} \varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \sum_{i \in B_q} \varphi_i(v, \mathfrak{B}).$$

Este axioma actúa de manera semejante al axioma de simetría del valor de Shapley, sólo que actúa con las coaliciones de la estructura coalicional considerándolas como jugadores individuales en un juego entre ellas.

Teorema 9 (Owen, 1977)**.** *Existe un único valor φ que satisface los axiomas de eficiencia, nulidad, linealidad, anonimato y simetría coalicional (axiomas 2.5-2.9) definido para toda terna $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$, $B_p \in \mathfrak{B}$ y $i \in B_p$ dado por*

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \sum_{\substack{T \subseteq \mathfrak{B} \\ T \not\ni B_p}} \sum_{\substack{S \subseteq B_p \\ S \not\ni i}} \frac{t!(m-t-1)!}{m!} \cdot \frac{s!(|B_p|-s-1)!}{|B_p|!} \cdot \Big[v(A_T \cup S \cup \{i\}) - v(A_T \cup S) \Big] \quad (2.3)$$

en donde $A_T = \bigcup_{B_q \in T} B_q$.

El valor de Owen tiene una interpretación probabilística similar a la del valor de Shapley. Supóngase que la gran coalición se formará en una habitación y supóngase de la misma manera que los jugadores pertenecientes a una misma coalición $B_p \in \mathfrak{B}$ están juntos en una cola a la entrada de la habitación y que entrarán uno por uno a dicho cuarto. Si a cada jugador se le paga con su contribución marginal respecto a los jugadores que ya están dentro de la habitación cuando entra a la habitación, entonces su pago esperado en este proceso será precisamente el valor de Owen que le corresponde.

Formalmente, dada una partición $\mathfrak{B}$ de N, denótese por $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)$ al subconjunto de todos los permutaciones de N (las cuales se llamarán órdenes) formado por las permutaciones $\mathcal{R}$ tales que los miembros en la misma coalición $B_p \in \mathfrak{B}$ se encuentran contiguos en el orden, y denótese por $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$ al conjunto de jugadores que preceden a i en el orden $\mathcal{R}$. Entonces, para todo $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$, $B_p \in \mathfrak{B}$ y cada $i \in B_p$ se tiene

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = E[v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})]$$

donde la esperanza E es sobre todos los órdenes de N, o equivalentemente, puede escribirse

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \frac{1}{|\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)|} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)} \big(v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})\big) \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.2. *Considérense el juego (N, v) dado en el ejemplo 1.1 y la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Aplicando la fórmula dada por (2.3), el vector de pagos correspondiente será*

$$\varphi(v, \mathfrak{B}) = (30, 35, 15).$$

¿Qué se puede observar en el ejemplo anterior? A diferencia del valor de Aumann-Drèze, en esta ocasión se está repartiendo el monto $v(N)$ entre todos los jugadores, pero primeramente se reparte $v(N)$ entre las coaliciones tomándolas como si fueran jugadores individuales, para luego ellas repartir el pago asignado entre los jugadores que las conforman.

Calculando el mismo valor utilizando ahora la fórmula dada en (2.4) se tiene la siguiente tabla auxiliar

	$v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$		
$\mathcal{R}$	i=1	i=2	i=3
1 2 3	10	40	30
2 1 3	30	20	30
3 1 2	0	80	0
3 2 1	80	0	0
Total	120	140	60

de donde $\varphi(v, \mathfrak{B}) = (30, 35, 15)$.

Ahora se establecerán algunos resultados derivados del valor de Owen. Para un juego con un número finito de jugadores, defínase $\mathrm{Sh}(v)(S) = \sum_{i \in S} \mathrm{Sh}_i(v)$.

Corolario 1. *Para todo $B_k \in \mathfrak{B}$ se tiene*

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k) = \mathrm{Sh}(v^{\mathfrak{B}})(B_k)$$

donde $(M, v^{\mathfrak{B}})$ es el juego de grupos en donde cada $B_k \in \mathfrak{B}$ se comporta como un único jugador.

Entonces se tiene una conclusión muy importante: el valor de Owen de cada coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ es precisamente el valor de Shapley del juego jugado por "representantes" de las coaliciones de $\mathfrak{B}$.

Se introducirá nueva notación: para cualquier conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$, se representará a la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}\}$ como $[N]$ (i.e. la partición de N en singuletes); en contraste, la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{N\}$ (i.e. la estructura coalicional donde se tiene una única coalición) se representará como $\{N\}$.

Corolario 2. *Sea un juego $(N, v) \in G$, entonces*

$$\varphi(v, \{N\}) = \varphi(v, [N]) = \mathrm{Sh}(v).$$

¿Cómo es el valor de Owen relativo a los dos procesos de negociación que se llevan a cabo, tanto entre las coaliciones (i.e. los elementos de $\mathfrak{B}$) y dentro de cada coalición?. Debido al corolario 1, el primer proceso se obtiene reemplazando cada $B_k \in \mathfrak{B}$ por un jugador individual y calculando el valor de Shapley del juego resultante.

Considérese una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$. ¿Cómo deberían los miembros de B_k dividirse el monto total $\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k)$ que ellos reciben? Debería tomarse en cuenta su "poder relativo", y una manera de medirlo es comparando sus prospectos si B_k se fragmentara. Por ejemplo, supóngase $N = \{1, 2, 3\}$ y $\mathfrak{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. La coalición $\{1, 2\}$ obtiene $\varphi(v, \mathfrak{B})(\{1, 2\})$; en caso que ellos no estén de acuerdo en la division de este monto y se dividen, ellos obtendrían $\varphi(v, [N])(\{i\})$ para $i = 1$ y $i = 2$. Esto podría servir como un punto de desacuerdo en un problema de negociación entre dos personas, donde el conjunto de posibles acuerdos corresponde a las diversas maneras de dividir $\varphi(v^{\mathfrak{B}})(\{1, 2\})$. Por ejemplo, acorde a la solución establecida por Nash [24], conocida también como la solución estándar, cada $i = \{1, 2\}$ recibirá

$$\varphi(v, [N])(\{i\}) + \frac{1}{2}[\varphi(v, \mathfrak{B})(\{1, 2\}) - \varphi(v, [N])(\{1, 2\})].$$

¿Que ocurriría si B_k contiene más de dos jugadores?. Una opción sería escoger la solución generalizada para juegos n-personales de Nash dada en [24], pero se piensa que no es completamente satisfactoria por dos razones. Primero, deben tomarse en cuenta todas las posibles subcoaliciones de B_k, no solamente los singuletes. Segundo, debería ser preferible usar el mismo concepto de solución para la negociación *dentro* de B_k y para la negociación *entre* las coaliciones.

Para formalizar esta discusión, sean $(N, v) \in G$ y $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ una partición de N y fíjese $B_k \in \mathfrak{B}$. Defínase un nuevo juego (B_k, w_k) en cada $B_k \in \mathfrak{B}$ en donde w_k viene dada por

$$w_k(S) = \varphi(v, \mathfrak{B}|S)(S) \tag{2.5}$$

para todo $S \subset B_k$, siendo φ el valor de Owen y donde $\mathfrak{B}|S$ es la estructura coalicional obtenida de $\mathfrak{B}$ reemplazando B_k con S y $B_k \backslash S$, esto es

$$\mathfrak{B}|S = \{B_1, \ldots, B_{k-1}, S, B_k \backslash S, B_{k+1}, \ldots, B_m\}.$$

Teorema 10 (Hart y Kurz, 1983). *Dado un juego* (N, v) *y una estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$*, se tiene que, si* φ *es el valor de Owen, se cumple que*

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi(w_k, [B_k])(\{i\})$$

donde $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ *y* (B_k, w_k) *dado por (2.5).*

Entonces, este resultado muestra que el valor de Owen goza de la siguiente propiedad de consistencia: el proceso de negociación dentro de cada coalición del valor que se le asigna en el juego de grupos tiene la misma naturaleza que el proceso de pago en a cada jugador dentro del juego.

Anteriormente se definió $\mathfrak{B}|S$ reemplazando a B_k por S y $B_k \backslash S$. Una posibilidad alterna es que cuando S abandone a la coalición B_k, el resto de jugadores en la coalición se separe en jugadores individuales. En este caso, se define $\mathfrak{B}|S$ por

$$\mathfrak{B}|S = \{B_1, \ldots, B_{k-1}, S, \{j_1\}, \ldots, \{j_t\}, B_{k+1}, \ldots, B_m\}$$

donde $B_k \backslash S = \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$. Esto induce un nuevo juego (B_k, w_k) para toda $B_k \in \mathfrak{B}$, y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 11 (Hart y Kurz, 9183). *El teorema anterior sigue siendo válido con la definición de* $\mathfrak{B}|S$ *dada en el párrafo anterior para el juego* (B_k, w_k).

Lo indicado por los dos últimos teoremas es un hecho particularmente importante en vista de la muy bien conocida ambigüedad del "comportamiento del complemento": cuando una coalición actúa junta, ¿debe el complemento de la coalición actuar como una sola unidad de negociacion o actuar individualmente? Los teoremas anteriores indican que eso no importa en el caso del valor de Owen.

2.3.1. Axiomatizaciones alternas del valor de Owen

En esta sección se considerarán diferentes axiomatizaciones del valor de Owen. Se inicia con la caracterización de Hart y Kurz [12]; para ello, considérense los siguientes axiomas y definiciones:

Definición 2.1. *Sea* U *el universo de jugadores. Un conjunto* $N \subset U$ *será un portador en* v *si para todo* $S \subseteq U$*,* $v(S) = v(S \cap N)$.

Axioma 2.10. (Portadores). Sea N un portador en v; entonces

1. $\varphi(v, \mathfrak{B})(N) \equiv \sum_{i \in N} \varphi_i(v, \mathfrak{B}) = v(N)$.
2. Si $\mathfrak{B}_N = \mathfrak{B}'_N$, entonces $\varphi(v, \mathfrak{B}) = \varphi(v, \mathfrak{B}')$

donde $\mathfrak{B}_N = \{B_l \cap N \mid l = 1, 2, \ldots, m\}$.

Este axioma en realidad está diciendo varias cosas importantes: si i es un jugador nulo en el juego, entonces su pago será de cero sin importar en cuál coalición se encuentre dentro de la estructura coalicional. Más aún, si i se mueve de una coalición B_k a otra, no se afecta el pago de ninguno de los demás jugadores. Y por último, también el axioma está diciendo que, para todas las estructuras coaliciones, el valor es eficiente.

Antes de introducir el siguiente axioma se dará una definición. Sea (N, v) un juego y $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ una estructura coalicional; se dice que un *juego entre coaliciones es no-esencial* si

$$v(\bigcup_{k\in K} B_k) = \sum_{k\in K} v(B_k)$$

para todo $K \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$.

Axioma 2.11. (Juegos No-Esenciales). Sea $(N, v) \in G$ y $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ tal que el juego entre coaliciones sea no-esencial; entonces

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k) = v(B_k) \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Este axioma dice que cuando el juego entre coaliciones es no-esencial (que sería lo mismo decir que es aditivo), cada coalición únicamente obtiene su valía y no hay excedente para negociar entre ellas.

Teorema 12 (Hart y Kurz, 1983)**.** *El único valor φ para juegos con estructuras coalicionales que satisface los axiomas de portadores, anonimato, linealidad y juegos no-esenciales es el valor de Owen dado por (2.3).*

Así mismo, Hart y Kurz propusieron reemplazar el axioma de juegos no-esenciales por

Axioma 2.12. (Juego Nulo). Si $v(\bigcup_{k\in K} B_k) = 0$ para todo $K \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$, entonces

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k) = 0 \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Lo cual indica que si una coalición y todas las subcoaliciones de $\mathfrak{B}$ que la contengan tienen valía cero, entonces se le asignará un pago de cero en el juego de grupos. De la misma manera, el axioma anterior puede ser reemplazado por los dos siguientes axiomas:

Axioma 2.13. (Coalición Perdedora). Si $B_l \in \mathfrak{B}$ es tal que

$$v(\bigcup_{k\in K} B_k \cup B_l) = v(\bigcup_{k\in K} B_k) + v(B_l) \quad \text{para todo } K \subseteq \{1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m\}$$

entonces

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(B_l) = v(B_l).$$

Este axioma indica que si cuando una coalición se une a un grupo de coaliciones la valia que consiguen es la misma que la suma de las valías individuales cuando los grupos estaban separados, entonces a la coalición que se unió le corresponderá de pago la valía que conseguía por su cuenta, ya que su incorporación no aportó nada al proceso de negociación.

Axioma 2.14. (Coalición Nula). Si $B_l \in \mathfrak{B}$ es tal que

$$v(\bigcup_{k\in K} B_k \cup B_l) = v(\bigcup_{k\in K} B_k) \quad \text{para todo } K \subseteq \{1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m\}$$

entonces

$$\varphi(v,\mathfrak{B})(B_l) = 0.$$

Este axioma indica que una coalición que al unirse con un conjunto de coaliciones no aporte nada a la valía de la unión, tendrá un pago de cero.

Es claro que el axioma 2.13 implica el axioma 2.11 y que el axioma 2.14 implica el axioma 2.12, los cuales, junto con los axiomas de portadores, linealidad y anonimato, proporcionan el soporte axiomático necesario para la existencia y unicidad del valor de Owen.

Ahora se presentará una axiomatización del valor de Owen que se debe a Albizuri y Zarzuelo [2]; ellos caracterizan el valor de Owen reemplazando el axioma de anonimato y juegos no-esenciales de la axiomatización de Hart y Kurz por:

Axioma 2.15. (Reordenamiento). Sea $\theta : N \to N$ tal que $\theta(B_q) \cap \theta(B_r) = \emptyset$ para cualesquiera $q, r \in \{1,\ldots,m\}$ con $q \neq r$. Si $\theta : B_p \to \theta(B_p)$ es inyectiva, entonces

$$\varphi_{\theta(i)}(\theta v,\mathfrak{B}) = \varphi_i(v,\mathfrak{B}) \quad \text{para todo } i \in B_p.$$

El axioma anterior es una versión fuerte del axioma de anonimato. Hay que notar que si θ se restringe a ser inyectiva, el axioma de reordenamiento se convierte en el axioma de anonimato de Hart y Kurz. La diferencia es que en el axioma de reordenamiento tenemos que θ puede ser un mapeo cualquiera. En efecto, lo que θ está haciendo, además de renombrar a los jugadores en N, es mantener el tamaño de B_p y reducir (o mantener) el tamaño de las otras coaliciones en $\mathfrak{B}$, como si algunos de los jugadores pertenecientes a las otras coaliciones dentro de la estructura coalicional deciden actuar como un único jugador. De esta manera, el axioma de reordenamiento requiere que el valor correspondiente a un jugador en B_p no se afecte después de renombrar a los jugadores en N y/o reduciendo (o manteniendo) el tamaño de las demás coaliciones en $\mathfrak{B}$.

Teorema 13 (Albizuri y Zarzuelo, 2004)**.** *Existe un único valor $\varphi : G \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de portadores, linealidad y reordenamiento, y es el valor de Owen.*

Para demostrar el teorema anterior, basta demostrar que el valor de Owen satisface el axioma de reordenamiento, ya que por el teorema de Hart y Kurz se sabe que dicho valor satisface los axiomas de portadores y linealidad. Para probar que el valor de Owen es el único que satisface los axiomas descritos se utilizan los juegos de unanimidad, en una idea similar a la utilizada para la demostración de la unicidad del valor de Shapley.

Con el afán de presentar una axiomatización más del valor de Owen propuesta por G. Hemiache [11], se introducirán nuevos conceptos. Sea $\mathfrak{B}$ una estructura coalicional de un conjunto de N jugadores. Se denotará como $I(S)$ al conjunto de índices dado por $I(S) = \{k \mid B_k \cap S \neq \emptyset, B_k \in \mathfrak{B}\}$. Así mismo, se denotará por $\bar{S}$ al conjunto formado por los compañeros de S, $\bar{S} = \bigcup_{k \in I(S)} B_k$. En palabras, $\bar{S}$ es la unión minimal de coaliciones dentro de la estructura coalicional que cubre a S. De igual manera se define $\langle S, [B_S] \rangle$, la *estructura coalicional inducida* por S, como la estructura coalicional para S en la cual $\mathfrak{B}_S = \{S \cap B_k \mid k \in I(S), B_k \in \mathfrak{B}\}$.

Sea φ una solución para juegos con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ formada por N jugadores. Se define el juego asociado $(N, v_\varphi^\diamond, \mathfrak{B})$, en donde

$$v_\varphi^\diamond(S) = v(N) - v(N \backslash \bar{S}) - \sum_{j \in \bar{S} \backslash S} \varphi_j(v, \mathfrak{B}).$$

Los jugadores en S toman en cuenta la partición $\{S, \bar{S} \backslash S, N \backslash \bar{S}\}$: los jugadores en $\bar{S} \backslash S$ se consideran los *amigos* de S, y es el conjunto de jugadores que se encuentran en la misma coalición que al menos uno de los miembros de S; el conjunto $N \backslash \bar{S}$ está formado por jugadores que no son ni miembros de S ni amigos de S. Se asume entonces que los jugadores de la coalición S pueden llamar a sus amigos y juntos formar un bloque $\bar{S}$ en contra de $N \backslash \bar{S}$.

Por lo tanto, para el cálculo de la valía de S en el juego asociado, se resta de la valía de $\bar{S}$, $v_\varphi^\diamond(\bar{S}) = v(N) - v(N \backslash \bar{S})$, el valor conseguido por cada uno de los amigos de S, $\bar{S} \backslash S$, en el juego original $(N, v, \mathfrak{B})$, lo cual es el mínimo pago que garantiza que los amigos de S no sufrirán a causa de la manipulación.

Con lo anterior, Hemiache propone la siguiente axiomatización:

Axioma 2.16. (Independencia de Jugadores Irrelevantes). Para todos los juegos con estructura coalicional $\mathfrak{B}$, para todas las coaliciones $S \subseteq N$ que sean portadores en N y todos los jugadores $i \in S$ se tiene que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i(v|_S, \mathfrak{B}_S)$, donde $v|_S$ se refiere a la restricción de v al subconjunto $S \subseteq N$.

Lo que el axioma anterior está diciendo es que si el conjunto S es un portador dentro del juego (N, v), entonces el valor en el juego $(v, \mathfrak{B})$ depende únicamente del juego $(v|_S, \mathfrak{B}_S)$; esto es, la valía $v(S) = v(N)$ se distribuye sin tomar en cuenta la existencia de afinidad entre los jugadores de $N \backslash S$ y también sin tomar en cuenta la posible afinidad entre los jugadores de S y los jugadores en $N \backslash S$. El axioma anterior es muy importante para la construcción de la axiomatización de Hemiache, ya que permite expresar valores para juegos n-personales como una combinación de valores para juegos con menos de n jugadores.

Axioma 2.17. (Simetría). Para todos los juegos $(N, v) \in G$, para todos los jugadores $i \in N$ y todas las permutaciones $\theta \in \Theta(N)$, $\varphi_{\theta(i)}(\theta v, \{\theta(N)\}) = \varphi_i(v, \{N\})$, y $\varphi_{\theta(i)}(\theta v, [\theta(N)]) = \varphi_i(v, [N])$.

Este axioma asegura que si la estructura coalicional está formada únicamente por una sóla coalición, o si cada coalición de la estructura coalicional es un singulete, el valor no depende del nombre de los jugadores (pueden intercambiar papeles a discreción, en un acercamiento al axioma de simetría considerado en el valor de Shapley).

Axioma 2.18. (Consistencia Asociada). Para todos los juegos con estructura coalicional, se tiene que $\varphi(v,\mathfrak{B})=\varphi(v_\varphi^\diamond,\mathfrak{B})$.

Si se tiene que una solución para juegos con estructura coalicional satisface el axioma de consistencia asociada, los jugadores no sufren pérdidas ni ganancias cuando se ejecuta una manipulación como la llevada a cabo durante la construcción del juego asociado $(N,v_\varphi^\diamond)$. Considerando que una regla de asignación es resultado del consenso social, aceptada por todos los jugadores, el hecho que la regla para repartir verifique el axioma de consistencia asociada es garantía de estabilidad social, ya que la gente recibirá exactamente lo que espera.

Teorema 14 (Hemiache, 2001)**.** *Existe una única solución para juegos con estructura coalicional que satisface los axiomas 2.16, 2.17, 2.18, eficiencia, nulidad y aditividad, y esa solución es el valor de Owen.*

Dada una solución φ para juegos con estructura coalicional y un juego $(N,v,\mathfrak{B})\in G\times B$, Hemiache considera un juego asociado diferente, dado de la siguiente manera:

$$v_\varphi^*(S)=v(\bar{S})+\sum_{K\in\mathfrak{B}_{N\setminus\bar{S}}}(v(K\cup\bar{S})-v(K)-v(\bar{S}))-\sum_{j\in\bar{S}\setminus S}\varphi_j(v,\mathfrak{B}).$$

La interpretación del juego asociado (N,v_φ^*) es similar a la interpretación del juego $(N,v_\varphi^\diamond)$, con la diferencia de que en el presente caso se supone que los jugadores de la coalición $\bar{S}$ adoptan un comportamiento de "divide y vencerás"; por lo tanto, ellos consideran a las coaliciones de la estructura coalicional inducida $\langle N\setminus\bar{S},\mathfrak{B}_{N\setminus\bar{S}}\rangle$ como unidades atómicas. Haciendo esto, ellos esperan apoderarse de todos los excedentes $v(K\cup\bar{S})-v(K)-v(\bar{S})$ en las negociaciones con cada una de las coaliciones K en $\mathfrak{B}_{N\setminus\bar{S}}$. Con el fin de caracterizar el valor de Owen utilizando el juego (N,v_φ^*), los axiomas 2.17 y 2.18 necesitan modificarse:

Axioma 2.19. (Simetría). Para todos los juegos (N,v) con estructura coalicional, para todos los jugadores $i\in N$, y para todas las permutaciones $\theta\in\Theta(N)$, $\varphi_{\theta(i)}(\theta v,\{\theta(N)\})=\varphi_i(v,\{N\})$.

Lo que este axioma dice es que si la estructura coalicional tiene una única coalición formada por todos los jugadores, el valor no depende del nombre y características propias de ellos.

Axioma 2.20. (Consistencia Asociada). Para todos los juegos (N,v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ debe cumplirse que $\varphi(v,\mathfrak{B})=\varphi(v_\varphi^*,\mathfrak{B})$.

Teorema 15 (Hemiache, 2001)**.** *Existe una única solución para juegos con estructura coalicional que satisface los axiomas 2.16, 2.19, 2.20, eficiencia, nulidad y aditividad y esa solución es el valor de Owen.*

2.3.2. Nuevas propiedades del valor de Owen

En esta sección se examinarán propiedades adicionales de valores para juegos con estructuras coalicionales, en especial para el valor de Owen.

Axioma 2.21. (Contribuciones balanceadas dentro de las coaliciones). Se dice que un valor φ, para cualquier $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y para cualesquiera $i, j \in B_k \in \mathfrak{B}$, cumple con el axioma de contribuciones balanceadas dentro de las coaliciones si

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) - \varphi_i(v, \mathfrak{B} - \{j\}) = \varphi_j(v, \mathfrak{B}) - \varphi_j(v, \mathfrak{B} - \{i\})$$

donde $\mathfrak{B} - \{i\} = \{B_1, ..., B_{k-1}, B_k \backslash \{i\}, B_{k+1}, ..., B_m\}$ $\forall i \in B_k \in \mathfrak{B}$.

Que un valor cumpla con el axioma anterior significa que la salida del j-ésimo jugador del juego afecta al jugador i de la misma manera en que la salida del i-ésimo jugador lo afecta a él, para cualesquiera $i, j \in B_k$, lo cual puede interpretarse como el hecho de que a ningún jugador dentro de B_k le conviene que alguno de sus compañeros abandone la coalición.

Axioma 2.22. (Contribuciones balanceadas entre coaliciones). Dado un valor φ para un juego (N, v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ y para $B_k, B_l \in \mathfrak{B}$, se dice que φ satisface el axioma de contribuciones balanceadas entre coaliciones si

$$\sum_{i \in B_k} \varphi_i(v, \mathfrak{B}) - \sum_{i \in B_k} \varphi_i(v, \mathfrak{B} \backslash B_l) = \sum_{i \in B_l} \varphi_i(v, \mathfrak{B}) - \sum_{i \in B_l} \varphi_i(v, \mathfrak{B} \backslash B_k).$$

Por otra parte, si un valor cumple con la propiedad de contribuciones balanceadas entre coaliciones quiere decir que el abandono de una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ afecta al pago de la coalición $B_l \in \mathfrak{B}$ de la misma manera en que la salida de la coalición B_l afectaría a la coalición B_k si ésta aún permaneciera dentro de la estructura coalicional, y la interpretación que puede dársele a este axioma es que a ninguna coalicón dentro de $\mathfrak{B}$ le conviene que alguna coalición abandone la estructura coalicional, ya que el pago de todas las coaliciones se verá afectado de la misma manera. Calvo *et al.* [6] probaron que el valor de Owen satisface tanto contribuciones balanceadas entre coaliciones como contribuciones balanceadas dentro de las coaliciones.

Se considerarán ciertos juegos asociados para poder estudiar propiedades adicionales del valor de Owen. Sea φ una solución para juegos con estructura coalicional y sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$. Para todo $S \subseteq N$, se define la estructura coalicional $\mathfrak{B}'$ inducida por S como

$$\mathfrak{B}'(S) = \{B'_1, B'_2, \cdots, B'_m, S\}$$

$$\text{en donde } B'_k = B_k \backslash S \;\; \forall\, B_k \in \mathfrak{B}.$$

La estructura coalicional $\mathfrak{B}'(S)$ puede verse como la estructura resultante cuando los miembros de S deciden jugar juntos y por consiguiente abandonan las coaliciones a las que pertenecían.

Defínase ahora el juego asociado $(N, w_\varphi^\diamond, \mathfrak{B})$, donde la aplicación $w_\varphi^\diamond$ viene dada por

$$w_\varphi^\diamond(S) = \sum_{B_k : B_k \cap S \neq \emptyset} \Big[\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k) - \varphi(v, \mathfrak{B}'(S))(B'_k)\Big] \qquad \forall\ S \subseteq N.$$

Por lo tanto, de alguna manera $w_\varphi^\diamond(S)$ representa el cambio en sus pagos que sufren las coaliciones que contenían elementos de S dado algún evento que ocasionó su desacuerdo, separación y unión, provocando la formación de una nueva estructura coalicional $\mathfrak{B}'(S)$; por eso, puede verse a $(N, w_\varphi^\diamond)$ como *el juego de lo que se deja de ganar.*

Ejemplo 2.3. *Considérese el juego cooperativo de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1, y supóngase que los jugadores se encuentran organizados de acuerdo a la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$*; construyendo el juego asociado* $(N, w_\varphi^\diamond)$*, en donde* φ *es el valor de Owen se tiene el resultado de la tabla 2.1.*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$w_\varphi^\diamond(S)$	25	30	15	65	30	35	80

Tabla 2.1: Juego asociado $(N, w_\varphi^\diamond)$ derivado del juego dado en el ejemplo 1.1

Teorema 16. *Para todo juego* (N, v) *con estructura coalicional* $\mathfrak{B}$ *y para todo* $i \in N$*, el valor de Owen* φ *cumple*

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i(w_\varphi^\diamond, \mathfrak{B}).$$

En el desarrollo de la prueba se necesitará del siguiente resultado:

Lema 1. *Sea* $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$*. Si se tiene que la solución* φ *para juegos con estructura coalicional es el valor de Owen, entonces, para todo* $B_k \in \mathfrak{B}$

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k) = \varphi(w_\varphi^\diamond, \mathfrak{B})(B_k).$$

Demostración.

Es sabido, por el corolario 1, que el valor de Owen para una coalición $B_k \in \mathfrak{B} = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ en un juego $(N, v, \mathfrak{B})$ equivale al valor de Shapley de B_k en el juego $(M, v^{\mathfrak{B}})$ donde cada una de los elementos de la estructura coalicional se toma como un único jugador, y en donde $v^{\mathfrak{B}}(T) = v(\bigcup_{t \in T} t)\ \ \forall\, T \subseteq M$. Entonces, calculando la valía de cada $B_k \in \mathfrak{B}$ en el juego $(N, w_\varphi^\diamond)$, puede verse que

$$w_\varphi^\diamond(B_k) = \varphi(v, \mathfrak{B})(B_k)$$

y entonces se define el juego $(M, w_\varphi^{\mathfrak{B}})$, en donde

$$w_\varphi^{\mathfrak{B}}(T) = \sum_{t \in T} w_\varphi^\diamond(t) \quad \forall\ T \subseteq \mathfrak{B}.$$

Pero éste es un juego en que a cada coalición $T \in \mathfrak{B}$ se le asigna de valía el valor de Shapley de T en el juego $(M, v^{\mathfrak{B}})$ y por lo tanto, tomando en cuenta la eficiencia del valor de Shapley, se tiene que

$$\varphi(w_\varphi^\diamond, \mathfrak{B})(B_k) = \mathrm{Sh}(w_\varphi^{\mathfrak{B}})(B_k) = w_\varphi^{\mathfrak{B}}(B_k) = \varphi(v, \mathfrak{B})(B_k).$$

□

Demostración del Teorema 16

Primeramente se probará que el resultado es válido para los juegos en los que $\mathfrak{B} = [N]$. Para ello, se utilizará la expresión del valor de Owen dada en (2.4)

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \frac{1}{|\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)|} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)} \left[v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) \right]$$

donde $\mathcal{R}$ es un orden de los N jugadores tal que los jugadores pertenecientes a cada $B_k \in \mathfrak{B}$ permanecen juntos; $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)$ es el conjunto de dichos órdenes admisibles y $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$ es el conjunto de jugadores que preceden al jugador i en un orden específico $\mathcal{R}$.

Se calculará el valor de Owen para el i-ésimo jugador en el juego $(N, w_\varphi^\diamond)$ utilizando la expresión dada en (2.4)

$$\varphi_i(w_\varphi^\diamond, \mathfrak{B}) = \frac{1}{|\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)|} \sum_{R \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)} \left[w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) \right].$$

Es fácil ver que

$$w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) = \sum_{j \in \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}} \varphi_j(v, \mathfrak{B}) \quad \text{y} \quad w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) = \sum_{j \in \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}} \varphi_j(v, \mathfrak{B})$$

y por lo tanto

$$w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) = \varphi_i(v, \mathfrak{B})$$

entonces

$$\varphi_i(w_\varphi^\diamond, \mathfrak{B}) = \varphi_i(v, \mathfrak{B}).$$

Hay que hacer notar que puede realizarse la parte anterior de la demostración utilizando el hecho probado por el Lema 1, ya que en este caso se tiene que para todo $i \in N$, $i = B_i \in \mathfrak{B}$, y por lo tanto $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i(w, \mathfrak{B})$.

Ahora se probará el resultado cuando $\mathfrak{B} = \{N\}$. Nuevamente se utilizará la expresión del valor de Owen dada por (2.4), en donde puede verse que

$$w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) = v(N) - \varphi(v, \mathfrak{B}'')(B_r \backslash \{i\}) \quad \text{y}$$

$$w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) = v(N) - \varphi(v, \mathfrak{B}')(B_r)$$

en donde $\mathfrak{B}'' = \{\{\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}\}, \{B_r \backslash \{i\}\}\}$ y $\mathfrak{B}' = \{\{\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}\}, \{B_r\}\}$ con $B_r = N \backslash \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$. Calculando

$$\varphi(v, \mathfrak{B}'')(B_r \backslash \{i\}) = v(B_r \backslash \{i\}) + \frac{v(N) - v(B_r \backslash \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\})}{2}$$

$$\varphi(v,\mathfrak{B}')(B_r) = v(B_r) + \frac{v(N) - v(B_r) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})}{2}.$$

Entonces

$$w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - w_\varphi^\diamond(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) = \frac{v(B_r) - v(B_r \backslash \{i\}) + v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})}{2}.$$

Como se está considerando el caso donde se tiene una única partición formada por los N jugadores, entonces existe $\mathcal{R}' \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)$ tal que $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}'} \cup \{i\} = N \backslash \{\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}\} = B_r$ y $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} = N \backslash \{\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}'} \cup \{i\}\} = B_r \backslash \{i\}$ y por lo tanto puede concluirse que

$$\begin{aligned}\varphi_i(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B}) &= \frac{1}{|\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)|} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}(N)} \left[\frac{v(B_r) - v(B_r \backslash \{i\})}{2} + \frac{v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})}{2} \right] \\ &= \varphi_i(v,\mathfrak{B}).\end{aligned}$$

Para probar el caso general en que $m \geq 2$ y donde por lo menos existe una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ tal que $|B_k| \geq 2$ se utilizará fuertemente el lema demostrado con anterioridad.

Se sabe que el valor de Owen satisface el axioma de contribuciones balanceadas dentro de las coaliciones; esto es, para cualesquiera $i, j \in B_k \in \mathfrak{B}$ se tiene que

$$\varphi_i(v,\mathfrak{B}) - \varphi_i(v,\mathfrak{B} - j) = \varphi_j(v,\mathfrak{B}) - \varphi_j(v,\mathfrak{B} - i).$$

Sumando sobre todos los jugadores $j \in B_k \backslash i$

$$|B_k - 1| \varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \sum_{j \in B_k \backslash i} \varphi_j(v,\mathfrak{B}) - \sum_{j \in B_k \backslash i} \varphi_j(v,\mathfrak{B} - i) + \sum_{j \in B_k \backslash i} \varphi_i(v,\mathfrak{B} - j)$$

lo cual puede reescribirse como

$$|B_k|\ \varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \varphi(v,\mathfrak{B})(B_k) - \varphi(v,\mathfrak{B} - i)(B_k \backslash i) + \sum_{j \in B_k \backslash i} \varphi_i(v,\mathfrak{B} - j). \quad (2.6)$$

Se utilizará inducción para la demostración. Considérese el caso en que $|B_k| = 2$, ya que se usará el axioma de contribuciones balanceadas dentro de las coaliciones en donde se trabaja para cualesquiera $i, j \in B_k$ con $i \neq j$. Entonces se tiene que $B_k = \{i, j\}$ y por lo tanto $\mathfrak{B} - j = \{B_1, ..., B_{k-1}, B_k^*, B_{k+1}, ..., B_m\}$ con $B_k^* = \{i\}$, con lo que, utilizando de nuevo el Lema 1 en la ecuación (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned}2\ \varphi_i(v,\mathfrak{B}) &= \varphi(v,\mathfrak{B})(B_k) - \varphi(v,\mathfrak{B} - i)(B_k \backslash i) + \varphi(v,\mathfrak{B} - j)(B_k^*) \\ &= \varphi(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B})(B_k) - \varphi(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B} - i)(B_k \backslash i) + \varphi(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B} - j)(B_k^*) \\ &= 2\ \varphi_i(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B})\end{aligned}$$

y por lo tanto, se tiene que

$$\varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \varphi_i(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B}).$$

Supóngase que el teorema es cierto para las coaliciones $B_k \in \mathfrak{B}$ tal que $|B_k| = s$ por lo que se probará que también es válido cuando $|B_k| = s+1$. Para ello, escríbase de nuevo la ecuación (2.6) cuando $|B_k| = s+1$

$$(s+1)\ \varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \varphi(v,\mathfrak{B})(B_k) - \varphi(v,\mathfrak{B}-i)(B_k\backslash i) + \sum_{j\in B_k\backslash i} \varphi_i(v,\mathfrak{B}-j).$$

La sumatoria de la ecuación anterior involucra al valor de Owen del i-ésimo jugador que se encuentra en una coalición de tamaño s lo cual, por hipótesis inductiva, es igual al valor de Owen del i-ésimo jugador en el juego $(N, w_\varphi^\diamond)$, y aplicando nuevamente el Lema 1 se tiene

$$\begin{aligned}(s+1)\ \varphi_i(v,\mathfrak{B}) &= \varphi(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B})(B_k) - \varphi(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B}-i)(B_k\backslash i) + \sum_{j\in B_k\backslash i} \varphi_i(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B}-j)\\ &= (s+1)\ \varphi_i(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B})\end{aligned}$$

y entonces puede concluirse que

$$\varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \varphi_i(w_\varphi^\diamond,\mathfrak{B}).$$

□

El hecho de que el valor de Owen cumpla con el teorema anterior puede verse como estabilidad, ya que en realidad lo que se demostró es que es inmune ante una manipulación como la que se llevó a cabo durante la construcción del juego $w_\varphi^\diamond$: manipular el juego de esa manera no sirvió de mucho, dado que los pagos que reciben los jugadores en ese nuevo juego son los mismos que en el juego original.

A continuación se verán otras propiedades: al igual que en el caso anterior, sea φ una solución para juegos (N, v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$; para todo $S \subseteq N$ defínase la estructura coalicional $\mathfrak{B}'(S)$ inducida por S de la misma manera que en el teorema anterior, esto es, $\mathfrak{B}'(S)$ es el resultado de que los jugadores en S abandonen las coaliciones a las que pertenecen y ellos formen en sí una coalicion aparte, dando como resultado una nueva estructura coalicional.

Defínase el juego asociado $(N, w_\varphi^*, \mathfrak{B})$, donde la aplicación w_φ^* viene dada de la siguiente manera

$$w_\varphi^*(S) = \varphi(v, \mathfrak{B}'(S))(S) \qquad \forall\ S \subseteq N.$$

Este juego puede denominarse *el juego de lo que se gana por asociación*, ya que, para todo $S \subseteq N$, w_φ^* representa el monto obtenido por S cuando ellos, por motivos intrínsecos, deciden abandonar las coaliciones a las que pertenecían y formar ellos una sola unidad de colaboración, lo cual conlleva a la formación de nuevas estructuras coalicionales.

Ejemplo 2.4. *Considérese el juego cooperativo dado en ejemplo 1.1, y supóngase que los jugadores formaron la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$*; si se tiene que la solución aceptada es el valor de Owen, entonces el juego de lo que se gana por asociación* (N, w_φ^*) *viene dado en la tabla 2.2.*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$w^*_\varphi(S)$	35	40	15	65	30	35	80

Tabla 2.2: Juego asociado (N, w^*_φ) derivado del juego dado en el ejemplo 1.1

Teorema 17. *Para todo juego (N, v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ y para todo $i \in N$, el valor de Owen φ cumple*

$$\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i(w^*_\varphi, \mathfrak{B}).$$

Se necesitará el siguiente resultado en la demostración del teorema:

Lema 2. *Sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$. Si se tiene que la solución φ para juegos con estructura coalicional es el valor de Owen, entonces, para todo $B_k \in \mathfrak{B}$*

$$\varphi(v, \mathfrak{B})(B_k) = \varphi(w^*_\varphi, \mathfrak{B})(B_k).$$

Demostración.

La demostración es muy similar a la del Lema 1, ya que se forma el juego $(M, v^{\mathfrak{B}})$ donde cada elemento de la estructura coalicional se toma como un único jugador, y en donde $v^{\mathfrak{B}}(T) = v(\bigcup_{t\in T} t) \;\; \forall\, T \subseteq M$, para poder uso que el valor de Owen de una coalición en el juego $(N, v, \mathfrak{B})$ equivale al valor de Shapley de la misma en el juego $(M, v^{\mathfrak{B}})$. Calculando la valía de cada $B_k \in \mathfrak{B}$ en el juego (M, w^*_φ), puede verse que

$$w^*_\varphi(B_k) = \varphi(v, \mathfrak{B})(B_k)$$

y definiendo al juego $w^{\mathfrak{B}}_\varphi$ como

$$w^{\mathfrak{B}}_\varphi(T) = \sum_{t\in T} w^*_\varphi(t) \quad \forall\, T \subseteq \mathfrak{B}$$

utilizando los mismos argumentos que en el Lema 1, se puede llegar a la siguiente cadena de igualdades

$$\varphi(w^*_\varphi, \mathfrak{B})(B_k) = \mathrm{Sh}(w^{\mathfrak{B}}_\varphi)(B_k) = w^{\mathfrak{B}}_\varphi(B_k) = w^*_\varphi(B_k) = \varphi(v, \mathfrak{B})(B_k).$$

□

Demostración del Teorema

Al igual que en la prueba del teorema anterior, primeramente se probará para el caso $\mathfrak{B} = [N]$. Esta estructura coalicional representa aquella en la que la j-ésima coalición tiene como único miembro al j-ésimo jugador. Por lo tanto, puede aplicarse directamente el lema anterior para concluir que

$$\varphi_i(w^*_\varphi, \mathfrak{B}) = \varphi(w^*_\varphi, \mathfrak{B})(B_i) = \varphi(v, \mathfrak{B})(B_i) = \varphi_i(v, \mathfrak{B}).$$

Para el caso en que $\mathfrak{B} = \{N\}$ se utiliza la expresión del valor de Owen dada en (2.4); la demostración sigue exactamente el mismo sentido que en el teorema 16, ya que puede obtenerse mediante álgebra la expresión

$$w^*_\varphi(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - w^*_\varphi(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) = \frac{v(B_r) - v(B_r \backslash \{i\}) + v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})}{2}$$

en donde $B_r = N \backslash \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$, y por lo tanto, realizar las mismas conclusiones que en la segunda parte del teorema anterior.

En el caso general ($m \geq 2$ y que exista por lo menos una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ tal que $|B_k| \geq 2$) la demostración es exactamente igual que en el caso general del teorema anterior: se hace uso de la propiedad de contribuciones balanceadas, de inducción para $|B_k| = 2$ y se utiliza fuertemente el Lema 2, en lugar del Lema 1. Por lo tanto, puede darse por finalizada la prueba del teorema. $\square$

2.4. El valor τ-coalicional

El valor τ-coalicional es una extensión del valor τ para juegos sin estructuras coalicional presentado por Tijs (1987) en [33], en donde se utilizan vectores de pago máximo y mínimo para los jugadores con el fin de calcular su pago individual. De la misma manera que ocurre con el valor τ, el valor τ-coalicional no puede definirse para todos los juegos con estructuras coalicionales, debiendo identificar la clase de juegos en las que es posible aplicar este tipo de solución.

Para introducir el valor τ-coalicional se necesitará conocer la metodología del valor τ. Un juego $(N, v) \in G$ es cuasibalanceado si se cumplen las siguientes condiciones:

- $m(v) \leq M(v)$,
- $\sum_{i \in N} m_i(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i(v)$

en donde

$$M_i(v) = v(N) - v(N \backslash \{i\}) \quad \text{y} \quad m_i(v) = \max_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \left(v(S) - \sum_{j \in S \backslash \{i\}} M_j(v) \right)$$

se conocen como *vector de pagos máximos y mínimos* respectivamente. Se representará al conjunto de juegos cuasibalanceados como QBG. Con ello, Tijs (1987) define el valor τ para juegos $(N, v) \in$ QBG como una combinación convexa entre los vectores de pagos mínimos y máximos que es eficiente (y además único); es decir

$$\tau(v) = \alpha M(v) + (1 - \alpha) m(v) \tag{2.7}$$

con $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$.

Al igual que el valor de Owen, el valor τ-coalicional se calcula en dos pasos: primeramente al nivel de las coaliciones (juego de grupos) y luego dentro de los jugadores que conforman una coalición dentro de la estructura coalicional. En ese proceso, siguiendo el espíritu del valor τ, se calculan vectores de pagos máximo y mínimo, en donde se toman en cuenta las posibilidades de los jugadores de abandonar sus coaliciones y formar nuevas coaliciones con miembros de sus coaliciones o con otras coaliciones ya formadas.

Definición 2.2. *Para todo $i \in N$, el pago máximo (pago utópico) del jugador i viene dado por*

$$M_i(v, \mathfrak{B}) = v(N) - v(N \backslash \{i\}).$$

El jugador i no puede esperar obtener un pago mayor que el indicado por su pago utópico, porque entonces sería benéfico para los demás jugadores expulsarlo de la gran coalición. Este pago máximo también puede interpretarse como la contribución marginal del jugador i a la contribución marginal que hace su coalición a la valía de la gran coalición. Para ello, supóngase $i \in B_k$ con $B_k \in \mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ y defínase el juego $(M, v_{-i}^{\mathfrak{B}})$ como

$$v_{-i}^{\mathfrak{B}}(T) = v(\bigcup_{t \in T} t \backslash \{i\}) \qquad \forall\ T \subseteq M$$

y por lo tanto, puede verse al pago utópico como

$$M_i(v, \mathfrak{B}) = (v^{\mathfrak{B}}(N) - v^{\mathfrak{B}}(N \backslash B_k)) - (v_{-i}^{\mathfrak{B}}(N) - v_{-i}^{\mathfrak{B}}(N \backslash B_k)).$$

Para definir el vector de pagos mínimos, se supone que un jugador puede abandonar su coalición y formar un nuevo grupo de negociación con algunos miembros de su propia coalición y con una o más de las coaliciones restantes en $\mathfrak{B}$. Por lo tanto, no es posible que un jugador forme un nuevo grupo de negociación con solamente algunos de los miembros de otras coaliciones, porque intuitivamente éstas se ven como un sólo jugador, ya que los jugadores que las conforman tuvieron sus propios intereses al momento de la formación de coaliciones y no es posible considerar una separación. Por ello, para determinar el pago mínimo de un jugador $i \in B_k$, sólo se consideran coaliciones de la forma

$$B(k) := \{S \subset N \mid S = \bigcup_{B_q \in T} B_q \cup P \quad \text{para algun } T \subset \mathfrak{B} \backslash B_k \text{ y } P \subseteq B_k\}.$$

Utilizando la notación anterior, el pago mínimo de un jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ será

$$m_i(v, \mathfrak{B}) = \max_{\substack{S \in B(k) \\ S \ni i}} \left(v(S) - \sum_{j \in S \backslash \{i\}} M_j(v, \mathfrak{B}) \right).$$

El jugador i puede garantizarse el pago $m_i(v, \mathfrak{B})$ ofreciendo a los miembros de una coalición conveniente sus pagos utópicos y tomando para él mismo el resto.

Definición 2.3. *Se dice que un juego $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ es cuasibalanceado sí y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

- $(M, v^{\mathfrak{B}}) \in QBG$,
- $m(v, \mathfrak{B}) \leq M(v, \mathfrak{B})$,
- $\sum_{i \in B_k} m_i(v, \mathfrak{B}) \leq \tau_k(v^{\mathfrak{B}}) \leq \sum_{i \in B_k} M_i(v, \mathfrak{B}) \; \forall B_k \in \mathfrak{B}$.

Se denotará al conjunto de juegos cuasibalanceados con estructura coalicional como QBU. El valor τ-coalicional se define para juegos cuasibalanceados con estructura coalicional como un compromiso entre los vectores de pago mínimo y máximo tal que cada coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ divide su valor τ, $\tau_k(v^{\mathfrak{B}})$, entre los jugadores que la conforman. A esta altura es posible observar el mecanismo de repartición llevado a cabo por el valor τ-coalicional: primeramente a cada coalición en $\mathfrak{B}$ se le asigna de pago su valor τ en el juego de grupos y luego, los jugadores que la conforman dividen dicho pago asignado, tomando en cuenta los posibles beneficios que les traería aliarse con subcoaliciones de su misma coalición o con otras coaliciones.

Definición 2.4. *El valor τ-coalicional es una aplicación $\tau : QBU \to \mathbb{R}^n$ que asigna a todo $(N, v, \mathfrak{B}) \in QBU$ el vector $(\tau_i(v, \mathfrak{B}))_{i \in N}$, para toda $B_k \in \mathfrak{B}$ y todo $i \in B_k$ dado por*

$$\tau_i(v, \mathfrak{B}) = \alpha_k M_i(v, \mathfrak{B}) + (1 - \alpha_k) m_i(v, \mathfrak{B}) \tag{2.8}$$

donde, para cada $B_k \in \mathfrak{B}$, α_k es tal que $\sum_{i \in B_k} \tau_i(v, \mathfrak{B}) = \tau_k(v^{\mathfrak{B}})$.

Para caracterizar el valor τ-coalicional, siendo ϕ un valor para juegos con estructura coalicional, se tienen los siguiente axiomas:

Axioma 2.23. (Eficiencia del juego de grupos). Un valor ϕ satisface el axioma de eficiencia en el juego de grupos si para todo $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y todo $B_k \in \mathfrak{B}$

$$\sum_{i \in B_k} \phi_i(v, \mathfrak{B}) = \phi_{B_k}(v^{\mathfrak{B}}, \{M\}).$$

Este axioma indica que lo que se reparte entre los jugadores que conforman una coalición es exactamente lo que consigue dicha coalición en el juego de grupos, siempre que se aplique el mismo valor que en el juego original, considerando $\mathfrak{B} = \{M\}$.

Axioma 2.24. (Covarianza). Sean $(N, v, \mathfrak{B})$ y $(N, w, \mathfrak{B}) \in G \times B$ dos juegos covariantes, es decir, que existen $c > 0$ y $(a_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$w(S) = cv(S) + \sum_{i \in S} a_i \qquad \forall\ S \subseteq N.$$

Entonces, ϕ satisface el axioma de covarianza si para todo c y $(a_i)_{i \in N}$ se tiene

$$\phi_i(w, \mathfrak{B}) = c\phi_i(v, \mathfrak{B}) + a_i.$$

Aunque el nombre puede referirse a cierto concepto de probabilidad, el significado nada tiene que ver con esta idea. A lo que se refiere este axioma, es que si se tienen dos juegos que cambian de manera conjunta para todas las coaliciones $S \subseteq N$, el pago a los jugadores en ambos juegos también cambiará (y de la misma forma) de manera conjunta.

Axioma 2.25. (Expulsión de Jugadores Nulos). Sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y sea $D \subset N$ el conjunto de jugadores nulos del juego. Se define un nuevo juego $(N \backslash D, v_{-D}, \mathfrak{B}'(D)) \in G \times B$ cuya función característica v_{-D} es la restricción de v a $N \backslash D$ y donde la estructura coalicional es $\mathfrak{B}$ restringida a $N \backslash D$, esto es

$$\mathfrak{B}'(D) = \{B_k \cap (N \backslash D) \mid B_k \in \mathfrak{B} \text{ con } B_k \cap (N \backslash D) \neq \emptyset\}.$$

Entonces, ϕ satisface el axioma de expulsión de jugadores nulos si para todo $i \in N \backslash D$,

$$\phi_i(v_{-D}, \mathfrak{B}'(D)) = \phi_i(v, \mathfrak{B}).$$

El valor de la solución de los jugadores no-nulos no depende de los jugadores nulos: éstos pueden salir del juego y el valor para los demás jugadores seguirá siendo el mismo.

Axioma 2.26. (M-proporcionalidad). Sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ tal que $m_i(v, \mathfrak{B}) = 0$ para todo $i \in N$. Entonces, para cada coalicion $B_k \in \mathfrak{B}$ existe una constante c_k tal que para todos los jugadores $i \in B_k$

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = c_k M_i(v, \mathfrak{B}).$$

Este axioma dice que en caso de los jugadores tengan un pago mínimo de cero, sus pagos asignados serán múltiplos de su valor utópico; el axioma tiene sentido porque significa que la mejor opción que tienen los jugadores es permanecer en su coalición y como se quiere un valor que sea un compromiso entre los pagos máximos y mínimos, cada jugador recibirá la misma parte proporcional de su pago máximo, no haciendo distinción entre ellos.

El siguiente teorema muestra algunas propiedades que satisface el valor τ-coalicional:

Teorema 18 (Casas, García, Van del Nouweland y Vázquez, 2003)**.** *Para juegos cuasibalanceados con estructuras coalicionales, el valor τ-coalicional dado en 2.8 satisface los axiomas de eficiencia, nulidad, anonimato, eficiencia del juego de grupos, covarianza, expulsión de jugadores nulos y M-proporcionalidad. Además, el vector de pagos resultante tiene racionalidad individual.*

Y usando cuatro propiedades dadas en el teorema anterior, se puede dar la siguiente caracterización del valor τ-coalicional:

Teorema 19 (Casas, García, Van del Nouweland y Vázquez, 2003)**.** *Para juegos cuasibalanceados con estructuras coalicionales, el valor τ-coalicional es la única solución que satisface los axiomas de eficiencia, eficiencia del juego de grupos, covarianza y M-proporcionalidad.*

Ejemplo 2.5. *Considérese el juego cooperativo de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1, en donde* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. *Calculando los vectores de pagos máximo y mínimo en el juego de grupos se tiene* $M(v^{\mathfrak{B}}) = (80,30)$ *y* $m(v^{\mathfrak{B}}) = (50,0)$ *y con ello,* $\tau(v^{\mathfrak{B}}) = (65,15)$ *con* $\alpha = \frac{1}{2}$. *Ahora, considerando el juego al nivel de la negociación dentro de las coaliciones, se tiene* $M(v,\mathfrak{B}) = (80,80,30)$ *y* $m(v,\mathfrak{B}) = (10,20,0)$. *Con lo anterior, se concluye que el juego es cuasibalanceado y junto con los resultados obtenidos anteriormente y con* $\alpha_{\{1,2\}} = \frac{7}{26}$ *y* $\alpha_3 = \frac{1}{2}$

$$\tau(v,\mathfrak{B}) = (28\frac{11}{13}, 36\frac{2}{13}, 15)$$

Cabe mencionar que la interpretación del valor τ-coalicional presentada en esta sección no es la única extensión del valor τ para juegos con estructuras coalicionales; Driessen y Tijs (1992) proponen un valor τ-coalicional en donde las coaliciones dentro de una estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, ..., B_m\}$ actúan como unidades individuales que debieran repartir su valía entre los jugadores que las conforman utilizando de igual manera vectores de pago mínimo y máximo. Claramente en este tipo de valor no existe negociación entre las coaliciones, con lo que puede verse que el valor propuesto equivale al cálculo de m valores τ, uno para cada coalición en $\mathfrak{B}$. Para mayores detalles, ver Driessen y Tijs [10].

2.5. El valor colectivo

En algunas situaciones que involucren estructuras coalicionales, el poder de cada una de ellas no sólamente se mide por sus capacidades, sino que también se considera al número de miembros que las conforman, como por ejemplo, en votación de sindicatos. El valor colectivo es una propuesta para juegos con estructuras coalicionales donde el tamaño de cada coalición es un factor determinante en la negociación.

El valor colectivo se basa en una idea de negociación en dos etapas, de una manera similar a la que ocurre en el valor de Owen: en el primer paso, se utiliza el valor de Shapley ponderado para asignar un pago a cada coalición en el juego de grupos $(M, v^{\mathfrak{B}})$, y en el segundo paso se aplica el valor de Shapley al juego restringido a la coalición para luego dividir el excedente (o la pérdida) resultante del primer paso de la negociación. En el primer paso, el peso de cada coalición es igual a su tamaño, i.e., $w_k = |B_k|$ para toda $B_k \in \mathfrak{B}$. Después de la primera etapa, cada coalición, digamos $B_k \in \mathfrak{B}$ recibe $\varphi_k^w(v^{\mathfrak{B}})$ y en la siguiente etapa los jugadores en B_k se ponen de acuerdo sobre cómo repartir dicho monto. Entonces, ellos deciden dividir el excedente $\varphi_k^w(v^{\mathfrak{B}}) - v(B_k)$, que puede verse como la recompensa que se obtuvo por el hecho de haber sido una coalición de tamaño $|B_k|$, en partes iguales, mientras que la valía de la coalición $v(B_k)$ se distribuye utilizando el valor de Shapley de manera interna.

Definición 2.5. *Sea* $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$. *Se define el valor colectivo* φ^c *como una aplicación* $\varphi^c : G \times B \to \mathbb{R}^n$, *con* $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ *y* $M = \{1, \ldots, m\}$ *tal* *que para cada jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ se define como*

$$\varphi_i^c(v, \mathfrak{B}) = \mathrm{Sh}_i(v|_{B_k}) + \frac{\varphi_k^w(v^{\mathfrak{B}}) - v(B_k)}{|B_k|} \tag{2.9}$$

donde $w = (w_k)_{k \in M}$ con $w_k = |B_k|$ para toda $k \in M$.

Al igual que otros valores, el valor colectivo puede plantearse de manera probabilística: considérese la situación en que los n jugadores arribarán a un hotel para participar en reuniones de sus coaliciones. El hotel tiene m cuartos indexados por $1, \ldots, m$. El jugador que llegue primero al hotel reservará la última habitación, m, y se situará en el último lugar de dicho cuarto. Cuando el segundo jugador llegue al hotel, si no es miembro de la misma coalición que el primer jugador, no podrá entrar a la habitación m, por lo que reservará el cuarto $m-1$ para su coalición. Si el jugador fuera un miembro de la misma coalición que el primer jugador, entonces entraría a la habitación m y se situaría en el penúltimo lugar. Continuando con este argumento $n-2$ veces, se obtendría un orden $\mathcal{R}^*$ de N dado un orden inicial $\mathcal{R}$. Finalmente, se calcula la contribución marginal de cada jugador acorde a $\mathcal{R}^*$ y se toma la esperanza sobre la distribución de probabilidad tal que cada orden $\mathcal{R}$ de N ocurra de manera igual que en el valor de Shapley. Hay que recordar que el primer jugador de cada coalición tiene una tarea específica que los demás no tienen, que es la reservación del cuarto para su coalición, y por lo tanto este hecho debiera tomarse en cuenta para el cálculo de las contribuciones marginales. Defínase el orden $\mathcal{R}[k]$ en B_k tal que para cualesquiera $i, j \in B_k$, $\mathcal{R}[k](i) < \mathcal{R}[k](j)$ sí y sólo si $\mathcal{R}(i) < \mathcal{R}(j)$ y el orden de coaliciones $\theta(\mathcal{R})$ en M tal que $\theta(\mathcal{R})(k) < \theta(\mathcal{R})(h)$ sí y sólo si existe $i \in B_k$ tal que $\mathcal{R}(i) < \mathcal{R}(j)$ para cualquier $j \in B_h \in \mathfrak{B} \backslash B_k$, así como la contribución marginal del jugador i en el orden $\mathcal{R}$ de N jugadores como

$$m_i^{\mathcal{R}}(N, v) = v(\{j \in N : \mathcal{R}(j) < \mathcal{R}(i)\} \cup \{i\}) - v(\{j \in N : \mathcal{R}(j) < \mathcal{R}(i)\}).$$

Entonces, para todo $i \in B_k$ se define la *contribución marginal colectiva* del jugador i en un orden $\mathcal{R}^*$ de la siguiente manera

$$\widehat{\mathrm{CM}}_i(\mathcal{R}^*) = \begin{cases} m_i^{\mathcal{R}^*[k]}(B_k, v) & \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}^*} \cap B_k \backslash \{i\} \neq B_k \backslash \{i\} \\ m_i^{\mathcal{R}^*[k]}(B_k, v) + m_k^{\theta(\mathcal{R}^*)}(M, v^{\mathfrak{B}}) - v(B_k) & \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}^*} \cap B_k \backslash \{i\} = B_k \backslash \{i\} \end{cases}$$

Por lo tanto, la contribución marginal colectiva del jugador i es su contribución marginal a su coalición si él no es el último jugador de B_k en el orden $\mathcal{R}^*$, y es la suma de su contribución marginal a la coalición a la que pertenece más la contribución marginal de su coalición al orden de coaliciones menos la valía de su coalición si él es el último jugador en el orden B_k. El último término $m_k^{\theta(\mathcal{R}^*)}(M, v^{\mathfrak{B}}) - v(B_k)$ puede verse como la recompensa que obtiene el jugador por el hecho de haber reservado la habitación. Con esto, el valor colectivo para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ puede escribirse como

$$\varphi^c(v, \mathfrak{B}) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{R}} \widehat{\mathrm{CM}}_i(\mathcal{R}^*) \qquad \forall\, \mathcal{R} \in \mathcal{R}(N). \tag{2.10}$$

Para axiomatizar el valor colectivo es necesario introducir un tipo especial de contribuciones balanceadas:

Axioma 2.27. (Contribuciones balanceadas entre jugadores y coaliciones). Sea ϕ un valor para juegos con estructuras coalicionales y sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$. Si $|\mathfrak{B}| \geq 2$, entonces se dice que ϕ satisface el axioma de contribuciones balanceadas entre jugadores y coaliciones si para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ y para toda $j \in B_h \in \mathfrak{B}$ con $B_k \neq B_h$

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) - \phi_i(v, \mathfrak{B} \backslash B_h) = \phi_j(v, \mathfrak{B}) - \phi_j(v, \mathfrak{B} \backslash B_k).$$

Lo que el axioma anterior dice es que la salida de una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$ afecta al pago de todos los jugadores que no se encuentran en esa coalición de la misma manera en que la salida de alguna otra coalición $B_h \neq B_k$ afecta a los jugadores en B_k, lo cual puede interpretarse como el hecho, dado que salida de una coalición cualquiera afecta de la misma manera a los jugadores que permanecen, que a ningún jugador se ve beneficiado en su pago con la salida de una coalición.

Axioma 2.28. (Coincidencia entre la gran coalición y singuletes). Se dice que un valor ϕ para juegos con estructuras coalicionales satisface este axioma si

$$\phi(v, \{N\}) = \phi(v, [N]).$$

Cuando se tiene una única solución formada por todos los jugadores y cuando se tenga que cada jugador pertenece a una coalición donde él es el único miembro, el pago asignado será el mismo en ambos casos. Este axioma se satisface para muchos otros valores, como son el valor de Owen y el de Aumann-Drèze, entre otros.

Teorema 20 (Kamijo, 2006)**.** *Existe una única solución para juegos con estructuras coalicionales que satisface los axiomas de eficiencia, coincidencia entre la gran coalición y singuletes y contribuciones balanceadas entre jugadores y coaliciones y viene dado por* φ^c.

Claramente, dado que implica en algún paso de la negociación el uso del valor de Shapley ponderado, el valor colectivo no cumple el axioma de simetría coalicional. Kamijo (2006) demostró que el valor colectivo satisface los axiomas de linealidad y anonimato.

Ejemplo 2.6. *Considérense el juego cooperativo de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1, y la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. *Calculando el valor de Shapley ponderado en el juego de grupos se tiene* $\varphi^w(v^{\mathfrak{B}})(\{1,2\}) = 70$ *y* $\varphi^w(v^{\mathfrak{B}})(\{3\}) = 10$*; por lo tanto, los pagos que asigna el valor colectivo en este juego son*

$$\varphi^c(v, \mathfrak{B}) = (30, 40, 10).$$

2.6. El valor de Banzhaf-Owen

El valor de Banzhaf-Owen es una extensión natural del valor de Banzhaf-Coleman presentado en el capítulo anterior. Owen (1981) propuso dicha extensión, aunque sin una axiomatización: en este caso, el reparto en los niveles de negociación se hace empleando el valor de Banzhaf-Coleman en lugar del valor de Shapley.

Definición 2.6. *Dado un juego $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$, el valor de Banzhaf-Owen asigna a cada jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ el número real $\varphi_i^B(v, \mathfrak{B})$ dado por*

$$\varphi_i^B(v, \mathfrak{B}) = \sum_{\substack{T \subseteq \mathfrak{B} \\ T \not\ni B_k}} \sum_{\substack{S \subseteq B_k \\ S \not\ni i}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{|B_k|-1}} \Big[v(A_T \cup S \cup \{i\}) - v(A_T \cup S) \Big] \tag{2.11}$$

en donde $A_T = \bigcup_{B_q \in T} B_q$.

En la definición anterior pueden verse claramente las semejanzas con el valor de Owen expresado en (2.3): para el valor de Banzhaf-Owen, a cada coalición se le asigna su valor de Banzhaf-Coleman dentro del juego de grupos. Luego, los jugadores dentro de cada coalicion se ponen de acuerdo sobre cómo dividir dicho pago, y para ello se toma en cuenta lo que ellos junto con las subcoaliciones a las que pertenecen conseguirían si fungieran como representantes de su coalición; ello proporciona un nuevo juego restringido a la coalición, y el valor de Banzhaf-Coleman asignado a cada jugador en este nuevo juego es el valor de Banzhaf-Owen.

Para caracterizar al valor de Banzhaf-Owen se introducirán nuevos axiomas; para ello considérese que ϕ es una solución para juegos con estructuras coalicionales:

Axioma 2.29. (Indiferencia en los grupos). Se dice que ϕ satisface el axioma de indiferencia en las uniones si para todo $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y toda $B_k \in \mathfrak{B}$ y todo par de jugadores $i, j \in B_k$ $(i \neq j)$ se verifica

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = \phi_i(v, \mathfrak{B}^j).$$

en donde $\mathfrak{B}^j = \{B_1, \ldots, B_{k-1}, B_k \backslash \{j\}, B_{k+1}, \ldots, B_m, \{j\}\}$.

Este axioma dice que si un jugador decide de modo unilateral dejar la coalición a la que pertenece, el pago obtenido por el resto de los jugadores de dicha coalición seguirá siendo el mismo.

Axioma 2.30. (Juego de grupos formados por jugadores únicos). Se dice que ϕ satisface el axioma de juego de grupos formados por jugadores únicos si para todo juego $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ con $|B_k| = 1$ se tiene

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = \phi_{B_k}(v^{\mathfrak{B}}, [M]).$$

Este axioma establece que si una coalición está formada por un único jugador, el pago obtenido por ese jugador coincide con el pago asignado a la coalición correspondiente en el juego de grupos siempre que se aplique la misma solución a éste juego con $\mathfrak{B} = [M]$.

Teorema 21 (Meijide, 2001). *Existe un único valor para juegos con estructura coalicional que satisface los axiomas de anonimato, nulidad, indiferencia en las grupos y el axioma de juego de grupos formados por jugadores únicos y es el valor de Banzhaf-Owen φ^B.*

Debido a que en el proceso de negociación primeramente se reparte dentro del juego de grupos utilizando el valor de Banzhaf-Coleman, habría de esperar que el valor de Banzahf-Owen cumpla con el axioma de simetría coalicional, más sin embargo, el valor de Banzhaf-Owen no verifica dicha propiedad, y al igual que el valor de Banzhaf-Coleman, el valor no necesariamente es eficiente.

Ejemplo 2.7. *Considérese el juego cooperativo de tres jugadores dado mediante el ejemplo 1.1, con la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. En este caso, para el juego de grupos el valor de Banzhaf-Coleman asigna de pagos $\phi^B(v,\mathfrak{B})(\{1,2\}) = 65$ y $\phi^B(v,\mathfrak{B})(\{3\}) = 15$ dentro del primer nivel de negociación. Aplicando la fórmula dada en (2.11), se tiene que el valor de Banzhaf-Owen del juego es*

$$\varphi^B(v,\mathfrak{B}) = (30, 35, 15).$$

2.7. Nuevas extensiones de soluciones

En la sección anterior se planteó una redefinición del valor de Owen en donde en lugar de utilizar el valor de Shapley como criterio de repartición para el juego de grupos se utilizó el valor de Banzhaf-Coleman, conservando intacto el proceso de negociación en dos fases, lo cual puede verse como una extensión del valor de Banzhaf-Coleman al caso donde se tienen estructuras coalicionales. Con esta metodología en mente podrían plantearse nuevas soluciones cambiando el valor utilizado para el juego de grupos, inclusive para el juego restringido a la coalición dentro de la segunda etapa de la negociación. En esta sección se presentan extensiones de valores para juegos con estructura coalicional que pueden verse como juegos restringidos a cada coalición dentro de la estructura coalicional, pero que la utilizan para de alguna manera poder medir las capacidades de cada subcoalición.

2.7.1. El valor de Solidaridad Coalicional

Dado un juego $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$, para cualquier subcoalición no vacía $S \subseteq B_k \in \mathfrak{B}$, se define

$$A^v(S,\mathfrak{B},\psi) = \frac{1}{s}\sum_{j\in S}\left[\psi(v^{\mathfrak{B}(S)})(S) - \psi(v^{\mathfrak{B}(S\backslash\{j\})})(S\backslash\{j\})\right]$$

lo cual representa la contribución marginal promedio de un miembro de S en el juego de grupos $(M, v^{\mathfrak{B}(S)})$, donde S funge como representante de B_k y donde se paga a las coaliciones, dentro del mismo juego de grupos, utilizando el valor ψ previamente establecido. Luego, se define al valor de solidaridad para estructuras coalicionales como el pago a cada jugador $i \in N$, $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ dado por

$$\varphi_i^{So}(v, \mathfrak{B}, \psi) = \sum_{\substack{S \subseteq B_k \\ S \ni i}} \frac{(|B_k| - s)!(s-1)!}{|B_k|!} A^v(S, \mathfrak{B}, \psi) \tag{2.12}$$

esto es, si el i-ésimo jugador es miembro de una subcoalición $S \subseteq N$, entonces, él obtiene de pago el promedio de las contribuciones marginales de los miembros de S. Por tanto, si $\mu_i(S, \mathfrak{B}, \psi) := \psi(v^{\mathfrak{B}(S)})(S) - \psi(v^{\mathfrak{B}(S \setminus i)})(S \setminus i) > A^v(S, \mathfrak{B}, \psi)$, el jugador i ofrece parte de su contribución marginal $\mu_i(S, \mathfrak{B}, \psi)$ a la subcoalición S para compensar de alguna manera, la debilidad de los miembros de S. Si $\mu_i(S, \mathfrak{B}, \psi) < A^v(S, \mathfrak{B}, \psi)$, el jugador i se beneficia del hecho de haber aceptado ser parte de S. De ahí el nombre de "valor solidario", ya que los jugadores con contribuciones marginales mayores que el promedio adoptan una actitud solidaria con aquellos jugadores más débiles.

Ejemplo 2.8. *Sea el juego (N, v) dado en el ejemplo 1.1. Considérese que se ha formado la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{12\}, \{3\}\}$ y que se toma como valor de pago para el juego de las coaliciones al valor de Shapley ($\psi = \mathrm{Sh}$). Entonces, el vector de pago correspondiente al valor de solidaridad coalicional será*

$$\varphi^{So}(v, \mathfrak{B}, \psi) = (31\frac{1}{4}, 33\frac{3}{4}, 15).$$

El valor de solidaridad para estructuras coalicionales presentado es una extensión natural del valor de solidaridad para juegos sin estructura coalicional presentada por Nowak y Radzik [25], en cuyo estudio presentan al promedio de las contribuciones marginales de los jugadores dentro de una coalición S de la siguiente manera

$$A^v(S) = \frac{1}{s} \sum_{j \in S} \left[v(S) - v(S \setminus j) \right]$$

y entonces, el valor de solidaridad para el jugador i se expresa como

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} A^v(S).$$

Es importante hacer notar las diferencias y semejanzas de éste valor con el valor solidario dado en (2.12): en primer lugar, la fórmula del promedio de las contribuciones balanceadas presentada por Radzik y Nowak trabaja con el juego (N, v), dado que para una coalición $S \subseteq N$, *v(S)* es el total a repartir entre los miembros de S; además, se consideran todas las coaliciones $S \subseteq N$ dado que se formará una única coalición formada por todos los jugadores (la gran coalición). Para el valor solidario dado por (2.12), el jugador i pertenece a una coalición B_k dentro de una estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_k, \ldots, B_m\}$ y por lo tanto sólo se están tomando en cuenta las subcoaliciones $S \subseteq B_k$ que contengan al jugador i. Además, para toda $S \subseteq B_k$, el monto a repartir entre los miembros de S será lo que consiguiría esa coalición si representara a B_k en el juego de las coaliciones $(M, v^{\mathfrak{B}(S)})$, en donde se paga con un valor ψ, ya que se está considerando que las demás coaliciones $B_j \in \mathfrak{B} \backslash B_k$ están conformadas en su totalidad (como unidades indivisibles) y dispuestas a negociar.

Definición 2.7. *Se dice que un jugador $i \in N$ es A-nulo-coalicional si, para un valor ψ dado, $A^v(S, \mathfrak{B}, \psi) = 0$ para toda subcoalición $S \subseteq B_k \in \mathfrak{B}$ que contenga a i.*

Sea ϕ un valor para juegos con estructuras coalicionales. Considérese el siguiente axioma:

Axioma 2.31. (A-nulidad coalicional). Si $i \in N$ es un jugador A-nulo coalicional, entonces $\phi_i(v, \mathfrak{B}, \psi) = 0$.

Este axioma dice que aquellos jugadores a los cuales todas las coaliciones que los contengan tengan contribuciones marginales promedio de cero no se les otorgará pago alguno.

Teorema 22. *Sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y un valor de pago ψ para el juego de grupos que cumple los axiomas de eficiencia, simetría y linealidad; el valor de solidaridad coalicional $\varphi^{So}(v, \mathfrak{B}, \psi)$ es el único valor que cumple los axiomas de eficiencia, anonimato, simetría coalicional, linealidad, aditividad y A-nulidad-coalicional.*

Demostración.

El valor de solidaridad para estructuras coalicionales puede verse como el valor de solidaridad presentado por Radzik y Novak, sólo que en lugar de aplicársele al juego (N, v), se está aplicando al juego $(B_k, v_k^{\mathfrak{B}})$ para todo $B_k \in \mathfrak{B}$ introducido por Owen (ver sección 1.3), y por lo tanto, por la caracterización del valor de solidaridad y por la propiedades intrínsecas de ψ, se satisfacen trivialmente los axiomas de anonimato, simetría coalicional, linealidad y A-nulidad coalicional. Además, el valor de solidaridad es eficiente, por lo que el valor de solidaridad coalicional es eficiente dentro de las coaliciones, y por eficiencia del valor ψ, también lo es en el juego $(N, v, \mathfrak{B})$. La unicidad está probada para el valor de solidaridad en el juego $(B_k, v_k^{\mathfrak{B}})$ para todo $B_k \in \mathfrak{B}$ y por lo tanto, también para el valor de solidaridad coalicional. $\square$

2.7.2. El valor de Consenso Coalicional

El valor de consenso para juegos sin estructura coalicional fue introducido por Yuan Ju [15]. Para extenderlo al caso de juegos con estructuras coalicionales considérese una estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, ..., B_m\}$ y, sin pérdida de generalidad considérese la coalición $B_r = \{i, j, k\} \in \mathfrak{B}$. Tómese el caso en que la coalición B_r se esté formando y que el jugador i será el primero en llegar, luego el jugador j y de último, el jugador k. Para esta extensión, se considerará que el resto de la estructura coalicional $\mathfrak{B}\backslash B_r$ ya está conformada y que existe un valor ψ que se ha acordado para calcular el pago a cada coalición en el juego de grupos. Entonces, cuando llega el jugador i, él consigue un pago de $\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\})$. Con la llegada del jugador j, la pseudocoalición B_r se ha modificado para el juego de grupos, y el pago asignado conseguido, menos lo que consiguen ellos si jugaran solos, se dividirá en partes iguales entre los jugadores que la conforman, esto es, al jugador i le correspondería

$$\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) + \frac{\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i,j\})})(\{i,j\}) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\})}{2}$$

mientras que al jugador j le corresponde

$$\psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\}) + \frac{\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i,j\})})(\{i,j\}) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\})}{2}.$$

El siguiente jugador, k, entra en escena y decide cooperar con lo que se ha formado de la coalición B_r y por lo tanto, al negociar con el resto de la coaliciones se tiene de nuevo un excedente, dividiéndose ahora entre el jugador k y la coalición $\{i,j\}$, dado que esta coalición ya se encontraba formada cuando ocurrió la llegada del jugador k; internamente los jugadores i y j compartirán la parte correspondiente de ese excedente que se le otorgue a la coalición $\{i,j\}$; de tal forma, siendo el excendente

$$\rho = \frac{\psi(v^{\mathfrak{B}})(B_k) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{i,j\})})(\{i,j\}) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{k\})})(\{k\})}{2},$$

el pago al jugador k será de

$$\psi(v^{\mathfrak{B}(\{k\})})(\{k\}) + \rho$$

y para el jugador i se tendría

$$\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) + \frac{\big(\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i,j\})})(\{i,j\}) + \rho\big) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) - \psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\})}{2}.$$

Extendiendo este argumento al caso n-personal se obtiene un método general, el cual se entiende como la aplicación de "la regla de división estándar del excedente", dado que se está tomando al último jugador que entra y a todos los que ya se encontraban dentro de la coalición como dos entidades, y se está aplicando la solución estándar para juegos bipersonales. Además, como no se tiene un orden de entrada predeterminado de los jugadores, se tomará el promedio sobre todos los órdenes posibles.

Dado un juego (N,v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ y un valor ψ utilizado para pagar en el juego de grupos, denótese por $\mathcal{R}(B_k)$, con $B_k \in \mathfrak{B}$ al conjunto de biyecciones $\mathcal{R} : \{1,2,...,|B_k|\} \to B_k$. Para un orden dado $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(B_k)$ y $h \in \{1,2,...,|B_k|\}$, defínase $S_h^{\mathcal{R}} = \{\mathcal{R}(1), \mathcal{R}(2), ..., \mathcal{R}(h)\} \subset B_k$ con $S_0^{\mathcal{R}} = \emptyset$, es decir, $S_h^{\mathcal{R}}$ representa a todos los jugadores que preceden al jugador h en el orden $\mathcal{R}$ incluyéndolo a él mismo. Recursivamente, defínase

$$\rho(S_h^{\mathcal{R}}, \mathfrak{B}, \psi) = \begin{cases} \psi(v^{\mathfrak{B}})(B_k) & \text{si } h = |B_k| \\ \psi(v^{\mathfrak{B}(S_h^{\mathcal{R}})})(S_h^{\mathcal{R}}) + & \text{si } h \in \{1, ..., |B_k| - 1\} \\ \quad \frac{1}{2}\Big[\rho(S_{h+1}^{\mathcal{R}}, \mathfrak{B}, \psi) - \psi(v^{\mathfrak{B}(S_h^{\mathcal{R}})})(S_h^{\mathcal{R}}) - & \\ \qquad \psi(v^{\mathfrak{B}(\mathcal{R}(h+1))})(\mathcal{R}(h+1))\Big]. & \end{cases}$$

Ahora constrúyase *el vector de pagos estandarizado* $\sigma^{\mathcal{R}}(v, \mathfrak{B}, \psi)$, el cual corresponde a la situación en donde los jugadores forman una coalición $B_k \in \mathfrak{B}$, llegando uno a uno en el orden $(\mathcal{R}(|B_k|), \mathcal{R}(|B_k| - 1), ..., \mathcal{R}(1))$ y en donde se asigna a cada jugador $\mathcal{R}(k)$, además de su pago individual en el juego de grupos (en donde se considera que las demás coaliciones ya se han formado) $\psi(v^{\mathfrak{B}(\mathcal{R}(k))})(\mathcal{R}(k))$, la mitad del excendente neto, $\rho(S_k^{\mathcal{R}})$, resultado de la negociación con la parte de la coalición que ya estaba conformada cuando éste llegó. Formalmente

$$\sigma_{\mathcal{R}(k)}^{\mathcal{R}}(v, \mathfrak{B}, \psi) = \begin{cases} \psi(v^{\mathfrak{B}(\mathcal{R}(k))})(\mathcal{R}(k)) + & \text{si } k = \{2, ..., |B_k|\} \\ \quad \frac{1}{2}\Big[\rho(S_k^{\mathcal{R}}, \mathfrak{B}, \psi) - \psi(v^{\mathfrak{B}(S_{k-1}^{\mathcal{R}})})(S_{k-1}^{\mathcal{R}}) - & \\ \qquad \psi(v^{\mathfrak{B}(\mathcal{R}(k))})(\mathcal{R}(k))\Big] & \\ \rho(S_1^{\mathcal{R}}, \mathfrak{B}, \psi) & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Entonces, siendo (N, v) un juego con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ con un valor ψ que pague en el juego de grupos, y sea un jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$, el valor de consenso para estructuras coalicionales del jugador i viene dado por

$$\varphi_i^C(v, \mathfrak{B}, \psi) = \frac{1}{|B_k|!} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}(B_k)} \sigma_{\mathcal{R}(i)}^{\mathcal{R}}(v, \mathfrak{B}, \psi). \tag{2.13}$$

Ejemplo 2.9. *Considérese el juego dado en el ejemplo 1.1. El valor de consenso coalicional para dicho juego, suponiendo la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ *y que se pagará con el valor de Shapley para el juego de grupos* ($\psi = \mathrm{Sh}$) *será de*

$$\varphi^C(v, \mathfrak{B}, \psi) = (30, 35, 15).$$

Existen diferencias importantes entre éste valor y el desarrollado por Ju; en primera, el valor de consenso para juegos sin estructura coalicional trabaja de manera directa sobre el juego (N, v), ya que, tomando en cuenta que se formará la gran coalición, el monto que consigue la coalición $S \subseteq N$, conformada por los jugadores que vayan llegando a ella, será de $v(S)$; en el caso de la formación de estructuras coalicionales, un jugador $i \in B_k$ sólo está inmiscuido en la formación de su coalición $B_k \in \mathfrak{B}$, y si a su llegada (dentro de un orden predeterminado) se forma la coalición $S \subseteq B_k$, el monto conseguido ya no será únicamente $v(B_k)$, ya que se está considerando que las demás coaliciones $B_h \in \mathfrak{B} \backslash B_k$ se encuentran bien definidas, y por lo tanto, el monto conseguido será lo que consigue dicha subcoalición S negociando con las demás coaliciones B_h ya conformadas. De ahí la necesidad de tener un valor ψ que indique la manera de repartir en ese juego entre grupos $(M, v^{\mathfrak{B}})$ (ver sección 1.3).

Sea ϕ una solución para juegos (N, v) con estructura coalicional $\mathfrak{B}$ y sea ψ un valor acordado para pagar en el juego de grupos. Considérese el siguiente axioma:

Axioma 2.32. (Jugador cuasi-nulo coalicional). Si para cualquier jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$

$$\psi(v^{\mathfrak{B}(S\cup\{i\})})(S \cup \{i\}) = \psi(v^{\mathfrak{B}(S)})(S) + \psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\})$$

para cualquier $S \subset B_k \backslash \{i\}$, entonces

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}, \psi) = \frac{1}{2}\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) + \\ + \frac{1}{2}\Big(\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) + \frac{\psi(v^{\mathfrak{B}})(B_k) - \sum_{j\in B_k}\psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\})}{|B_k|}\Big).$$

Desde una perspectiva colectivista, es posible argumentar que todos los miembros de una sociedad deberían compartir el excedente que se obtiene como resultado de participar todos en una negociación, inclusive los jugadores nulos, y de ahí que surjan dos puntos de vista contrastantes de cómo asignarle valor a un jugador nulo: $\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\})$ o bien $\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) + \frac{\psi(v^{\mathfrak{B}})(B_k) - \sum_{j\in B_k}\psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\})}{|B_k|}$. Tomando en cuenta las situaciones anteriores, se propone hacer un compromiso justo y tomar el promedio de ambos como el pago a un jugado nulo, lo cual resulta en la propiedad del jugador cuasi-nulo coalicional.

Teorema 23. *Sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y un valor ψ utilizado para pagar en el juego de grupos $(M, v^{\mathfrak{B}})$ tal que sea eficiente, lineal y simétrico, entonces el valor de consenso coalicional $\varphi^C(v, \mathfrak{B}, \psi)$ es el único valor que satisface los axiomas de linealidad, anonimato, simetría coalicional, eficiencia y la propiedad del jugador cuasi-nulo coalicional.*

Demostración.

En el artículo de Ju [15] se presenta la demostración en caso de juegos sin estructura coalicional: en realidad, el valor de consenso coalicional puede verse como un valor aplicado a un juego sin estructura coalicional, ya que se está aplicando al juego $(B_k, v_k^{\mathfrak{B}})$ con $v_k^{\mathfrak{B}}(S) = \psi_S(v^{\mathfrak{B}(S)})$ para todo $S \subseteq B_k \in \mathfrak{B}$, el cual se da como resultado de la existencia de una estructura coalicional; por lo tanto, y dadas las propiedades exigibles a ψ, se satisfacen trivialmente los axiomas de linealidad, anonimato, simetría coalicional, eficiencia y la propiedad del jugador cuasi-nulo coalicional. La prueba de la unicidad ya está realizada para el valor de consenso en el juego $(B_k, v_k^{\mathfrak{B}})$ y por lo tanto, para el valor de consenso coalicional. $\square$

2.7.3. Soluciones por división de excesos

Es posible extender las soluciones más conocidas que trabajan sobre la división de excesos hacia los juegos con estructuras coalicionales de varias maneras; se presentarán algunas de estas extensiones tratando de preservar la importancia de la estructura coalicional y tratanto de considerar a cada coalición dentro de ella como una unidad indivisible de negociación.

Solución estándar

La idea detrás de la solución estándar en juegos cooperativos consiste en otorgar a cada jugador su valía individual y luego repartir el excedente (o la pérdida) entre todos los jugadores de manera igualitaria; entonces, en un juego n-personal sin estructuras coalicionales el pago para el jugador i según la solución estándar viene dada de la siguiente manera:

$$\phi_i(v) = v(\{i\}) + \zeta, \qquad \text{en donde } \zeta = \frac{v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})}{n}.$$

En este tipo de solución, si un juego es superaditivo, cada jugador consigue por lo menos lo que conseguiría si jugara de manera individual, y en caso de haber algún excedente, éste se reparte de manera equitativa entre todos los jugadores; en caso de no ser superaditivo, lo que se reparte de igual manera puede ser una pérdida.

Puede proponerse una primera solución estándar para juegos con estructuras coalicionales de la misma manera que para juegos sin estructuras coalicionales:

$$\varphi^{e_1}(v,\mathfrak{B}) = v(\{i\}) + \frac{1}{n}\Big[v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\Big]$$

aunque es claro que esta solución ignora por completo la existencia de la estructura coalicional, por lo que se quisiera un tipo de solución estándar que tomara en cuenta la formación existente de los jugadores. Se propone entonces una primera repartición a nivel de coaliciones, en donde cada coalición recibe su valía más la parte que le corresponde del excendente (dividido en partes iguales) o sea, su solución estándar en el juego de grupos $(M, v^{\mathfrak{B}})$. Luego, dentro de cada coalición, a cada jugador se le asigna su valía individual más el excedente (dividido en partes iguales entre los miembros de la coalición) o sea, su solución estándar en el juego restringido a su coalición en donde la valía de la coalición a la que pertenece será lo que ésta consigue en el juego de grupos. Esto es, para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$

$$\varphi_i^{e_2}(v,\mathfrak{B}) = v(\{i\}) + \frac{1}{|B_k|}\Big[\Phi(v,\mathfrak{B})(B_k) - \sum_{j\in B_k} v(\{j\})\Big] \tag{2.14}$$

en donde

$$\Phi(v,\mathfrak{B})(B_k) = v(B_k) + \frac{1}{m}\Big[v(N) - \sum_{j\in\mathfrak{B}} v(\{j\})\Big].$$

Es claro que esta solución propuesta satisface los axiomas de eficiencia, anonimato, simetría coalicional y linealidad, aunque también puede verse que la solución no satisface el axioma de nulidad, dado que por el simple hecho de pertenecer a una coalición, a un jugador le corresponde una parte proporcional del excedente (o pérdida) que ésta consigue en el juego de grupos.

Ejemplo 2.10. *Considérese el juego dado en el ejemplo 1.1, y que se forma la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$*. El valor estándar coalicional del juego viene dado por*

$$\varphi^{e_2}(v, \mathfrak{B}) = (27\frac{1}{2}, 37\frac{1}{2}, 15).$$

en donde el pago a cada coalición en el juego de grupos es $\varphi^{e_2}(v, \mathfrak{B}) = (65, 15)$*.*

Es posible propocionar una variante de la solución estándar utilizando la idea de las soluciones solidaria y de consenso coalicional: supóngase que se ha acordado entre todos los jugadores una solución ψ para el cálculo del pago en el juego de grupos. Primeramente, a cada coalición se le paga de acuerdo a esta solución; luego, a cada jugador se le asigna lo que él conseguiría si fungiera como representante único de su coalición, esto es, $\psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\})$, para luego repartir el excedente/pérdida entre todos los jugadores; puede plantearse esta situación como

$$\varphi_i^{e_3}(v, \mathfrak{B}, \psi) = \psi(v^{\mathfrak{B}(\{i\})})(\{i\}) + \frac{\psi(v^{\mathfrak{B}})(B_k) - \sum_{j \in B_k} \psi(v^{\mathfrak{B}(\{j\})})(\{j\})}{|B_k|}. \quad (2.15)$$

Es claro que si la solución ψ es tal que satisface los axiomas de eficiencia, linealidad y simetría, la solución dada por $\psi^{e_3}(v, \mathfrak{B}, \psi)$, la cual se denotará como solución estándar coalicional con función de pago ψ, satisfará de igual manera eficiencia, linealidad, simetría coalicional y anonimato, entre algunas otras propiedades.

Ejemplo 2.11. *Considérese el juego según el ejemplo 1.1, y donde se forma la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$*. Supóngase además que se acuerda como función de pago para el juego de grupos al valor de Shapley (*$\psi = \mathrm{Sh}$*); entonces el valor estándar coalicional con función de pago* ψ *del juego viene dado por*

$$\varphi^{e_3}(v, \mathfrak{B}, \psi) = (30, 35, 15)$$

en donde los pagos asignados en el juego de grupos son $\psi(v^{\mathfrak{B}}) = (65, 15)$*.*

Solución Igualitaria

Para juegos cooperativos (N, v) sin estructuras coalicionales, la solución igualitaria se define, para todo $i \in N$, como

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n}\big[v(N)\big].$$

La idea detrás de la solución igualitaria es que a todos los jugadores les corresponda el mismo pago, sin importar sus capacidades o las capacidades de las coaliciones a las que pertenecen. Podría darse una solución igualitaria $\varphi^{I_1}(v,\mathfrak{B})$ para juegos con estructuras coalicionales de la misma manera, es decir $\varphi^{I_1}(v,\mathfrak{B}) = \phi(v)$, mas entonces la estructura coalicional no estaría sirviendo de mucho, ya que nunca se tomó en cuenta. Se propone una solución igualitaria en dos etapas, en donde primeramente se asigne a cada coalición dentro del juego de grupos el mismo valor, que será dividir la valía de la gran coalición entre todas las coaliciones dentro de la estructura coalicional; luego, el pago asignado a una coalición se divide de manera igualitaria entre los jugadores que la conforman. Formalmente, sea $(N,v,\mathfrak{B}) \in G \times B$ con $\mathfrak{B} = \{B_1,\ldots,B_m\}$, la solución igualitaria coalicional φ^{I_2} se define para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ de la siguiente manera:

$$\varphi_i^{I_2}(v,\mathfrak{B}) = \frac{1}{|B_k|}\Big[\frac{1}{m}v(N)\Big]. \tag{2.16}$$

Entonces, el valor igualitario coalicional es una solución que trata a todas las coaliciones por igual y a todos los integrantes de cada coalición de manera igual, sin importar sus capacidades y características individuales, al igual que a las coaliciones. Por lo tanto, puede verse que esta solución satisface los axiomas de eficiencia, linealidad, simetría coalicional y anonimato. Claramente puede verse, al igual que en la solución estándar, que este valor no satisface el axioma de nulidad, ya que a un jugador nulo se le asignará el mismo pago que a cualquier jugador.

Ejemplo 2.12. *Considérese el juego del ejemplo 1.1, suponiendo que se forma la estructura coalicional* $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. *El valor igualitario para este juego es*

$$\varphi^{I_2}(v,\mathfrak{B}) = (20,20,40).$$

Puede verse que en este ejemplo el jugador 3 resulta con la paga mayor, favorecido con la solución igualitaria en el juego de grupos, ya que lo que consigue su coalición no se divide entre nadie más que él mismo.

2.8. Valores con opciones externas

En todos los valores comprendidos con anterioridad se tiene presente el espíritu de las estructuras coalicionales: los jugadores se encuentran agrupados *debido a un criterio preestablecido* (razones políticas, personales, económicas, etc.) y como tal se piensa en las coaliciones como *unidades indivisibles de negociación*. Ahora se abordarán valores en los que se consideran las opciones externas de los jugadores, esto es, lo que ocurriría si existiera la posibilidad de que un jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ negociara con cualquier subconjunto S de jugadores que no necesariamente se encuentre en su propia coalición ($S \subseteq N \backslash B_k$), lo cual servirá, de alguna manera, como criterio de repartición de lo que le corresponde de pago a la coalición a la que pertenece.

2.8.1. El valor χ

André Casajus (2005) introduce un valor basado en la idea de que la desintegración de una coalición debiera afectar de la misma manera a los jugadores que la conforman. Considera que la negociación se lleva a cabo únicamente dentro de cada coalición en una estructura coalicional tomando en cuenta todas las opciones externas de un jugador como criterio de repartición, razón por lo que el valor presentado no cumple el axioma de eficiencia.

Definición 2.8. *El valor χ es una aplicación $\chi : G \times B \to \mathbb{R}^n$ que asigna a todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ el pago*

$$\chi_i(v, \mathfrak{B}) = \mathrm{Sh}_i(v) + \frac{v(B_k) - \mathrm{Sh}(v)(B_k)}{|B_k|}. \tag{2.17}$$

Se proporcionará el soporte axiomático necesario para la caracterización del valor anterior. Para ello, considérese a ϕ como un valor para juegos con estructuras coalicionales con $\mathfrak{B} \in B$:

Axioma 2.33. (Nulidad en la gran coalición). Un valor ϕ satisface el axioma de nulidad en la gran coalición si para todo $i \in N$, donde i es un jugador nulo, se tiene

$$\phi_i(v, [N]) = 0.$$

A lo que el axioma anterior se está refiriendo es que en el caso en que se tenga una estructura coalicional en donde cada jugador se ve como una coalición en donde él es el único integrante, no existen opciones externas, y por lo tanto, podría argumentarse que los jugadores nulos debieran obtener un pago de cero.

Se dice que una estructura coalicional $\mathfrak{B}'$ es un refinamiento de otra estructura coalicional $\mathfrak{B}$, si

$$B_k{}' \subset B_k, \quad \forall\, i \in N, \text{ con } i \in B_k \in \mathfrak{B} \text{ y } i \in B_k{}' \in \mathfrak{B}'.$$

Axioma 2.34. (Desintegración). Un valor ϕ satisface el axioma de desintegración si para todo $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$, siendo $\mathfrak{B}'$ un refinamiento de $\mathfrak{B}$, entonces para todo $i \in N$ y todo $j \in B_k{}'$ con $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ y $i \in B_k{}' \in \mathfrak{B}'$ se tiene

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) - \phi_i(v, \mathfrak{B}') = \phi_j(v, \mathfrak{B}) - \phi_j(v, \mathfrak{B}').$$

El axioma anterior podría ser parafraseado de la siguiente manera: desintegrar una coalición afecta de la misma manera a todos los jugadores que decidieron separarse de su coalición. Como se quiere que el valor refleje todas las opciones externas de los jugadores, las ganancias/pérdidas de la desintegración debieran distribuirse equitativamente dentro de la estructura coalicional. El axioma anterior también puede intepretarse como el hecho de que a nigún jugador dentro de una coalición le conviene una separación, dado que todos se afectarán de la misma manera.

Utilizando los axiomas anteriores, se tiene

Teorema 24 (Casajus, 2005). *Existe un único valor para juegos con estructura coalicional que satisface los axiomas de eficiencia local, anonimato, aditividad, nulidad en la gran coalición y desintegración y ese valor viene dado por el valor χ (2.17).*

Como puede observarse, el valor χ utiliza el valor de Shapley como solución preestablecida para distribuir los pagos dentro de una estructura coalicional. La diferencia del pago de un jugador con el pago promedio de la coalición a la que pertenece es igual a la diferencia entre su pago asignado según el valor de Shapley (suponiendo un juego sin estructura coalicional) y el valor de Shapley promedio asignado a su coalición dentro de la estructura coalicional (también dentro de un juego sin estructura coalicional, esto con el fin de considerar todas las opciones externas de los jugadores). En otras palabras, los jugadores dentro de una estructura coalicional parten de sus pagos asignados según el valor de Shapley y comparan la valía de la coalición con la suma de los pagos según Shapley de todos los jugadores; la diferencia, positiva o negativa, se distribuye de manera igualitaria.

Por lo tanto, es claro que el valor χ no es eficiente. Por otra parte, satisface el siguiente axioma

Axioma 2.35. (Independencia de Coaliciones). Sea ϕ un valor para juegos con estructuras coalicionales y sea $\mathfrak{B} \in B$ fija. El valor es independiente de coaliciones si para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ tal que $i \in {B_k}' \in \mathfrak{B}' \in B$ con $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$, se tiene

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = \phi_i(v, \mathfrak{B}').$$

Es claro lo que implica que el valor χ satisfaga el axioma anterior: únicamente utiliza a la estructura coalicional para determinar el pago a lo jugadores localmente, siguiendo la idea de eficiencia local, sin existir una ventaja intrínseca de la coalición por el hecho de estar conformados como una sola unidad. El valor χ comparte esta propiedad con el valor de Aumann-Drèze, en contraste con el valor de Owen, en donde las coaliciones salen beneficiadas por el hecho mismo de haberse formado y comportarse como una sóla unidad de negociación.

Ejemplo 2.13. *Considérese el juego cooperativo de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1, en donde $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. El valor de Shapley asignado a este juego es* Sh*(v)=(35,40,5), y por lo tanto, es fácil ahora calcular el valor χ*

$$\chi(v) = (22\frac{1}{2}, 27\frac{1}{2}, 0).$$

Por el valor de Shapley calculado, $\mathrm{Sh}(\{1,2\}) \geq v(\{1,2\})$*, por lo que ambos jugadores se reparten equitativamente el faltante (25 unidades).*

2.8.2. El valor de Wiese

Wiese (2004) propone un valor para juegos con estructuras coalicionales con opciones externas que de alguna manera, asocia el mismo valor para las opciones tanto externas como internas de un jugador y las utiliza para calcular su pago correspondiente; al igual que el valor χ presentado en la sección anterior, el valor de Wiese no es eficiente.

Sea ϕ un valor para juegos (N, v) con estructura coalicional $\mathfrak{B} \in B$:

Axioma 2.36. (Opciones externas para juegos de unanimidad). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T \subseteq N$. Si $\mathfrak{B}$ contiene una coalición B_T tal que $T \subseteq B_T$, entonces, para toda $B_h \in \mathfrak{B}$

$$\phi(u_T, \mathfrak{B}; \alpha)(B_h \cap T^c) = 0.$$

Si $\mathfrak{B}$ no contiene una coalición B_T tal que $T \subseteq B_T$, entonces, para toda $B_h \in \mathfrak{B}$

$$\phi(u_T, \mathfrak{B}; \alpha)(B_h \cap T^c) = -\alpha \frac{|B_h \cap T|}{|T|} \frac{|B_h \cap T^c|}{|T \cup B_h|}.$$

Este axioma es una especie de equivalencia con el axioma de nulidad. De hecho, si existe una coalición $B_T \in \mathfrak{B}$ que contenga a T, todos los jugadores nulos tanto en $N \backslash B_T$ como para aquellos en $B_T \backslash T$ obtienen un pago de cero. Examinando la segunda parte del axioma, α es un parámetro que mide la importancia de las opciones externas. Cuando $\alpha = 0$, éstas no existen. Para dar una interpretación se considerará $\alpha \geq 0$. Si los jugadores en T se encuentran en una o varias coaliciones de $\mathfrak{B}$, el pago de cada coalición es cero; sin embargo, los jugadores en T podrían argumentar su descontento con un pago de cero: si ellos no estuvieran obligados a permanecer a sus coaliciones podrían formar parte de una única coalición en donde se divida el pago de una unidad hecha a dicha coalición. Por eficiencia local, por cada coalición B_h que contenga a elementos de T, los pagos positivos para los jugadores en $T \cap B_h$ necesitan pagos negativos de los jugadores en $B_h \backslash T$. Como a cada jugador en T le tocaría la misma porción de la unidad recibida como pago, a los jugadores en $B_h \cap T$ se les deberá pagar $\frac{|B_h \cap T|}{|T|}$; ahora bien, esta cantidad la van a aportar entre todos los involucrados en la separación de los jugadores de T que se encuentran en B_h, esto es, cada jugador en $B_h \cup T$ deberá aportar $\frac{|B_h \cap T|}{|T||B_h \cup T|}$, de ahí los términos expresados en la segunda parte del teorema.

De hecho, los jugadores en T^c con pagos negativos podrían mejorar su suerte abandonando sus coaliciones, pero esta consideración no se está tomando en cuenta. Hay que hacer notar también que el pago a los jugadores en $B_h \cap T^c$ es cero si $B_h \cap T = \emptyset$, ya que en este caso no hay jugadores en T que amenacen con irse hacia otras coaliciones o formar nuevas.

Por el axioma de opciones externas, junto con eficiencia local y anonimato, es posible expresar al valor para el i-ésimo jugador mediante juegos de unanimidad de la siguiente manera

$$\phi_i(u_T, \mathfrak{B}; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{|T|} & \text{si } i \in T \text{ y } \exists B_h \in \mathfrak{B} : T \subseteq B_h, \\ 0 & \text{si } i \notin T \text{ y } \exists B_h \in \mathfrak{B} : T \subseteq B_h, \\ \alpha \frac{1}{|T|} \frac{|B_k \cap T^c|}{|B_k \cup T|} & \text{si } i \in T \text{ y } \nexists B_h \in \mathfrak{B} : T \subseteq B_h, \\ -\alpha \frac{|B_k \cap T|}{|T|} \frac{1}{|B_k \cup T|} & \text{si } i \notin T \text{ y } \nexists B_h \in \mathfrak{B} : T \subseteq B_h. \end{cases}$$

Utilizando el axioma anterior, es posible dar una axiomatización para un valor generalizado que, de alguna manera, mide las importancia de todas las opciones externas de los jugadores

Teorema 25 (Wiese, 2003)**.** *El valor de opciones externas φ^{oo} es la única solución para juegos cooperativos con estructuras coalicionales que satisface los axiomas de eficiencia local, linealidad y opciones externas para juegos de unanimidad, y viene dado por*

$$\varphi_i^{oo}(v,\mathfrak{B};\alpha) = \frac{1}{n!}\sum_{\mathcal{R}} \begin{cases} v(B_k) - \sum_{j\in B_k\setminus\{i\}} \mathrm{MC}_j(v,\mathcal{R},\mathfrak{B},\alpha), & \text{si } B_k \subseteq \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\} \\ \mathrm{MC}_i(v,\mathcal{R},\mathfrak{B},\alpha) & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.18}$$

para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$, en donde para todo jugador $j \in B_h \in \mathfrak{B}$

$$\mathrm{MC}_j(v,\mathcal{R},\mathfrak{B},\alpha) = \alpha \mathrm{MC}_j^{\mathcal{P}_j^{\mathcal{R}}\cup\{j\}}(v) + (1-\alpha)\mathrm{MC}_j^{(\mathcal{P}_j^{\mathcal{R}}\cup\{j\})\cap B_h}(v) \text{ y}$$
$$\mathrm{MC}_j^S(v) = v(S\cup\{j\}) - v(S\setminus\{j\}).$$

Interpretando el valor de opciones externas presentado con anterioridad, si se asume que $\alpha = 1$, el jugador i obtiene su contribución marginal si él no es el último jugador de su coalición dentro de un orden dado $\mathcal{R}$, i.e., si B_k no se encuentra dentro $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}$. Si el jugador i es el último jugador de su coalición en el orden, él obtiene la valía de su coalición menos los pagos de los otros jugadores que se encuentran en su misma coalición. En el caso de $\alpha > 0$, el valor de opciones externas refleja la existencia de oportunidades externas. Para $\alpha = 1$, las opciones externas son tan importantes como las opciones internas. Valores pequeños de α reflejan diversos tipos de estabilidad de la estructura coalicional.

Puede verse tanto al valor de Shapley como al valor de Aumann-Drèze como una especificación del valor con opciones externas de la siguiente manera:

Corolario 3. *Sea* $(v,\mathfrak{B}) \in G \times B$

- *Para* $\alpha = 0$*, el valor de opciones externas coincide con el valor de Aumann-Drèze, esto es*
$$\varphi_i^{oo}(v,\mathfrak{B},0) = \phi_i(v,\mathfrak{B}).$$
- *Para* $\mathfrak{B} = \{N\}$,
$$\varphi_i^{oo}(v,\mathfrak{B},\alpha) = \mathrm{Sh}_i(v) \qquad \forall\ \alpha \in [0,1].$$

Cuando $\alpha = 1$, como se dijo en el párrafo anterior, las opciones externas son tan importantes como las opciones internas; de ahí que el valor de Wiese φ^W sea una particularización del valor para opciones externas, cuando tanto éstas como las opciones internas tienen la misma importancia, y por lo tanto se tiene, para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$

$$\varphi_i^{W}(v,\mathfrak{B}) = \frac{1}{n!}\sum_{\mathcal{R}} \begin{cases} v(B_k) - \sum_{j\in B_k\setminus\{i\}} \mathrm{MC}_j(\mathcal{R}) & \text{si } B_k \subseteq \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\} \\ \mathrm{MC}_i(\mathcal{R}) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.19}$$

en donde

$$\mathrm{MC}_i(\mathcal{R}) = v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}).$$

Aplicando el valor de Shapley en la formulación del valor de Wiese, es posible obtenerle una nueva representación:

$$\varphi_i^W(v, \mathfrak{B}) = \mathrm{Sh}_i(v) + \frac{v(B_k) - \dfrac{1}{|\mathcal{R}_i|} \displaystyle\sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_i} \sum_{j \in B_k} \mathrm{MC}_j(\mathcal{R})}{|B_k|} \tag{2.20}$$

en donde $\mathcal{R}_i$ es el conjunto de órdenes tal que el jugador i es el ultimo jugador de su coalición en el orden.

Ejemplo 2.14. *Considérese el juego cooperativo de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1, en donde $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. En este caso, el valor de Wiese es*

$$\varphi^W(v, \mathfrak{B}) = (21\frac{2}{3}, 28\frac{1}{3}, 0).$$

Puede verse que, como el jugador 2 tiene mayores opciones (en este caso internas) que el jugador 1 (obtiene un mayor pago que el jugador 1 en caso que jugaran individualmente, además recibe un mayor pago si él se aliase con el jugador 3 que el pago que recibiría el jugador 1 si éstos se aliaran), aquél recibe un pago mayor.

2.9. El potencial para juegos con estructuras coalicionales

En esta sección se generalizarán los resultados de Hart y Mas-Colell (1989) concernientes al potencial, los cuales fueron presentados en el capítulo anterior, y al igual que se hizo en esa sección pero con el valor de Shapley, se expresarán los valores de Aumann-Drèze y de Owen en términos de diferencias de potencial.

Sea $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y P una aplicación definida para todos los juegos con estructura coalicional y sobre cada coalición de la estructura coalicional; esto es, siendo $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ se tiene que $P(N, v, \mathfrak{B}) \in \mathbb{R}^m$; con la finalidad de simplicar la notación se escribirá $P(v|_S, \mathfrak{B}|_S)$ cuando necesite hacerse referencia a $P(S, v|_S, \mathfrak{B}|_S)$ para toda $S \subseteq N$. La contribución marginal respecto a P de un jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ a la coalición a la que pertenece es

$$D^i P(v, \mathfrak{B}) = P^{B_k}(v, \mathfrak{B}) - P^{B_k \setminus \{i\}}(v|_{N \setminus \{i\}}, \mathfrak{B}|_{N \setminus \{i\}}).$$

Se dice que P es una función potencial para juegos con estructura coalicional si

$$\sum_{i \in B_h} D^i P(v, \mathfrak{B}) = D^{B_h} \widehat{P}(v^{\mathfrak{B}}) \qquad \forall\ B_h \in \mathfrak{B} \tag{2.21}$$

y
$$\sum_{i\in N} D^i P(v,\mathfrak{B}) = v(N) \quad \text{con} \quad P^{\{\emptyset\}}(v,\mathfrak{B}) = 0 \tag{2.22}$$

en donde $D^{B_h}\widehat{P}(v^{\mathfrak{B}}) = \widehat{P}(\mathfrak{B}) - \widehat{P}(\mathfrak{B}\backslash B_h)$, o sea, la pérdida de potencial de la coalición formada por todos los grupos en $\mathfrak{B}$ cuando la coalición B_h decide salir del juego; aquí $\widehat{P}$ es una función potencial como la que se introdujo en (1.9) que actúa sobre el juego $(M, v^{\mathfrak{B}})$. Entonces, la expresión (2.21) está diciendo que la suma de las contribuciones marginales respecto a P de cada jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ debe ser igual a la contribución marginal que hace su coalición B_k respecto a $\widehat{P}$ en el juego de grupos (donde se considera a cada coalición como un único jugador).

Teorema 26 (Winter, 1992)**.** *Para toda terna $(N,v,\mathfrak{B}) \in G \times B$, el vector de pagos resultante $(D^iP(v,\mathfrak{B}))_{i\in B_k\in\mathfrak{B}}$ coincide con el valor de Owen del juego. Más aún, el potencial de cualquier juego con estructuras coalicionales está únicamente determinado por las condiciones dadas en (2.21) y (2.22) aplicadas únicamente al juego $(N,v,\mathfrak{B})$ y a las coaliciones $B_k \in \mathfrak{B}$.*

Debido a las condiciones dadas en (2.21) y (2.22), y aplicando la función potencial a toda $B_k \in \mathfrak{B}$, se tiene

$$P^{B_k}(v,\mathfrak{B}) = \frac{1}{|B_k|}\left[D^{B_k}\widehat{P}(v^{\mathfrak{B}}) + \sum_{i\in B_k} P^{B_k\backslash\{i\}}(v|_{N\backslash\{i\}}, \mathfrak{B}|_{N\backslash\{i\}})\right].$$

Iniciando con $P^{\{\emptyset\}}(v,\mathfrak{B}) = 0$, entonces se tiene determinado a $P^{B_k}(v,\mathfrak{B})$ para toda $B_k \in \mathfrak{B}$ de manera recursiva. Con esto, y por el teorema anterior, se tiene un procedimiento recursivo determinado de manera única utilizando potenciales que equivale al valor de Owen

$$\varphi_i(v,\mathfrak{B}) = P^{B_k}(v,\mathfrak{B}) - P^{B_k\backslash\{i\}}(v|_{N\backslash\{i\}}, \mathfrak{B}|_{N\backslash\{i\}}).$$

Ejemplo 2.15. *Considérense el juego de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1 y la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. Los potenciales obtenidos para toda $S \subseteq N$ se muestran a continuación*

$$P^{\{12\}}(v,\mathfrak{B}) = 40; \qquad P^{\{3\}}(v,\mathfrak{B}) = 15;$$
$$P^{\{1\}}(v,\{\{1\},\{3\}\}) = 5; \qquad P^{\{2\}}(v,\{\{2\},\{3\}\}) = 10.$$

Con esto se tiene que el valor de Owen, utilizando la función potencial expresada con anterioridad, viene dado por

$$\varphi_1(v,\mathfrak{B}) = P^{\{12\}}(v,\mathfrak{B}) - P^{\{2\}}(v,\{\{2\},\{3\}\}) = 30;$$
$$\varphi_2(v,\mathfrak{B}) = P^{\{12\}}(v,\mathfrak{B}) - P^{\{1\}}(v,\{\{1\},\{3\}\}) = 35;$$
$$\varphi_3(v,\mathfrak{B}) = P^{\{3\}}(v,\mathfrak{B}) - P^{\{\emptyset\}}(v,\{\{1,2\}\}) = 15.$$

Para poder expresar el valor de Aumann-Drèze en términos de potenciales, defínase $\widetilde{P}$ como una aplicación que actúa sobre todos los juegos $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ y al igual que la función potencial para el valor de Owen, se escribirá $\widetilde{P}(v|_S, \mathfrak{B}|_S)$ en lugar de $\widetilde{P}(S, v|_S, \mathfrak{B}|_S)$, esto con el fin de simplificar la notación; de igual forma defínase la contribución marginal del i-ésimo jugador a la gran coalición respecto a $\widetilde{P}$ dentro de un juego con estructuras coalicionales $(N, v, \mathfrak{B}) \in G \times B$ de la siguiente manera:

$$D^i \widetilde{P}(v, \mathfrak{B}) = \widetilde{P}^N(v, \mathfrak{B}) - \widetilde{P}^{N \setminus \{i\}}(v|_{N \setminus \{i\}}, \mathfrak{B}|_{N \setminus \{i\}}).$$

Se dice que $\widetilde{P}$ es una función potencial eficiente por componentes para juegos con estructura coalicional si $\widetilde{P}$ satisface las siguientes condiciones, dada una estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$

$$\sum_{i \in N} D^i \widetilde{P}(v, \mathfrak{B}) = \sum_{S \in \mathfrak{B}} v(S) \quad \text{y} \quad \widetilde{P}^{\{\emptyset\}}(v, \mathfrak{B}) = 0. \tag{2.23}$$

Nótese que esta definición de potencial difiere de la definición de Hart y Mas-Colell en que en esta ocasión se requiere que la suma de la diferencia de potencial de cada jugador sea igual a la suma de las valías de las coaliciones que integran la estructura coalicional, por lo que claramente es posible que esta suma no sea eficiente.

Teorema 27 (Winter, 1992)**.** *Para toda pareja $(v, \mathfrak{B}) \in G \times B$, el vector de pagos resultante $(D^i \widetilde{P}(v, \mathfrak{B}))_{i \in N}$ coincide con el valor de Aumann-Drèze del juego. Más aún, el potencial eficiente por componentes de cualquier juego con estructuras coalicionales está únicamente determinado por las condiciones dadas en (2.23) aplicadas únicamente al juego y a las coaliciones $B_k \in \mathfrak{B}$.*

Dadas las condiciones en (2.23), y aplicando la función potencial a toda $S \subseteq N$, se tiene

$$\widetilde{P}^S(v, \mathfrak{B}) = \frac{1}{|S|} \left(\sum_{T \in \mathfrak{B}|_S} v(T) + \sum_{i \in S} \widetilde{P}^{S \setminus \{i\}}(v|_{S \setminus \{i\}}, \mathfrak{B}|_{S \setminus \{i\}}) \right).$$

Por lo tanto, se tiene determinada a $\widetilde{P}^S(v, \mathfrak{B})$ para toda $S \subseteq N$ de manera recursiva. Por ello, y dado el teorema anterior, se tiene un procedimiento recursivo, que de manera única utilizando potenciales equivale al valor de Aumann-Drèze

$$\phi_i(v, \mathfrak{B}) = \widetilde{P}^N(v, \mathfrak{B}) - \widetilde{P}^{N \setminus \{i\}}(v|_{N \setminus \{i\}}, \mathfrak{B}|_{N \setminus \{i\}}).$$

Ejemplo 2.16. *Tómense el juego de tres jugadores dado en el ejemplo 1.1 y la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Los potenciales obtenidos para toda $S \subseteq N$ se muestran a continuación*

$$\widetilde{P}^{\{12\}}(v, \{\{1, 2\}\}) = 40; \qquad \widetilde{P}^{\{13\}}(v, \{\{1\}, \{3\}\}) = 10; \qquad \widetilde{P}^N(v, \mathfrak{B}) = 40;$$
$$\widetilde{P}^{\{1\}}(v, \{\{1\}\}) = 10; \qquad \widetilde{P}^{\{2\}}(v, \{\{2\}\}) = 20; \qquad \widetilde{P}^{\{3\}}(v, \{\{3\}\}) = 0;$$
$$\widetilde{P}^{\{23\}}(v, \{\{2\}, \{3\}\}) = 20.$$

Con los resultados anteriores, se tiene que el valor de Aumann-Drèze, utilizando la función potencial eficiente por componentes, viene dado por

$$\phi_1(v,\mathfrak{B}) = \widetilde{P}^N(v,\mathfrak{B}) - \widetilde{P}^{\{23\}}(v,\{\{2\},\{3\}\}) = 20;$$
$$\phi_2(v,\mathfrak{B}) = \widetilde{P}^N(v,\mathfrak{B}) - \widetilde{P}^{\{13\}}(v,\{\{1\},\{3\}\}) = 30;$$
$$\phi_3(v,\mathfrak{B}) = \widetilde{P}^N(v,\mathfrak{B}) - \widetilde{P}^{\{12\}}(v,\{\{1,2\}\}) = 0.$$

2.10. Ejemplos de aplicación

Para finalizar este capítulo se incluirá un ejemplo en el que se comparan algunos de los valores tratados en secciones anteriores.

La Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión está conformado por 500 miembros; ellos expresan su decisión personal sobre determinados asuntos, desde si un tema está suficientemente discutido hasta la aprobación o rechazo de un dictamen mediante la votación. En los casos de reformas a la Constitución, nombramientos de Presidente Interino, de consejeros electorales del Instituto Federal Electoral, de Secretario General y de los integrantes de la Mesa Directiva de la Cámara de Diputados se requiere, para la aprobación de dichos asuntos, una votación a favor de por lo menos dos terceras partes de los legisladores presentes (siempre y cuando haya quórum). Suponiendo que en todos los casos de votación asisten el 100 % de los diputados, es posible representar esta regla de decisión mediante el siguiente juego simple

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| \geq 334; \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para toda $S \subseteq N$, en donde N será el grupo de los 500 diputados. Si la valía de una coalición S de diputados es igual a uno, quiere decir que el voto a favor de dichos legisladores es suficiente para la aprobación del dictamen a consideración, mientras que una valía de cero indica que el voto a favor de tales diputados no fue suficiente.

Entonces será posible calcular el poder relativo de cada diputado: con la representación anterior, todos los miembros de la cámara son simétricos, y el valor de Shapley asignado a cada uno de ellos es de $1/500$. Pero generalmente los diputados realizan votaciones en bloque; esto es, si un determinado partido político está de acuerdo con la validez de cierta reforma que se esté discutiendo, todos los legisladores pertenecientes a dicho partido votarán a favor; con ello, los jugadores (los diputados) estarán organizados acorde con *una estructura coalicional*, en donde cada coalición representará a cada uno de los diferentes partidos políticos que integran la Cámara de Diputados. La composición por grupo parlamentario de la Cámara, resultante de las elecciones del 2 de julio de 2006 se muestra en la tabla 2.3:

Las acrónimos utilizados representan al Partido Acción Nacional (PAN),

Partido	PAN	PRD	PRI	PVE	CON	PT	NA	ALT	IND
Miembros	206	127	106	17	17	12	9	5	1

Tabla 2.3: Número de diputados por partidos

Partido de la Revolución Democrática (PRD), Partido Revolucionario Institucional (PRI), Partido Verde Ecologista de México (PVE), Convergencia para la Democracia (CON), Partido del Trabajo (PT), Nueva Alianza (NA), Alternativa Social Demócrata (ALT) y Diputados Independientes (IND).

Se representará entonces a la Cámara de Diputados mediante la estructura coalicional $\mathfrak{B}_1 = \{PAN, PRD, PRI, PVE, CON, PT, NA, ALT, IND\}$. Podría esperarse que los legisladores de ciertos partidos aumenten su valor relativo dada la organización que tomaron; el pago de los diputados de cada partido calculado mediante el valor de Owen (φ) y el valor de Banzhaf-Owen (φ^B) se muestra en la tabla 2.4.

Partido	φ	φ^B
PAN	0.00289335	0.00329945
PRD	0.00145918	0.00246062
PRI	0.00107441	0.00176886
PVE	0.00158792	0.00321688
CON	0.00158792	0.00321688
PT	0.00135575	0.00260416
NA	0.00135575	0.00260416
ALT	0.00259360	0.00468740
IND	0.00555555	0.00781200

Tabla 2.4: Pagos a los diputados pertenencientes a cada partido político de acuerdo a la estructura coalicional $\mathfrak{B}_1$.

Puede verificarse que efectivamente los legisladores de algunos partidos se vieron beneficiados por el hecho de estar agrupados de acuerdo a $\mathfrak{B}_1$, en específico los diputados del PAN, ALT e IND. Observando con detalle los resultados de la tabla, pareciera extraño que el único diputado del partido independiente (IND) tiene un valor mayor que cualquier otro legislador de cualquier partido (para ambas soluciones): en realidad esto es cierto, pero no hay que olvidar que se está considerando votación en bloques, por lo que el partido independiente (IND) vale mucho menos que cualquiera de los otros partidos; lo que sucede es que éstos, al contar con un mayor número de integrantes, dividen el poder correspondiente en partes iguales (no hay que olvidar que los diputados dentro de cada partido son simétricos) y por lo tanto les corresponde una parte pequeña a cada uno de ellos. También es posible observar la falta de eficiencia de la solución de Banzhaf-Owen. El poder de cada partido se muestra en la tabla 2.5 (calculado con los mismos valores que en la tabla 2.4).

Partido	φ	φ^B
PAN	0.596031	0.679687
PRD	0.185317	0.312500
PRI	0.113888	0.187500
PVE	0.026984	0.054687
CON	0.026984	0.054687
PT	0.016269	0.031250
NA	0.016269	0.031250
ALT	0.012698	0.023437
IND	0.005555	0.007812

Tabla 2.5: Valor de cada partido político de acuerdo a la estructura coalicional $\mathfrak{B}_1$.

Es claro que debido a la cantidad de diputados que lo integran, el PAN debiera tener mayor poder que cualquier otro partido y que éste debe estar relacionado con el número de miembros que integran cada grupo parlamentario. La tabla 2.5 muestra con claridad estos resultados para los valores calculados.

En algunas situaciones es posible que se formen alianzas entre partidos políticos; por ejemplo, una alianza común que puede darse es la de los partidos de izquierda PRD-PT-CON; para observar cómo cambia el poder de cada partido cuando se tiene esta alianza, considérese $\mathfrak{B}_2 = \{B_1, PAN, PRI, PVE, NA, ALT, IND\}$ en donde $B_1 = \{PRD, CON, PT\}$. Los pagos según los valores considerados en la tabla 2.4 se muestran en la tabla 2.6.

Partido	φ	φ^B
PAN	0.566667	0.593750
PRD	0.201587	0.315104
PRI	0.066666	0.093750
PVE	0.066666	0.093750
CON	0.038492	0.057291
PT	0.026587	0.033854
NA	0.016666	0.031250
ALT	0.016666	0.031250
IND	0	0

Tabla 2.6: Valor de cada partido político de acuerdo a la estructura coalicional $\mathfrak{B}_2$.

Como era de esperarse, el valor asignado a la coalición B_1 es mayor que la suma de lo que conseguían individualmente estos partidos antes de su unión en un sólo bloque y por lo tanto, el valor de cada uno de los partidos que la integran aumenta. También puede verse que el diputado independiente se vuelve completamente inútil y que la alianza de los partidos de izquierda benefició de manera indirecta a algunos partidos, como por ejemplo al PVE, NA y ALT, perjudicando a los partidos más poderosos como el PAN y principalmente al PRI.

En algunas otras ocasiones se forma un pequeño bloque "conservador" integrado por los partidos PAN y PVE; considérese la estructura coalicional $\mathfrak{B}_3 = \{B_1, B_2, PRI, NA, ALT, IND\}$ en donde $B_1 = \{PAN, PVE\}$ y $B_2 = \{PRD, PT, CON\}$; calculando de nuevo los valores para cada grupo legislativo con las mismas soluciones consideradas anteriormente se tienen los resultados mostrados en la tabla 2.7:

Partido	φ	φ^B
PAN	0.558333	0.593750
PRD	0.177778	0.270833
PRI	0.116666	0.187500
PVE	0.058333	0.093750
CON	0.011111	0.020833
PT	0.011111	0.033854
NA	0.033333	0.062500
ALT	0.033333	0.062500
IND	0	0

Tabla 2.7: Valor para cada partido politico de acuerdo a la estructura coalicional $\mathfrak{B}_3$.

Puede observarse que dada esta configuración tomada por los partidos, el PRI, PVE, ALT y NA fueron los que se vieron beneficiados en comparación con el juego donde en cada partido funge como un único jugador, y sin embargo estos partidos no participaron en ninguna de las alianzas (excepto el PVE). La razón es que la formación del bloque B_1 contrarrestó los beneficios que obtiene el bloque B_2 a la vez que benefició a los jugadores que no se aliaron a dicho bloque (e inversamente).

2.11. Conclusiones

En el presente capítulo se ha abordado la problemática de asignar pagos a los jugadores cuando éstos se encuentran agrupados de acuerdo a cierta estructura coalicional dada, situación por demás usada ampliamente en situaciones de la vida cotidiana. Se han presentado las soluciones clásicas para este tipo de situaciones (valor de Owen y Auman-Drèze), así como extensiones de valores para juegos sin estructuras coalicionales (valor τ-coalicional y valor de Banzhaf-Owen) y soluciones recién planteadas en la literatura (valor colectivo, de Wiese y el χ valor). En todos estos casos se ha tratado de presentar el soporte axiomático necesario para la existencia y unicidad de dichas soluciones. Se presenta también la extensión natural de la idea de potencial de un juego al caso de juegos con estructuras coalicionales. Cabe aclarar que no se está estudiando el proceso de formación de coaliciones, sino que se considera que éste se llevó a cabo en una etapa anterior.

En este capítulo se están haciendo un par de aportaciones a la teoría del valor para juegos con estructuras coalicionales: el valor de Owen es uno de los valores más estables y enormemente estudiados para este tipo de situaciones; por ello se están proponiendo dos nuevas propiedades que se satisfacen por este valor que desde cierto punto de vista le proveen mayor estabilidad y consistencia, dado que se demuestra que es inmune ante cierto tipo de manipulaciones. Además, se proponen nuevas extensiones de valores ampliamente estudiados dentro de los juegos cooperativos (valor de consenso, solidaridad y de división de excesos) para el caso de juegos con estructuras coalicionales, en donde el juego de grupos juega un papel fundamental al momento de repartición de pagos. Se termina el capítulo presentando un estudio acerca del poder de cada uno de los partidos políticos dentro de la toma de decisiones en el marco de la Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión.

Capítulo 3

Juegos en dos niveles

En este capítulo se introduce una nueva clase de juegos cooperativos, aplicables principalmente a las situaciones donde los jugadores se encuentran agrupados, de acuerdo a intereses particulares, en estructuras coalicionales, y en donde el proceso de pago se hará en una primera etapa dentro del juego de grupos, para luego cada coalición repartir lo que le correspondió entre sus miembros. Primeramente se justificará la existencia de dichos juegos, así como sus aplicaciones en situaciones cotidianas; después se caracterizarán todas las soluciones que cumplen ciertos axiomas para esta clase de juegos, más específicamente, los axiomas de linealidad, simetría coalicional, anonimato y eficiencia, terminando con el estudio de algunas de las propiedades de dichas soluciones.

3.1. Motivación

En el capítulo anterior se hizo referencia a situaciones en donde los jugadores, debido a intereses sociales, económicos, políticos, entre otros, se encuentran agrupados. Esto da lugar a estructuras coalicionales y se presentaron los principales valores para dicho tipo de situaciones.

No hay que olvidar la manera en que se lleva a cabo la formación de las estructuras coalicionales: los jugadores que conforman una coalición están juntos porque en el proceso de formación de coaliciones (el cual no se está considerando, sino que se supone dado de alguna manera) ellos siguieron intereses personales y decidieron pertenecer a una respectiva coalición sobre todas las demás formas posibles de alianzas. Por lo tanto, es natural pedir que se vea reflejada la estructura particular de formación que adoptaron los jugadores a la hora de asignar los pagos a cada uno de ellos.

Por ello, a nivel interno de la coalición, los jugadores debieran ver a cada coalición diferente a la que ellos pertenecen como *una única unidad de negociación*: los jugadores que pertenecen a otra coaliciones tuvieron sus razones para formarse en grupos y participar en el juego de manera conjunta, en lugar de hacerlo individualmente o con otras coaliciones; en otras palabras, *un jugador* *en una coalición debe ser ajeno a las características internas de las demás coaliciones, porque éstas jugarán juntas como un sólo jugador, dado que éste fue el propósito de su creación.* Por lo tanto, un jugador dentro de una coalición podrá establecer vínculos de negociación con las demás coaliciones formadas, pero no con subconjuntos propios de éstas.

Lo anterior indica que, debido a la formación de la estructura coalicional y a los propósitos de cada grupo formado, habrá algunas coaliciones $S \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n\}$ que no deben tomarse en cuenta al momento de asignar pagos a los jugadores; véase la figura 3.1 para algunos ejemplos.

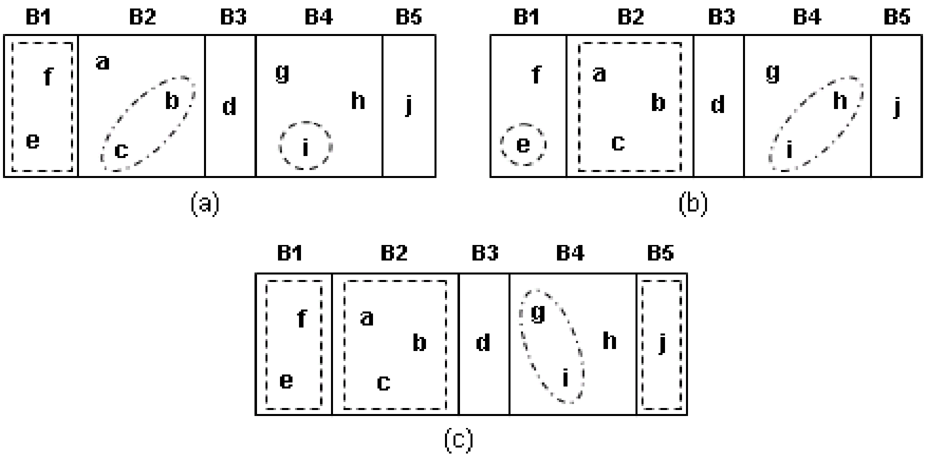

Figura 3.1: Ejemplo de coaliciones válidas y no válidas para los jugadores en la coalición B4; las líneas punteadas encierran a los jugadores que se tomarán en cuenta. (a) Coalición no válida para negociación, ya que B2 no puede fragmentarse, dado que actúa como una unidad única en las negociaciones. (b) Coalición no válida. No es posible negociar con solamente uno de los elementos de B1. (c) Coalición válida. Los jugadores $\{g, i\}$ negocian con coaliciones ya formadas como si se trataran de un único jugador.

Pueden darse varios ejemplos de situaciones en donde se tiene la metodología planteada con anterioridad:

Distribución del presupuesto en una federación. El gobierno federal asigna un determinado presupuesto a cada estado y ellos asignan una parte de dicho presupuesto a cada municipio; si un municipio quisiera medir su capacidad de negociación, ésta se llevaría a cabo o entre municipios de su mismo estado o con algunos de los demás estados ya conformados, y no con los municipios de éstos, por lo que cada municipio ve a los estados restantes como unidades indivisibles de negociación.

Cámaras de representantes. Dentro de una cámara de representantes, supongamos de diputados, los diversos partidos políticos negocian y establecen acuerdos entre ellos; es posible que un grupo de diputados de un partido establezca vínculos de negociación con alguno de los otros partidos, pero no es posible que se llegue a acuerdos con sólo algunos de los diputados, ya que cada partido actúa como un bloque a la hora de la votación y aprobación de nuevos proyectos y propuestas.

Distribución de servicios en colonias. Se requiere la instalación de cierto servicio en una calle, y se decide dividir el costo que ello conlleva entre las casas que la integran; el costo asignado por la instalacion del servicio a cada calle será dividido entre las casas que las conforman. Es claro que en este ejemplo cada casa actúa como una única unidad de negociación, y no será posible negociar el costo con algunos de los habitantes dentro de ella, sino con toda la casa entera.

Con la idea anterior de establecer cada coalición como una unidad indivisible, es natural pensar que las soluciones a juegos donde se tenga esta situación deban considerar dicha idea, y la forma en que se está planteando es llevar a cabo un proceso de negociación *en dos etapas*: primeramente al nivel de las coaliciones, considerándolas a cada una como un jugador individual lo que lleva a la formación del juego de grupos, para luego cada una de ellas repartir su correspondiente pago entre los jugadores que la integran: para ello pueden tomarse en cuenta las relaciones que sus integrantes puedan formar, ya sea con los miembros de su misma coalición, con el resto de las coaliciones de la estructura coalicional (ya que por lo argumentos planteados en párrafos anteriores no es posible establecer vínculos con subconjuntos propios de éstas) o bien con ambos. La motivación de tener un proceso de repartición de pagos de esta manera es que así se toma en cuenta el hecho de que *cada coalición se forma para obtener una mejor posición cuando se negocia con las otras coaliciones sobre cómo dividir el monto conseguido por la gran coalición.*

3.2. Juegos en dos niveles y juegos coalicionales restringidos

Se formalizarán las ideas presentadas en la sección anterior:

Definición 3.1. *Un juego cooperativo* (N, v) *donde los jugadores se encuentran organizados de acuerdo a la estructura coalicional* $\mathfrak{B}$ *y en donde cada* $B_k \in \mathfrak{B}$ *actúa como una sóla unidad al momento de la negociación y donde el proceso de pagos se hará en dos etapas, primero a nivel del juego de grupos y luego de manera interna en cada coalición se conocerá como juego en dos niveles. Así mismo, defínase al conjunto de coaliciones permisibles* $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ *de la siguiente manera:*

$$\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ \bigcup_{\substack{S \subseteq B_j \\ T \subseteq \mathfrak{B} \setminus \{B_j\}}} (S \cup \bigcup_{B_k \in T} B_k) \right\}.$$

La idea es que $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ represente a todas las coaliciones de N que podrían tomarse en cuenta en un juego en dos niveles: para cada elemento $B_j \in \mathfrak{B}$, sus subcoaliciones $S \subseteq B_j$ pueden establecer vínculos con cualquier subconjunto T formado por las coaliciones restantes, i.e., $T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_j$, ya que como se ha dicho anteriormente, éstas actuan como un único jugador, o bien con subcoaliciones $P \subseteq B_j \backslash S$ dentro de su coalición. Así mismo, el número de elementos de $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ puede calcularse con:

$$|\mathcal{C}(\mathfrak{B})| = (2^m - 1) + 2^{m-1} \sum_{i=1}^{m} \left(2^{|B_i|} - 2\right).$$

Puede verse fácilmente que $\mathcal{C}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{C}$, en donde $\mathcal{C}$ es el conjunto potencia de N, y por lo tanto, $|\mathcal{C}(\mathfrak{B})| \leq 2^n$. Lo anterior realmente está diciendo que dentro de un juego cooperativo en su forma estándar $(N, v) \in G$ pueden existir coaliciones $S \subset N$ que no se tomen en cuenta al momento de calcular pagos a los jugadores si ésto se hacen en dos niveles. Por lo tanto, cuando se tienen juegos en dos niveles, a los juegos cooperativos también se les puede conocer como *juegos con información innecesaria.*

Hay que hacer notar que la mayoría de los valores presentados en el capítulo 2 realmente se definen sobre juegos en dos niveles: por construcción, los valores de Owen, Banzhaf-Owen, τ-coalicional, de solidaridad coalicional y de consenso coalicional utilizan el juego de grupos para asignar pagos a las coaliciones y para medir el poder de cada subcoalición dentro de cada coalición, por lo que sólamente se utilizan coaliciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$; la solución igualitaria y la estándar coalicionales, así como el valor colectivo, utilizan el juego de grupos para asignar pagos a las coaliciones para después, mediante negociaciones restringidas a cada coalición, asignar los pagos a los jugadores que las conforman. Por su parte, el valor de Aumann-Drèze es aún más restringido, ya que únicamente se utilizan subcoaliciones propias dentro de cada coalición para el cálculo de los pagos de los jugadores que la conforman. La excepción ocurre en los valores χ y de Wiese: por su naturaleza, los valores con opciones externas toman en cuenta todas las posibles alternativas que tienen los jugadores de establecer alianzas con cualquier conjunto de jugadores, lo cual claramente conlleva a considerar coaliciones que no pertenecen a $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$.

Sea el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ que se encuentran organizados de acuerdo a la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$. Para todo $B_k \in \mathfrak{B}$, con $n_k = |B_k|$ se define un nuevo conjunto de jugadores

$$N^k = \{B_1, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}, \ldots, B_m, \underbrace{1, \ldots, n_k}_{B_k}\}$$

en donde $|N^k| = n_k + (m-1)$. Los jugadores que se encuentran en B_k pueden interactuar con todas las demás coaliciones diferentes a la que en ellos se encuentran (vistas cada una como un único jugador) y con sus compañeros dentro de la misma coalición; ambos conjuntos están representados por N^k, el cual representa a los jugadores que pueden intervenir al momento de asignar pagos a los miembros de B_k, esto respetando la idea de que el juego se llevará a cabo en dos niveles. Denótese al conjunto potencia de N^k como $\mathcal{C}^k$, y la idea es que $\mathcal{C}^k$ represente a todas las coaliciones que pueden formarse utilzando elementos de N^k.

Ejemplo 3.1. *Sea* $\mathfrak{B} = \{\{1,2,4\},\{3\}\}$ *una estructura coalicional formada por cuatro jugadores. Considerando que* $B_1 = \{1,2,4\}$ *y* $B_2 = \{3\}$ *se tiene*

$$N^1 = \{\{3\},1,2,4\} \quad \text{y} \quad N^2 = \{\{1,2,4\},3\}$$

con $n^1 = 4$ *y* $n^2 = 2$*. Calculando sus conjuntos potencias, se tiene que* $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$ *y*

$$C^2 = \{\{3\},\{124\},\{1234\}\}.$$

Definición 3.2. *Sea* (N,v) *un juego cooperativo donde los jugadores se encuentran agrupados según la estructura coalicional* $\mathfrak{B}$*. Para toda* $B_k \in \mathfrak{B}$ *se define un juego coalicional restringido* $(N^k, v^{B_k}, \mathfrak{B})$ *como una aplicación real sobre los subconjuntos de* N^k*, tal que* $v^{B_k}(\emptyset) = 0$ *y*

$$v^{B_k} : \mathcal{C}^k \to \mathbb{R} \quad \text{con} \quad v^{B_k}(S) = v(S) \quad \forall\ S \in \mathcal{C}^k.$$

Supóngase una solución φ para juegos en dos niveles que satisface un conjunto de axiomas $\mathcal{A}$; entonces, por construcción del juego coalicional restringido, se tiene una solución ϕ que satisface el mismo conjunto $\mathcal{A}$ de propiedades tal que

$$\phi_i(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \varphi_i(v, \mathfrak{B}) \qquad \forall\ i \in B_k \in \mathfrak{B} \tag{3.1}$$

dado que para toda $B_k \in \mathfrak{B}$, N^k representa a todas las posibles coaliciones dentro de $\mathcal{C}$ que pueden tomarse en cuenta a la hora de calcular los pagos a los jugadores de la coalición B_k.

Con lo anterior, puede verse el porqué de la introducción de los juegos coalicionales restringidos a toda $B_k \in \mathfrak{B}$: con ellos no se tiene información innecesaria al momento de calcular el pago a todos los jugadores $i \in B_k$, el cual será el mismo que si se calculara directamente sobre el juego cooperativo estándar, siempre que se cumpla el mismo grupo de axiomas. Esto trae como consecuencia una descomposición sencilla del juego, hecho que se aprovechará en la siguiente sección.

3.3. Caracterización de soluciones

A continuación se caracterizará toda una familia de soluciones para juegos en dos niveles que cumplen con una serie de axiomas, la mayoría de los cuales fueron tratados en el capítulo anterior.

Teorema 28. *Un valor $\varphi : G \times B \to \mathbb{R}^n$ cumple los axiomas de eficiencia, linealidad, simetría coalicional y anonimato sí y sólo si existen constantes β_p $(p = 1, \ldots, m-1)$ y donde para todo $B_k \in \mathfrak{B}$ existen constantes β_s^T $(s = 1, \ldots, n_k - 1)$ para todo $T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k$, tal que*

$$\varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \frac{\Phi(v,\mathfrak{B})(B_k)}{n_k} + \sum_{T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{s} - \sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \not\ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{n_k - s} \right) \tag{3.2}$$

con

$$\Phi(v,\mathfrak{B})(B_k) = \frac{v(N)}{m} + \sum_{\substack{P \subset \mathfrak{B} \\ P \ni B_k}} \beta_p \frac{v(A^P)}{p} - \sum_{\substack{P \subset \mathfrak{B} \\ P \not\ni B_k}} \beta_p \frac{v(A^P)}{m-p} \tag{3.3}$$

para todo $i \in N$ con $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ y todo $v \in G$, con $A^Q = \bigcup_{B_h \in Q} B_h$ para todo $Q \subseteq \mathfrak{B}$ y en donde (N, v) es un juego en dos niveles.

Demostración.

Primeramente se probará que cualquier valor φ definido de la forma (3.2) satisface los axiomas de eficiencia, linealidad, simetría coalicional y anonimato. En [29] se prueba que cualquier solución eficiente, lineal y simétrica puede escribirse como

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \subset N \\ S \ni i}} \rho_s \frac{v(S)}{s} - \sum_{\substack{S \subset N \\ S \not\ni i}} \rho_s \frac{v(S)}{n-s} \qquad \forall\ i \in N, \forall\ (N,v) \in G$$

para constantes ρ_s $(s = 1, \ldots, n)$. Gracias a ello, la expresión dada en (3.3) es en realidad una solución eficiente, lineal y simétrica para el juego de grupos $(M, v^{\mathfrak{B}})$, donde se tiene un conjunto de m jugadores con $v^{\mathfrak{B}}(S) = v(\bigcup_{T \in S} T)$ para toda $S \subseteq \mathfrak{B}$, por lo que trivialmente se satisface el axioma de simetría coalicional. También como consecuencia de (3.3), para probar el axioma de eficiencia bastaría mostrar que

$$\sum_{i \in B_k} \varphi_i(v,\mathfrak{B}) = \Phi(v,\mathfrak{B})(B_k)$$

y para ello, es suficiente mostrar que

$$\sum_{i \in B_k} \left(\sum_{T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{s} - \sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \not\ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{n_k - s} \right) \right) = 0.$$

Tómese una $T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k$ fija; entonces la ecuación anterior puede expresarse como

$$\sum_{i \in B_k} \left(\sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{s} \right) = \sum_{i \in B_k} \left(\sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \not\ni i}} \beta_s^T \frac{v(S \cup A^T)}{n_k - s} \right) \tag{3.4}$$

reordenando los índices se tiene

$$\sum_{S\subset B_k}\left(\sum_{i\in S}\beta_s^T\frac{v(S\cup A^T)}{s}\right)=\sum_{S\subset B_k}\left(\sum_{i\notin S}\beta_s^T\frac{v(S\cup A^T)}{n_k-s}\right)$$

entonces, para toda $S\subset B_k$

$$s\beta_s^T\frac{v(S\cup A^T)}{s}=(n_k-s)\beta_s^T\frac{v(S\cup A^T)}{n_k-s}$$

lo cual prueba la expresión dada en (3.4), y por lo tanto se demuestra la eficiencia del valor φ.

Por lo visto en [29], la expresión (3.3) es lineal, con lo que para $(N,v,\mathfrak{B})$ y $(N,w,\mathfrak{B})$, $\Phi(\lambda v+\mu w,\mathfrak{B})=\lambda\Phi(v,\mathfrak{B})+\mu\Phi(w,\mathfrak{B})$. Por lo tanto, para probar que la solución dada en (3.2) es lineal se tiene

$$\varphi_i(\lambda v+\mu w,\mathfrak{B})=\lambda\Phi(v,\mathfrak{B})+\mu\Phi(w,\mathfrak{B})+$$

$$+\sum_{T\subseteq\mathfrak{B}\setminus B_k}\left(\sum_{\substack{S\subset B_k\\ S\ni i}}\beta_s^T\frac{(\lambda v+\mu w)(S\cup A^T)}{s}-\sum_{\substack{S\subset B_k\\ S\not\ni i}}\beta_s^T\frac{(\lambda v+\mu w)(S\cup A^T)}{n_k-s}\right)$$

y como $(\lambda v+\mu w)(S)=\lambda v(S)+\mu w(S)$ para toda $S\in\mathcal{C}$, entonces

$$\varphi_i(\lambda v+\mu w,\mathfrak{B})=\lambda\varphi(v,\mathfrak{B})+\mu\varphi(w,\mathfrak{B})$$

con lo que se demuestra que el valor φ es lineal.

Para demostrar que el valor cumple con el axioma de anonimato, considérese una permutación θ tal que $\theta(B_p)=B_p$ para toda $B_p\in\mathfrak{B}$ y sea $i\in B_k\in\mathfrak{B}$, con $j=\theta(i)$; entonces

$$\varphi_j(v,\mathfrak{B})=\frac{\Phi(v,\mathfrak{B})(B_k)}{n_k}+\sum_{T\subseteq\mathfrak{B}\setminus B_k}\left(\sum_{\substack{S\subset B_k\\ S\ni j}}\beta_s^T\frac{v(S\cup A^T)}{s}-\sum_{\substack{S\subset B_k\\ S\not\ni j}}\beta_s^T\frac{v(S\cup A^T)}{n_k-s}\right)$$

$$=\frac{\Phi(v,\mathfrak{B})(\theta(B_k))}{n_k}+$$

$$+\sum_{\theta(T)\subseteq\mathfrak{B}\setminus B_k}\left(\sum_{\substack{\theta(S)\subset B_k\\ \theta(S)\ni\theta(i)}}\beta_{|\theta(S)|}^{\theta(T)}\frac{v(\theta(S)\cup\theta(A^T))}{|\theta(S)|}-\sum_{\substack{\theta(S)\subset B_k\\ \theta(S)\not\ni\theta(i)}}\beta_{|\theta(S)|}^{\theta(T)}\frac{v(\theta(S)\cup\theta(A^T))}{n_k-|\theta(S)|}\right)$$

$$=\frac{\Phi(\theta v,\mathfrak{B})(B_k)}{n_k}+\sum_{T\subseteq\mathfrak{B}\setminus B_k}\left(\sum_{\substack{S\subset B_k\\ S\ni i}}\beta_s^T\frac{\theta v(S\cup A^T)}{s}-\sum_{\substack{S\subset B_k\\ S\not\ni i}}\beta_s^T\frac{\theta v(S\cup A^T)}{n_k-s}\right)$$

$$=\varphi_i(\theta v,\mathfrak{B})$$

con lo que se demuestra que el valor cumple con el axioma de anonimato.

Por lo anterior, se tiene que el valor definido en (3.2) satisface los axiomas de linealidad, eficiencia, simetría coalicional y anonimato.

Para probar el teorema en la otra dirección, considérese un valor $\varphi : G \times B \to \mathbb{R}^n$ que satisfaga las propiedades mencionadas en el teorema; por (3.1) existe un valor ϕ para juegos coalicionales restringidos que de igual manera satisface los axiomas anteriores tal que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \phi_i(v^{B_k}, \mathfrak{B})$ para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$. Sea $(w^S)_{S \subseteq N}$ una base para G tal que, para cualquier coalición no vacía S

$$w^S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T \\ 0 & \text{si } S \neq T. \end{cases}$$

Entonces, para todo $B_k \in \mathfrak{B}$, todo juego $(N^k, v^{B_k}, \mathfrak{B})$ puede escribirse utilizando la base anterior de la siguiente manera

$$v^{B_k} = v^{B_k}(N^k) w^{N^k} + \sum_{\substack{S \subset N^k \\ S \cap B_k \neq \emptyset}} v^{B_k}(S) w^S + \sum_{S \subseteq \mathfrak{B} \setminus B_k} v^{B_k}(A^S) w^S; \tag{3.5}$$

por la definición del juego coalicional restringido, puede escribirse

$$v^{B_k} = v(N) w^N + \sum_{\substack{S \subset N^k \\ S \cap B_k \neq \emptyset}} v(S) w^S + \sum_{S \subseteq \mathfrak{B} \setminus B_k} v(A^S) w^S$$

y dada la siguiente igualdad

$$\sum_{\substack{S \subset N^k \\ S \cap B_k \neq \emptyset}} v(S) w^S = \sum_{T \subseteq \mathfrak{B} \setminus B_k} \sum_{S \subset B_k} v(S \cup A^T) w^{S \cup T} + \sum_{S \subset \mathfrak{B} \setminus B_k} v(S \cup B_k) w^{S \cup B_k}$$

en donde agrupando términos y reescribiendo índices, se tiene la siguiente descomposición del juego v^{B_k}

$$v^{B_k} = \left(v(N) w^N + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \ni B_k}} v(A^S) w^S + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \not\ni B_k}} v(A^S) w^S \right) + \sum_{T \subseteq \mathfrak{B} \setminus B_k} \sum_{S \subset B_k} v(S \cup A^T) w^{S \cup T}$$

entonces, por linealidad se tiene, para todo $i \in B_k$

$$\phi_i(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \left(v(N) \phi_i(w^N) + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \ni B_k}} v(A^S) \phi_i(w^S) + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \not\ni B_k}} v(A^S) \phi_i(w^S) \right) + \\ + \sum_{T \subseteq \mathfrak{B} \setminus B_k} \sum_{S \subset B_k} v(S \cup A^T) \phi_i(w^{S \cup T}). \tag{3.6}$$

Puede verse que el primer término de la fórmula anterior se refiere al pago que le corresponde al jugador i dentro del juego de grupos donde se considera a cada coalición dentro de $\mathfrak{B}$ como un jugador; se denotará a este término como $\phi_i^g(v^{B_k}, \mathfrak{B})$, mientras que a la parte restante se le renombrará como $\phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B})$, por lo que $\phi_i(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \phi_i^g(v^{B_k}, \mathfrak{B}) + \phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B})$; por simetría coalicional y anonimato del valor ϕ, para toda $S \subset \mathfrak{B}$ deben existir λ_S y μ_S tales que

$$\phi_i(w^S) = \begin{cases} \lambda_S/n_k & \text{si } B_k \in S, \\ \mu_S/n_k & \text{si } B_k \notin S. \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\phi_i^g(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = v(N)\phi_i(w^N) + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \ni B_k}} \lambda_S \frac{v(A^S)}{n_k} + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \not\ni B_k}} \mu_S \frac{v(A^S)}{n_k}.$$

Por eficiencia debe cumplirse que $s\lambda_S + (m-s)\mu_S = 0$ y además, por eficiencia, simetría coalicional y anonimato, $\phi_i(w^N) = 1/(m \cdot n_k)$ con lo que

$$\phi_i^g(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \frac{v(N)}{m \cdot n_k} + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \ni B_k}} \lambda_S \frac{v(A^S)}{n_k} - \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \not\ni B_k}} \lambda_S \frac{s v(A^S)}{(m-s) \cdot n_k}. \tag{3.7}$$

Sea $S \subset \mathfrak{B}$ con $B_k, B_h \notin S$; considérese el juego $w^{S \cup B_k} + w^{S \cup B_h}$. Por simetría coalicional se tiene que $\phi(w^{S \cup B_k} + w^{S \cup B_h})(B_k) = \phi(w^{S \cup B_k} + w^{S \cup B_h})(B_h)$ y por lo tanto $\lambda_{S \cup B_k} = \lambda_{S \cup B_h}$. Esto significa que si S' se obtiene desde S reemplazando una coalición de S por una de $\mathfrak{B} \backslash S$ entonces $\lambda_{S'} = \lambda_S$; esto indica que para cualesquiera S y T del mismo tamaño, es posible formar una secuencia de transformaciones jugador a jugador (en este caso, coalición a coalición) entre los conjuntos S y T y con lo cual se tendría que $\lambda_S = \lambda_T$ para cualesquiera $s = t$. Por lo tanto, el valor de λ_S sólo depende del tamaño de S y puede reemplazarse por λ_s en (3.7) y haciendo $\beta_s = s\lambda_s$ se tiene

$$\phi_i^g(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \frac{\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k)}{n_k}$$

en donde

$$\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k) = \frac{v(N)}{m} + \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \ni B_k}} \beta_s \frac{v(A^S)}{s} - \sum_{\substack{S \subset \mathfrak{B} \\ S \not\ni B_k}} \beta_s \frac{v(A^S)}{m-s}.$$

Trabajando ahora con $\phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B})$ y si se considera que para todo jugador $i \in B_k$ las coaliciones $S \subset B_k$ pueden dividirse en dos grupos, las que contienen al jugador i y las que no lo contienen, se tiene

$$\phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \sum_{T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \ni i}} v(S \cup A^T)\phi_i(w^{S \cup T}) + \sum_{\substack{S \subset B_k \\ S \not\ni i}} v(S \cup A^T)\phi_i(w^{S \cup T}) \right)$$

Sea una coalición $T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k$ fija. Por anonimato debe cumplirse que

$$\phi_i(w^{S\cup T}) = \begin{cases} \lambda_S^T & \text{si } i \in S \cup A^T, \\ \mu_S^T & \text{si } i \notin S \cup A^T \end{cases}$$

y entonces

$$\phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \sum_{T\subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S\subset B_k \\ S\ni i}} \lambda_S^T v(S\cup A^T) + \sum_{\substack{S\subset B_k \\ S\not\ni i}} \mu_S^T v(S\cup A^T) \right).$$

Dado que el valor es eficiente, se tiene que $s\lambda_S^T + (n_k - s)\mu_S^T = 0$ para toda $T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k$ fija; entonces

$$\phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \sum_{T\subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S\subset B_k \\ S\ni i}} \lambda_S^T v(S\cup A^T) - \sum_{\substack{S\subset B_k \\ S\not\ni i}} \lambda_S^T \frac{sv(S\cup A^T)}{n_k - s} \right).$$

Es posible demostrar que el valor de λ_S^T depende únicamente del tamaño de S, utilizando argumentos por demás similares a los que se usaron para la demostración que $\lambda_S = \lambda_s$ en $\phi_i^g(v^{B_k}, \mathfrak{B})$; por lo tanto, $\lambda_S^T = \lambda_s^T$ y con $\beta_s^T = s\lambda_s^T$ se concluye que

$$\phi_i^{B_k}(v^{B_k}, \mathfrak{B}) = \sum_{T\subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k} \left(\sum_{\substack{S\subset B_k \\ S\ni i}} \beta_s^T \frac{v(S\cup A^T)}{s} - \sum_{\substack{S\subset B_k \\ S\not\ni i}} \beta_s^T \frac{v(S\cup A^T)}{n_k - s} \right)$$

con lo cual se demuestra que para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$, un valor para juegos coalicionales restringidos que cumpla los axiomas de linealidad, eficiencia y anonimato puede escribirse de la forma (3.2), y por (3.1) se tiene que, para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$, cualquier solución $\varphi : G \times B \to \mathbb{R}^n$ lineal, eficiente y anónima para juegos cooperativos en dos niveles puede escribirse como (3.2), por lo que el teorema queda demostrado. □

La expresión dada en (3.2) puede interpretarse de la siguiente manera: primero se lleva a cabo una negociación entre las coaliciones que conforman a $\mathfrak{B}$, de tal suerte que se les otorga de pago $\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k)$ a toda $B_k \in \mathfrak{B}$; primeramente el monto conseguido por la coalición en el juego de grupos se reparte de manera igualitaria entre los jugadores que la forman, asignándole a cada uno de ellos un pago de $\frac{\Phi(v,\mathfrak{B})(B_k)}{n_k}$; enseguida se llevan a cabo una serie de transferencias entre subcoaliciones pertenecientes a cada coalición, mas específicamente desde cada subcoalición $B_k\backslash S$ hacia S para toda $S \subset B_k$: se toma un subconjunto $T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k$ fijo que representa un posible conjunto de negociación para los jugadores en B_k y los jugadores en $B_k\backslash S$ tendrán que aportar $\beta_s^T v(S \cup T)$ a la coalición S para que se reparta entre los jugadores que la integran de manera igualitaria, por lo que cada jugador $i \in B_k \backslash S$ aporta $\beta_s^T v(S \cup T)/(n_k - s)$, mientras que a cada jugador $j \in S$ le corresponderá $\beta_s^T v(S \cup T)/s$ de lo aportado por la subcoalicion $B_k \backslash S$. Después de llevarse a cabo todas las transferencias, el jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ tiene a $\varphi_i(v, \mathfrak{B})$ como monto total asignado.

El proceso de repartición entre coaliciones se lleva a cado de manera similar; el monto conseguido por la gran coalición se reparte en partes iguales entre todas las coaliciones, esto es, a cada una de ellas se le asigna $\frac{v(N)}{m}$ para luego efectuarse una serie de tranferencias entre coaliciones de la misma manera que se explicó en el párrafo anterior para subconjuntos de B_k: las transferencias serán desde coaliciones en $\mathfrak{B} \backslash P$ hacia P para todo $P \subset \mathfrak{B}$, de modo tal que cada coalición en $\mathfrak{B} \backslash P$ pague $\beta_p v(P)/(m - p)$ al conjunto P para que éste reparta dicho monto entre las coaliciones que la integran, con lo cual a toda coalición $i \in P$ le corresponderá $\beta_p v(P)/p$.

Es importante notar la riqueza proporcionada por la expresión dada en (3.2) para representar valores para juegos en dos niveles, ya que puede trascender más allá de las soluciones lineales, eficientes, con simetría coalicional y anónimas y utilizarse para representar una gran gama de soluciones: supóngase por ejemplo un valor que no sea eficiente pero que el valor asignado a cada coalición sí se reparta enteramente entre los jugadores que la integran (alguna manera de eficiencia coalicional); bastará con cambiar la definición del juego de grupos $\Phi(v, \mathfrak{B})$ para poder escribir la expresión de esta solución con la expresión general presentada.

3.4. Representación de valores

Como se mencionó en la sección 3.2, muchos de los valores para juegos con estructuras coalicionales tratados en el capitulo 2 en realidad consideran situaciones de pago en dos niveles; es posible escribir aquellos que cumplan los axiomas de anonimato, linealidad, simetría coalicional y eficiencia utilizando la expresión (3.2), indicando únicamente el valor de las constantes que intervienen en la formulación. En todos los valores se considera que los jugadores se encuentran agrupados según la estructura coalicional $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ y $|B_k| = n_k$ para toda $B_k \in \mathfrak{B}$.

Solución Igualitaria coalicional:

Para el cálculo del pago de todos los jugadores $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ esta solución no considera tranferencias entre subcoaliciones $S \subset B_k$ y $T \subset B_k \backslash S$, ya que únicamente se hace una división igualitaria de la valía conjunta entre los jugadores que intervienen en la negociación, esto tanto en la etapa del juego de grupos como dentro de cada coalición de la estructura coalicional; por ello, si para toda

$B_k \in \mathfrak{B}$ se tiene que

$$\beta_p = 0 \quad \forall p \in \{1, \ldots, m-1\} \quad \text{y}$$
$$\beta_s^T = 0 \quad \forall S \subset B_k \text{ y toda } T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k$$

entonces $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i^{I_2}(v, \mathfrak{B})$.

Solución Estándar coalicional:

Según lo visto en (2.14), para el cálculo del pago asignado a un jugador $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ sólamente se toman en cuenta la valía de todos los jugadores en B_k y lo que consigue dicha coalición en el juego de grupos, lo cual de nuevo únicamente toma en cuenta la valía de cada coalición de la estructura coalicional; por ello, tiene sentido sólo considerar las constantes β_s^T cuando $s = 1$ y $T = \emptyset$ siendo las demás igual a cero, al igual que β_p si $p = 1$ y cero todas las demás; específicamente, cuando se tiene que para toda $B_k \in \mathfrak{B}$

$$\beta_p = \frac{m-1}{m} \quad \text{si } p = 1; \quad \beta_p = 0 \quad \text{si } p \neq 1;$$
$$\beta_s^T = 0 \quad \text{si } T \neq \emptyset \text{ ó } s \neq 1; \quad \beta_s^T = \frac{n_k - 1}{n_k} \quad \text{si } T = \emptyset \text{ y } s = 1$$

se concluye que $\varphi(v, \mathfrak{B}) = \varphi^{e_2}(v, \mathfrak{B})$. Si se tiene una función de pago para el juego de grupos ψ que satisfaga los axiomas de simetría, eficiencia y linealidad, es posible escribir el valor estándar coalicional con función de pago ψ utilizando la expresión (3.2), claro que las constantes dependerán totalmente de la solución ψ utilizada; por ejemplo, si se elige como solución para el juego de grupos al valor de Shapley (ψ =Sh), las constantes necesarias para que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i^{e_3}(v, \mathfrak{B}, \psi)$ son, para toda $B_k \in \mathfrak{B}$

$$\beta_p = \frac{1}{\binom{m}{p}} \quad \forall p \in \{1, \ldots, m-1\} \quad \text{y}$$
$$\beta_s^T = 0 \quad \text{si } s \neq 1, \quad \beta_s^T = \frac{n_k - 1}{n_k \cdot (t+1) \cdot \binom{m}{t+1}}, \quad \text{si } s = 1, \text{ con } T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k.$$

Valor de Solidaridad coalicional:

Al igual que ocurre con el valor estándar coalicional con función de pago ψ, el valor de solidaridad coalicional satisfará los axiomas de linealidad, anonimato, simetría coalicional y eficiencia si el valor ψ para pagar en el juego de grupos es tal que cumple los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia. Propóngase ψ=Sh; expandiendo la fórmula (2.12) es posible encontrar los coeficientes de $v(S \cup T)$ con $S \subset B_k$ y toda $T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k$, y con ello, se tendría que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) =$

$\varphi_i^S(v, \mathfrak{B}, \psi)$ para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$ si se tiene que

$$\beta_p = \frac{1}{\binom{m}{p}} \quad \forall p \in \{1, \dots, m-1\} \quad \text{y}$$

$$\beta_s^T = \frac{1}{(s+1)\cdot(t+1)\cdot\binom{n_k}{s}\cdot\binom{m}{t+1}} \quad \forall\ S \subset B_k,\ \forall\ T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k.$$

Valor de Consenso coalicional:

Esta solución, igual que la solución anterior, necesita la especificación de un valor ψ para el juego de grupos; si dicha solución es lineal, simétrica y eficiente entonces es posible encontrar las constantes adecuadas para escribir al valor de consenso coalicional de la forma (3.2); supóngase que la solución para el juego de grupos es el valor de Shapley (ψ =Sh), entonces para toda $B_k \in \mathfrak{B}$ y toda $T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k$ se tiene

$$\beta_p = \frac{1}{\binom{m}{p}} \quad \forall p \in \{1, \dots, m-1\} \quad \text{y}$$

$$\beta_s^T = \frac{1}{2(t+1)\cdot\binom{m}{t+1}} \quad \text{si } s=1, \quad \beta_s^T = \frac{1}{(t+1)\cdot\binom{m}{t+1}\binom{n_k}{s}} \quad \text{si } s \neq 1,$$

y por lo tanto $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi_i^C(v, \mathfrak{B}, \psi)$ para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$. Diferentes soluciones para el juego de grupos darán lugar a diferentes constantes.

Valor de Owen:

Como puede verse en alguna axiomatización del valor de Owen de la sección 2.3, este valor satisface los axiomas necesarios para poder expresarse según la fórmula general dada en (3.2); para ello, las constantes necesarias, para toda $B_k \in \mathfrak{B}$ y toda $T \subseteq \mathfrak{B}\backslash B_k$ son

$$\beta_p = \frac{1}{\binom{m}{p}} \quad \forall p \in \{1, \dots, m-1\} \quad \text{y}$$

$$\beta_s^T = \frac{1}{(t+1)\cdot\binom{m}{t+1}\cdot\binom{n_k}{s}} \quad \forall\ S \subset B_k$$

Estas constantes se consiguieron desarrollando la expresión dada en (2.3).

Valor de Aumann-Drèze:

El valor de Aumann-Drèze claramente no cumple con uno de los axiomas necesarios para poder expresarlo mediante la fórmula general dada en (3.2), ya que no es eficiente; en su lugar, este valor satisface el axioma de eficiencia local, en donde cada coalición reparte su valía entre los jugadores que la integran, lo cual implica que no se lleva a cabo ninguna negociación entre las coaliciones (el juego de grupos no existe) y cada subcoalición dentro de una coalición específica de la estructura coalicional interactúa únicamente con otras subcoaliciones de su misma coalición. Con esto en mente, sí es posible expresar al valor de Aumann-Drèze cambiando a la solución $\Phi(v, \mathfrak{B})$ para el juego de grupos, que es lo que inicialmente se reparten las coaliciones que conforman la estructura coalicional, y no considerar las negociaciones con subcoaliciones $T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k$ con $T \neq \emptyset$ para toda coalición $B_k \in \mathfrak{B}$; entonces, haciendo

$$\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k) = v(B_k)$$
$$\beta_s^T = \frac{1}{\binom{n_k}{s}} \quad \text{si } T = \emptyset; \quad \beta_s^T = 0 \quad \text{si } T \neq \emptyset \quad \forall\ S \subset B_k$$

se tiene que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \phi_i(v, \mathfrak{B})$ para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$.

Valor Colectivo:

Al igual que el valor de Aumann-Drèze, este valor no cumple con todos los axiomas solicitados por la formulación (3.2), ya que utiliza como forma de pago para las coaliciones en el juego de grupos al valor de Shapley ponderado, el cual no necesariamente es simétrico, y por lo tanto, el valor colectivo no cumple con el axioma de simetría coalicional; tomando en cuenta que para repartir el pago asignado a cada coalición en el juego de grupos únicamente se toman en cuenta subcoaliciones propias de cada coalición en la estructura coalicional, es posible, mediante el cambio de la definición del juego de grupos y la anulación de las constantes β_s^T cuando $T \neq \emptyset$, expresar el valor colectivo mediante la fórmula (3.2). Para ello, para toda $B_k \in \mathfrak{B}$ y toda $T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k$

$$\Phi(v, \mathfrak{B}) = \varphi_k^w(v^{\mathfrak{B}}); \quad \text{y}$$
$$\beta_s^T = \frac{1}{\binom{n_k}{s}} \quad \text{si } T = \emptyset; \quad \beta_s^T = 0 \quad \text{si } T \neq \emptyset \quad \forall\ S \subset B_k.$$

donde $w = (w_k)_{k \in M}$ con $w_k = |B_k|$ para toda $k \in \{1, \ldots, m\}$. Con esto, se tiene que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi^C(v, \mathfrak{B})$ para todo $i \in B_k \in \mathfrak{B}$.

Incluso es posible expresar algunos de los valores para juegos con estructuras coalicionales donde no necesariamente se considere a cada coalición como una unidad atómica mediante la fórmula general que se presenta en el teorema 28.

Por ejemplo, considérese la solución igualitaria dada en la seccion 2.7.3

$$\varphi^{I_1}(v, \mathfrak{B}) = \frac{1}{n}\big[v(N)\big].$$

En esta solución no se toma en cuenta la estructura coalicional, por lo que no se aplica sobre juegos donde las coaliciones puedan verse como unidades atómicas. Mas sin embargo la solución $\varphi^{I_1}(v, \mathfrak{B})$ cumple con los axiomas de linealidad, eficiencia, simetría coalicional y anonimato; cambiando de nuevo el valor correspondiente en el juego de grupos para cada $B_k \in \mathfrak{B}$, es posible proporcionar las constantes necesarias para que $\varphi_i(v, \mathfrak{B}) = \varphi^{I_1}(v, \mathfrak{B})$; éstas son

$$\Phi(v, \mathfrak{B})(B_k) = n_k \cdot \frac{v(N)}{n}; \quad \text{y} \quad \beta_s^T = 0 \quad \forall\, T \subseteq \mathfrak{B} \backslash B_k \text{ y } \forall\, S \subset B_k.$$

Los demás valores presentados a lo largo del capítulo 2 no son posibles de expresar mediante la fórmula general mencionada en el teorema 28: el valor de Banzhaf-Owen utiliza al valor de Banzhaf-Coleman como función de pago en el juego de grupos, por lo que no cumple necesariamente el axioma de eficiencia, además que como se menciona en la sección 2.6, este valor no satisface la simetría en el juego de grupos y por lo tanto tampoco se satisface el axioma de simetría coalicional; el valor τ-coalicional se define únicamente cuando el juego es cuasibalanceado, además de no ser aditivo. Los valores con opciones externas (valor χ y el valor de Wiese) no se definen para juegos donde las coaliciones se comportan como unidades indivisibles, ya que consideran las opciones que tiene un jugador de abandonar su coalición y formar otras coaliciones con otros jugadores.

3.5. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se hace una serie de nuevas aportaciones al estudio de las soluciones para juegos cooperativos con estructuras coalicionales. Se consideran situaciones en donde las distintas coaliciones de la estructura coalicional fungen como una unidad indivisible al momento de la negociación y donde además el proceso de pago se lleva a cabo primeramente entre las coaliciones de la estructura coalicional y luego cada una reparte lo que le correspondió entre sus miembros, introduciendo así los juegos en dos niveles, los cuales se consideran indirectamente en casi todas las soluciones estudiadas en el capítulo 2, con excepción de los valores con opciones externas, debido a la naturaleza de su construcción. De igual manera se presentan los juegos coalicionales restringidos, cuyas soluciones proveen una forma por demás cómoda de representar a los valores para juegos en dos niveles, y con ello, se llega a la parte culmimante del presente capítulo: se presenta una expresión (3.2) para todas las soluciones lineales, anónimas, con simetría coalicional y eficientes para juegos en dos niveles donde a cada coalición de la estructura coalicional se le considera una unidad indivisible al momento de la negociación, lo cual permite el estudio de propiedades y características de soluciones particulares que cumplen los axiomas anteriores.

Se concluye el capítulo con la representación de la mayoría de los valores presentados en el capítulo anterior mediante la expresión (3.2), haciendo especial énfasis en que la riqueza proporcionada por la formulación permite, mediante cambios que provocan la pérdida de ciertas propiedades, la representación de una clase mucho mayor de valores (como por ejemplo, el valor de Aumman-Drèze, que claramente no cumple el axioma de eficiencia).

Capítulo 4

Conclusiones generales

Cada uno de los capítulos anteriores contiene una discusión sobre las conclusiones más importantes de los mismos, por lo que debiera remitirse a cada uno de ellos para más detalles (secciones 1.5, 2.11 y 3.5). En este capítulo se comentan los resultados desde una perspectiva más general y se resume sólo lo más relevante.

Desde un punto de vista sociológico, el ser humano siempre buscará pertenecer a un grupo de individuos, ya que generalmente la unión de esfuerzos es siempre más productiva que la suma de los esfuerzos individuales: esto lleva a la formación de estructuras coalicionales dentro del conjunto posible de individuos; es de esperarse entonces que este comportamiento se observe en la teoría de juegos al momento de la negociación, por lo que las estructuras coalicionales merecen tener un lugar por demás importante dentro de los juegos cooperativos.

Se han presentado los fundamentos teóricos de los juegos cooperativos a lo largo del capítulo 1; en el capítulo 2 se estudiaron de lleno las estructuras coalicionales, iniciando con los conceptos básicos concernientes a ellas y luego presentando varias soluciones para juegos bajo estas condiciones. Los valores estudiados incluyen los clásicos y más populares, como son el valor de Owen (2.3) y Aumman-Drèze (2.2), así como otros valores más contemporáneos; para todos los casos se presentan propiedades y axiomatizaciones. A lo largo del capítulo 3 se introdujeron los juegos en dos niveles, los cuales son un caso especial de juegos con estructuras coalicionales; de igual manera se presentaron los juegos coalicionales restringidos (3.2) con el afán de tener una representación más sencilla del proceso de negociación dentro de juegos en dos niveles, y con ello, proporcionar una fórmula explícita para todas las soluciones lineales, anónimas, con simetría coalicional y eficientes de juegos bajo las condiciones tratadas con anterioridad; luego se verificó que la mayor parte de las soluciones presentadas en el capítulo 2 se pueden escribir mediante dicha formulación, la cual incluso se puede ampliar a soluciones que cumplan algunas otras propiedades diferentes a las iniciales e inclusive, en ciertos casos, a juegos donde no se cumple el supuesto de que cada coalición dentro de la estructura coalicional participa como una unidad indivisible.

A continuación se presentan los resultados más importantes desarrollados a lo largo de la investigación:

1. Se demostró que el valor de Owen de un juego cooperativo con estructura coalicional es el mismo que para el juego *de lo que se deja de ganar* $w_{\varphi}^{\diamond}$ y que para el juego *de lo que se gana por asociación* w_{φ}^{*} (sección 2.3.2). Este resultado establece una mayor estabilidad al valor de Owen, ya que es inmune al tipo de manipulaciones referidas que se llevan a cabo durante la construcción de los juegos asociados.

2. Se muestran extensiones del valor de consenso, de solidaridad y valores basados en la división de excesos para juegos con estructuras coalicionales (2.7), así como algunas de sus propiedades. En el caso de los dos primeros valores, se presenta la caracterización de dichas soluciones.

3. Se introducen los juegos en dos niveles y se justifica su importancia dentro de la teoría de juegos. Así mismo, se presentan los juegos coalicionales restringidos con lo cual se expresan de una manera más simple las soluciones para juegos en dos niveles.

4. Se demuestra que todas las soluciones lineales, anónimas, con simetría coalicional y eficientes para juegos en dos niveles pueden escribirse de acuerdo a cierta formulación si se proporcionan las constantes necesarias; con esta idea, se muestran cuáles son esas constantes para los principales valores estudiados en el capítulo 2 que en realidad llevan a cabo el proceso de pago en dos niveles. Además se muestra, através de algunos ejemplos, que es posible expresar algunos valores que no necesariamente cumplen con los axiomas citados con anterioridad utilizando la fórmula presentada, como es el caso del valor de Aumann-Drèze, entre otros.

Así mismo, es posible dar algunas recomendaciones en cuanto al valor a utilizar para el cálculo de los pagos a los jugadores cuando éstos se encuentran organizados en estructuras coalicionales, dependiendo de la naturaleza del juego:

1. En caso de juegos superaditivos, los más recomendable sería utilizar un valor eficiente, y que de alguna manera se vea reflejada la estructura en particular que tomaron los jugadores en el pago a cada coalición, como ocurre con el valor de Owen o el τ-valor, por sólo mencionar algunos.

2. En alguna situación en donde el tamaño de cada coalición sea un factor determinante al momento de la asignación de pagos, el valor colectivo surge como opción natural, en la inteligencia que este valor considera, en un nivel, un reparto mediante el valor de Shapley a nivel interno de cada coalición, lo cual en algunas situaciones de votación particulares perjudicaría a algunas coaliciones.

3. Si se tiene un ambiente no necesariamente superaditivo, los valores que actúan como restricciones a cada coalición surgen como una alternativa natural, como lo es el valor de Aumann-Drèze, y lo ideal sería que la estructura coalicional sea tal que se maximice la suma del monto a repartir entre cada una de las coaliciones, aunque es claro que esta situación no necesariamente se da, dado que la estructura coalicional óptima puede ir en contra de la preferencia de los jugadores.

Partiendo de las conclusiones anteriores y las recomendaciones, pueden tenerse varias líneas de estudio para trabajos futuros:

1. Estudiar el proceso de formación dinámica de coaliciones maximizando el pago de cada jugador dentro de todas las posibles estructuras coalicionales atómicas que puedan formarse, utilizando la ventaja de representación de soluciones de los juegos coalicionales restringidos.

2. Proporcionar una formulación de todas las soluciones lineales, anónimas, con simetría coalicional y eficientes para juegos con estructuras coalicionales, donde no necesariamente se lleve el proceso de pago en dos niveles. Para ello bastaría, en teoría, encontrar una descomposición amigable del espacio de juegos y añadir algunas otras propiedades para demostrar la unicidad de la formulación.

3. Emplear el enfoque de teoría de representaciones para encontrar soluciones generales para juegos con estructuras coalicionales que cumplan con ciertos axiomas y que tengan ciertas propiedades.

Referencias

[1] Albizuri M.J., Aurrecoechea J., Zarzuelo J.M. (2006) *Configuration values: extensions of the coalitional Owen value.* Games and Economic Behavior 57:1-17.

[2] Albizuri M.J., Zarzuelo J.M. (2004) *On coalitional semivalues.* Games and Economic Behavior 49:221-243.

[3] Aumann R., Drèze J. (1974) *Cooperative games with coalition structures.* International Journal of Game Theory 3(4):217-37.

[4] Aumann R., Myerson R.B. (1988) *Endogenous formation of links between players and of coalitions: an application of the Shapley value.* The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley. 175-191.

[5] Branzei R., Dimitrov D., Tijs S. (2003) *The shapley value and the τ value.* Models in Cooperative Game Theory. Lecture Notes in Economics and Mathemathical Systems. Springer. pp. 23-28.

[6] Calvo E., Lassaga J., Winter E. (1996) *The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation.* Mathematical Social Sciences 31:171-182.

[7] Casajus A. (2005). *Outside options, component efficiency an stability: a new coalition structure value.* Working Paper #05/AC/01. Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Leipzig, Alemania.

[8] Casas M.B., García J.I., Van del Nouweland A., Vázquez B.M. (2003). *An extension of the τ-value to games with coalition structures.* European Journal of Operational Research 148:494-513.

[9] Derks J., Peters H. (1993) *A Shapley value for games with restricited coalitions.* Internacional Journal of Game Theory 21:351-360.

[10] Driessen T.S., Tijs S.H. (1992) *The core and the τ-value for cooperative games with coalition structures.* Game Theory and Economic Applications. 146-169.

[11] Hamiache G. (2001) *The Owen value values friendship.* Internacional Journal of Game Theory 29:517-532.

[12] Hart S., Kurz M. (1983) *Endogenous formation of coalitions.* Econometrica 51:1047-64.

[13] Hart S., Mas-Colell A. (1989) *Potential, value and consistency.* Econometrica 57:589-614.

[14] Hernández L.L., Juárez R., Sánchez S.F. (2007) *Dissection of solutions in cooperative game theory using representation techniques.* International Journal of Game Theory. 35:395-426.

[15] Ju Y., Borm P., Ruys P. *The Consensus value: a new solution concept for cooperative games.* CentER Discussion Paper No. 2004-50.

[16] Kalai E., Samet D. (1987) *On Weighted Shapley values.* International Journal of Game Theory 16:205-222.

[17] Kamijo Y. (2006) *Potential, coalition formation and coalition structure.* Working Paper.

[18] Kurz M. (1988) *Coalitional value.* The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley. 155-173.

[19] Laurelle A., Valenciano F. (1999) *Why power indices should be efficient?* Department of Applied Economics IV. Basque Country University No. 1.

[20] Lehrer E. (1988) *An axiomatizacion of the Banzhaf value.* International Journal of Game Theory 2:89-99.

[21] Maschler, M. (1992) *The bargaining set, kernel, and nucleolus.* Handbook of Game Theory with Economic Applications. Vol. I, Cap. 34, pp. 591-667.

[22] Meijide J.M.A. (2001) *Contribuciones a la teoría del valor para juegos cooperativos con condicionamiento exógeno.* Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

[23] Myerson R.B. (1977) *Graphs and cooperation on games.* Mathematics of Operation Research 2:225-229

[24] Nash J.F. (1950) *The bargaining problem.* Econometrica 18:155-62.

[25] Nowak A., Radzik T. (1994) *A solidarity value for n-person tranferable utility games.* Internacional Journal of Game Theory 23:43-48.

[26] Núñez M., Rafaels C. (2002) *The assignment game: the τ value.* International Journal of Game Theory 31:411-422.

[27] Owen G. (1977) *Values of games with a priori unions.* Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Springer-Verlag, New York. 76-88.

[28] Owen G. (1981) *Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions.* Power, voting and voting power. Physica-Verlag, pp. 232-238.

[29] Ruiz L.M., Valenciano F., Zarzuelo J.M. (1998) *The family of least square values for transferable utility games.* Games and Economic Behavior 24:109-130.

[30] Sánchez F. (1997) *Balanced contributions axiom in the solution of cooperative games.* Games and Economic Behavior 20:161-168.

[31] Sánchez F. (1993) *Valores y soluciones.* Introducción a la matemática de los juegos. Editores Siglo veintiuno. 99-121.

[32] Shapley L.S. (1953) *A value for n-person games.* Contributions to Theory of Games 2:307-317.

[33] Tijs S.H. (1987) *An axiomatization of the τ-value.* Mathematical Social Sciences. 13:177-181.

[34] Vidal P.J., Bergantiños G. (2003) *An implementation of the Owen value.* Games and Economic Behavior 44:412-427.

[35] Wiese H. (2003) *The outside-option value - axiomatization and application to the gloves game.* Working Paper. Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Leipzig, Alemania.

[36] Winter E. (1992) *The consistency and potential for values of games with coalition structures.* Games and Economic Behavior 4:132-144.

[37] Young H.P. (1985) *Monotonic solutions of cooperative games.* International Journal of Game Theory 14:65-72.

Índice alfabético