



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

---

# CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA DE ESTRUCTURAS DE HODGE MIXTAS EN LA FIBRA SINGULAR DE UNA CURVA PLANA REDUCIDA.

**T E S I S**

Que para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias**  
con Orientación en  
**Matemáticas Básicas**

Presenta

Lilia Alanís López

Director de Tesis:

Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos

---

Autorización de la versión final

# Agradecimientos

Por el apoyo económico que recibí para realizar mis estudios de maestría al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). También expreso mi agradecimiento por el apoyo económico brindado para terminar mi tesis de doctorado al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT).

Por dedicarme el tiempo necesario como director de tesis para llevar acabo este trabajo, por sus enseñanzas, su confianza y apoyo, agradezco al Dr. Xavier Gomez-Mont Avalos.

A mis padres Alfredo Alanís Durán y Lilia López Vera por haberme dado todo su apoyo durante el transcurso de mis estudio de maestría, por su comprensión, amor y fuerza. A mis hermanos Alfredo Alanís López y Cecilia Alanís López por su apoyo y ánimo brindado durante el tiempo lejos de mi familia.

A mis maestros y amigos Xavier Gómez-Mont Ávalos, Leticia Brambila Paz, Pedro Luis Del Angel Rodríguez por sus enseñanzas, consejos brindados y paciencia en aquellas clases y seminarios.

A mis compañeros de generación y amigos, mi segunda familia, quienes por su amistad, compañerismo, consejos y gratos momentos hicieron de mi estancia en CIMAT una de las mejores etapas de mi vida.

A mi familia del hockey que me ayudaron a equilibrar la parte académica con aquella parte deportiva, por todos los momentos y los fuertes lazos que aprendí a formar a nivel personal.

A mi equipo actual de trabajo dentro de la Academia que me permitieron empezar mi desarrollo como docente e investigadora en un ambiente más allá de lo ameno.



# Índice general

<b>1. Estructura de Hodge de una hipersuperficie lisa proyectiva vía formas holomorfas en el complemento.</b>	<b>13</b>
1.1. Complejos Filtrados y la filtración de Hodge . . . . .	13
1.1.1. Complejos filtrados . . . . .	13
1.1.2. Filtración de Hodge . . . . .	14
1.1.3. La filtración ingenua de la cohomología de Hodge . . . . .	15
1.2. Descripción Algebraica del $n$ -ésimo grupo de cohomología de una hipersuperficie lisa en $\mathbb{C}P^{n+1}$ . . . . .	17
1.3. Reducción del orden del polo en formas diferenciales algebraicas definidas en el complemento de $X$ . . . . .	18
1.3.1. El bicomplejo de Griffiths-Carlson . . . . .	22
1.4. Filtración de la cohomología de $X$ por el orden del polo . . . . .	25
1.4.1. Complejo logarítmico . . . . .	26
1.4.2. Mapeo Residuo . . . . .	26
1.5. Filtración de Hodge de la $n$ -cohomología de $X$ . . . . .	28
1.6. Ejemplos. . . . .	32
1.6.1. Curvas lisas en $\mathbb{C}P^2$ . . . . .	32
1.6.2. Familias de curvas proyectivas lisas en $\mathbb{C}P^2$ . . . . .	33
<b>2. Resolución y Gráfica Dual de una Curva Plana Reducida.</b>	<b>37</b>
2.1. Gráfica Dual . . . . .	38
2.2. Resolución de una Curva Plana Reducida e Irreducible. . . . .	39
2.2.1. Ejemplo: La cúspide. . . . .	45
2.3. Gráfica Dual para una Curva Plana Reducida. . . . .	47
2.3.1. Ejemplo: La cúspide doble . . . . .	48

<b>3. Fibra de Milnor de una Curva Singular.</b>	<b>51</b>
3.1. Fibración de Milnor. . . . .	51
3.2. Topología de la Fibra de Milnor. . . . .	52
3.3. Ejemplos. . . . .	55
3.3.1. La Cúspide . . . . .	55
3.3.2. La Cúspide Doble . . . . .	57
3.4. Aportación de cada divisor a la topología de la fibra de Milnor. . . . .	59
<b>4. Filtración Polar de una Curva Plana Reducida.</b>	<b>65</b>
4.1. Cocientes Polares . . . . .	65
4.1.1. Ejemplos. . . . .	67
4.2. La Filtración Polar de la Fibra de Milnor. . . . .	68
4.2.1. Ejemplos: Filtración Polar de la gráfica dual. . . . .	69
4.2.2. Ejemplos: Filtración Polar de la fibra de Milnor de $f$ . . . . .	72
<b>5. Reducción Semiestable.</b>	<b>75</b>
5.1. Algoritmo para construir la gráfica dual $\tilde{V}$ de la reducción semiestable . . . . .	76
5.2. Ejemplos de la reducción semiestable a nivel de la gráfica dual . . . . .	79
<b>6. Estructura de Hodge de una Curva Plana Reducida.</b>	<b>89</b>
6.1. Estructura de Hodge Mixta de la Fibra de Milnor. . . . .	89
6.1.1. Estructuras de Hodge Mixtas Asociadas a Singularidades Aisladas. . . . .	89
6.1.2. Construcción Algebraica de la Filtración por Peso (polar) en el Divisor Excepcional. . . . .	94
6.1.3. Descripción Geométrica de la Estructura de Hodge Mixta (de Deligne) de Superficies de Riemann de género $g$ con agujeros. . . . .	95
6.2. Construcción Algebraica de Estructuras de Hodge Mixtas en la fibra singular. . . . .	99
6.3. Filtración Polar asociada a la estructura de Hodge de la fibra de Milnor en el anillo de polinomios. . . . .	101
<b>Bibliography</b>	<b>106</b>

# Introducción.

La topología algebraica surge con Henri Poincaré al asignar a espacios topológicos grupos algebraicos que se preservan bajo homeomorfismo. En 1895, introdujo en su artículo “Análisis situs” el grupo fundamental de un espacio con el fin de diferenciar las superficies de Riemann.

A principios del siglo pasado, tuvo lugar el uso de una nueva técnica para estudiar espacios topológicos. La teoría de homología singular se basa en considerar el grupo abeliano generado por ciclos sobre un espacio topológico  $M$ , bajo una relación de equivalencia. Tal grupo asignado a  $M$  se le conoce como  $H_n(M, \mathbb{Z})$ , donde  $n$  depende de la dimensión de los ciclos sobre  $M$ .

La teoría dual a la teoría de homología singular es la teoría de cohomología singular. En 1931, Georges DeRham introdujo la cohomología de DeRham, la cual se construye a partir de formas diferenciales definidas sobre una variedad  $M$ . DeRham probó que si la variedad  $M$  es lisa y compacta, entonces la cohomología singular y la cohomología de DeRham son álgebras isomorfas.

En geometría algebraica, se definen las variedades algebraicas como el lugar de ceros de un conjunto de polinomios, sobre un campo dado. A este tipo de variedades se asignan también invariantes topológicos como los grupos de DeRham algebraicos. Para una variedad algebraica proyectiva lisa sobre los complejos, la cohomología singular es la cohomología de DeRham algebraica.

Durante los años treinta se introdujo la Teoría de Hodge, la cual permitía asociar una estructura más fina para la cohomología de DeRham de una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .

En 1970, Pierre Deligne introduce en su trabajo “Théorie de Hodge I” un método para estudiar la estructura de Hodge de una hipersuperficie proyectiva lisa  $X$  via

el complejo de formas diferenciales racionales definidas en  $U = \mathbf{P}^{n+1} - X$  y el complejo logarítmico.

Años después, en 1983, Griffiths y Carlson proponen un método vía sucesiones espectrales para estudiar la estructura de Hodge de una hipersuperficie proyectiva lisa de dimensión  $n$ , vía formas diferenciales racionales definidas en el complemento de  $X$  cuyo orden del polo en  $X$  está acotado por  $n$  vía el mapeo residuo.

Durante el capítulo 1 se aborda la construcción de una estructura de Hodge de una hipersuperficie proyectiva lisa de dimensión  $n$  siguiendo las ideas expuestas en el trabajo de Griffiths y Carlson. Esto con el fin de aterrizar las ideas para el caso de curvas proyectivas lisas sobre los complejos.

Por otro lado, las variedades algebraicas no siempre son lisas; en 1964 Heisuke Hironaka demostró que para toda variedad algebraica definida sobre un campo de característica cero existe una resolución, esto es, existe una variedad no singular  $W$  y una función birracional propia  $Z \rightarrow X$ .

Para el caso de curvas algebraicas, la resolución de una curva plana reducida puede obtenerse a partir de una sucesión de explosiones hasta obtener una colección de divisores excepcionales a cruzamientos normales  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$  con multiplicidades  $\{d_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

A lo largo del capítulo 2, se hace un análisis del método para:

- Resolver una curva plana reducida  $X = \{f = 0\}$ .
- Obtener las multiplicidades de cada divisor excepcional.
- Construir la gráfica dual de la resolución mínima  $V$ .
- Asignar un orden parcial en el conjunto de vértices de  $V$ .

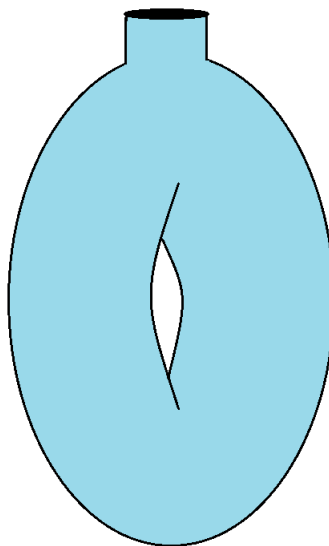
Muy relacionado a la resolución de singularidades de una curva algebraica reducida  $X = \{f = 0\}$  se encuentra el estudio de la fibra no singular  $X_\epsilon = \{f = \epsilon\}$ .

En 1968, Milnor demostró en su trabajo “Singular Points of Complex Hypersurfaces” que sobre un disco agujerado de radio suficientemente pequeño, existe una fibración diferenciable localmente trivial cuya fibra, llamada Fibra de Milnor, es difeomorfa a  $X_\epsilon$ .

En el capítulo 3 se analiza como la homología singular de la fibra de Milnor puede calcularse a través de las multiplicidades de los divisores excepcionales de la resolución mínima de un germen de curva plana reducida con una singularidad en el origen.

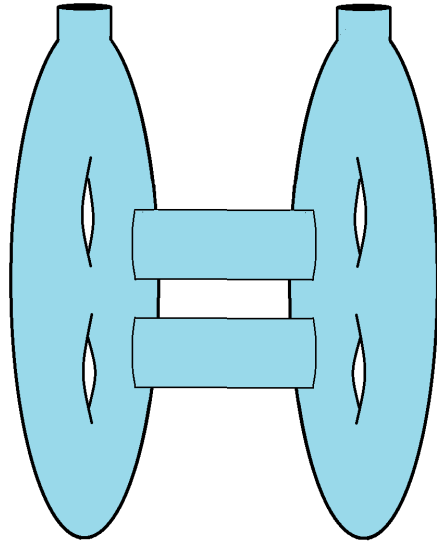
La aportación de cada divisor a la topología de la Fibra de Milnor puede calcularse aplicando la fórmula de Riemann–Hurwitz considerando a la fibra no singular como un cubriente no ramificado sobre los divisores excepcionales. A lo largo del trabajo se trabajarán con 3 ejemplos ilustrativos en  $\mathbb{C}^2$ :

- La cúspide dada por  $X = \{x^2 - y^3 = 0\}$ .



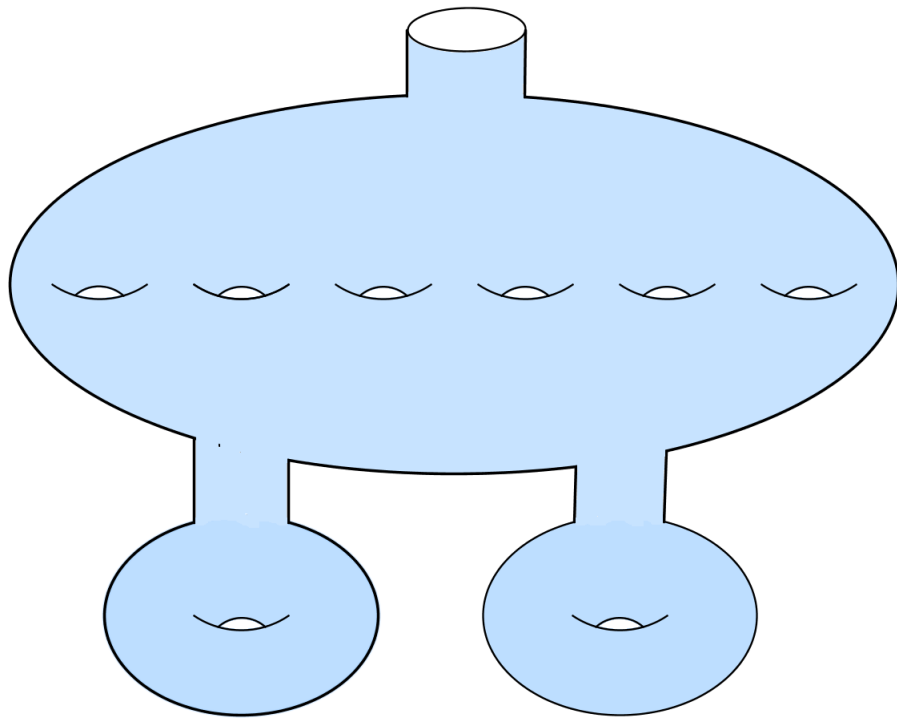
- La cúspide doble, dada por  $X = \{(x^2 - y^3)(y^2 - x^3) = 0\}$ .





- Una curva con más de un exponente característico

$$X = \{(y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0\}.$$



En 1977, Bernard Teissier introduce el concepto de variedades polares asociadas a un germen de hipersuperficie con singularidad aislada en el origen. Aplicando tal

concepto a una curva algebraica plana reducida  $X$ , se tiene que la curva polar  $\Gamma$  asociada a  $X$  provee información geométrica en sus exponentes de Puiseux.

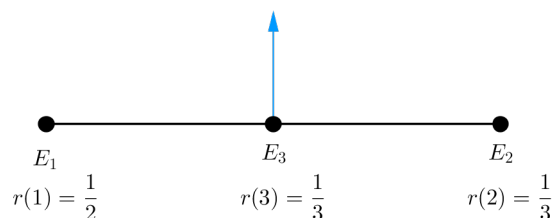
En 1987, Joseph Steenbrink y Steven Zucker demuestran que los exponentes de Puiseux de  $\Gamma$  se pueden obtener a través de las multiplicidades de los divisores excepcionales de la resolución mínima  $\pi$  de  $X$ , la imagen inversa de una forma lineal genérica  $L = 0$  bajo  $\pi$  y la gráfica dual  $V$  de la resolución mínima de  $X$ .

Los cocientes polares de  $f$  en los puntos de ruptura de  $V$ , dan pie a construir una filtración geométrica de la Fibra de Milnor llamada Filtración Polar. Dentro de dicha filtración se encuentra codificada la rapidez de anulamiento de ciertos ciclos evanescentes de homología de la fibra  $X_\epsilon$  conforme  $\epsilon \rightarrow 0$ .

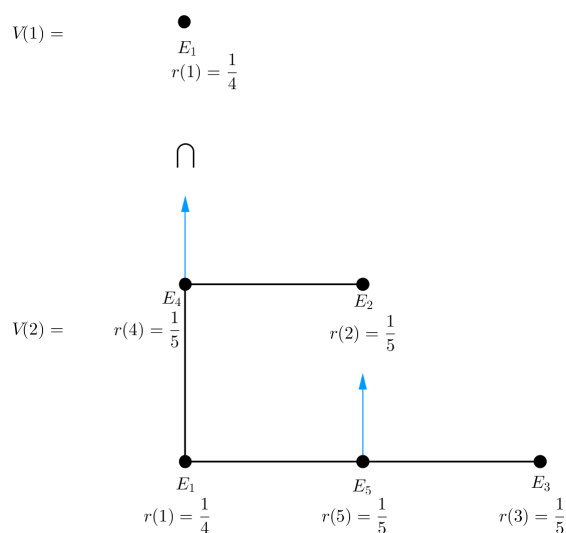
En los ejemplos mencionados durante el capítulo 4 se ilustra como, además de filtrar geoméricamente la Fibra de Milnor, también la gráfica dual  $V$  admite una filtración determinada por los cocientes polares  $r(i)$ ,  $i = 1, \dots, g$  definidos en dicho capítulo.

En el caso de la cúspide, sólo hay una pieza a diferencia de las otras dos curvas:

- La cúspide  $X = \{x^2 - y^3 = 0\}$ .

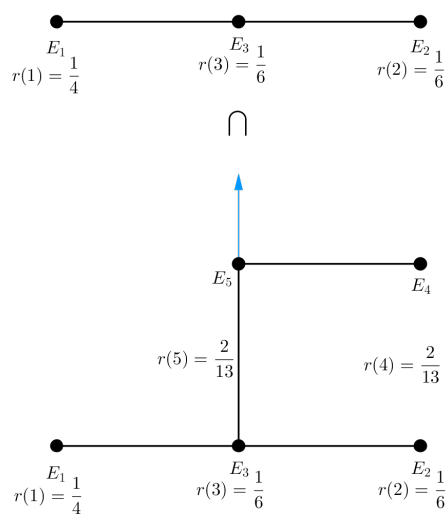


- La cúspide doble,  $X = \{(x^2 - y^3)(y^2 - x^3) = 0\}$ .



- Una curva con más de un exponente característico

$$X = \{(y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0\}.$$



En 1969, David Mumford y Pierre Deligne trabajaron con el concepto de la reducción semiestable de una curva en su trabajo “The irreducibility of the space of curves of given genus”.

A lo largo del capítulo 5 se desarrolla y justifica la construcción de la gráfica dual  $\tilde{V}$  asociada a la imagen inversa  $\tilde{E}$  de los divisores excepcionales vía la reduc-

ción semiestable de una curva algebraica plana reducida, así como el análisis del primer grupo de homología de la gráfica dual de  $\tilde{V}$ :

**Teorema.** *La gráfica dual del divisor excepcional de la reducción semiestable asociada a una curva plana irreducible y reducida es un árbol.*

Una pregunta que queda como trabajo a futuro es la siguiente,

*¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que la gráfica dual del divisor excepcional de la reducción semiestable asociada a una curva plana y reducida sea un árbol ?*

Uno de los objetivos principales de este trabajo es dar una conexión entre la filtración de Hodge introducida en el capítulo 1 vía formas racionales en el complemento de la cerradura proyectiva de la fibra de Milnor de una curva algebraica plana irreducible y reducida  $X = \{f = 0\}$  en el origen y la Filtración Polar de la Fibra de Milnor determinada por los cocientes polares obtenidos de la curva polar  $\Gamma$  asociada a  $X$ .

Por una parte, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema** [Steenbrink-Zucker, [15]] *Existe un isomorfismo natural de estructuras de Hodge mixtas de los grupos de cohomología relativa*

$$H^*(P_i, P_{i-1}) \xrightarrow{\cong} H^*(\tilde{C}_i, \Sigma_i). \quad (1)$$

*el cual transfiere la acción de la monodromía de  $H^*(P_i, P_{i-1})$  a la acción de la transformación cubriente  $\tilde{C}_i \rightarrow C_i$  en  $H^*(\tilde{C}_i, \Sigma_i)$ .* La notación usada en dicho resultado está detalladamente definido en el capítulo 4.

Dicho resultado considera una Estructura Mixta de Hodge asociada a los divisores excepcionales resultantes de la reducción semiestable de la singularidad de la curva, i.e., al límite cuando  $t \rightarrow 0$  de la fibra de Milnor, no se habla de ella en  $t \neq 0$ .

El resultado principal de este trabajo lo complementa en ese sentido y da la conexión que se deseaba obtener.

**Teorema.** *Sean  $f, h$  polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $\mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]$  tal que:*

- *Si  $t = 0$ , entonces  $X_0 = \{f = 0\}$  es una curva singular reducida con singularidad local irreducible con  $m$  exponentes de Puiseux.*

- Si  $t \neq 0$  entonces  $X_t = \{f - th = 0\}$  es una curva proyectiva lisa.

Entonces, para cada  $t \neq 0$  con  $|t| \ll 1$  existe  $(F_t, P_t)$  una estructura mixta de Hodge compatible con la estructura mixta de Hodge de los divisores excepcionales  $(F^\cdot, P)$ , i.e,  $(F_t, P_t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (F^\cdot, P)$

Dicha conexión termina de ilustrarse al aterrizar la filtración  $(F^\cdot, P)$  a nivel del anillo de polinomios.

**Corolario.**

Dado  $f : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  un polinomio de grado  $d$  de tal forma que la familia de curvas

$$X_t = \{z \in \mathbf{C}^2 \mid f(z) = t\} \tag{2}$$

son lisas si  $t \neq 0$  y tienen una singularidad aislada en  $(0, 0)$  si  $t = 0$ . Existe una filtración en el anillo de polinomios de grado  $2d - 3$ , compatible con la filtración  $(F^\cdot, P)$ .

Además de la conexión hecha entre ambas filtraciones quedan preguntas por resolver, entre ellas podemos formular las siguientes:

- ¿Cómo la filtración polar induce más estructura en la matriz de Riemann asociada al cup product?
- ¿Cuál sería un Teorema de Positividad de Riemann para este caso?

# Capítulo 1

## Estructura de Hodge de una hipersuperficie lisa proyectiva vía formas holomorfas en el complemento.

El objetivo de este capítulo es estudiar, como se hizo en [Carlson-Griffiths [\[2\]](#)], la estructura de Hodge de la cohomología primitiva de grado  $n$  de una hipersuperficie proyectiva lisa definida por un polinomio homogéneo en  $\mathbf{CP}^{n+1}$ . Antes de realizarlo introduciremos teoría básica de Complejos Filtrados y Teoría de Hodge.

### 1.1. Complejos Filtrados y la filtración de Hodge

En esta sección introduciremos los conceptos de complejos filtrados y la filtración ingenua de un complejo doble, el objetivo será analizar la filtración de Hodge de  $X$  de manera algebraica.

#### 1.1.1. Complejos filtrados

**Definición 1.1.1** *Dado un espacio vectorial complejo  $A$ , una filtración decreciente en  $A$  está dada por una familia de subespacios vectoriales  $\{F^p A\}$  tal que*

$$\dots \subset F^p A \subset F^{p-1} A \subset \dots \subset F^0 A = A, \quad \text{para } p \geq 0.$$

**Estructura de Hodge de una hipersuperficie lisa proyectiva vía formas holomorfas en el complemento.**

**14**

Si  $(A^*, d)$  es un complejo, una filtración decreciente en  $(A^*, d)$  es una filtración decreciente de subespacios  $\{F^p A^k\}$  para cada espacio vectorial  $A^k$  tal que  $d(F^p A^k) \subset F^p A^{k+1}$ , por lo que entonces tenemos una familia de complejos:

$$\{(F^p A^k, d)\}_p = \{\dots \xrightarrow{d} F^p A^k \xrightarrow{d} F^p A^{k+1} \xrightarrow{d} \dots\}_p$$

**Definición 1.1.2** (*Filtración ingenua*)

Sea  $(A^*, d)$  un complejo de espacios vectoriales y  $F^p A^* := A^{\geq p}$ , el complejo obtenido al considerar los términos de orden mayor o igual a  $p$ :

$$0 \longrightarrow A^p \longrightarrow A^{p+1} \longrightarrow A^{p+2} \longrightarrow \dots \quad (1.1)$$

**Definición 1.1.3** (*Filtración ingenua de un complejo doble*)

Sea  $(A^{r,s}, D_1, D_2)$  un complejo doble para grados positivos. Sea  $(A^*, D)$  el complejo asociado.

$$A^k = \bigoplus_{r+s=k} A^{r,s}, \quad D = D_1 + (-1)^p D_2$$

Como  $DA^{r,s} \subset A^{r+1,s} \oplus A^{r,s+1}$ . Entonces

$$F^p A^k = \bigoplus_{r+s=k, r \geq p} A^{r,s}$$

define una filtración decreciente en el complejo  $(A^*, D)$ , la filtración  $(F^p A^k)$  de  $(A, D)$  es la llamada filtración ingenua del complejo  $(A, D)$  asociada al bicomplejo  $(A^{r,s}, D_1, D_2)$ .

### 1.1.2. Filtración de Hodge

**Definición 1.1.4** Una estructura de Hodge de peso  $k$  es un par  $(H_{\mathbf{Z}}, \{H^{p,q}\}_{p+q=k})$  tal que:

1.  $H_{\mathbf{Z}}$  es un  $\mathbf{Z}$ -módulo
2.  $H^{p,q}$  son  $\mathbf{C}$ -espacios vectoriales tales que  $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$
3.  $H_{\mathbf{C}} := H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C} \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$

**Definición 1.1.5** Dada una estructura de Hodge de peso  $k$   $(H_{\mathbf{Z}}, \{H^{p,q}\})$ , definimos la filtración de Hodge de  $H_{\mathbf{C}}$  de nivel  $r$  como:

$$F^r H_{\mathbf{C}} := \bigoplus_{p \geq r} H^{p,q}.$$

**Teorema 1.1.6 (Hodge)** ([U7], Pag 205) Si  $X$  es una variedad algebraica proyectiva lisa, entonces  $H^k(X, \mathbf{Z})$  admite una estructura de Hodge de peso  $k$ ; i.e,

$$H^k(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X), \quad \text{donde } H^{p,q}(X) = \overline{H}^{q,p}(X), \quad p, q \geq 0,$$

y  $H^{p,q}$  es el conjunto de clases representadas por formas cerradas de tipo  $(p, q)$ .

### 1.1.3. La filtración ingenua de la cohomología de Hodge

Veamos que la cohomología de  $X$  puede ser estudiada de una manera algebraica; que, utilizando la filtración ingenua podemos obtener su filtración de Hodge, la cual usualmente se introduce vía análisis armónico.

**Teorema 1.1.7** [U7] Si  $X$  es una variedad algebraica proyectiva lisa, entonces

$$H^{p,q}(X) \cong \check{H}^q(X, \Omega_X^p).$$

donde  $\check{H}^q(X, \Omega_X^p)$  es la cohomología de Čech.

**Lema 1.1.8** (Deligne)[3] Si  $X$  es una variedad Kähler compacta, entonces la sucesión espectral asociada a la filtración de Hodge degenera en el primer paso.

Sea  $X$  una hipersuperficie proyectiva lisa, denotemos  $\mathbf{C}_X$  la gavilla constante sobre  $X$ .

Consideremos la resolución del operador de derivación antiholomorfo  $\bar{\partial}$  de las formas diferenciales en  $X$  de tipo  $(p, q)$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{0,n} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{n,n} \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & \bar{\partial} \uparrow & & & & \bar{\partial} \uparrow \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \bar{\partial} \uparrow & & & & \bar{\partial} \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{n,1} \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & \bar{\partial} \uparrow & & & & \bar{\partial} \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{n,0} \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$



donde los grupos de cohomología en los complejos

$$0 \rightarrow \Omega_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \Omega_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \rightarrow \Omega_X^{p,n+1} \rightarrow 0,$$

son las formas diferenciales de tipo  $(p, q)$ .

Restringiendo a aquellas secciones con coeficientes holomorfos de grado  $p$ , i.e;  $\Omega_X^p$  y el operador diferencial exterior holomorfo  $\delta$  obtenemos el complejo holomorfo de DeRham de  $X$ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial} \Omega_X^1 \xrightarrow{\partial} \Omega_X^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^n \xrightarrow{\partial} 0. \quad (1.2)$$

Más aún, tenemos la inclusión de la gavilla constante  $i : \mathbf{C}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ , de funciones localmente constantes en las funciones holomorfas. Vía  $i$  el complejo holomorfo de eRham es una resolución de  $\mathbf{C}_X$  debido a que cada columna del complejo doble  $(\Omega_X^{p,q}, (-1)^p \bar{\partial})$  es exacto en grado positivo y da una resolución de  $\Omega_X^p$ . Luego como el complejo de DeRham usual es quasiisomorfo al complejo de DeRham holomorfo y el primero también es exacto en grado positivo entonces la cohomología está dada por la gavilla constante en grado 0; y así

$$H^k(X, \mathbf{C}) = \mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*).$$

Como también tenemos el bicomplejo de Čech-DeRham, definido en la siguiente sección, asociado al complejo (1.2), el cual también degenera, tenemos que sus grupos de cohomología vertical

$$\check{H}^q(X, \Omega_X^p)$$

son isomorfos a  $H^{p,q}(X)$ .

Aplicando la filtración ingenua al complejo holomorfo de DeRham

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^n \longrightarrow 0, \quad (1.3)$$

y tomando el bicomplejo con la resolución del operador de derivación antiholomorfa  $\bar{\partial}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{0,n} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{n,n} \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & \bar{\partial} \uparrow & & & & \bar{\partial} \uparrow \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \bar{\partial} \uparrow & & & & \bar{\partial} \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{n,1} \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & \bar{\partial} \uparrow & & & & \bar{\partial} \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X^{n,0} \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Si  $d$  es el operador de derivación en el bicomplejo dado por:

$$d : \bigoplus_{r+s=k, r \geq p} \Omega_X^{r,s} \longrightarrow \bigoplus_{r+s=k+1, r \geq p} \Omega_X^{r,s},$$

$$d = \partial + (-1)^r \bar{\partial}. \tag{1.4}$$

Obtenemos entonces una filtración en la hipercohomología del bicomplejo la cual nos da la filtración de Hodge de la cohomología de  $X$ :

$$F^r \mathbf{H}_{DR}^k(X) = F^r H^k(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p \geq r, p+q=k} H^{p,q}. \tag{1.5}$$

**Corolario 1.1.9** *Sea  $X$  una hipersuperficie lisa en  $\mathbf{CP}^{n+1}$ , tenemos que la sucesión espectral asociada a la filtración de Hodge que degenera en el primer paso.*

Durante las siguientes secciones de este capítulo se construirá una estructura de Hodge para  $n$ -ésimo grupo de cohomología de una hipersuperficie lisa en  $\mathbf{CP}^{n+1}$  de una manera algebraica.

## 1.2. Descripción Algebraica del $n$ -ésimo grupo de cohomología de una hipersuperficie lisa en $\mathbf{CP}^{n+1}$ .

Consideremos  $X$  una hipersuperficie lisa en  $\mathbf{CP}^{n+1}$  definida por  $f$  un polinomio homogéneo de grado  $d$  en  $\mathbf{C}[z_0, \dots, z_{n+1}]$ , sea  $U = \mathbf{CP}^{n+1} \setminus X$ .

Por el lema de Poincaré tenemos la resolución de la gavilla constante

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}_U \longrightarrow \Omega_U^i$$

por el complejo de gavillas de DeRham y por tanto  $H^*(U, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^*(\Omega_U^i)$ , la hipercohomología del complejo de gavillas.

Como  $X$  es una hipersuperficie la inclusión  $j : U \hookrightarrow \mathbf{CP}^{n+1}$ , es un morfismo de Stein; i.e.,  $j^{-1}(V)$  es Stein para cualquier abierto Stein  $V \subset \mathbf{CP}^{n+1}$ , lo cual implica que  $\Omega^*(U)$  es una resolución  $j_*$ -acíclica; i.e.,  $R^q j_* \mathcal{F} = 0$ , para toda  $q > 0$  y toda gavilla coherente  $\mathcal{F}$ ; por tanto

$$H^*(U, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^*(j_* \Omega_U^i).$$

Más precisamente (ver sección 1.3 y 1.4), veamos que para calcular la cohomología del complejo de gavillas de formas diferenciales con polos arbitrarios en  $X$ ,  $\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^i(*X)$ , es suficiente con estudiar formas meromorfas con polos a lo largo de  $X$  de a lo más orden  $n + 1$ .

### 1.3. Reducción del orden del polo en formas diferenciales algebraicas definidas en el complemento de $X$

Introduzcamos el complejo Čech-DeRham.

Sea  $F_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$ , definamos  $U_j = \{z \in \mathbf{CP}^{n+1} \mid F_j(z) \neq 0\}$ ,

$$\mathcal{U} = \{U_j\}, \quad W_j = U_j \cap (\mathbf{CP}^{n+1} - X) \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \{W_j\}.$$

Notemos que debido a que  $X$  es no singular,  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $\mathbf{CP}^{n+1}$ . Sea

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) = \prod_{j_0 < \dots < j_q} \Omega_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q}}^p(*X),$$

donde  $\Omega_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q}}^p(*X)$  denotan las  $p$ -formas diferenciales holomorfas en  $U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q}$  con polo en  $X$  de orden finito.

Los complejos de Čech y DeRham están relacionados en el siguiente bicomplejo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^0(*X)) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^1(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^0(*X)) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^1(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^0(*X)) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^1(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots
 \end{array}$$

que resultan de los operadores:

$$\begin{aligned}
 \delta : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) &\longrightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) \\
 (\delta\omega)_{(j_0, \dots, j_{q+1})} &= \sum (-1)^i \omega_{j_0, \dots, \widehat{j}_i, \dots, j_q} |_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{q+1}}},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 d : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) &\longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^{p+1}(*X)) \\
 (d\omega)_{(j_0, \dots, j_q)} &= d(\omega_{j_0, \dots, j_q})
 \end{aligned}$$

son los operadores de Čech y DeRham, respectivamente.

El diferencial total se define como

$$\begin{aligned}
 D : \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) &\longrightarrow \bigoplus_{p+q=m+1} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) \\
 D &= d + (-1)^p \delta.
 \end{aligned}$$

El operador D define un complejo cuya cohomología la llamamos la hipercohomología de  $\mathbf{CP}^{n+1} - X$  y se denota por  $\mathbf{H}^*(\mathbf{CP}^{n+1} - X)$ .

**Teorema 1.3.1 (Serre)** ([U2], Pag. 239) Sea  $\mathcal{F}$  es una gavilla coherente sobre una variedad afín  $V$  con cubierta abierta finita por variedades afines  $\mathcal{U} = \{U_i\}$ , entonces los grupos de cohomología de Čech son cero en niveles positivos:

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0.$$

**Proposición 1.3.2** Sea  $X$  una hipersuperficie proyectiva lisa definida por un polinomio  $Q$  de grado  $d$ . Entonces  $\mathbf{CP}^{n+1} - X$  es una variedad afín.

*Demostración:*

Tomemos el conjunto de monomios en  $n + 2$  variables complejas de grado  $d$  y hagamos la siguientes asignación: Dado un multiíndice  $I = (i_0, \dots, i_{n+1})$ , con  $\sum_{j=0}^{n+1} i_j = d$ , entonces sea  $w_I = z_0^{i_0} \dots z_{n+1}^{i_{n+1}}$ . Por lo que:

$$\left[ z_0^d, z_0^{d-1} z_1, \dots, \left( z_0^{i_0} \dots z_{n+1}^{i_{n+1}} \right), \dots, z_{n+1}^d \right] \rightarrow \left[ w_{(d,0,\dots,0)} : w_{(d-1,1,\dots,0)} : \dots : w_I : \dots : w_{(0,\dots,d)} \right].$$

Por lo cual  $\{f = 0\} \rightarrow \{\sum a_I w_I = 0\}$  es un hiperplano proyectivo, lo anterior implica que  $\mathbf{CP}^{n+1} - X \rightarrow \mathbf{CP}^N - \{\sum a_I w_I = 0\} \cong \mathbf{C}^N$ , donde  $N$  es la cantidad de monomios de grado  $d$  en  $n + 2$  variables.

□

Análogamente los abiertos  $U_j$  y  $W_j$  son abiertos afines, de donde podemos concluir como consecuencia del teorema de Serre que

$$\check{H}^q(\mathcal{W}, \Omega^p) = 0 \quad \forall q > 0. \tag{1.6}$$

Debido a que las  $p$ -formas holomorfas en el complemento de  $X$ , se pueden estudiar con  $p$ -formas racionales globales con polo de orden arbitrario en  $X$ , entonces:

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) = 0 \quad \forall q > 0. \tag{1.7}$$

Por tanto si en la sucesión espectral del bicomplejo hacemos primero cohomología de Čech obtenemos el complejo algebraico de DeRham de  $\mathbf{CP}^{n+1} - X$ :

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{CP}^{n+1}, \Omega^0(*X)) \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow H^0(\mathbf{CP}^{n+1}, \Omega^{n+1}(*X)) \rightarrow 0.$$

Demostrando así el siguiente resultado:

**Proposición 1.3.3** *La hipercohomología de  $\mathbf{CP}^{n+1} - X$  calcula la cohomología de DeRham algebraica del complemento de  $X$ :*

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{CP}^{n+1} - X) = H_{DR}^*(\mathbf{CP}^{n+1} - X).$$

**Teorema 1.3.4** ([6], Pag. 351) *Para una variedad algebraica compleja afín lisa, la cohomología singular es la cohomología de DeRham algebraica.*

Por el teorema (1.3.4), podemos estudiar la cohomología singular del complemento de  $X$  con formas racionales globales que tengan polo de orden arbitrario en  $X$ .

**Teorema 1.3.5** ([2]) *Sea  $X$  una hipersuperficie proyectiva y suave en  $\mathbf{CP}^{n+1}$  definida por el polinomio homogéneo  $\{f = 0\}$ , entonces  $H^{n+1}(\mathbf{CP}^{n+1} - X, \mathbf{C})$  se puede representar con formas algebraicas racionales en  $\mathbf{CP}^{n+1}$  con polos de orden a lo más  $(n + 1)$  en  $X$ .*

Denotemos como  $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(lX))$  aquellos elementos de  $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X))$  cuyas componentes tienen polo de orden  $l$  en  $X$  y definamos el siguiente operador:

$$H_l : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(lX)) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^{p-1}((l-1)X))$$

$$(H_l(\omega))_{(j_0, \dots, j_q)} = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{f}{F_{j_0}} K_{j_0} \omega_{j_0, \dots, j_q},$$

donde  $K_{j_0} = i \left( \frac{\partial}{\partial z_{j_0}} \right)$  es la contracción con respecto al campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial z_{j_0}}$ .

A partir de aquí, omitiremos los subíndices de  $H_l$ , tomando en cuenta que se aplicará el operador correspondiente al orden del polo de la forma racional.

**Lema 1.3.6** *Para  $l \geq 2$ ,  $H$  satisface  $dH + Hd \equiv 1$ , módulo el grupo  $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p((l-1)X))$ , donde  $l > 1$ .*

*Demostración:* Sea  $\alpha \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(lX))$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $(\alpha_q^p)_{j_0, \dots, j_q} = \frac{g_I}{f^l} dz_I$ . Para el caso donde  $j_0 \notin I$ , tenemos que  $H_l(\alpha_q^p) = 0$  pues se hace una contracción con respecto a  $\frac{\partial}{\partial z_{j_0}}$ , luego:

$$(\alpha_q^p)_{j_0, \dots, j_q} = \left( \frac{f^l dg_I - l f^{l-1} g_I df}{f^{2l}} \right) dz_I = \frac{dg_I dz_I}{f^l} - \frac{lg_I df dz_I}{f^{l+1}}.$$

Aplicando ahora  $H$  a la fórmula anterior obtenemos

$$H(d\alpha_q^p) = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{g_{j_0} f}{F_{j_0} f^l} dz_I - \frac{1}{1-l-1} \cdot \frac{lg_I f F_{j_0}}{F_{j_0} f^{l+1}} dz_I \equiv \alpha_q^p$$

$$\Rightarrow H(d\alpha_q^p) + dH(\alpha_q^p) \equiv \alpha_q^p.$$

Para el caso cuando  $j_0 \in I$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 H(\alpha_q^p) &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{fg_I}{F_{j_0}} i \left( \frac{\partial}{\partial z_{j_0}} \right) (dz_I) \\
 dH(\alpha_q^p) &= d \left( \frac{1}{1-l} \cdot \frac{g_I}{F_{j_0} f^{l-1}} dz_{I-1} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{1-l} \right) \frac{F_{j_0} f^{l-1} dg_I - g_I d(F_{j_0} f^{l-1})}{F_{j_0}^2 f^{2l}} dz_{I-1} \\
 &\equiv \left( \frac{dg_I}{(1-l) F_{j_0} f^{l-1}} + \frac{g_I dQ}{f^{l+1}} \right) dz_{I-1} \\
 &\equiv \frac{g_I df}{f^{l+1}} dz_{I-1}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 d\alpha_q^p &= \frac{dg_I}{f^l} dz_I - \frac{lg_I df}{f^{l+1}} \\
 H(d\alpha_q^p) &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{f}{F_{j_0} f^l} K_{j_0} (dg_I dz_I) - \left( \frac{1}{1-(l+1)} \right) \frac{lg_I f}{f^{l+1} F_{j_0}} k_{j_0} (df dz_I) \\
 &\equiv \frac{g_I}{f^l F_{j_0}} (F_{j_0} dz_I - df dz_{I-1}) \\
 &= \alpha_q^p - dH(\alpha_q^p).
 \end{aligned}$$

□

### 1.3.1. El bicomplejo de Griffiths-Carlson

**Lema 1.3.7** *Sea  $\alpha$  una cocadena en el complejo Čech-DeRham cuyo orden de polo  $l_J \geq 2$  en cada coordenada  $J$ . Entonces*

$$\alpha \equiv DH\alpha + HD\alpha$$

*módulo cocadenas cuyo orden del polo sea  $l_J - 1$ . En particular, si  $\alpha$  es un D-cociclo, tenemos que*

$$\tilde{\alpha} = (I - DH)\alpha,$$

*es cohomóloga a  $\alpha$  y tiene orden del polo  $l_J - 1$ .*

### 1.3 Reducción del orden del polo en formas diferenciales algebraicas definidas en el complemento de X 23

---

*Demostración:* Sea  $\alpha_q^p$ , la componente de  $\alpha$  en  $C^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X))$ , luego

$$\begin{aligned}\alpha - DH\alpha &= \sum_{p,q} (\alpha_q^p - dH\alpha_q^p - (-1)^{p-1} \delta H\alpha_q^p) \\ &\equiv Hd\alpha_q^p + (-1)^p \delta\alpha_q^p.\end{aligned}$$

Como  $H$  y  $\delta$  son independientes entonces conmutan, de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha - DH\alpha &\equiv \sum_{p,q} (\alpha_q^p - dH\alpha_q^p - (-1)^{p-1} H\delta\alpha_q^p) \\ &\equiv HD\alpha.\end{aligned}$$

□

*Demostración:*(Teorema 1.3.5)

Sea  $\Omega_A = \frac{A\Omega}{f^m}$ , la cual representa una clase en  $H^{n+1}(\mathbf{CP}^{n+1} - X, \mathbf{C})$ , con  $m \geq n+1$  y  $A \in \mathbf{C}[z_0, \dots, z_{n+1}]$ .

La idea para la demostración es reducir el orden del polo de  $\Omega_A$  utilizando la igualdad demostrada en el lema 1.3.7. El primer paso es encajar  $\Omega_A$  en el complejo doble de Čech-DeRham, pues es una forma diferencial global cerrada, entonces  $\Omega_A \in H^0(\mathbf{CP}^{n+1}, \Omega^{n+1}(*X))$ :  $\Omega_A \sim \left(\frac{A\Omega}{f^m}\right)_i$ , donde  $i$  es la coordenada asociada al abierto  $U_i$ .



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_A = \left( \frac{A\Omega}{f^m} \right)_i.
 \end{array}$$

Luego  $(I - DH)^{m-1} \left( \frac{A\Omega}{f^m} \right)_i$  será una forma D-cohomóloga a  $\Omega_A$  con polo simple:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \omega_{n+1} & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & \omega_n & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \omega_0.
 \end{array}$$

$\left[\left(\frac{A\Omega}{f^m}\right)_j\right] = [\sum_i \omega_i]$  donde  $\omega_i \in \mathcal{C}^i(\mathcal{U}, \Omega^{n+1-i}(1X))$ , obteniendo así un D-cociclo con un polo simple en X.

Tenemos que  $\sum \omega_i$  la cual denotaremos como  $\sum_{i \leq n+1} \omega_i^{(n+1)}$ , es un D-cociclo por lo que  $\omega_{n+1}$  es  $\delta$ -cerrada y, por el Teorema 1.3.1  $\omega_{n+1} = \delta\gamma_{n+1}$ , para algún  $\gamma_{n+1} \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \Omega^1(*X))$ . Como  $\omega_{n+1}$  tiene un polo simple en X, entonces también  $\gamma_{n+1}$  tiene un polo simple. Luego

$$\omega^{(n)} = \sum_{i \leq n+1} \omega_i^{(n+1)} - (-1)^n D(\gamma_{n+1}),$$

la cual denotaremos como  $\sum_{i \leq n} \omega^{(n)}$ , es D-cohomóloga a  $\sum \omega_i$  y tiene un polo doble en X y su componente  $(n+1, 0)$  es 0.

Supongamos que  $\sum_{i \leq j+1} \omega_i^{(j+1)}$  es D-cohomóloga a  $\sum \omega_i$ , tiene un polo de orden  $n-j$  en X y su componente  $(k, n-k)$  es 0 para toda  $k > j+1$ , además por ser D-cociclo existe  $\gamma_{j+1} \in \mathcal{C}^j(\mathcal{U}, \Omega^{n+1-j}(*X))$  tal que  $\delta\gamma_{j+1} = \omega_{j+1}^{(j+1)}$ .

Por tanto,

$$\omega^{(j)} = \sum_{i \leq j+1} \omega_i^{(j+1)} - (-1)^j D(\gamma_{j+1}) \tag{1.8}$$

es D-cohomóloga a  $\sum \omega_i$ , tiene un polo de orden  $n+1-j$  y su componente  $(k, n-k) = 0 \quad \forall k > j$

Al finalizar el proceso llegamos a que  $\omega^{(0)}$  tiene un polo en X de orden  $n+1$ , es D-cohomóloga a  $\sum \omega_i$  y su única componente no cero es  $(1, n+1)$ , obteniendo así una forma racional en el complejo doble con polo de orden  $n+1$  la cual es D-cohomóloga a  $\Omega_A$ .

□

## 1.4. Filtración de la cohomología de X por el orden del polo

En esta sección introduciremos el complejo logarítmico en la hipersuperficie X. El objetivo es analizar el mapeo residuo:

$$res : \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^{n+1}((n+1)X) \longrightarrow H^n(X, \mathbf{C}),$$

el cual nos dará la relación entre el orden del polo en X de las formas diferenciales racionales globales y nivel de la filtración en la estructura de Hodge de la cohomología de X.

### 1.4.1. Complejo logarítmico

Dada la hipersuperficie lisa  $X$  de  $\mathbf{CP}^{n+1}$ , definamos el complejo holomorfo con singularidades logarítmicas sobre  $X$ .

Sea  $\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^k(\log X)$  la subgavilla de la gavilla de formas meromorfas  $\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^k(*X)$  en  $\mathbf{CP}^{n+1}$ , holomorfas en  $U = \mathbf{CP}^{n+1} - X$ , determinada por:

$\alpha \in \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^k(\log X)$  si y sólo si, tanto  $\alpha$  como  $d\alpha$  admiten un polo simple en  $X$ .

Observación 1.4.1 Si  $\alpha \in \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^k(\log X)$  entonces  $d\alpha$  es  $d$ -cerrada.

Lo cual nos permite obtener el siguiente subcomplejo:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^1(\log X) \xrightarrow{d} \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^2(\log X) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^n(\log X) \rightarrow 0.$$

Si tomamos la resolución con  $\delta$ , el operador de Čech y la hipercohomología del bicomplejo obtendremos  $\mathbf{H}^*(\mathbf{CP}^{n+1}, \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^*(\log X))$ .

**Teorema 1.4.2** ([LZ], Pag. 208) Sea  $U = \mathbf{CP}^{n+1} - X$ , con  $X$  hipersuperficie lisa, entonces:

$$H^k(U, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^k(\mathbf{CP}^{n+1}, \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^*(\log X)).$$

### 1.4.2. Mapeo Residuo

Consideremos  $\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^{n+1}$  y fijemos la sección

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i z_i dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_{n+1}. \quad (1.9)$$

Luego, la expresión

$$\Omega_A = \frac{A\Omega}{f^{a+1}} \quad \text{con} \quad \deg(A) + n + 2 = (a + 1) \deg(f),$$

define una  $(n+1)$ -forma racional con polo en  $X$  de orden  $a + 1$ .

**Definición 1.4.3** El polinomio  $A$  del numerador se llama adjunta de nivel  $a$  y  $\Omega_A$  se dice que tiene nivel de adjunción  $a$ .

Para cada clase de cohomología  $(k-1)$ -dimensional  $\alpha$  en el complemento de  $X$ , queremos definir una clase de cohomología  $k$ -dimensional  $Res(\alpha)$  en  $X$ :

$$res_{Top} : H^k(\mathbf{CP}^{n+1} - X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathbf{Z}).$$

Para el cual tenemos también un operador:

$$\begin{aligned} \tau_k : H_{k-1}(X, \mathbf{Z}) &\longrightarrow H_k(\mathbf{CP}^{n+1} - X, \mathbf{Z}) \\ \gamma &\longrightarrow \tau_k(\gamma). \end{aligned}$$

Donde  $\tau_k(\gamma)$  es el  $k$ -ciclo en  $\mathbf{CP}^{n+1} - X$  que se puede obtener construyendo discos normales en  $k-1$ -cadenas en  $X$  para después tomar su frontera. El operador adjunto a  $\tau_k$ , salvo multiplicación por  $2\pi i$ , es el residuo topológico.

Por tanto, si una clase de cohomología de  $\mathbf{CP}^{n+1} - X$  está representada por una forma diferencial  $\alpha$ , entonces  $res_{Top}(\alpha)$  está definido tal que

$$\int_{\gamma} res_{Top}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_k(\gamma)} \alpha.$$

**Proposición 1.4.4 (Griffiths-Carlson, [2])** *El mapeo  $\tau$  es suprayectivo y es isomorfismo si  $n+1$  es par. Para el caso impar el kernel está formado por clases de homología de  $X$  que son múltiplos enteros de la clase del homología de una sección lineal general  $\mathbf{CP}^{\frac{n}{2}+1} \cdot X$*

**Corolario 1.4.5** 1. Si  $n+1$  es par tenemos que

$$H_n(X, \mathbf{C}) \xrightarrow[\cong]{\tau_{n+1}} H_{n+1}(\mathbf{CP}^{n+1} - X, \mathbf{C}).$$

2. Si  $n+1$  es impar la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{CP}^{\frac{n}{2}+1} \cdot X] \longrightarrow H_n(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\tau_{n+1}} H_{n+1}(\mathbf{CP}^{n+1} - X, \mathbf{C}) \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Para una  $k$ -forma diferencial logarítmica en el complemento de  $X$  que está dada por

$$\omega = \beta + \alpha \wedge \frac{df}{f}, \quad (1.11)$$

donde  $\beta \in \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^k$ ,  $\alpha \in \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^{k-1}$ ; se define el residuo como

$$\begin{aligned} \text{res} : \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^k(\log X) &\longrightarrow \Omega_X^{k-1} \\ \omega &\longrightarrow \text{res}(\omega) = \alpha|_X. \end{aligned}$$

Observación 1.4.6 *El mapeo residuo también se puede definir en el bicomplejo con singularidades logarítmicas en  $X$  de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \text{res} : \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(\log X)) &\longrightarrow \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap X, \Omega_X^{p-1}) \\ \left( \beta_I + \alpha_I \wedge \frac{df}{f} \right)_{|I|=k} &\longrightarrow (\alpha_I|_X)_{|I|=k}. \end{aligned}$$

## 1.5. Filtración de Hodge de la $n$ -cohomología de $X$

Haciendo uso de lo definido en la sección anterior, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.5.1 (Griffiths-Carlson, [2])** *El mapeo residuo satisface las siguientes propiedades:*

1.  $\text{res}(\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^{n+1}((n+1)X)) = H^n(X, \mathbf{C})_0$ , donde la parte derecha es el  $n$ -ésimo grupo de cohomología primitiva de  $X$ .
2.  $\text{res}(\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}^{n+1}((a+1)X)) = F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C})_0$  donde la parte derecha se refiere a la filtración de Hodge de la cohomología primitiva de  $X$  y  $a \leq n$ .
3. Si  $J_F = (F_0, \dots, F_{n+1})$  es el ideal Jacobiano, generado por las derivadas parciales, entonces el residuo de la forma  $\Omega_A$  de nivel de adjunción  $a$  tiene nivel de Hodge  $n - (a - 1)$ , i.e.,  $\text{res}(\Omega_A) \in F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C})_0$  si y sólo si,  $A \in J_F$ .

*Demostración:* La primera parte se obtiene del corolario 1.4.5. Para (2) primero se demuestra la contención hacia la derecha ( $\subseteq$ ). Consideremos el bicomplejo Čech-DeRham pero utilizando la filtración ingenua en las formas diferenciales de  $U = \mathbf{CP}^{n+1} - X: 0 \longrightarrow \Omega_U^{a+1} \longrightarrow \Omega_U^{a+2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_U^{n+1} \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^{a+1}(*X)) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^{a+2}(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{a+1}(*X)) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{a+2}(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow & & \\
 \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{a+1}(*X)) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{a+2}(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^p(*X)) & \xrightarrow{d} & \dots
 \end{array}$$

Entonces dada una  $(n+1)$ -forma diferencial en el complemento cuyo orden del polo es  $a+1$ :  $\omega = \frac{A\Omega}{f^{a+1}}$ , esta se encaja en el bicomplejo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega_A \sim \left( \frac{A\Omega}{f^{a+1}} \right)_i & \in & H^0(\mathbf{CP}^{n+1}, \Omega^{n+1}(*X)) & . \\
 \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_A = \left( \frac{A\Omega}{f^{a+1}} \right)_j
 \end{array}$$

Luego  $(I - DH)^a \left( \frac{A\Omega}{f^m} \right)_j$  será una forma D-cohomóloga con polo simple y como  $\Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}(\log(X)) \subset \Omega_{\mathbf{CP}^{n+1}}(*X)$  son cuasi-isomorfos, también será cohomóloga a una con polo simple logarítmico:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \omega_a & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & \omega_{a-1} & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \omega_0. \\
 & & Res & & \downarrow & & \\
 \widetilde{\omega}_a & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & \widetilde{\omega}_{a-1} & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & & \delta \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \widetilde{\omega}_0.
 \end{array}$$

Donde

$$\left[ \operatorname{res} \left( \frac{A\Omega}{f^{a+1}} \right)_j \right] = \left[ \sum_{0 \leq i \leq a} \tilde{\omega}_i \right]; \quad \tilde{\omega}_i \in \mathcal{C}^i(\mathcal{U} \cap X, \Omega^{n+1-i}|_X).$$

Luego análogamente como en (1.8) podemos encontrar un elemento  $\gamma$  D-cohomólogo a  $\sum_{i \leq a} \tilde{\omega}_i$  cuyo único término distinto de cero sea de tipo  $(0, n)$ , pero ya que  $D\gamma = 0$ , entonces  $\gamma$  es  $\delta$ -cerrada, luego:

$$\gamma \in H^0(\mathcal{U} \cap X, \Omega_X^n) \cong H^{n,0}(X) \subset F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C}).$$

Utilizando la propiedad 1, la imagen del mapeo residuo está contenida en la cohomología primitiva de  $X$ , cuya filtración de Hodge cumple que:

$$F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C})_0 \subset F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C}).$$

Por lo tanto  $\gamma$  se puede ver como elemento de  $F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C})_0$ .

Ahora, para demostrar la contención hacia la izquierda ( $\supseteq$ ), si tenemos  $\gamma \in F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C})_0$ ; debido a que:

$$\begin{aligned} F^{n-a}H^n(X, \mathbf{C})_0 &= \bigoplus_{p+q=n, p \geq n-a} H_0^{p,q} \\ &\subset \bigoplus_{p+q=n, p \geq n-a} H^{p,q} \\ &\cong \bigoplus_{p+q=n, p \geq n-a} H^q(\mathcal{U} \cap X, \Omega^p) \\ &= F^{n-a}\mathbf{H}^n(X), \end{aligned}$$

podemos considerar que  $\gamma = \sum_{p \geq n-a} \gamma^{p,q}$  donde  $\gamma^{p,q} \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap X, \Omega^p)$  y  $\gamma$  es D-cerrada.

Dado que

$$\tilde{\gamma} = \sum_{p \geq n-a} \gamma^{p,q} \wedge \frac{df}{f},$$

es D-cerrada, con polo simple en  $X$  y

$$\operatorname{res}(\tilde{\gamma}) = \gamma,$$



entonces análogamente a (1.8), existe una  $(n + 1)$ -forma global, D-cohomóloga a  $\tilde{\gamma}$ , cuyo único elemento no cero sea de tipo  $(0, n + 1)$ , y el orden del polo en  $X$  es  $a + 1$ . Terminando así la demostración de (2).

Para la última parte de la proposición se utilizan los cálculos hechos de una forma exhaustiva en ([2], p.10), en los cuales se obtiene lo siguiente si se toma la congruencia  $f \equiv 0$ :

1.  $\Omega_A \equiv (-1)^n \left( \frac{A\Omega_i}{F_i f^a} \wedge \frac{df}{f} \right)$ , donde  $F_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}$
2. Si  $I = (i_0, \dots, i_q)$ ,  $K_J = K_{j_q} \cdots K_{j_0}$ ,  $\Omega_J = K_J \Omega$  y además,  $F_J = F_{j_q} \cdots F_{j_0}$  entonces

$$H_{r+1} \left( \frac{A\Omega_I}{F_I f^r} \wedge \frac{df}{f} \right) \equiv \frac{(-1)^{n-q+1}}{r} \left( \frac{A\Omega_I}{F_I f^r} \right)$$

3. Con la misma notación,

$$\delta \left( \frac{A\Omega_I}{F_I f^r} \right) \equiv (-1)^n \left( \frac{A\Omega_I}{F_I f^r} \wedge \frac{df}{f} \right)$$

donde  $J = (j_0, \dots, j_{q+1})$

De forma recursiva se obtiene una expresión para el término  $(n - a + 1, a)$  del cociclo  $\tilde{\Omega}_A$  cohomólogo a  $\Omega_A$ :

$$\left( \tilde{\Omega}_A \right)_a^{n-a+1} = \frac{(-1)^{n+a(a+1)/2}}{a!} \left( \frac{A\Omega_J}{F_J} \wedge \frac{df}{f} \right)_{|J|=a}. \quad (1.12)$$

Al sustituir (1.12) en el residuo algebraico nos da el resultado deseado.

□

## 1.6. Ejemplos.

### 1.6.1. Curvas lisas en $\mathbb{CP}^2$ .

El objetivo de esta sección es enunciar un caso particular de los resultados anteriores para  $\mathbb{CP}^2$ , y  $X = \{f = 0\}$  una curva proyectiva lisa definida por un polinomio  $f$  de grado  $d$ .

Por el corolario (1.4.5) tenemos que  $\tau_2$  es isomorfismo, de donde

$$H_1(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H_2(\mathbb{CP}^2 - X, \mathbb{C}),$$

y por tanto, su operador adjunto también es isomorfismo

$$res : \Omega_{\mathbf{CP}^2}^2(2X) \xrightarrow{\cong} H^1(X, \mathbf{C}).$$

La filtración de Hodge de una curva lisa en  $\mathbf{CP}^2$  está dada por:

$$0 \subset F^1 H^1(X, \mathbf{C}) = res(\Omega_{\mathbf{CP}^2}^2(1X)) \subset H^1(X, \mathbf{C}) = res(\Omega_{\mathbf{CP}^2}^2(2X));$$

aunque se explicará con más detalle en la siguiente subsección, cabe notar que podemos obtener información de la filtración anterior del anillo de polinomios en tres variables, existe una inclusión natural de un subespacio vectorial de dicho anillo dada por la multiplicación por  $f$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{d-3} &\hookrightarrow \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \\ g &\longrightarrow g \cdot f, \end{aligned}$$

más aún, por el teorema (1.5.1)(3) si  $\Omega_A = \frac{A\Omega}{f^2}$  con  $A \in J_f \cap \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}$ , tenemos que,

$$res(\Omega_A) \in F^1 H^1(X, \mathbf{C});$$

induciendo, de este modo, una filtración también en el subespacio vectorial de polinomios de grado  $2d-3$ , dada por el ideal Jacobiano de  $f$  que refleja la filtración de Hodge de la curva:

$$0 \subset J_f \cap \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \subset \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}.$$

### 1.6.2. Familias de curvas proyectivas lisas en $\mathbf{CP}^2$ .

Supongamos que para  $t \in \Delta \subset \mathbf{C}$  en el disco unitario, tenemos una curva proyectiva  $C_t \subset \mathbf{CP}^2$  definida por un polinomio homogéneo de grado  $d$ ,  $\{F_t = 0\}$  la cual es lisa si  $t \neq 0$  y varía con respecto a  $t$  de manera holomorfa.

Por el teorema 1.3.5, para cada  $t$ , las formas algebraicas racionales en  $\mathbf{CP}^2$  con polos de a lo más de orden 2 en  $X_t$  representan  $H^2(\mathbf{CP}^2 - X_t)$ , i.e;

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} &\longrightarrow H^2(\mathbf{CP}^2 - X_t, \mathbf{C}) \\ A &\longrightarrow \frac{A\Omega}{F_t^2}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

es suprayectiva.

Entonces, tenemos estructuras de Hodge para  $H^1(X_t, \mathbf{C})$  dadas por la imagen de la función residuo aplicadas a formas diferenciales racionales determinadas por polinomios en  $\mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}$ :

$$0 \subset F^1 H^1(X_t, \mathbf{C}) = \text{res}(\Omega_{\mathbf{CP}^2}^2(1(X_t))) \subset H^1(X_t, \mathbf{C}) = \text{res}(\Omega_{\mathbf{CP}^2}^2(2(X_t))); \quad (1.14)$$

y filtraciones en los anillos de polinomios

$$0 \subset J_{F_t} \cap \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \subset \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}; \quad (1.15)$$

las cuales varían de manera holomorfa en  $t$ .

Teniendo de esta forma haces vectoriales filtrados sobre el disco agujerado.

$$\begin{array}{ccc}
 0 \subset J_{F_t} \cap \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \subset \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} & \longrightarrow & 0 \subset \Omega_{\mathbf{P}^2}^2(1(X_t)) \subset \Omega_{\mathbf{P}^2}^2(2(X_t)) \xrightarrow{\text{res}} 0 \subset F^1 H^1(X_t, \mathbf{C}) \subset H^1(X_t, \mathbf{C}) \\
 \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 \begin{array}{c} \Delta \\ \bullet_0 \quad \bullet_t \\ \text{A} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} \Delta \\ \bullet_0 \quad \bullet_t \\ \Omega_A = \frac{A\Omega}{F_t^2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \Delta \\ \bullet_0 \quad \bullet_t \\ \text{res}(\Omega_A) \end{array}
 \end{array}$$

**Ejemplo 1.6.1** Consideremos  $X_t = \{f - tg = 0\}$  para  $g$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , lisas para  $t \neq 0$ .

Una forma diferencial racional  $\Omega_A$  con polo a lo largo de  $X_0 = \{f = 0\}$  está determinada por un polinomio homogéneo  $A \in \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}$  de tal forma que  $\Omega_A = \frac{A\Omega}{f^2}$ . Esta forma diferencial racional se puede extender a una forma diferencial racional dada por  $\Omega_{A,t} = \frac{A\Omega}{(f-tg)^2}$ .

Por tanto, para cada  $t \neq 0$ , tenemos  $\mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}$ , el cual determina las formas diferenciales racionales con polos en  $X_t$  y que además admite una filtración. Esto da origen a un fibrado vectorial en el disco agujerado  $D$  que admite una filtración de Hodge de  $H^1(X_t, \mathbf{C})$  para cada  $t$  vía la función residuo.

Además tenemos una noción de cómo varía una forma diferencial racional respecto al parámetro  $t$  con “dirección”  $g$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_A(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{A\Omega}{(f-tg)^2} \right) \\ &= \frac{-2gA\Omega}{(f-tg)^3} \\ &= -2\Omega_{gA}(t).\end{aligned}$$

Aplicando el operador residuo tenemos también una forma diferencial,  $\omega_A(t)$  en  $X_t$ , la cual puede expandirse en una serie con respecto a la variable  $t$ , de donde tenemos una noción de anulamiento cuando  $t \rightarrow 0$  y  $X_0$  tiene una singularidad aislada.



# Capítulo 2

## Resolución y Gráfica Dual de una Curva Plana Reducida.

En este capítulo daremos definiciones y estableceremos la notación que nos servirá a lo largo del capítulo siguiente.

Sean  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  un germen de función holomorfa,  $X = \{f = 0\}$  curva plana reducida con una singularidad en 0.

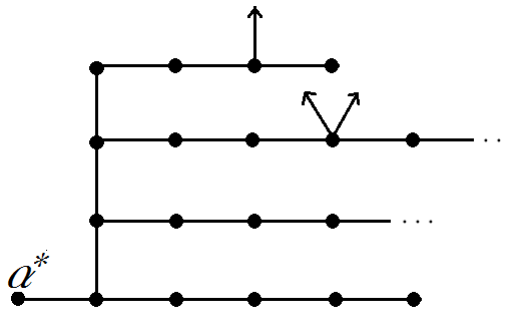
Tomemos  $\pi : Z \rightarrow \mathbf{C}^2$  la resolución mínima de  $X$  construida a partir de una serie de explosiones, creando una torre de modificaciones tales que si  $\tilde{f} = f \circ \pi$  cumple que  $\tilde{f}^{-1}(0)$  es un divisor a cruzamientos normales en  $Z$ .

$$\begin{array}{ccc} Z_{j+1} & & \\ \varepsilon_j \downarrow & \searrow \Pi_{j+1} & \\ Z_j & \xrightarrow{\Pi_j} & \mathbf{C}^2 \end{array} .$$

Si escribimos  $\tilde{f}_j = f \circ \pi_j$ , en caso de que  $\tilde{f}_j^{-1}(0) \subset Z_j$  no cumpla ser un divisor a cruzamientos normales, en algún momento dicho punto será explotado para producir  $Z_{j+1}$ , generando una curva excepcional  $E_{j+1}$  más que las ya existentes en  $Z_j$ . Para el caso en que  $f$ , tiene sólo un factor irreducible (módulo unidades) entonces  $Z_{j+1}$  siempre se obtiene de explotar un punto de  $E_j$ . Este proceso terminará después de un número finito de pasos donde, al final tendremos  $Z = Z_j$ .

## 2.1. Gráfica Dual

La gráfica  $V$  de una resolución puede describirse fácilmente después de una sucesión de explosiones. Consiste de una gráfica sin ciclos con un vértice por cada divisor excepcional y una arista entre dos vértices si sus respectivos divisores excepcionales se intersectan.



En esta figura denotaremos la flecha considerada como arista distinguida a la transformada estricta  $\tilde{X}$  de  $X$ . Si  $X$  no es irreducible es posible tener más de una flecha en cada vértice.

Podemos también dotar a esta gráfica de un orden parcial. Tendremos un elemento distinguido, el cual será un vértice distinguido  $\alpha^*$  correspondiente al divisor  $E_1$ ; luego, diremos que para dos vértices,  $\alpha > \beta$  si y sólo si existe una cadena de  $\alpha^*$  a  $\beta$  que pasa por  $\alpha$ .

Notemos de la construcción que si existe un vértice  $\alpha \in V$  conectado con al menos 3 puntos más entonces existirá  $\beta > \alpha$  tal que  $E_\beta$  interseca  $\tilde{X}$ .

**Definición 2.1.1** Un vértice  $\alpha$  en  $V$  se dice de ruptura si:

1.  $\alpha$  tiene tres o más aristas conectadas a él en el caso cuando la curva es irreducible.
2.  $\alpha$  tiene tres o más aristas conectadas a él o en el proceso de desingularización descrito arriba, existe  $j$  tal que  $E_\alpha$  es la transformada estricta de  $E_j$  y  $E_j$  interseca la transformada estricta de  $X$  en por lo menos dos puntos diferentes.

## 2.2. Resolución de una Curva Plana Reducida e Irreducible.

Consideremos una curva algebraica reducida en  $\mathbb{C}^2$ , dada por  $X = \{f = 0\}$ , con singularidad en el origen. Supongamos que su parametrización según sus pares característicos está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= t^m \\ y(t) &= a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots + a_s t^{k_s} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para construir la gráfica asociada a la resolución de singularidades de  $X$ , recordemos que la multiplicidad en el origen  $\nu_0 = \text{mult}_0(X)$  está dada por la multiplicidad de intersección con una línea en posición general, luego  $\nu_0 = \min\{m, k_1\}$ .

Los casos siguientes pueden presentarse durante el proceso de desingularizar  $X$ .

- Caso I.  $\nu_0 = m \leq k_1$ .

La expansión de Puiseux dada por la carta dada por la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= x_1 y_1, \end{aligned}$$

es la siguiente

$$\begin{aligned} x_1 &= x = t^m \\ y_1 &= \frac{y}{x_1} = \frac{y}{t^m}. \end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos la siguiente expansión de Puiseux para la transformada estricta de  $X$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= t^m \\ y_1 &= a_1 t^{k_1-m} + a_2 t^{k_2-m} + \dots + a_j t^{k_j-m} + \dots \end{aligned}$$

- Caso II.  $\nu_0 = k_1 \leq m$ .



La expansión de Puiseux dada por la carta dada por la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}x &= x_1 y_1 \\ y &= y_1,\end{aligned}$$

es la siguiente

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x}{y_1} = \frac{t^m}{a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots} \\ y_1 &= y = a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots\end{aligned}$$

Sustituyendo y haciendo la división de polinomios; tenemos la siguiente expansión de Puiseux para la transformada estricta de  $X$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= b_1 t^{m-k_1} + b_2 t^{m-k_1+k_2-k_1} + \dots + b_j t^{m-k_1+k_j-k_1} + \dots \\ y_1 &= a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots\end{aligned}$$

Cabe notar que  $k_1 < m$  implica que la curva es tangente al eje  $y$  y que,  $k_1 > m$  implica que la curva es tangente al eje  $x$ .

Hay iteraciones del proceso de desingularización de  $X$  cuya transformada estricta tiene una expansión de Puiseux de tal forma que  $k_1 = 0$ ; i.e.,

$$\begin{aligned}x(t) &= t^m \\ y(t) &= a_1 + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots\end{aligned}$$

Son estos casos los que producen puntos de ruptura en la gráfica dual de la resolución de  $X$  y para las cuales, sólo es necesaria una traslación  $(x, y) \rightarrow (x, y - a_1)$  para volver a los casos anteriores.

- Caso III.  $\nu_0 = m \leq k_2$ .

La expansión de Puiseux dada por la carta dada por la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\ y - a_1 &= x_1 y_1,\end{aligned}$$

es la siguiente

$$\begin{aligned} x_1 &= x = t^m \\ y_1 &= \frac{y-a_1}{x_1} = \frac{y}{t^m}. \end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos la siguiente expansión de Puiseux para la transformada estricta de  $X$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= t^m \\ y_1 &= a_2 t^{k_2-m} + a_3 t^{k_3-m} + \dots + a_j t^{k_j-m} + \dots \end{aligned}$$

- Caso IV.  $\nu_0 = k_2 \geq m$ .

La expansión de Puiseux dada por la carta dada por la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} x &= x_1 y_1 \\ y - a_1 &= y_1, \end{aligned}$$

es la siguiente

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{y_1} = \frac{t^m}{a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots} \\ y_1 &= y - a_1 = a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots \end{aligned}$$

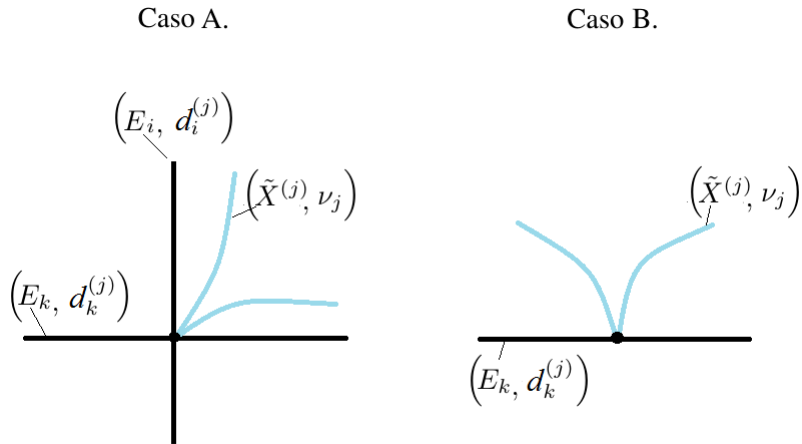
Sustituyendo y haciendo la división de polinomios; tenemos la siguiente expansión de Puiseux para la transformada estricta de  $X$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 t^{m-k_2} + b_2 t^{m-k_2+k_3-k_2} + \dots + b_j t^{m-k_2+k_{j+1}-k_2} + \dots \\ y_1 &= a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots \end{aligned}$$

Este algoritmo nos permite obtener una secuencia de multiplicidades de la transformada estricta de la curva  $\tilde{X}^{(j)}$  en cada iteración, pues siempre se obtendrá uno de los casos que previamente vimos, hasta que la curva sea no singular y los divisores tengan cruzamientos normales.

Además, es posible calcular también la secuencia de multiplicidades de los divisores excepcionales. En la iteración  $j$  tenemos los divisores  $\{E_i^{(j)}\}_{i \in I_j}$  con multiplicidades  $\mathcal{M}^{(j)} = \{d_i^{(j)}\}$ . Entonces, en la iteración  $j + 1$  es posible calcular la

multiplicidad del nuevo divisor a partir de las multiplicidades de los anteriores y la multiplicidad  $\nu_j = mult_0(\tilde{X}^{(j)})$ . Basta observar si la explosión se hizo en un punto de cruce de dos divisores  $E_i, E_k$  o no:



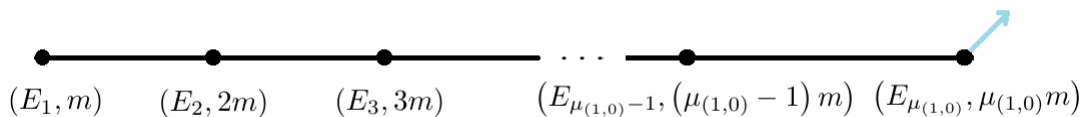
Luego,

$$d_{(i,k)}^{(j+1)} = \begin{cases} d_i^{(j)} + d_k^{(j)} + \nu_j & \text{en el Caso A.} \\ d_k^{(j)} + \nu_j & \text{en el Caso B.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que al inicio del proceso tenemos el caso I, sea

$$\mu_{(1,0)} = \max\{n \in \mathbf{N} \mid n \cdot m \leq k_1\}. \quad (2.3)$$

Entonces  $k_1 = \mu_{(1,0)} \cdot m + r$ , con  $0 \leq r < m$ . De donde  $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_{\mu-1} = m$  y  $m_1 = m, m_2 = 2m, \dots, m_\mu = \mu_{(1,0)} \cdot m$ . La gráfica dual hasta este paso sería de la siguiente forma:



Si  $r > 0$ , entonces tenemos la siguiente expansión de Puiseux para  $\tilde{X}^{(\mu(1,0))}$

$$x(t) = t^m \tag{2.4}$$

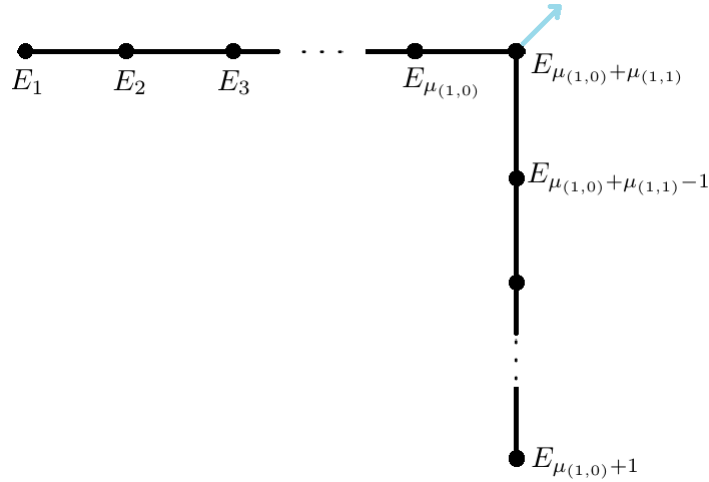
$$y(t) = a_1 t^r + a_2 t^{k_2 - \mu(1,0) \cdot m} + \dots, \tag{2.5}$$

de donde  $\tilde{X}^{(\mu(1,0))}$  es tangente al eje  $y$ .

Ahora, el proceso nos deja en el Caso II y usamos el algoritmo de la división para  $m$  y  $r$ , pudiendo concluir que  $m = \mu(1,1) \cdot r + r(1,1)$ , con  $0 \leq r(1,1) < r$ . De donde

$$\nu_{\mu(1,0)} = \nu_{\mu(1,0)+1} = \dots = \nu_{\mu(1,0)+\mu(1,1)-1} = r.$$

Luego, se obtiene la gráfica dual para esta parte del algoritmo:



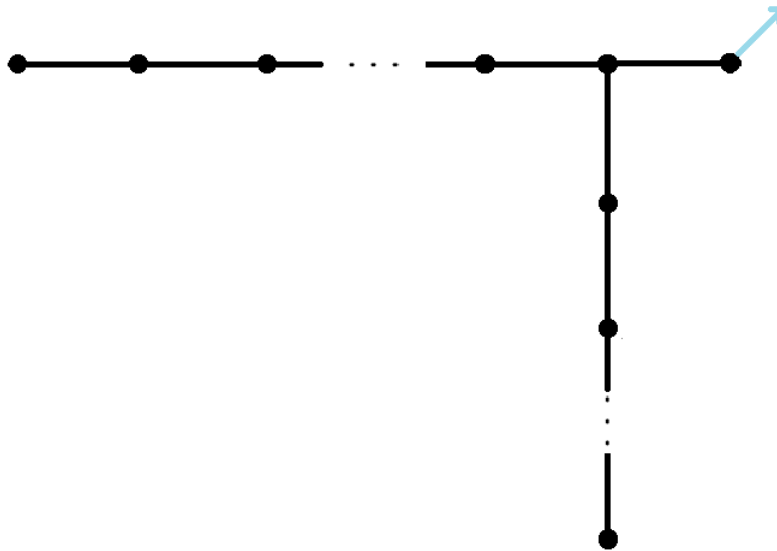
Del algoritmo de la división para  $m$ ,  $k_1$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu(1,0) \cdot m + r & (2.6) \\ m &= \mu(1,1) \cdot r + r(1,1) \\ r &= \mu(1,2) \cdot r(1,1) + r(1,2) \\ &\vdots \\ r_{(1,n_{k_1}-2)} &= \mu(1,n_{k_1}) \cdot r_{(1,n_{k_1}-1)} + r_{(1,n_{k_1})} \\ r_{(1,n_{k_1}-1)} &= \mu(1,n_{k_1}+1) \cdot r_{(1,n_{k_1})} \end{aligned}$$

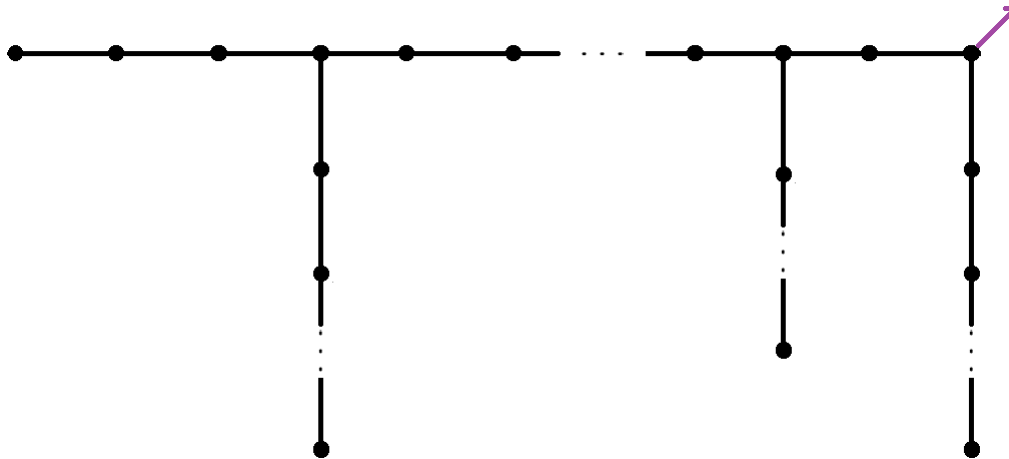
Notemos que la expansión en este momento es como en los casos III ó IV.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= t^{r(1, n_{k_1})} + \text{términos de mayor orden} \\
 y(t) &= c_1 + c_2 t^{k_2 - k_1} + \text{términos de mayor orden.}
 \end{aligned}$$

De esta manera, la siguiente explosión será como el caso B, causando que el cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (x, y - c_1)$  nos devuelva al caso I o II; en la gráfica dual esto se refleja creando un punto de ruptura en ella e iniciando el proceso para  $r(1, n_{k_1}), k_2 - k_1$ :



El proceso terminará cuando el exponente en  $t$  de las variables sea a lo más 1 y al menos una tenga sólo término constante. Al final del proceso la gráfica dual tendrá esta forma:



De lo cual podemos concluir que la secuencia de multiplicidades  $\nu_i$  puede obtenerse de algoritmos iterados de la división comenzando con  $m, k_1$ ; para después continuar con  $r_{(i-1, n_{k_{i-1}})}, k_i - k_{i-1}$ .

Por otro lado, dada la secuencia de multiplicidades  $\nu_i$ , tenemos la multiplicidad de la imagen inversa de la curva plana en el  $i$ -ésimo paso de la resolución, pudiendo obtener las multiplicidades de los divisores y, por tanto la parametrización de la curva plana original. Por lo que podemos enunciar lo siguiente:

Dada una curva plana irreducible y reducida los siguientes datos son equivalentes:

- La secuencia de multiplicidades  $\nu_i$  asociados a cada divisor de la resolución estándar.
- Los exponentes característicos de la parametrización de la curva.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^m \\ y(t) &= a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots + a_s t^{k_s} \end{aligned}$$

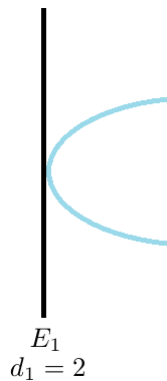
### 2.2.1. Ejemplo: La cúspide.

Consideremos la curva plana singular dada por  $X = \{x^2 - y^3 = 0\}$  con la expansión:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3 \\ y(t) &= t^2. \end{aligned}$$

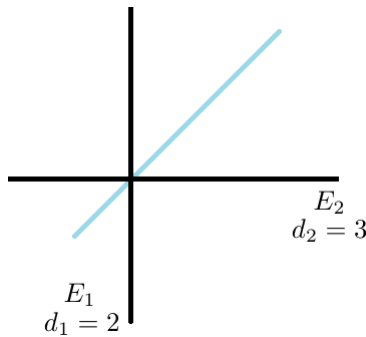
Entonces empieza el algoritmo para  $m = 2$ ,  $k_1 = 3$ , luego  $d_1 = \nu_0 = 2$ ; haciendo

$$\begin{aligned} x = x_1 y_1 &\longrightarrow x_1(t) = t \\ y = y_1 &\quad y_1(t) = t^2, \end{aligned}$$



Ahora  $\nu_1 = 1$ , estamos en el caso B, de donde el nuevo divisor  $E_2$  tiene multiplicidad  $d_2 = d_1 + \nu_1 = 3$  y, como tenemos ahora el caso II:

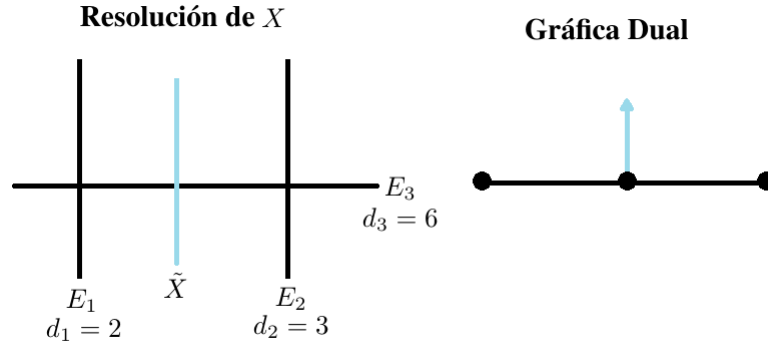
$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\longrightarrow x_2(t) = t \\ y_1 = x_2 y_2 &\quad y_2(t) = t. \end{aligned}$$



Por último  $\nu_2 = 1$ , como tenemos el caso A, para el  $E_3$  se tiene  $d_3 = d_2 + d_1 + \nu_2 = 6$  por tanto,

$$\begin{aligned} x_2 = x_3 y_3 &\longrightarrow x_3(t) = 1 \\ y_2 = y_3 &\quad y_3(t) = t. \end{aligned}$$

Terminando el proceso y obteniendo



### 2.3. Gráfica Dual para una Curva Plana Reducida.

Supongamos que una curva plana reducida  $X$  tiene  $X_1, X_2, \dots, X_s$  componentes. Se utilizará un proceso inductivo para juntar las gráficas duales de cada componente; sean

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{s-1} \\ Y_2 &= X_s, \end{aligned}$$

supondremos que ya se tienen gráficas  $G_1, G_2$  para la resoluciones de  $Y_1, Y_2$ , respectivamente; así como las multiplicidades para cada una.

**Definición 2.3.1** Dada  $X$  una curva plana reducida con componentes  $X_1, \dots, X_k$ ;  $p \in X$  y una sucesión de explosiones que desingularicen  $X$ ,

$$Z_N \xrightarrow{\pi_N} Z_{N-1} \xrightarrow{\pi_{N-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} Z_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}^2.$$

Para  $r = 1, 2, \dots, k$ ; definimos la longitud propia de  $X_r$ ,

$$L_r = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \cdot \text{la transformada estricta de } X_r \text{ en } Z_n \text{ es no} \\ \text{singular e interseca transversalmente a } \pi_n^{-1}(p) \\ \cdot \pi_n^{-1}(X_{r_1}) \cap \pi_n^{-1}(X_r) = \emptyset \text{ si } r_1 \neq r \end{array} \right. \right\}.$$

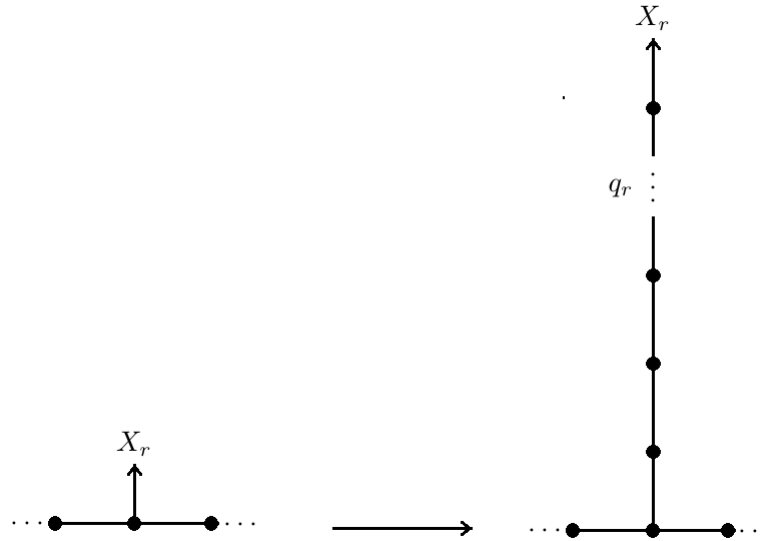
Notemos que, si  $N_r$  es la longitud de la resolución estándar de cada  $X_r$  por separado, i.e; el número de vértices de la gráfica dual asociado a  $X_r$  por separado, entonces  $N_r \leq L_r \leq N$ .



Además, al combinar ambas gráficas, la nueva longitud propia de una rama  $X_r$  de  $Y_1$  y de  $Y_2$  puede crecer. Lo anterior pasa cuando la cantidad de puntos infinitamente cercanos en común en las resoluciones de  $Y_1$  y  $Y_2$  es mayor a  $L_r$ .

También es posible si el número de puntos infinitamente cercanos en común es mayor a la longitud de la resolución de  $Y_2$ . Por ejemplo, cuando una componente ya es lisa pero la otra es singular y tangente a la anterior.

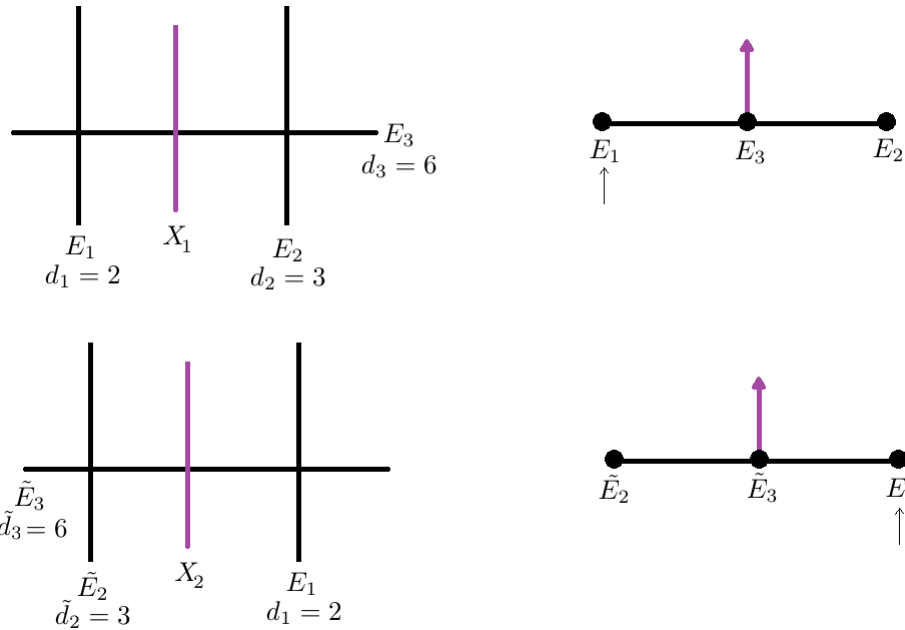
Para  $r = 1, \dots, s-1$ , si que  $q_r = L_r^{Y_1 \cup Y_2} - L_r^{Y_1}$  es la diferencia entre las nuevas longitudes propias de  $X_r$ . Entonces la gráfica dual  $V^{Y_1}$  se extiende por  $q_r$  puntos; y las multiplicidades aumentan según las multiplicidades de los divisores obtenidos en la resolución de la curva  $X_s$ .



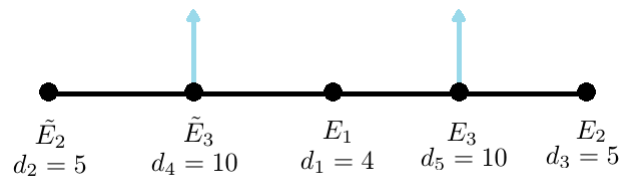
De este modo, al unir dos gráficas duales, se deben tomar en cuenta los divisores excepcionales que las componentes de la curva tienen en común cuando las explosiones son hechas y, en tal caso, las multiplicidades de tales divisores comunes se sumarán. Esto es, si  $E_\alpha$  es un divisor que comparten la resolución de  $Y_1$  y  $Y_2$ , entonces  $d_\alpha^{Y_1 \cup Y_2} = d_\alpha^{Y_1} + d_\alpha^{Y_2}$ .

### 2.3.1. Ejemplo: La cúspide doble

Esta curva  $X$  está definida por la ecuación  $f(x, y) = (x^2 - y^3)(y^2 - x^3)$ , la cual es la unión de dos cúspides  $X_1, X_2$  en el origen, ambas con la misma gráfica dual:



Notemos que las curvas sólo comparten al origen y después de la primera explosión ambas se separan. Esto implica que las gráficas se unirán en  $E_1$ , sin necesidad de aumentar las longitudes propias de ambas curvas. La multiplicidad  $m_1 = \nu_{0,1} + \nu_{0,2} = 4$  pero, a partir de  $E_1$ , el cálculo de las multiplicidades se calcula como en el caso irreducible pues ambas componentes ya se han separado. Obteniendo la siguiente imagen:



$E_1$  es un ejemplo de punto de ruptura de la gráfica dual aunque sólo dos aristas están conectados a él.



# Capítulo 3

## Fibra de Milnor de una Curva Singular.

Sea  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  una función polinomial donde  $X = \{f = 0\}$  es una curva plana reducida. En este capítulo daremos una descripción topológica de la fibra no singular de  $f$ .

### 3.1. Fibración de Milnor.

Consideremos  $B_\epsilon \subset \mathbf{C}^2$  una bola abierta alrededor del origen de radio  $\epsilon > 0$ , cuya frontera es la esfera  $S_\epsilon$ . Sea  $K_\epsilon = S_\epsilon \cap X$ , entonces  $K_\epsilon$  es una variedad diferenciable sin frontera de dimensión 1 ([11]).

Milnor ([11]) demostró que  $X \cap B_\epsilon$  es homeomorfo al cono sobre  $K_\epsilon$ .

Además, la fibra de  $f$ , para  $\delta \neq 0$ :

$$X_\delta = \{z \in B_\epsilon \mid f(z) = \delta\}, \quad (3.1)$$

es una variedad diferenciable real compacta de dimensión 2 con frontera  $K_\epsilon$ , el cual es una unión disjunta de nudos en  $S^3$ .

**Teorema 3.1.1 (Milnor ([11]))** *Para cualquier  $f : U \subset (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  función analítica existe  $\epsilon_0$  tal que para  $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ , se cumplen las siguientes propiedades:*

- Si  $X = \{f = 0\}$ ,  $K_\epsilon := X \cap S_\epsilon$ , entonces la función

$$\begin{aligned} \rho : S_\epsilon \setminus K_\epsilon &\longrightarrow S^1 \\ z &\longrightarrow \frac{f(z)}{\|f(z)\|}, \end{aligned}$$

es una fibración diferenciable localmente trivial.

- El tipo topológico de  $K_\epsilon$  es independiente de  $\epsilon$ .
- Para  $t \in S^1$  se tiene que  $F_t = \rho^{-1}(t)$  es una variedad diferenciable de dimensión 2 con el tipo de homotopía de un ramillete de  $\mu$ -esferas. A tal número  $\mu$  se le llama número de Milnor.

Notemos que  $F_t$  es difeomorfa al siguiente conjunto  $\{z \in B_\epsilon \mid f(z) = \text{constante}\}$ , lo cual nos da un teorema de fibración equivalente al anterior

**Teorema 3.1.2 (Milnor, [11])** Si  $0 < \eta \ll \epsilon$  y  $D_\eta = \{z \in \mathbf{C} \mid \|z\| < 1\}$ , entonces la siguiente función es una fibración diferenciable localmente trivial e homotópicamente equivalente a la anterior

$$f : \overline{B_\epsilon} \cap f^{-1}(\overline{D_\eta}) \setminus X \longrightarrow \overline{D_\eta} \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

$$z \longrightarrow f(z). \quad (3.3)$$

**Definición 3.1.3** Debido a que esas fibraciones son homotópicamente equivalentes se les llaman *Fibración de Milnor* y a sus fibras se les llaman *Fibra de Milnor*.

Cabe notar que los teoremas anteriores fueron demostrados para funciones  $f$  en cualquier dimensión pero para este trabajo nos enfocaremos al caso de curvas.

## 3.2. Topología de la Fibra de Milnor.

Para dar una descripción topológica de  $X_\delta$ , tomemos  $\pi : Z \longrightarrow \mathbf{C}^2$  la resolución mínima de  $X$  construida a partir de una serie de explosiones tal que si  $\tilde{f} = f \circ \pi$  cumple que  $\tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{X} + E$  es un divisor a cruzamientos normales en  $Z$ :

$$(\tilde{f}) = \tilde{X} + \sum d_\alpha E_\alpha. \quad (3.4)$$

Consideremos una vecindad tubular  $U_\alpha$  y  $U_{\tilde{X}}$  para cada  $E_\alpha$  y  $\tilde{X}$ , respectivamente; y sea

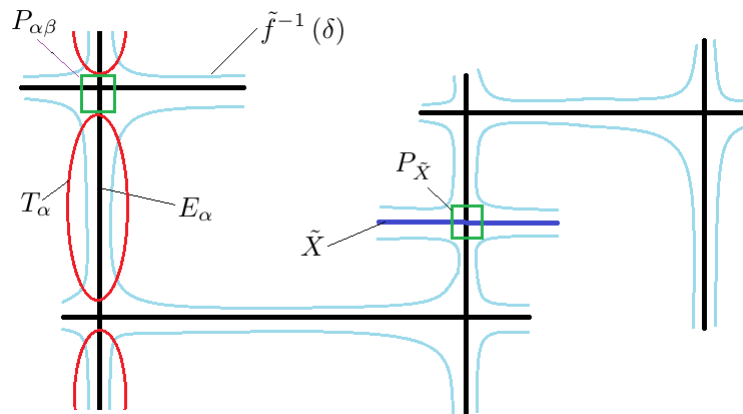
$$T_\alpha = U_\alpha \setminus \left( \bigcup_{\beta \neq \alpha} U_\beta \cup U_{\tilde{X}} \right) \quad (3.5)$$

Notemos que

$$\bigcup U_\alpha = (\cup T_\alpha) \cup (\cup P_{\alpha\beta}) \cup P_{\tilde{X}},$$

donde

- $P_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ , topológicamente son poldiscos alrededor de  $E_\alpha \cap E_\beta$ .
- $P_{\tilde{X}} = U_{\tilde{X}} \cap (\bigcup U_\alpha)$  también son, topológicamente, uniones disjuntas de poldiscos alrededor de los puntos de intersección de  $\tilde{X}$  con la unión de los divisores excepcionales.

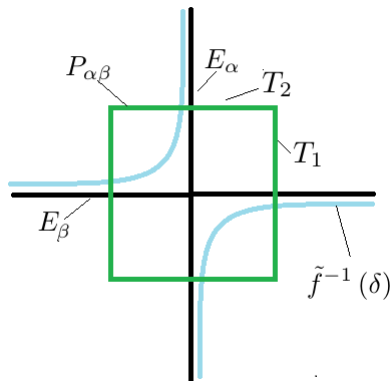


Notemos que, localmente, en  $P_{\alpha\beta}$  tenemos una expresión alrededor del punto de intersección de  $E_\alpha$  con  $E_\beta$  como sigue

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = z_1^{d_\beta} z_2^{d_\alpha}.$$

Además  $\partial P_{\alpha\beta}$  es la unión de dos toros sólidos:

- $T^+ = \{(z_1, z_2) \mid \|z_1\| \leq 1\}$ ,
- $T^- = \{(z_1, z_2) \mid \|z_2\| \leq 1\}$ .



de forma que  $\tilde{f}^{-1}(\delta)$  interseca a  $T^+, T^-$  en  $Mcd(d_\alpha, d_\beta)$  círculos para cada uno pues,

$$\tilde{f}^{-1}(\delta) \cap T^+ = \{(z_1, z_2) \mid \|z_1\| \leq 1, z_1^{d_\beta} z_2^{d_\alpha} = \delta\}, \quad (3.6)$$

es la unión de  $Mcd(d_\alpha, d_\beta)$  nudos toroidales de tipo  $\left(\frac{d_\alpha}{Mcd(d_\alpha, d_\beta)}, \frac{d_\beta}{Mcd(d_\alpha, d_\beta)}\right)$ ; análogamente para  $T^-$ .

Entonces  $\tilde{P}_{\alpha\beta} := \tilde{f}^{-1}(\delta) \cap P_{\alpha\beta}$  son  $Mcd(d_\alpha, d_\beta)$  cilindros generados por los círculos en  $T^+$  y  $T^-$ . Por otro lado

$$\tilde{T}_\alpha := T_\alpha \cap \tilde{f}^{-1}(\delta) \longrightarrow E_\alpha \setminus \left( \bigcup_{\beta \neq \alpha} E_\beta \cup \tilde{X} \right), \quad (3.7)$$

es un cubriente no ramificado  $d_\alpha : 1$  ([1]).

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{T}_\alpha) &= d_\alpha \cdot \chi\left(E_\alpha \setminus \left(\bigcup_{\beta \neq \alpha} E_\beta \cup \tilde{X}\right)\right) \\ &= d_\alpha \cdot (\chi(\mathbf{P}^1) - \#\{\beta \mid \beta \neq \alpha, E_\beta \cap E_\alpha \neq \emptyset\} - s_\alpha), \end{aligned}$$

$$\text{donde } s_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } E_\alpha \cap \tilde{X} = \emptyset \\ 1 & \text{si } E_\alpha \cap \tilde{X} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Además, la frontera de  $\tilde{T}_\alpha$  tiene  $t_\alpha$  discos disjuntos  $\sqcup_{t_\alpha} \overline{D}$ , donde

$$t_\alpha = s_\alpha + \sum_{\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\}} Mcd(d_\alpha, d_\beta). \quad (3.8)$$

De donde  $\overline{T}_\alpha := \tilde{T}_\alpha \vee \sqcup_{t_\alpha} \overline{D}$  es una superficie cerrada sin frontera tal que

$$\chi(\overline{T}_\alpha) = \chi(\tilde{T}_\alpha) + t_\alpha. \quad (3.9)$$

De esta forma podemos calcular el género de la superficie  $\overline{T}_\alpha$ :

$$g_{\overline{T}_\alpha} = \frac{2 - \chi(\overline{T}_\alpha)}{2}. \quad (3.10)$$

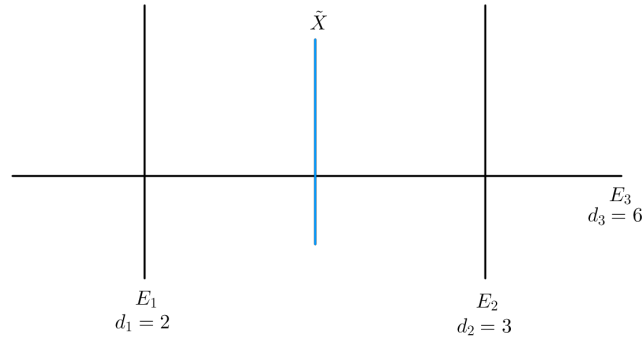
Este proceso nos permite, al juntar cada pieza de la fibra en los abiertos  $U_\alpha$ , tener una imagen topológica de la fibra de Milnor.

### 3.3. Ejemplos.

Aunque el proceso anterior es muy ilustrativo, el objetivo de esta sección es clarificarlo construyendo la fibra de Milnor para dos curvas cuya diferencia radica en el número de componentes de cada una.

#### 3.3.1. La Cúspide

Consideremos la curva en  $\mathbb{C}^2$  dada por  $X = \{x^2 - y^3 = 0\}$ , resolviendo la singularidad tenemos lo siguiente



- Para  $E_1$  tenemos que

$$\begin{aligned}\chi(E_1 \setminus E_3) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{pt.\}) = 2 - 1 = 1, \\ \chi(\tilde{T}_1) &= d_1 \cdot \chi(E_1 \setminus E_3) = 2, \\ t_1 &= Mcd(d_1, d_3) + s_1 = 2.\end{aligned}$$

Por tanto  $\chi(\overline{T}_1) = 4$ , de donde podemos concluir que  $\overline{T}_1$  son 2 esferas y,  $\tilde{T}_1$  son 2 esferas disjuntas menos 1 punto cada una.

- Análogamente se hacen las cuentas para  $E_2$  pues sólo tiene un punto de intersección con los demás divisores, llegando a que  $\tilde{T}_2$  son 3 esferas disjuntas menos 1 punto cada una.
- Para  $E_3$  tenemos lo siguiente

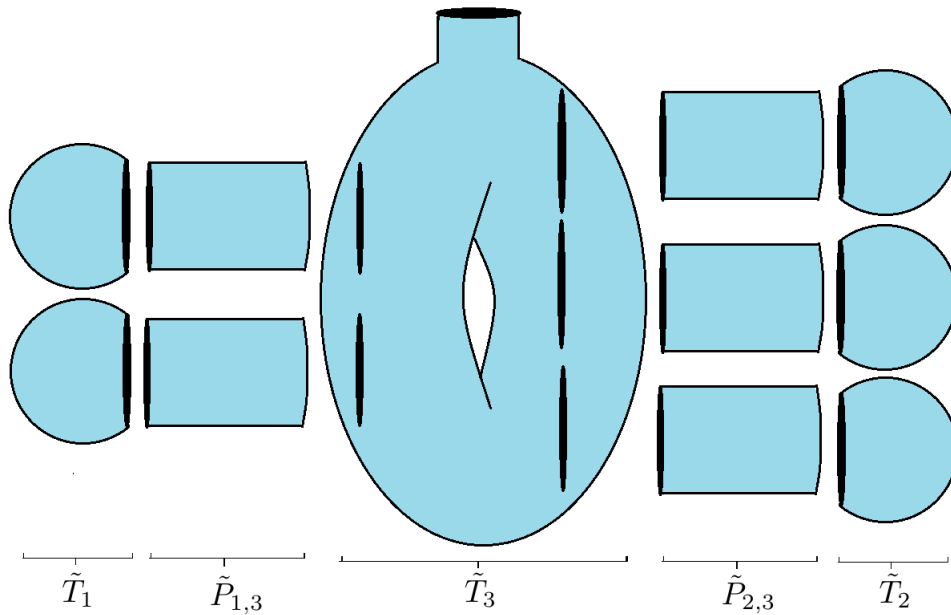
$$\begin{aligned}\chi(E_3 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \tilde{X})) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{3pts.\}) = 2 - 3 = -1, \\ \chi(\tilde{T}_3) &= d_3 \cdot \chi(E_3 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \tilde{X})) = -6, \\ t_3 &= Mcd(d_1, d_3) + Mcd(d_2, d_3) + s_3 = 6.\end{aligned}$$



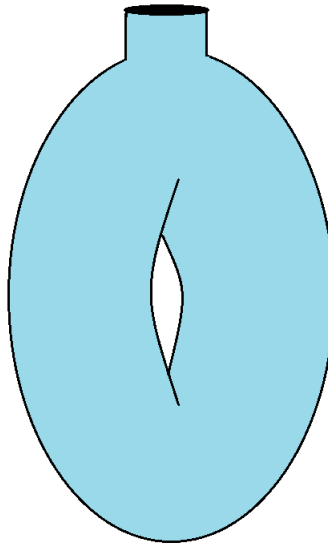
Por tanto  $\chi(\overline{T_3}) = 0$  y  $g_{\overline{T_3}} = 1$ .

- Para los polidiscos  $P_{1,3}, P_{2,3}$  tenemos que,  $\tilde{P}_{1,3}, \tilde{P}_{2,3}$  son 2 y 3 cilindros, respectivamente.

Finalmente tenemos que cada parte de la fibra de Milnor se une naturalmente tomando en cuenta cada parte aportada por la vecindad tubular de cada divisor:

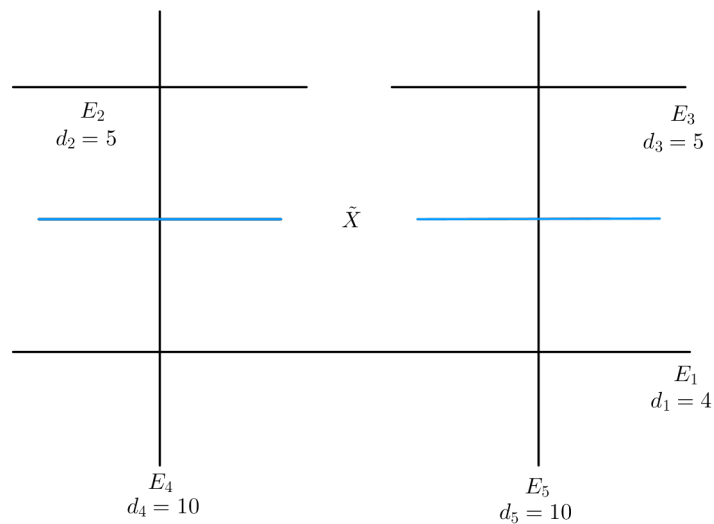


Concluyendo así que la fibra de Milnor de la cuspide es un toro con una componente en la frontera.



### 3.3.2. La Cúspide Doble

Para este caso tomemos una curva en  $\mathbb{C}^2$  dada por  $X = \{(x^2 - y^3)(y^2 - x^3) = 0\}$ , resolviendo la singularidad tenemos lo siguiente



Notemos que los divisores están acomodados de forma simétrica, de modo que los cálculos serán los mismos para  $E_2$ ,  $E_3$  y también para  $E_4$ ,  $E_5$ .

- Para  $E_2$  tenemos que

$$\begin{aligned}\chi(E_2 \setminus E_4) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{pt.\}) = 2 - 1 = 1, \\ \chi(\tilde{T}_2) &= d_2 \cdot \chi(E_1 \setminus E_3) = 5, \\ t_2 &= Mcd(d_2, d_4) + s_2 = 5.\end{aligned}$$

Por tanto  $\chi(\overline{T}_2) = 10$ , de donde podemos concluir que  $\overline{T}_2$  son 5 esferas y,  $\tilde{T}_2$  son 5 esferas disjuntas menos 1 punto cada una. Por simetría tenemos también que  $\tilde{T}_3$  son 5 esferas disjuntas menos 1 punto cada una.

- Para  $E_4$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\chi\left(E_4 \setminus \left(E_1 \cup E_2 \cup \tilde{X}\right)\right) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{3pts.\}) = 2 - 3 = -1, \\ \chi(\tilde{T}_4) &= d_4 \cdot \chi\left(E_1 \setminus \left(E_1 \cup E_2 \cup \tilde{X}\right)\right) = -10, \\ t_4 &= Mcd(d_2, d_4) + Mcd(d_1, d_4) + s_4 = 8.\end{aligned}$$

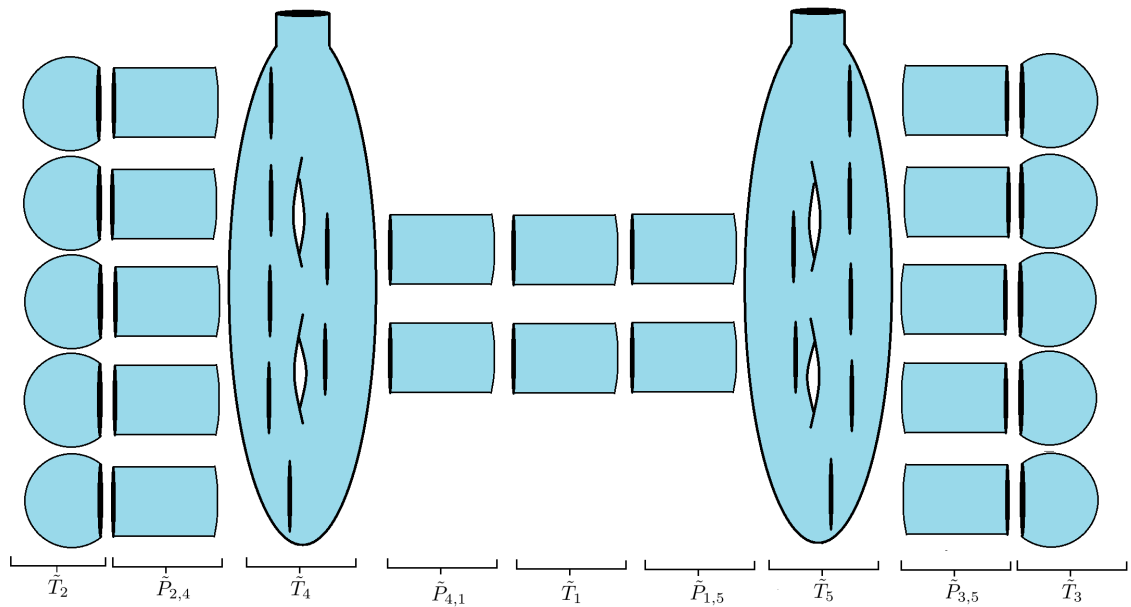
Por tanto  $\chi(\overline{T}_4) = -2$  y  $g_{\overline{T}_4} = 2$ , de lo cual podemos concluir que  $\tilde{T}_4$  es un 2-toro con 8 discos en su frontera y, simétricamente para  $\tilde{T}_5$ .

- Para  $E_1$  tenemos lo siguiente,

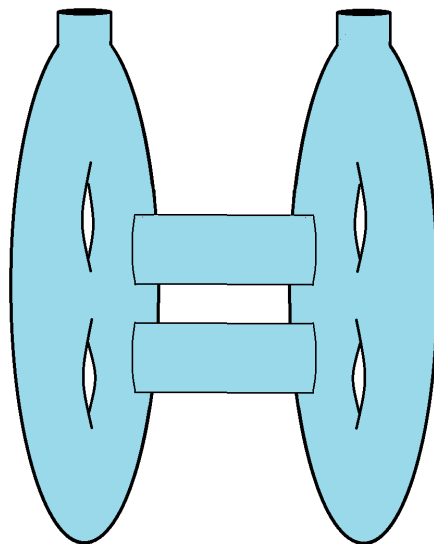
$$\begin{aligned}\chi(E_1 \setminus (E_4 \cup E_5)) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{2pts.\}) = 2 - 2 = 0, \\ \chi(\tilde{T}_1) &= d_1 \cdot \chi(E_1 \setminus (E_4 \cup E_5)) = 0, \\ t_1 &= Mcd(d_1, d_4) + Mcd(d_1, d_5) + s_1 = 4.\end{aligned}$$

Por tanto  $\chi(\overline{T}_1) = 4$ , de aquí que  $\tilde{T}_1$  son 2 cilindros.

- Para los poldiscos tenemos que  $\tilde{P}_{2,4}$ ,  $\tilde{P}_{4,1}$ ,  $\tilde{P}_{1,5}$ ,  $\tilde{P}_{3,5}$  son 5, 2, 2, 5 cilindros; respectivamente.



En este caso, la fibra de Milnor es una superficie de género 5 con 2 componentes en su frontera:



### 3.4. Aportación de cada divisor a la topología de la fibra de Milnor.

De los ejemplos anteriores podemos enunciar lo siguiente:

**Proposición 3.4.1** Si  $E_\alpha$  es un divisor en la resolución mínima de una curva plana irreducible y reducida, éste y su intersección con otros divisores tienen una aportación topológica a la fibra de Milnor según los casos siguientes:

- I- Si  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 1$ , entonces  $E_\alpha$  aportará discos a la topología.
- II- Si  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 2$ , entonces  $E_\alpha$  aportará anillos a la topología.
- III- Si  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 3$ , entonces  $E_\alpha$  aportará género a la topología.

El género y número de componentes asociados a cada divisor está determinado por su multiplicidad  $d_\alpha$  y el conjunto  $\{Mcd(d_\alpha, d_\beta) \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\}$ .

*Demostración:* La idea es considerar que la fibra de Milnor puede pensarse como un cubriente ramificado sobre  $E_\alpha$  y aplicar la fórmula de Riemann–Hurwitz.

- Caso I.  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 1$ . Si  $E_\gamma = \{E_\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\}$ .

$$\begin{aligned}\chi(E_\alpha \setminus E_\gamma) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{pt.\}) = 2 - 1 = 1, \\ \chi(\tilde{T}_\alpha) &= d_\alpha, \\ t_\alpha &= Mcd(d_\alpha, d_\gamma) + s_\alpha = d_\alpha.\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene pues  $s_\alpha = 0$  por tener la resolución mínima y, por la misma razón  $d_\gamma$  es divisible por  $d_\alpha$ . Por tanto, la aportación de  $E_\alpha$  son  $d_\alpha$  esferas a las cuales se les han removido un punto.

- Caso II.  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 2$ . Si  $\{E_\gamma, E_\delta\} = \{E_\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\}$ .

$$\begin{aligned}\chi(E_\alpha \setminus (E_\gamma \cup E_\delta)) &= \chi(\mathbf{P}^1 \setminus \{2 \text{ pts.}\}) = 2 - 2 = 0, \\ \chi(\tilde{T}_\alpha) &= d_\alpha \cdot 0 = 0, \\ t_\alpha &= Mcd(d_\alpha, d_\gamma) + Mcd(d_\alpha, d_\delta) + s_\alpha = 2k_\alpha.\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene del proceso de resolución visto en (2.2), donde se puede ver que en aquellos puntos que no son de ruptura en la gráfica dual, el algoritmo de la división aún no ha concluido y aquellos divisores obtenidos en cada paso como en (2.6) tienen multiplicidades que comparten un mismo máximo común divisor  $k_\alpha = r_{(i,j)}$  para algún  $i, j$ . Por tanto, la aportación de  $E_\alpha$  son  $k_\alpha$  cilindros.

- Caso III.  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 3$ . En este caso  $\alpha$  es un punto de ruptura y, si

$$\{E_\gamma, E_\delta, E_\eta\} = \{E_\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\}.$$

Por lo visto en la sección anterior, el género y el número de componentes en la frontera sabemos calcularlos (3.10), lo que aún nos falta calcular es el número de componentes irreducibles de  $\tilde{T}_\alpha$ . Recordemos que un punto de ruptura surge en la resolución cuando el algoritmo de la división en (2.1) para los pares  $(m, k_1)$  ó  $(r_{(i-1, n_{k_{i-1}})}, k_i - k_{i-1})$  termina.

En la parametrización de la curva, hasta la última explosión en  $E_\alpha$ , tenemos que para algún  $i$ :

$$\begin{aligned} x &= t^{r(i, n_{k_i})} \\ y &= t^{k_{i+1} - k_i} + \text{términos de orden mayor,} \end{aligned}$$

donde  $r(i, n_{k_i}) = \text{Mcd}(m, k_1, \dots, k_i)$ . Si consideramos el punto de ruptura anterior a  $E_\alpha$ , la parametrización hasta ese punto estaba dada por

$$\begin{aligned} x &= t^{r(i-1, n_{k_{i-1}})} \\ y &= t^{k_i - k_{i-1}} + \text{términos de orden mayor.} \end{aligned}$$

Tomando la proyección  $(x, y) \rightarrow x$  en ambas, la diferencia entre una y otra parametrización está dada en la siguiente relación

$$m = g_i g_{i-1} r(i, n_{k_i}) = g_i r(i-1, n_{k_{i-1}}). \quad (3.11)$$

De donde podemos concluir que la diferencia entre ambos puntos de ruptura son  $g_{i-1}$  componentes en el punto de ruptura anterior a  $E_\alpha$ . Para el caso en que la transformada estricta intersece a este divisor,  $E_\alpha$  aporta sólo una componente irreducible.

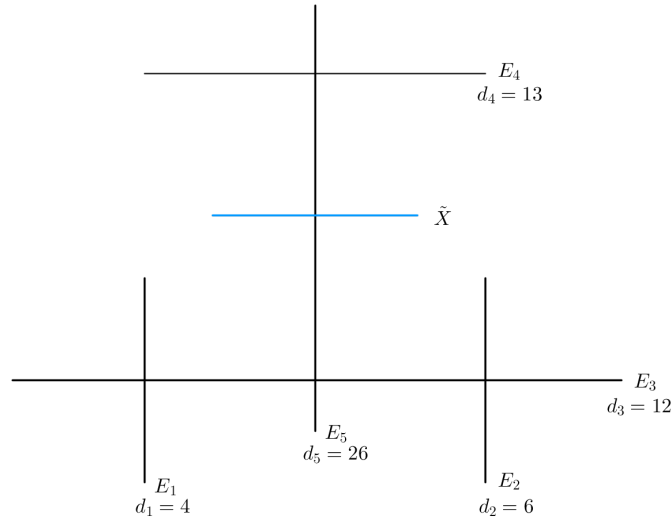
□

Para ilustrar qué pasa cuando se tiene más de un exponente característico consideremos

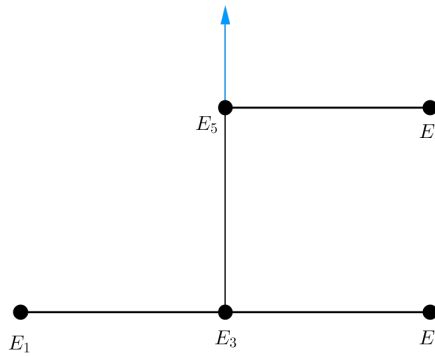
$$f(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7.$$

Cuya parametrización y resolución mínima son:

$$\begin{aligned} x &= t^4 \\ y &= t^6 + t^7 \end{aligned}$$

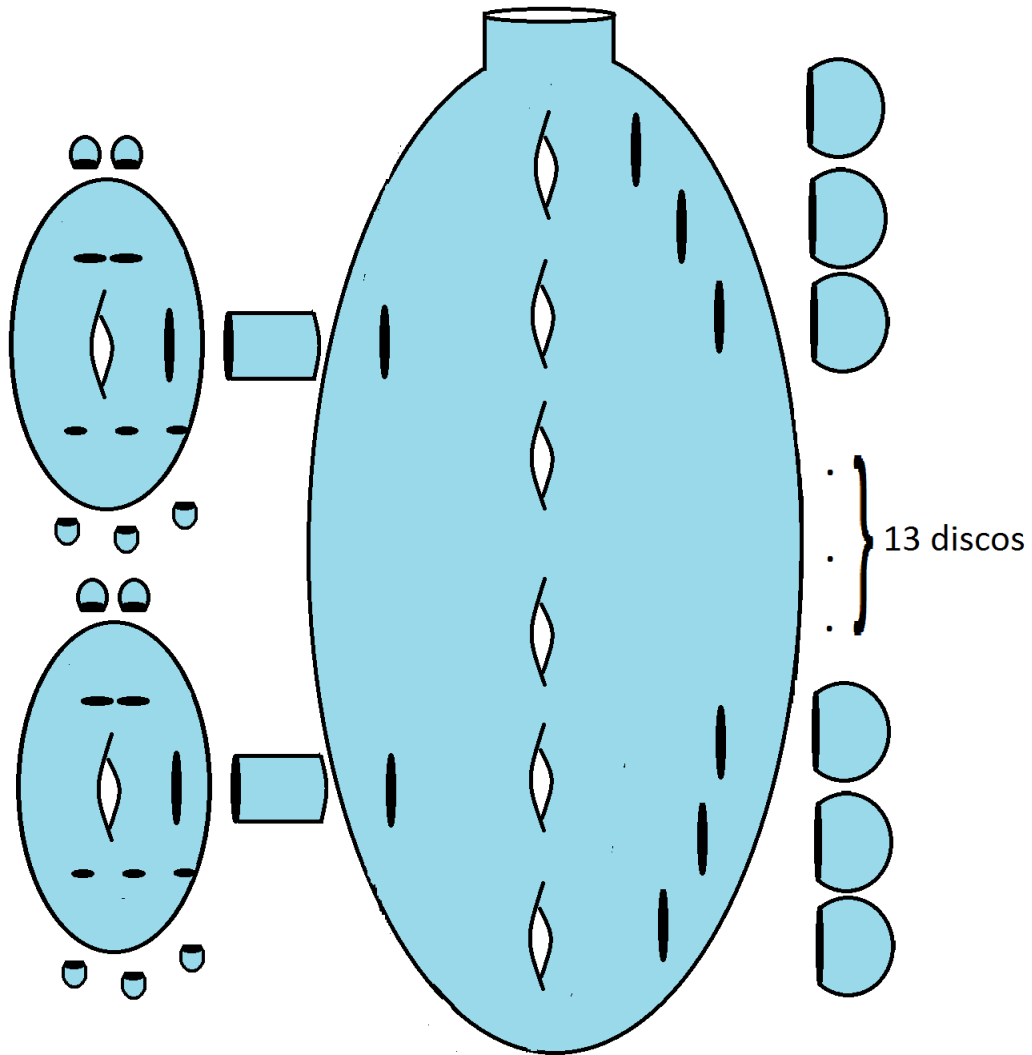


Para analizar cuánto aporta cada divisor, comencemos a construir desde el último nivel en la gráfica dual



- Como  $E_4$  sólo tiene un divisor que lo intersecta, por tanto aporta 13 esferas con un punto removido.
- $E_5$  es un punto de ruptura, en este caso  $g_{\tilde{T}_5} = 6$ , tiene 13 componentes en la frontera por su intersección con  $E_4$  y 2 componentes por su intersección con  $E_3$  además  $Mcd(4, 6, 7) = 1$  por tanto  $\tilde{T}_5$  tendrá sólo una componente irreducible.
- $E_3$  es un punto de ruptura, con  $g_{\tilde{T}_1} = 1$ , tiene 2 componentes en la frontera por su intersección con  $E_5$ , 4 componentes en su frontera por su intersección con  $E_1$  y 6 componentes por su intersección con  $E_2$  además  $Mcd(4, 6) = 2 \cdot Mcd(4, 6, 7)$  por tanto  $\tilde{T}_3$  tendrá dos componentes irreducibles, cada una con género 1.

- Finalmente, tanto  $E_1$  como  $E_2$  aportan 4 y 6 esferas con un punto removido cada una pues sólo intersectan a un divisor excepcional. Obteniendo así la fibra de Milnor de  $f$ .







# Capítulo 4

## Filtración Polar de una Curva Plana Reducida.

El objetivo de este capítulo es introducir la noción de velocidad de anulamiento de los ciclos evanescentes de la Fibra de Milnor de una curva plana  $X$ .

### 4.1. Cocientes Polares

Consideremos  $l : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  una función lineal,  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  una función analítica y  $\phi = (l, f)$ .

**Definición 4.1.1 (Curva Polar)** *Dada una elección genérica de  $l$ , el conjunto de puntos donde  $D\phi$  no es de rango máximo se llama curva polar  $\Gamma$ .*

Teissier ([16]) demostró que  $\Gamma$  es una variedad analítica de dimensión 1 la cual también se puede considerar, fuera de  $f^{-1}(0)$ , como el conjunto de puntos donde la restricción de  $f$  a las curvas de nivel de  $l$ , tienen un punto crítico. Más aún  $\Gamma \cap f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$ .

Denotemos  $\Delta = \phi^{-1}(\Gamma)$  y, tomando coordenadas  $(z, w) \in \mathbf{C}^2$  tenemos que cada componente irreducible  $\Delta_i$  de  $\Delta$  es tangente al eje  $z$  ([9]), de donde tenemos la siguiente serie de Puiseux para la imagen de cada componente  $\Gamma_i$ :

$$z = a_i w^{r_i} + \text{términos de orden mayor}, \quad (4.1)$$

donde  $r_i < 1$  y lo llamaremos cociente polar de  $f$ . Si  $\Gamma_i$  es la componente de  $\Gamma$  con imagen  $\Delta_i$  podemos ver que

$$r_i = \frac{\Gamma_i \cdot L}{\Gamma_i \cdot X}, \quad (4.2)$$

para  $L = \{l = 0\}$  y  $A \cdot B$  es el número de intersección de  $A$  y  $B$ . Consideremos la resolución mínima que desingulariza  $X$ ,  $\pi : Z \rightarrow \mathbf{C}^2$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{L}$  y  $\tilde{\Gamma}_i$ , las transformadas estrictas de  $X$ ,  $L$  y  $\Gamma_i$  respectivamente. Sea  $\tilde{l} = l \circ \pi$  y supongamos que en  $Z$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{l}) &= \tilde{L} + \sum m_\alpha E_\alpha \\ (\tilde{f}) &= \tilde{X} + \sum d_\alpha E_\alpha. \end{aligned}$$

**Teorema 4.1.2 (Steenbrink-Zucker, [15])** Si  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^g \Gamma_i$  y la imagen de  $\Gamma_i$  bajo  $\phi$  tiene parametrización [4.1]. Entonces el conjunto de valores de los  $r_i$  es igual al conjunto de los valores de  $\frac{m_\alpha}{d_\alpha}$  en los puntos de ruptura de la gráfica de la resolución mínima:

$$\{r_i \mid i = 1, \dots, g\} = \left\{ \frac{m_\alpha}{d_\alpha} \mid \alpha \text{ es un punto de ruptura} \right\}.$$

En ([15]) se obtienen las siguientes propiedades de los cocientes polares:

- Dada la función de la gráfica dual  $V$

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ \alpha &\longrightarrow \frac{m_\alpha}{d_\alpha}, \end{aligned}$$

se tiene que, si  $\alpha \in V$  y  $\gamma$  es su sucesor, entonces  $r(\gamma) \geq r(\alpha)$  y  $r(\gamma) = r(\alpha)$  si y sólo si  $\tilde{X} \cap E_\alpha = \emptyset$  y  $r(\beta) = r(\alpha) \forall \beta < \alpha$ .

- Si  $\tilde{X}$  interseca en algún punto a  $E_\alpha$  en la resolución mínima; entonces ninguna componente de la transformada estricta de la curva polar  $\tilde{\Gamma}_i$  pasa por ese punto.
- Si  $\tilde{\Gamma}_i$  interseca a  $E_\alpha \cap E_\beta$  entonces  $r(\alpha) = r(\beta)$ .
- Si  $\tilde{\Gamma}_i$  interseca a  $E_\alpha$  entonces el exponente de Puiseux asociado  $r_i = r(\alpha)$ .

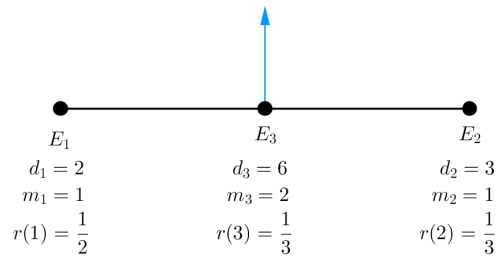
El número de cocientes polares de la curva polar y el número de cocientes polares en los puntos de ruptura son el mismo; además, su relación es la siguiente:

**Proposición 4.1.3 ([15])** Asumiendo que  $\tilde{\Gamma}_i \cap \tilde{X} = \emptyset$  y que  $\tilde{\Gamma}_i \cap E_\alpha \neq \emptyset$ . Entonces:

$$r_i = \frac{m_\alpha}{d_\alpha}. \quad (4.3)$$

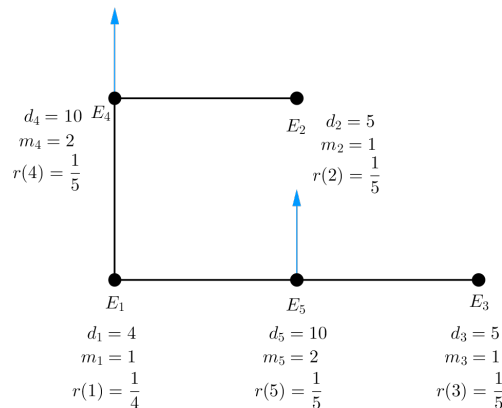
4.1.1. Ejemplos.

1. *La Cúspide.* Para esta curva tenemos  $f(x, y) = x^2 - y^3, l(x, y) = y$  y, sólo un punto de ruptura en el divisor  $E_3$ :

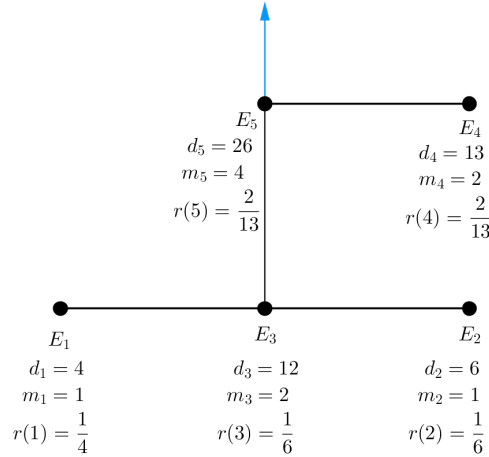


La curva polar y su imagen bajo  $\phi$  están parametrizadas por  $\Gamma = \{(0, t) \mid t \in \mathbf{C}\}$  y  $\Delta = \{(t, -t^3) \mid t \in \mathbf{C}\}$ , respectivamente. De aquí que  $\Delta$  tiene sólo una componente y su serie de Puiseux está dada por  $z = w^{\frac{1}{3}}$ ; por tanto,  $r_1 = r(3) = \frac{1}{3}$ .

2. *La Cúspide doble.* En este caso, hay tres puntos de ruptura, como la curva no es irreducible y las gráficas de cada componente se unen en  $E_1$ , tenemos como puntos de ruptura  $E_1, E_4, E_5$ :



3. Cuando la curva  $X$  es irreducible y tiene más de un exponente característico, la gráfica dual tiene más de un punto de ruptura. Si  $X = \{(y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0\}$



## 4.2. La Filtración Polar de la Fibra de Milnor.

El objetivo de esta sección es dar una descripción geométrica de cómo los ciclos evanescentes de la fibra de Milnor difieren entre ellos en el sentido que no todos se desvanecen a la misma velocidad.

**Definición 4.2.1** Una filtración geométrica creciente (decreciente) de un espacio topológico  $W$  es una sucesión de subespacios topológicos  $\{P_i\}$  tal que:

$$\phi \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_i \subset \dots \subset W,$$

$$(\phi \subset \dots \subset P^i \subset \dots \subset P^2 \subset P^1 \subset W).$$

Usando las propiedades y la notación para cocientes polares se construye una filtración creciente de la gráfica dual  $V$  y una filtración geométrica decreciente de la fibra de Milnor.

**Definición 4.2.2** Dada  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de curva plana reducida con singularidad en el origen y  $r_1 > r_2 > \dots > r_m$  exponentes de Puiseux de la curva polar asociada a  $X$ ; se define la Filtración Polar de la gráfica dual  $V$  como sigue:

$$V(i) = \{\alpha \in V \mid r(\alpha) \geq r_i\}. \quad (4.4)$$

Notemos que, por propiedades de la función  $r$ , los conjuntos  $V(i)$  unidas por las aristas entre ellas de la gráfica  $V$  son subgrafos conexos de  $V$ , asociados a una unión de divisores excepcionales.

**Definición 4.2.3** Dado el conjunto ordenado de cocientes polares  $r_1 > r_2 > \dots > r_m$ ,  $B_i \in \mathbf{R}$  suficientemente grandes (definidos rigurosamente en [10], (2.5)) y  $t \in \mathbf{C}$  tal que  $0 < |t| < \epsilon \ll 1$ , se define una filtración creciente  $P$  para  $X_t = f^{-1}(\{t\})$ :

$$P_i = \left\{ z \in \mathbf{C}^2 \left| \begin{array}{l} \cdot \|z\| < \epsilon \\ \cdot \|l(z)\| < B_i t^{r_i} \\ \cdot f(z) = t \end{array} \right. \right\}. \quad (4.5)$$

La filtración  $P_1 \subset \dots \subset P_m$  se llama Filtración Polar de la fibra  $X_t$  de  $f$ .

Las propiedades geométricas de esta filtración fueron descritas en el trabajo de Steenbrink-Zucker ([15]) en términos de la resolución mínima de  $X$  y la filtración polar de  $V$ ; considere

$$E(i) = \bigcup_{\alpha \in V(i)} E_\alpha. \quad (4.6)$$

Por ([15], Prop. 8) llamaremos a (4.6) la Filtración Polar de la unión de los divisores excepcionales  $E$  de la resolución mínima de  $X$ . Asociando vecindades tubulares  $U_\alpha$  para cada divisor  $E_\alpha$ ; consideremos

$$U(i) = \bigcup_{\alpha \in V(i)} U_\alpha, \quad (4.7)$$

entonces, para  $t$  suficientemente pequeño, tenemos la siguiente propiedad:

**Teorema 4.2.4** (Steenbrink-Zucker [15], Prop. 8)

$$\overline{U(1)} \cap \tilde{f}^{-1}(t) \subset \dots \subset \overline{U(m)} \cap \tilde{f}^{-1}(t), \quad (4.8)$$

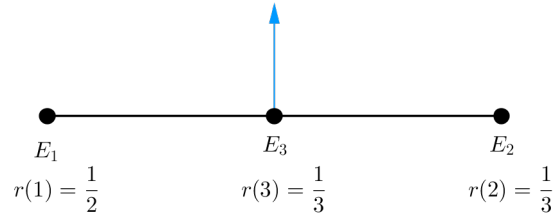
es difeomorfa a la filtración polar de  $f$ ; en particular  $P_m$  es difeomorfa a la fibra de Milnor de  $f$ .

Observación 4.2.5 - Cada parte de la filtración polar tiene, en forma intuitiva, una velocidad de anulamiento en  $l(z)$  dada por  $r_i$ .

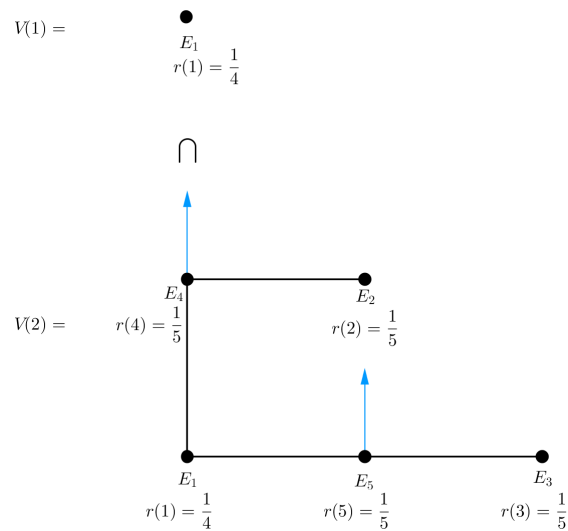
- Si  $|t'| < |t|$  entonces las filtraciones polares de las fibras  $X_{t'}$  y  $X_t$  son difeomorfos.

### 4.2.1. Ejemplos: Filtración Polar de la gráfica dual.

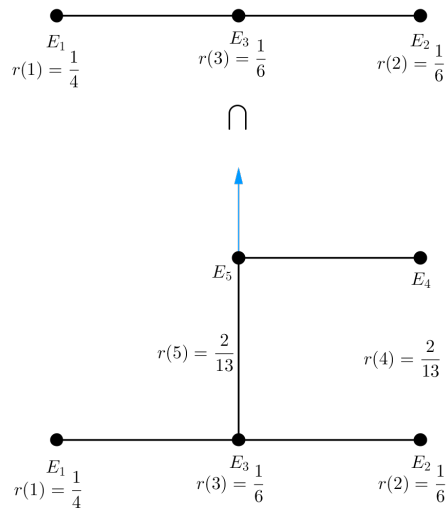
1. Para la cúspide  $X = \{y^2 - x^3 = 0\}$  (ejemplo 1 de [4.1.1]) se tiene sólo un punto de ruptura  $r_1 = \frac{1}{3}$ , la filtración para la gráfica dual sólo tiene un término  $V(1)$  y la filtración polar es trivial; i.e.  $P_1 = X_t$ .



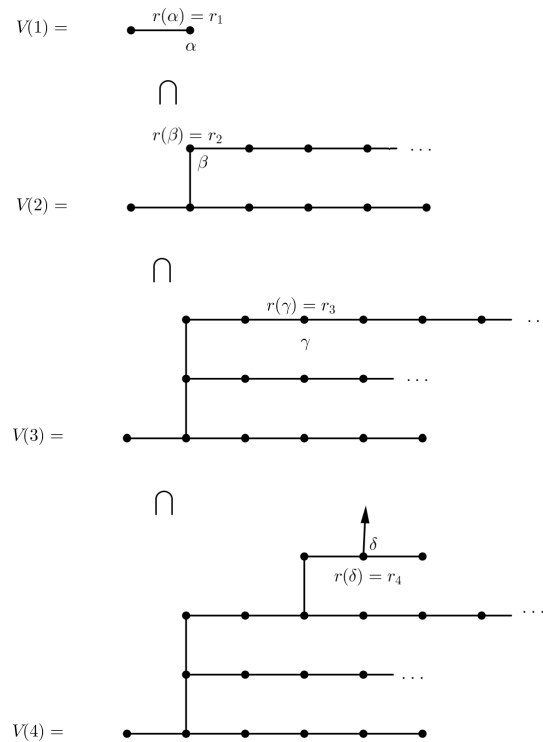
2. Si  $X = (y^2 - x^3)(x^2 - y^3)$ ; la cúspide doble (ejemplo 2 de [4.1.1](#)), la filtración polar consta de dos elementos. Se tienen tres puntos de ruptura y dos cocientes polares:  $r_1 = \frac{1}{5}$ ,  $r_2 = \frac{1}{4}$ :



3. Cuando la curva tiene más de un exponente característico (ejemplo 3 de [4.1.1](#)) entonces la filtración polar de la gráfica dual tiene más de un elemento. Si  $X = \{(y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0\}$ , el conjunto de cocientes polares es el siguiente:  $r_1 = \frac{1}{6}$ ,  $r_2 = \frac{2}{13}$  y la filtración polar tiene dos elementos:



4. Un ejemplo que ilustra el caso general es considerar  $\{r_1 > r_2 > r_3 > r_4\}$  cocientes polares con cuatro puntos de ruptura  $\{\alpha > \beta > \gamma > \delta\}$  en la gráfica dual, los elementos de la filtración en  $V$ ,  $V(i)$ ; están determinados por los puntos de ruptura:



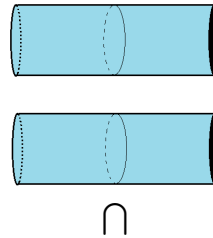


### 4.2.2. Ejemplos: Filtración Polar de la fibra de Milnor de $f$ .

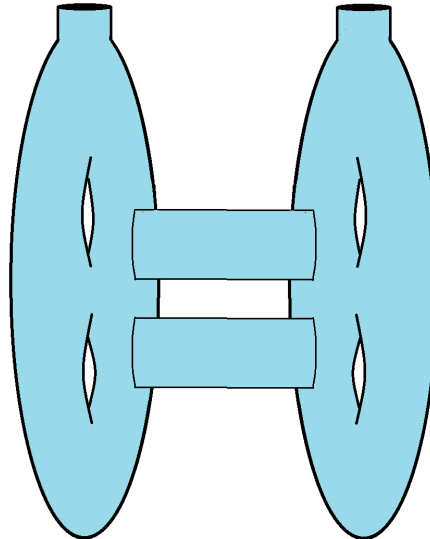
Considerando la construcción de la Fibra de Milnor vista en el capítulo 3, podemos construir la filtración Polar para curvas irreducibles o reducibles:

- La Cúspide Doble:  $X = (y^2 - x^3)(x^2 - y^3)$  (ejemplo 2 de [4.1.1](#)).

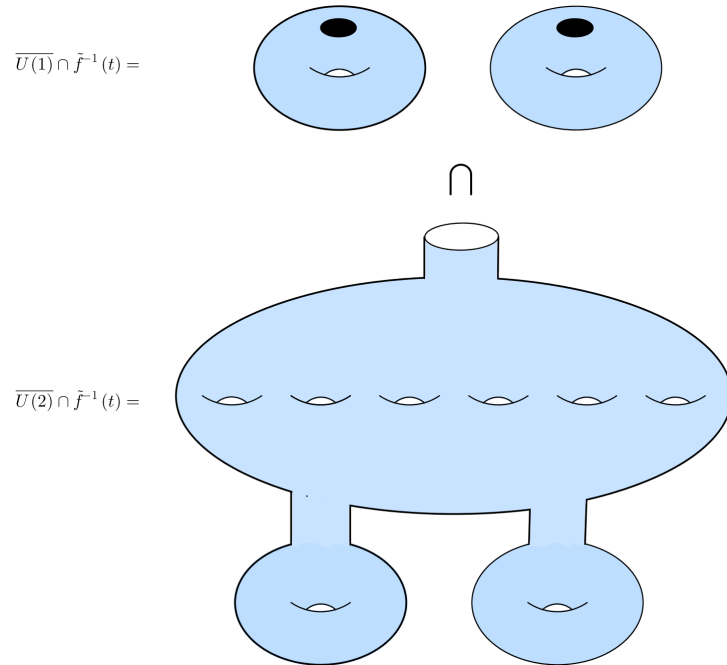
$$\overline{U(1)} \cap \tilde{f}^{-1}(t) =$$



$$\overline{U(2)} \cap \tilde{f}^{-1}(t) =$$



- Curva Irreducible con más de un cociente Polar:  $X = \{(y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0\}$  (ejemplo 3 de [4.1.1](#))





# Capítulo 5

## Reducción Semiestable.

**Teorema 5.0.1 (Teorema de Reducción Semiestable [7])** *Sea  $K$  un campo de característica cero algebraicamente cerrado. Sea  $B$  un abierto de una curva no singular sobre  $K$ , fije  $o \in B$  y sea  $U = B \setminus \{o\}$ .*

*Supongamos que  $\tilde{f} : X \rightarrow B$  es un morfismo suprayectivo de una variedad  $X$  a  $B$  tal que la restricción a  $U$  es suave. Entonces existe un cambio de base finito  $\pi' : B' \rightarrow B$  con  $B'$  no singular y  $o' = \pi'^{-1}\{o\}$ , así como una variedad o sigular  $X'$  tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 X' & & \\
 \downarrow n & \searrow p & \\
 B' \times_B X & \longrightarrow & X \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow \tilde{f} \\
 B' & \xrightarrow{\pi'} & B
 \end{array}$$

*tiene las siguientes propiedades:*

1. *Si  $U' = B' \setminus o'$  entonces  $n$  es un isomorfismo sobre  $U'$ .*
2. *La imagen inversa de  $o'$  bajo  $p_2 \circ n$  es un esquema reducido el cual es un divisor a cruzamientos normales en  $X'$ .*

Lo anterior, para el caso de curvas planas reducidas, se construye a partir de la resolución minimal  $Z \rightarrow \mathbb{C}^2$  de  $f$ , una superficie  $\tilde{Z}$  y un mapeo finito  $\tilde{Z} \xrightarrow{p} Z$  de tal forma que, la imagen inversa del divisor  $E$  es un divisor  $\tilde{E}$ , tal que la multiplicidad de cada componente es 1 y además, refleja la topología de la fibra de Milnor.

Consideremos  $d$  el mínimo común múltiplo de los  $d_\alpha$  con  $\alpha \in V$ . Sea  $\tilde{Z}$  la normalización del producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & & \\
 \downarrow n & \searrow p & \\
 Z \times_{\mathbb{C}} \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow \tilde{f}=f \circ \pi \\
 \tilde{\mathbb{C}} & \xrightarrow{t \rightarrow t^d} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

Entonces  $\tilde{Z}$  es una superficie con singularidades de tipo cociente cíclico y  $p$  es la cubierta cíclica correspondiente;  $\tilde{E} = p^{-1}(E)$  es un divisor reducido a cruzamientos normales en  $\tilde{Z}$ , de esta forma,  $E$  es un retracts por deformación de  $Y_t := p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(t))$ .

A nivel de la superficie  $\tilde{Z}$ , en las componentes de  $\tilde{E}$  existe una función entre los divisores  $\tilde{E}_\alpha = p^{-1}(E_\alpha) \rightarrow E_\alpha$  de grado  $d_\alpha$ , esto restringiendo  $p$ .

## 5.1. Algoritmo para construir la gráfica dual $\tilde{V}$ de la reducción semiestable

La gráfica dual  $\tilde{V}$  de  $\tilde{E}$  refleja el comportamiento del morfismo  $p \circ \tilde{f}$ :

**Proposición 5.1.1** *Existe una función finita a uno  $p_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V$  tal que*

- *La imagen inversa de un vértice  $\alpha \in V$  son  $n_\alpha$  vértices, con*

$$n_\alpha = \text{Mcd}(\{d_\beta \mid \alpha \text{ está conectado con } \beta \in V\} \cup \{d_\alpha\}). \quad (5.1)$$

## 5.1 Algoritmo para construir la gráfica dual $\tilde{V}$ de la reducción semiestable 77

- La imagen inversa de una arista  $\overline{\alpha\beta}$  son  $k_\alpha$  aristas, con

$$k_\alpha = \text{Mcd}(d_\alpha, d_\beta). \quad (5.2)$$

*Demostración:* Consideremos el caso de un divisor  $E_\alpha$  con multiplicidad  $d_\alpha$  que sólo interseca a un divisor  $E_\beta$  con multiplicidad  $d_\beta$ . Tomemos coordenadas  $(z_1, z_2)$  alrededor de la intersección  $E_\alpha \cap E_\beta$  en un abierto  $U_{\alpha\beta}$ , luego  $\tilde{U}_{\alpha\beta}$  la normalización de  $U_{\alpha\beta} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$  es isomorfo a un abierto analítico de la normalización de

$$\{(t, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^{d_\alpha} z_2^{d_\beta} = t^d\}.$$

Si  $n_{\alpha\beta} = \text{Mcd}(d_\alpha, d_\beta)$  tenemos que

$$z_1^{d_\alpha} z_2^{d_\beta} = t^d \iff (z_1^{e_\alpha} z_2^{e_\beta})^{n_{\alpha\beta}} = (t^e)^{n_{\alpha\beta}}$$

teniendo que la normalización del anillo

$$\mathbb{C}[z_1, z_2, t] / (z_1^{d_\alpha} z_2^{d_\beta} - t^d)$$

son  $n_{\alpha\beta}$  copias de la normalización del anillo

$$\mathbb{C}[z_1, z_2, t] / (z_1^{e_\alpha} z_2^{e_\beta} - t^e).$$

Por tanto, la imagen inversa de  $E_\alpha$  tiene  $n_{\alpha\beta}$  componentes.

Para el caso en que haya más de un divisor excepcional intersectando a  $E_\alpha$ , digamos  $E_{\beta_1}, \dots, E_{\beta_k}$  se procede del mismo modo para

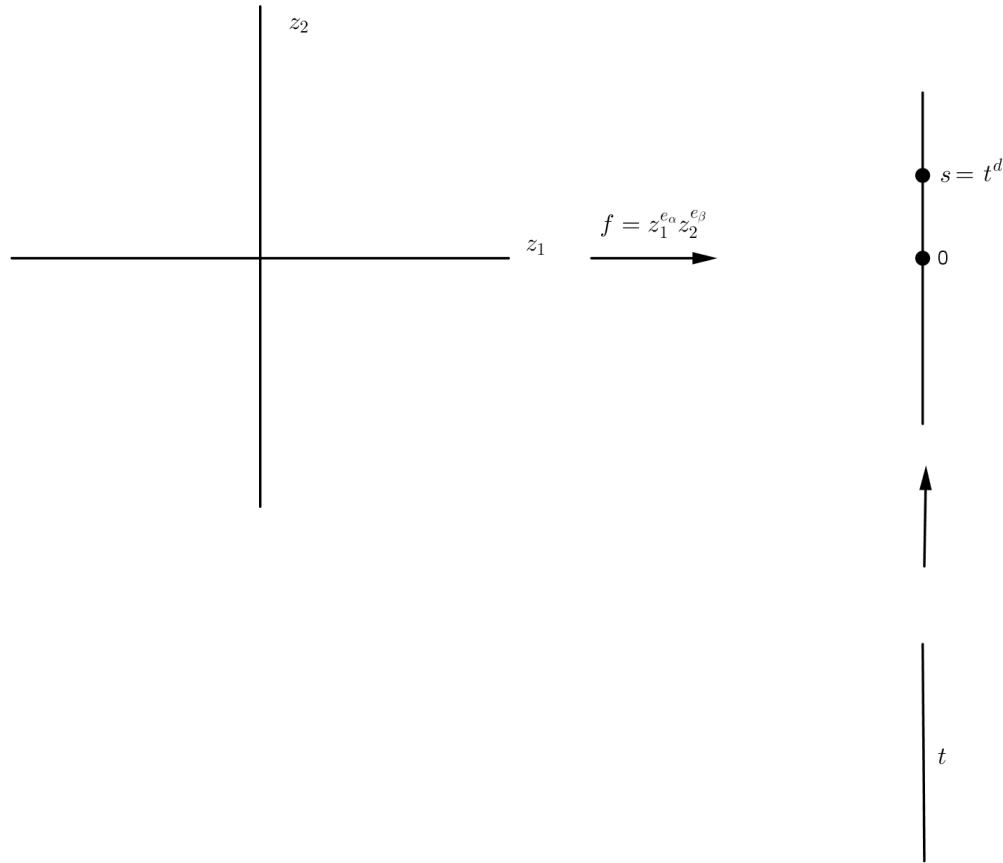
$$\{(t, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid (z_1 - x_1)^{d_{\beta_1}} \dots (z_1 - x_k)^{d_{\beta_k}} z_2^{d_\alpha} = t^d, \text{ con diferentes } x_1, \dots, x_k\}.$$

De modo que la imagen inversa de  $E_\alpha$  tiene  $n_{\alpha\beta_1 \dots \beta_k}$  componentes, donde

$$n_{\alpha\beta_1 \dots \beta_k} = \text{Mcd}(d_\alpha, d_{\beta_1}, \dots, d_{\beta_k}).$$

Para ver que la imagen inversa de un divisor  $E_\alpha$  es reducida, consideremos coordenadas locales  $(z_1, z_2)$  alrededor de la intersección  $E_\alpha \cap E_\beta$  en un abierto  $U_{\alpha\beta}$ .

Luego, la fibra no singular de  $f$  en  $Z$  es de la forma  $z_1^{d_\alpha} z_2^{d_\beta} = t^d$ .



Tomando  $\xi$  la  $n_{\alpha\beta}$ -ésima raíz de la unidad tenemos que  $z_1^{d_\alpha} z_2^{d_\beta} - t^d = 0$  se factoriza como

$$(z_1^{e_\alpha} z_2^{e_\beta} - t^e)(z_1^{e_\alpha} z_2^{e_\beta} - \xi t^e) \cdots (z_1^{e_\alpha} z_2^{e_\beta} - \xi^{n_{\alpha\beta}-1} t^e),$$

donde  $e_\alpha$  y  $e_\beta$  son primos relativos que dividen a  $e$ . Teniendo así  $n_{\alpha\beta}$  componentes que se intersectan de forma transversal dos a dos. Lo anterior implica que al normalizar se separan en componentes ajenas. Debido a que el divisor excepcional es un retracts por deformación de la fibra no singular, entonces  $E_\alpha$  tiene como imagen inversa  $n_{\alpha\beta}$  componentes ajenas.

Sin pérdida de generalidad tomemos la primera componente de la fibra no singular

$$S_1 = \{z_1^{e_\alpha} z_2^{e_\beta} = t^e\} \subset \mathbb{C}^3.$$

Considerando que  $e_\alpha$  y  $e_\beta$  son primos relativos que dividen a  $e$  entonces  $e_\alpha e_\beta$  divide

a  $e$ . Entonces existe  $u \in \mathbb{N}$  tal que  $ue_\alpha e_\beta = e$ . Luego la siguiente función  $\psi$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (w_1, w_2) &\mapsto (w_1^{ue_\beta}, w_2^{ue_\alpha}, w_1 w_2) \end{aligned}$$

parametriza una superficie  $S_1 \subset \mathbb{C}^3$  con coordenadas  $(z_1, z_2, t)$  definida por la ecuación

$$t = w_1 w_2.$$

Ahora, si  $t = 0$  tenemos que  $w_1 = 0, w_2 = 0$  es un divisor reducido para  $t = 0$  el cual es un retracts por deformación de la fibra no singular. De este modo el género de los divisores excepcionales es el mismo que el género aportado a la fibra de Milnor por la vecindad  $\tilde{T}_\alpha$  vista en el capítulo 2.

En el caso donde hay más de un divisor excepcional intersectando a  $E_\alpha$ , digamos  $E_{\beta_1}, \dots, E_{\beta_k}$ , se procede de forma análoga.  $\square$

El orden parcial de  $\tilde{V}$  se levanta a  $\tilde{V}: \tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$ , si y sólo si, existe una cadena de  $\tilde{\beta}$  a  $\tilde{\alpha}$  cuya imagen bajo  $p_{\tilde{V}}$  es una cadena decreciente en  $V$  de  $p_{\tilde{V}}(\alpha)$  a  $p_{\tilde{V}}(\beta)$ .

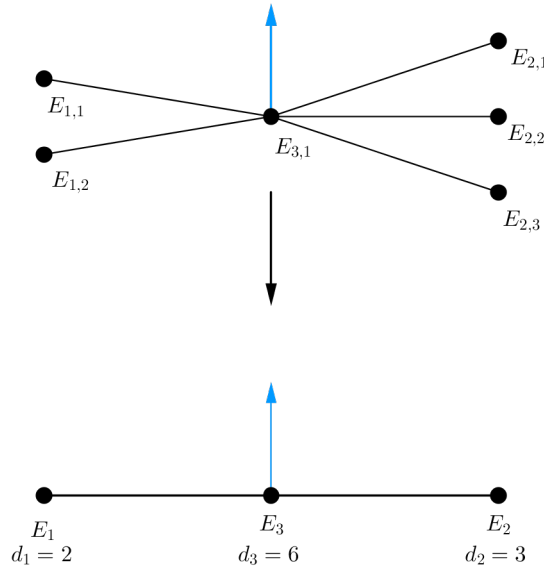
## 5.2. Ejemplos de la reducción semiestable a nivel de la gráfica dual

1. *La cúspide.* A nivel de los divisores excepcionales, existen funciones

- $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_{1,1} \cup \tilde{E}_{1,2} \longrightarrow E_1$  de grado 2.
- $\tilde{E}_3 = \tilde{E}_{3,1} \longrightarrow E_3$  de grado 6.
- $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_{2,1} \cup \tilde{E}_{2,2} \cup \tilde{E}_{2,3} \longrightarrow E_2$  de grado 3.

La gráfica dual se levanta de la siguiente forma,

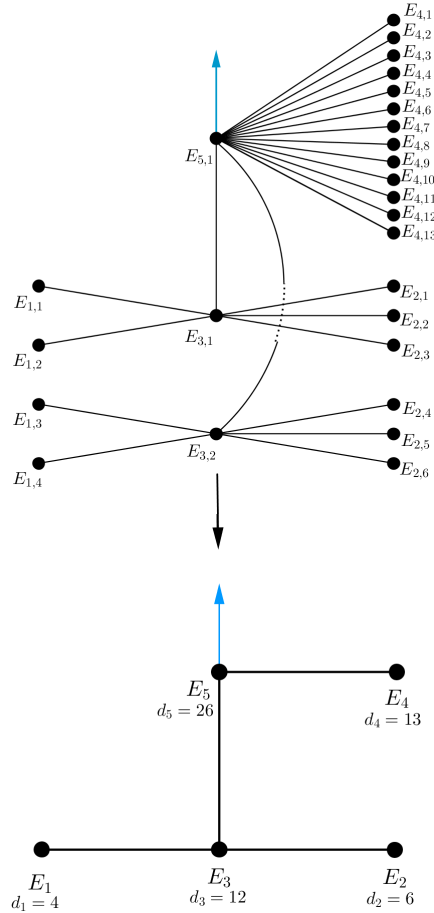




2. Análogamente, para una curva irreducible con más de un exponente de Pui-seux, por ejemplo;  $X = \{(y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7 = 0\}$ , a nivel de los divisores excepcionales existen funciones

- $\tilde{E}_1 = \cup_{i=1}^4 \tilde{E}_{1,i} \longrightarrow E_1$  de grado 4.
- $\tilde{E}_3 = \tilde{E}_{3,1} \cup \tilde{E}_{3,2} \longrightarrow E_3$  de grado 12.
- $\tilde{E}_2 = \cup_{i=1}^6 \tilde{E}_{2,i} \longrightarrow E_2$  de grado 6.
- $\tilde{E}_5 = \tilde{E}_{5,1} \longrightarrow E_5$  de grado 26.
- $\tilde{E}_4 = \cup_{i=1}^{13} \tilde{E}_{4,i} \longrightarrow E_4$  de grado 13.

La gráfica dual se levanta de la siguiente forma,



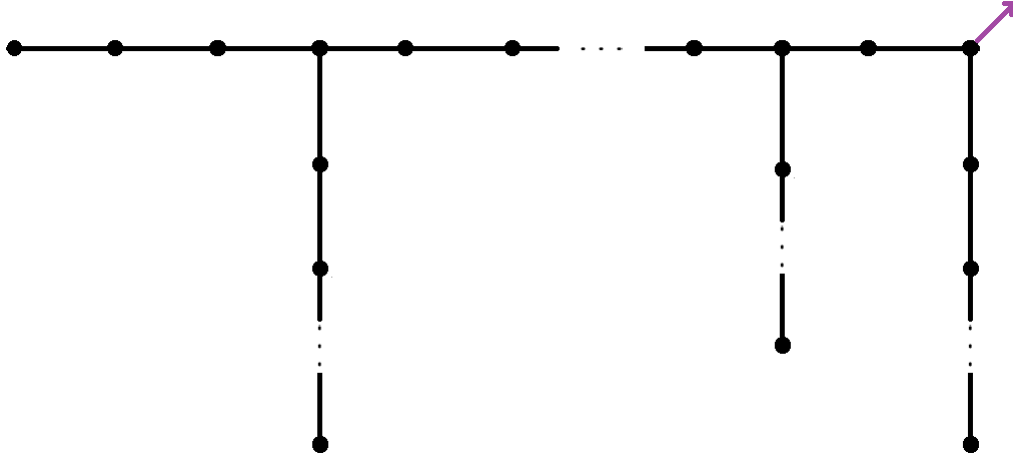
**Teorema 5.2.1** *La gráfica dual del divisor excepcional de la reducción semiestable asociada a una curva plana irreducible y reducida es un árbol.*

*Demostración:* Consideremos una curva  $X = \{f = 0\}$  con  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  una curva plana irreducible, reducida con singularidad en el origen.

Sea  $\pi : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$  la resolución mínima de  $X$  construida a partir de una serie de explosiones tal que  $E = \pi^{-1}(0)$  es un divisor a cruzamientos normales en  $Z$ .

Supongamos que  $E = \sum d_\alpha E_\alpha$  donde  $d_\alpha \in \mathbb{N}$  es la multiplicidad del divisor  $E_\alpha$ , la cual se puede calcular iterando el algoritmo de la división, a partir de la expansión de Puiseux de  $X$ .

Recordemos de la sección 2.2 que la gráfica dual  $V$  de la resolución minimal es un árbol de la forma:



Notemos que para cada nodo  $\alpha$  en  $V$  se pueden tener los siguientes casos:

- $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 3$  ó  $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 2$  y  $E_\alpha \cap \tilde{X} \neq \emptyset$ .
- $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 2$ .
- $\#\{\beta \mid E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset\} = 1$ , i.e.,  $\alpha$  es un punto final.

Haciendo un análisis de la imagen inversa de las aristas y los nodos de  $V$  vía la reducción semiestable, se tiene que tanto el número de nodos como aristas, están determinados por los máximo comunes divisores de los nodos adyacentes [5.1.1](#).

Al inicio del proceso de desingularización de  $X$  y, hasta el primer punto de ruptura, el análisis de la imagen inversa de la gráfica dual será muy similar al compararse con los demás puntos de ruptura; para la primera parte pasa lo siguiente:

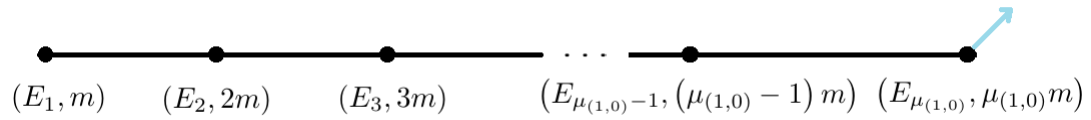
Supongamos que  $X$  tiene la siguiente expansión de Puiseux, como en [2.1](#)

$$\begin{aligned} x(t) &= t^m \\ y(t) &= a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots + a_j t^{k_j} + \dots + a_s t^{k_s} \end{aligned} \quad (5.3)$$

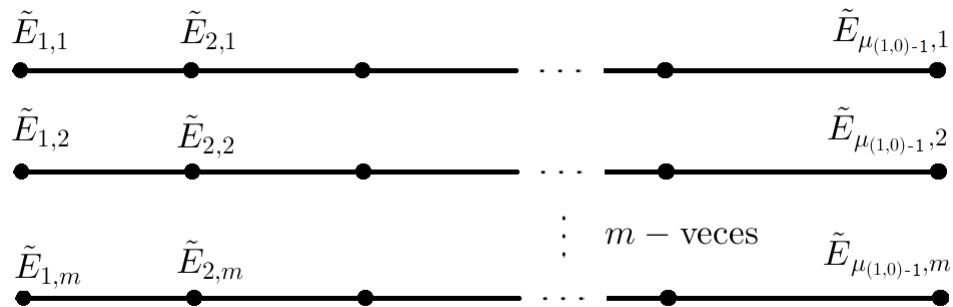
Luego el algoritmo de la división nos arroja ciertas relaciones a partir de  $m$  y  $k_1$  como en [2.6](#):

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu_{(1,0)} \cdot m + r \\ m &= \mu_{(1,1)} \cdot r + r_{(1,1)} \\ r &= \mu_{(1,2)} \cdot r_{(1,1)} + r_{(1,2)} \\ &\vdots \\ r_{(1,n_{k_1}-2)} &= \mu_{(1,n_{k_1})} \cdot r_{(1,n_{k_1}-1)} + r_{(1,n_{k_1})} \\ r_{(1,n_{k_1}-1)} &= \mu_{(1,n_{k_1}+1)} \cdot r_{(1,n_{k_1})} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para la primera relación tenemos que las multiplicidades de los primeros  $\mu_{(1,0)}$  divisores son como se muestra en la figura:



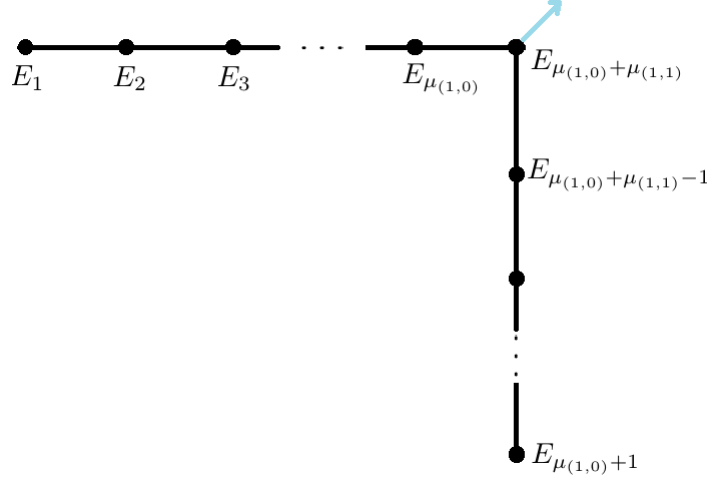
Luego, por lo obtenido en [5.2](#) y [5.1](#) tenemos que, la gráfica dual de  $\tilde{V}$  hasta el  $\mu_{(1,0)} - 1$  divisor excepcional no tiene ciclos y tiene la siguiente forma:



Para la segunda relación  $m = \mu_{(1,1)} \cdot r + r_{(1,1)}$ , se tiene que la transformada estricta de  $X$  tiene la siguiente expansión de Puiseux:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^m \\ y(t) &= a_1 t^r + a_2 t^{k_2 - \mu_{(1,0)} \cdot m} + \dots, \end{aligned}$$

luego el proceso de desingularización produce la siguiente parte de la gráfica dual  $V$ :



con multiplicidades  $\{\mu_{(1,0)} \cdot m + r, 2(\mu_{(1,0)} \cdot m + r), \dots, \mu_{(1,1)}(\mu_{(1,0)} \cdot m + r)\}$ , i.e.;  $\{k_1, 2k_1, \dots, \mu_{(1,1)}k_1\}$ , para los divisores  $E_{\mu_{(1,0)}+1}, E_{\mu_{(1,0)}+2}, \dots, E_{\mu_{(1,0)}+\mu_{(1,1)}}$ , respectivamente.

Para esta segunda relación tenemos que en la gráfica dual  $\tilde{V}$  tampoco hay ciclos pues si  $2 \leq i \leq \mu_{(1,1)} - 1$  entonces  $\text{mcd}\{(i-1)k_1, ik_1, (i+1)k_1\} = k_1$  luego, la imagen inversa de los nodos  $E_{\mu_{(1,0)}+i}$  serán  $k_1$  nodos y habrán  $k_1$  aristas entre ellos.

Notemos que en el tercer paso, de forma inductiva se ve lo que pasa en las demás relaciones, la multiplicidad del divisor  $E_{\mu_{(1,0)}+\mu_{(1,1)}+1}$  es  $k_1 + m + r$  y en este paso se tendrán  $\mu_{(1,2)}$  divisores excepcionales. Además

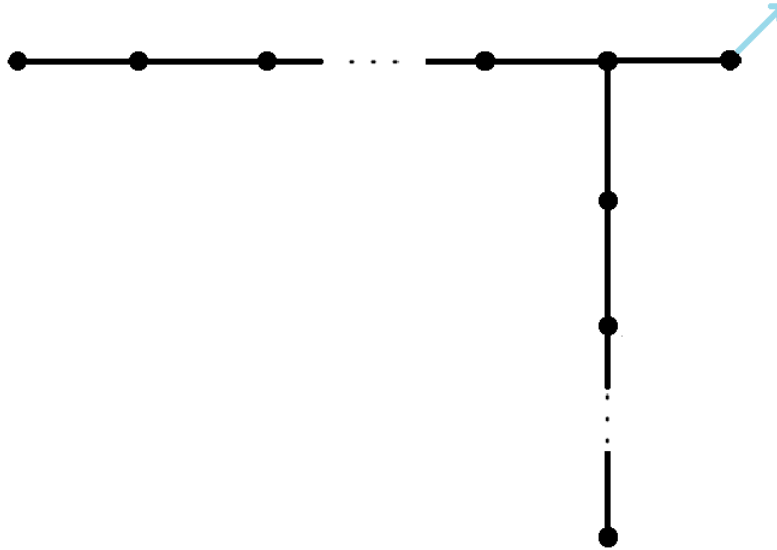
$$\text{mcd}\{k_1 + m + r, \mu_{(1,0)}m, (\mu_{(1,0)} - 1)m\} < m$$

luego, la imagen inversa del divisor excepcional  $E_{\mu_{(1,0)}}$  es menor a  $m$  pero tendrá la misma cardinalidad que la imagen inversa de  $E_{\mu_{(1,0)}+\mu_{(1,1)}+1}$  así como la imagen inversa de la arista que los conecta, teniendo así que no hay ciclos y, siguiendo iterativamente este proceso, tenemos que la gráfica dual  $\tilde{V}$  es un árbol hasta el primer punto de ruptura.

Después del primer punto de ruptura, se tiene que la transformada estricta de  $X$  tiene la siguiente expresión de Puiseux:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{r(1, n_{k_1})} + \text{términos de mayor orden} \\ y(t) &= c_1 + c_2 t^{k_2 - k_1} + \text{términos de mayor orden.} \end{aligned}$$

La gráfica dual hasta este primer algoritmo de Euclides es de la siguiente forma:



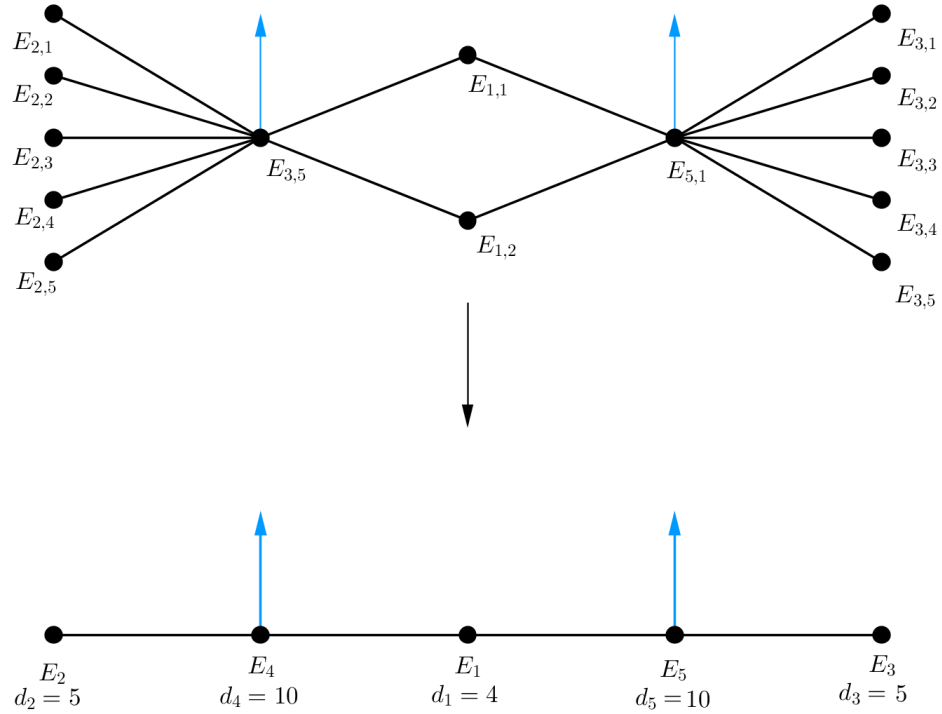
Lo cual nos lleva a un proceso análogo a la primera parte del algoritmo de Euclides pero con los exponentes  $r_{(1, n_{k_1})}$  y  $k_2 - k_1$  y, análogamente para  $k_1$  y  $m$  se tiene que no habrá ciclos para esta parte de la gráfica  $\tilde{V}$ .

El proceso se repite para todos los puntos de ruptura, obteniendo de forma iterativa que toda la gráfica dual  $\tilde{V}$  es un árbol.  $\square$

Lo anterior nos lleva a cuestionarnos sobre las condiciones sobre el germen de una curva con varias componentes para que la gráfica dual de la reducción semiestable tenga ciclos.

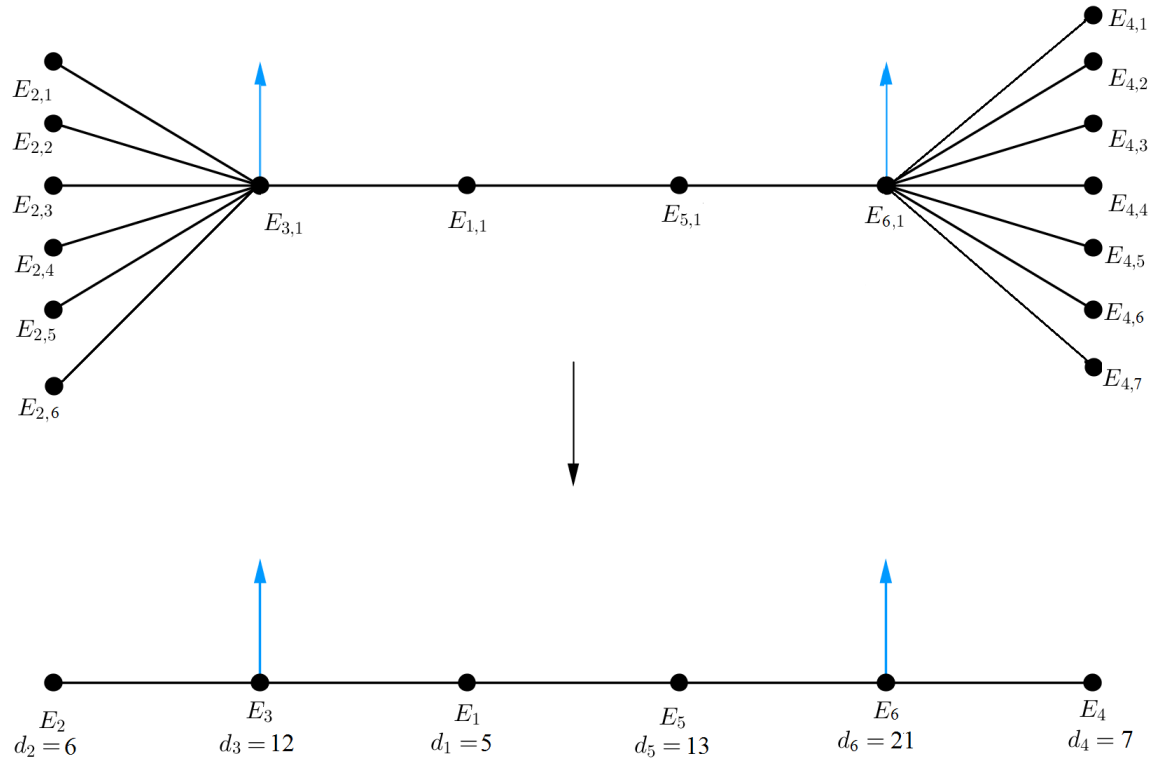
**Ejemplo 5.2.2** Para ilustrar lo anterior consideremos la reducción semiestable asociada a las siguientes curvas con más de una componente irreducible:

- La cúspide doble:  $X = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid (y^2 - x^3)(x^3 - y^2) = 0\}$



*Cabe notar que para la cúspide doble, el primer grupo de homología de la gráfica dual de la reducción semiestable es  $\mathbf{Z}$ .*

- $X = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid (y^2 - x^3)(x^3 - y^5) = 0\}$ :



A diferencia de la cúspide doble, en este caso tenemos que la gráfica dual es un árbol y, por tanto su primer grupo de homología de la gráfica dual es trivial.

**Conjetura 5.2.3** Dado un germen de curva plana reducida y monodromía semisimple se tiene que la gráfica dual del divisor excepcional de la reducción semiestable es un árbol.





# Capítulo 6

## Estructura de Hodge de una Curva Plana Reducida.

### 6.1. Estructura de Hodge Mixta de la Fibra de Milnor.

**Definición 6.1.1** Una estructura de Hodge mixta consiste en

1. un  $\mathbf{Z}$ -módulo finitamente generado  $H$ ,
2. una filtración creciente  $W_\cdot$  de  $H_{\mathbf{Q}} = H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  (filtración por peso),
3. una filtración decreciente  $F_\cdot$  de  $H_{\mathbf{C}} = H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$  (filtración de Hodge),

de manera que, para todo  $m$ , la filtración  $F$  induce sobre  $Gr W_m H = W_m/W_{m-1}$  una Estructura de Hodge pura de peso  $m$ .

#### 6.1.1. Estructuras de Hodge Mixtas Asociadas a Singularidades Aisladas.

Sea  $(X, x)$  un subconjunto analítico de una bola lo suficientemente pequeña en  $\mathbf{C}^n$  con singularidad aislada en  $x$ . Sea  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  una resolución de  $x$ , donde  $\pi$  es propia y bimeromorfa. Supongamos que  $\pi$  es un biholomorfismo entre  $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}\{x\}$  y  $X \setminus \{x\}$ . Asumamos que  $D = \pi^{-1}\{x\}$  es la unión de divisores suaves

con cruzamientos normales en  $\tilde{X}$ . En este apartado daremos una descripción de los grupos de cohomología de  $H^*(D)$ ,  $H_D^*(\tilde{X})$  y  $H_{\{x\}}^*(X)$  como en ([13]).

### Estructura de Hodge Mixta de $H^*(D)$ .

Consideremos un acomodo de las componentes de  $D$ ,  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$ . Para  $q \geq 1$  sea  $\tilde{D}^{(q)}$  la unión disjunta de todas las  $q$ -intersecciones de las componentes de  $D$ :

$$\tilde{D}^{(q)} = \sqcup_{i_1 < \dots < i_q} D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_q}.$$

Sea  $\delta_j : \tilde{D}^{(q)} \rightarrow \tilde{D}^{(q-1)}$  funciones naturales para  $j = 1, \dots, q$  dadas por las inclusiones

$$D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_q} \subset D_{i_1} \cap \dots \cap D_{j-1} \cap D_{j+1} \dots \cap D_{i_q}.$$

Consideremos las proyecciones  $a_q : \tilde{D}^{(q)} \rightarrow D$ . Para  $p, q \geq 0$  sea  $A_D^{p,q} = (a_{q+1})_* \Omega_{\tilde{D}^{(q+1)}}^p$ . Sean  $d' : A_D^{p,q} \rightarrow A_D^{p+1,q}$  la diferencial en  $(a_{q+1})_* \Omega_{\tilde{D}^{(q+1)}}^p$  y  $d'' = \sum_{j=1}^{q+1} \delta_j^*$ .

Luego  $(A^\cdot, d', d'')$  es un complejo doble de gavillas cuyo complejo total es una resolución de la gavilla constante  $\mathbb{C}_D$ . Este complejo doble carga con filtraciones dadas por  $W$  y  $F$  dadas por

$$F^p A^\cdot = \bigoplus_{r \geq p} A_D^r \text{ y } W_q A^\cdot = \bigoplus_{s \geq -q} A_D^s$$

las cuales además inducen una filtración de Hodge y una filtración por peso en  $H^*(D, \mathbb{C})$ . La filtración por peso también está bien definida sobre  $\mathbb{Q}$ . aún así la convención usual propuesta en ([13]) es tomar:

- $F^p H^k(D, \mathbb{C})$  es la imagen de  $\mathbb{H}^k(D, F^p A_D)$  en  $H^k(D, \mathbb{C})$ .
- $W_r H^k(D, \mathbb{C})$  es la imagen de  $\mathbb{H}^k(D, W_{r-k} A_D)$  en  $H^k(D, \mathbb{C})$ .

### Estructura de Hodge Mixta de $H_D^*(\tilde{X})$ .

Consideremos el complejo de gavillas  $\Omega_{\tilde{X}}(\log D)$ . Luego obtenemos explícitamente filtraciones  $W$  y  $F$  dadas por

$$W_k \Omega_{\tilde{X}}^p(\log D) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \Omega_{\tilde{X}}^{p-k} \wedge \Omega_{\tilde{X}}^k(\log D) & \text{si } 0 \leq k \leq p \\ \Omega_{\tilde{X}}^p(\log D) & \text{si } k > p \end{cases}$$

$$F^r \Omega_{\tilde{X}}^p(\log D) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < r \\ \Omega_{\tilde{X}}^p(\log D) & \text{si } p \geq r. \end{cases}$$

Luego se define

$$\begin{aligned} A_D^p(\tilde{X}) &= \Omega_{\tilde{X}}^{p-1}(\log D) / \Omega_{\tilde{X}}^{p-1} \\ W_k A_D^p(\tilde{X}) &= W_{k+1} \Omega_{\tilde{X}}^{p+1}(\log D) / \Omega_{\tilde{X}}^{p+1} \\ F^r A_D^p(\tilde{X}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } p < r \\ A_D^p(\tilde{X}) & \text{si } p \geq r. \end{cases} \end{aligned}$$

Obteniéndose que  $(A_D(\tilde{X}, W, F))$  determinan la estructura de Hodge mixta en  $H_D^*(\tilde{X}, \mathbb{C})$  ([13]).

### Estructura de Hodge Mixta de $H_{\{x\}}^*(X)$ y el Complejo Cono.

Consideremos  $\tau : B \rightarrow A$  un morfismo de complejos de gavillas, donde  $(d \circ \tau)(b) = \epsilon(\tau \circ d)(b)$  y  $\epsilon = \pm 1$ . Se define el complejo cono  $C_\tau$  como sigue

$$C_\tau^m = B^m \oplus A^{m-1} \text{ y } d_C(b, a) = (-\epsilon d_B(b), d_A(a) + \tau(b)). \quad (6.1)$$

Lo anterior da lugar a una sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow A^{-1} \rightarrow C_\tau \rightarrow B \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

Si además  $A$  y  $B$  cargan con filtraciones  $W$  y  $F$  tal que  $\tau$  es compatible con dichas filtraciones entonces  $C_\tau$  hereda de forma *mixta* dos filtraciones  $W_C$  y  $F_C$ :

$$F^k C_\tau^m = F^k B^m \oplus F^k A^{m-1} \quad (6.3)$$

$$W_r C_\tau^m = W_r B^m \oplus W_{r+1} A^{m-1}. \quad (6.4)$$

**Definición 6.1.2** Al complejo  $(C_\tau, W_C, F_C)$  se le llama cono de  $\tau$ .

En ([13]) se demuestra que si  $\tau$  es inyectiva entonces se tiene un cuasi-isomorfismo de complejos via la proyección de la segunda coordenada a su clase de equivalencia:

$$\begin{aligned} \lambda : C_\tau &\rightarrow A^{-1}/\tau(B^{-1}) \\ (b, a) &\mapsto [a]. \end{aligned}$$

Con la notación anterior consideremos los morfismos de complejos:

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_{\tilde{X}} &\longrightarrow A_D(\tilde{X}) \\ \omega &\longmapsto a_1^*(\omega) \end{aligned}$$

y la inclusión

$$i : \Omega_{\tilde{X}} \longrightarrow \Omega_{\tilde{X}}(\log D).$$

Como  $i$  es inyectiva, entonces el cokernel de  $i$  cumple que  $Coker_i[-1] \simeq A_D(\tilde{X})$ . Por tanto

$$\mathbb{H}(C_i) \simeq H_D^n(\tilde{X}).$$

Más aún y con argumentos similares, se demuestra en ([4]) que  $H_{\{x\}}^*(X) \simeq \mathbb{H}^*(C_{(i,\phi)})$  donde  $(i, \phi) : \Omega_{\tilde{X}} \longrightarrow \Omega_{\tilde{X}}(\log D) \oplus A_D(\tilde{X})$ . Pues  $C_{(i,\phi)}$  es cuasi-isomorfo a  $Coker_{(i,\phi)}[-1]$ .

Cabe notar dos cosas:

1.  $C_i$  y  $C_{(i,\phi)}$  no son parte de complejos de Hodge cohomológicos, pero son cuasi-isomorfos a complejos soportados en  $D$  y que sí provienen de complejos de Hodge.
2. Los complejos anteriores no dependen de la resolución  $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$  ([13]).

### Estructura de Hodge Mixta para la Cohomología Evanesciente.

Consideremos de forma análoga al capítulo 5, para el proceso de reducción semiestable, una función plana  $f : U \subset \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}$ , donde  $U$  es contraíble. Suponga que existe  $x \in U$  tal que  $f(x) = 0$  y fuera de  $x$  se tiene que  $f$  es de rango máximo. Sea  $X = f^{-1}\{0\}$  y supongamos que  $f$  induce una fibración diferenciable sobre el disco agujerado  $S \setminus \{0\}$ . Denotamos  $Y_\infty$  a la fibra suave de dicha fibración.

Por el teorema de reducción semiestable, existe un número natural  $e$  y una variedad compleja  $\tilde{Z}$  con las siguientes propiedades:

- Si  $\tilde{S}$  es una copia del disco y  $\tilde{S} \rightarrow S$  donde  $t \mapsto t^e$ , entonces  $\tilde{Z}$  admite funciones holomorfas  $\tilde{p}$  a  $U$  y  $\tilde{\pi}$  a  $\tilde{S}$ .
- La función  $\tilde{\pi}$  resuelve las singularidades de la fibra especial del producto directo  $U \times_S \tilde{S}$ .
- $\tilde{\pi}^{-1}\{0\}$  es un divisor reducido con cruzamientos normales en  $\tilde{Z}$ .

Sea  $\tilde{E} = \tilde{p}^{-1}(\{x\})$  y  $\tilde{Y}$  la clausura en  $\tilde{Z}$  de  $\tilde{p}^{-1}(X \setminus \{x\})$ . Entonces  $\tilde{Y}$  es una resolución de  $X$  con divisor excepcional  $D = \tilde{Y} \cap E$ .

Recordemos que la trivialización local de  $f$  sobre el disco agujerado da lugar a una monodromía geométrica  $h : Y_\infty \rightarrow Y_\infty$ ; la cual se puede construir de tal forma que  $h$  sea la identidad fuera de un compacto de  $U$  ([14]). La función  $w \mapsto h^*(w)$  induce transformaciones

$$T : H^*(Y_\infty) \longrightarrow H^*(Y_\infty) \text{ y } T_c : H_c^*(Y_\infty) \longrightarrow H_c^*(Y_\infty).$$

Como  $Y_\infty$  es una variedad Stein de dimensión  $n$ , se tiene que  $H^k(Y_\infty) = 0$  si  $k > n$  y  $H_c^k(Y_\infty) = 0$  si  $k < n$ . Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\dots \longrightarrow H_{\{x\}}^k(X) \longrightarrow H_c^k(Y_\infty) \longrightarrow H^k(Y_\infty) \longrightarrow H_{\{x\}}^{k+1}(X) \longrightarrow \dots$$

la cual induce una sucesión exacta de Estructuras de Hodge Mixtas, i.e, un complejo de gavillas que respeta las Estructuras de Hodge de cada componente del complejo.

Consideremos  $A^\cdot$  el complejo de gavillas soportado en  $\tilde{Y} \cup \tilde{E}$  como se define en ([14]) considerando las filtraciones análogas a [6.1.1]

$$A^{p,q} = \Omega_{\tilde{Z}}^{p+q+1}(\log \tilde{Y} + \tilde{E}) / W_q \Omega_{\tilde{Z}}^{p+q+1}(\log \tilde{Y} + \tilde{E}),$$

donde  $d' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q}$  es inducida por la diferencial en  $\Omega_{\tilde{Z}}(\log \tilde{Y} + \tilde{E})$  y  $d'' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p,q+1}$  es inducida por el cup product con el pullback de la sección global  $\frac{dt}{t}$  para  $t$  un parámetro en el disco  $S$ .

Sean las siguientes filtraciones  $W$  y  $F$  en  $A^\cdot$ ,

$$\begin{aligned} F^p A^\cdot &= \bigoplus_{s \geq p} \bigoplus_q A^{s,q}, \\ W_r A^\cdot &= \bigoplus_{p,q} W_r A^{p,q}, \end{aligned}$$

donde  $W_r A^{p,q}$  es la imagen de  $W_{2q+r+1} \Omega_{\tilde{Z}}^{p+q+1}(\log \tilde{Y} + \tilde{E})$  en  $A^{p,q}$ .

Sea  $K_c^\cdot$  el subcomplejo de  $A^\cdot$  definido por:

$$\begin{aligned} K_c^{p,0} &= \Omega_{\tilde{Z}}^{p+1}(\log \tilde{E}) / W_0 \\ K_c^{p,q} &= A^{p,q} \text{ para } q > 0, \end{aligned}$$

con las filtraciones inducidas  $W$  y  $F$ .

Sea  $K^\cdot$  el complejo cociente de  $A^\cdot$  definido por:

$$K^{p,q} = \Omega_{\tilde{Z}}^{p+q+1}(\log \tilde{Y} + \tilde{E}) / \Omega_{\tilde{Z}}^1(\log \tilde{Y}) \wedge W_q \Omega_{\tilde{Z}}^{p+q}(\log \tilde{E}),$$

con las filtraciones inducidas  $W$  y  $F$ .

**Teorema 6.1.3 (Steenbrink, [13])** *Fijando la función coordenada  $t \in S$ . Existen isomorfismos naturales*

$$H^k(Y_\infty) \longrightarrow \mathbb{H}^k(K^\bullet) \text{ y } H_c^k(Y_\infty) \longrightarrow \mathbb{H}^k(K_c^\bullet), \quad (6.5)$$

tal que la función  $H_c^k(Y_\infty) \longrightarrow H^k(Y_\infty)$  es inducido por los morfismos de complejos

$$K_c^\bullet \hookrightarrow A^\bullet \rightarrow K^\bullet.$$

Las filtraciones respectivas  $W$  y  $F$  inducen estructuras de Hodge Mixtas en  $H_c^*(Y_\infty)$  y  $H^*(Y_\infty)$

### 6.1.2. Construcción Algebraica de la Filtración por Peso (polar) en el Divisor Excepcional.

En este apartado veremos la construcción hecha por Steenbrink y Zucker en ([15]) de forma algebraica. Consideremos  $p : \tilde{Z} \longrightarrow Z$  como en (5) y definamos  $\tilde{Y} = p^{-1}(\tilde{X})$ , y  $\tilde{r} : \tilde{V} \longrightarrow \mathbf{Q}$  componiendo con  $r$ .

Para  $I \subset \tilde{V}$  sea  $\tilde{E}_I = \bigcup_{\alpha \in I} \tilde{E}_\alpha$  e  $I' = \tilde{V} \setminus I$ . Definiremos un complejo de gavillas soportado en  $\tilde{E}_I$  de la siguiente forma:

$$K^*(I) = \left[ \mathcal{O}_{\tilde{E}_I} \xrightarrow{d} \omega_{\tilde{E}_I}(\delta_I) \right], \quad (6.6)$$

donde  $\omega_{\tilde{E}_I}$  es la gavilla dualizante de  $\tilde{E}_I$ , y  $\delta_I$  es el divisor de puntos de la intersección  $\tilde{E}_I \cap (\tilde{E}_{I'} \cup \tilde{Y})$ . Entonces, debido a que  $\tilde{Y} + \tilde{E}$  es un retracts por deformación de  $Y_t$ :

$$\mathbf{H}^*(K^\bullet(\tilde{V}(i))) \cong H^*(P_i, \mathbf{C}). \quad (6.7)$$

Lo cual le provee una estructura de Hodge mixta, via el complejo de gavillas soportado en  $\tilde{V}(i)$  como se define en ([14]) considerando las filtraciones análogas a 6.1.1 en particular para  $i = m$  recuperamos la estructura de Hodge mixta usual de la cohomología evanescente.

Para  $J \subset I$  tenemos lo siguiente:

$$\omega_{\tilde{E}_J}(\delta_J) \cong \omega_{\tilde{E}_I}(\delta_I) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{E}_J} \cong \omega_{\tilde{Z}}(\tilde{E} + Y) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{E}_J},$$

por lo cual tenemos una función suprayectiva

$$K^\bullet(I) \longrightarrow K^\bullet(J).$$

Denotemos  $K \cdot (I, J)$  el kernel de tal morfismo; i.e, el complejo siguiente:

$$\mathcal{O}_{\tilde{E}_{I-J}} \xrightarrow{d} \omega_{\tilde{E}_{I-J}} \left( \delta_I |_{\tilde{E}_{I-J}} \right). \quad (6.8)$$

Esto nos da un complejo de Hodge mixto vía la construcción como en la sección [6.1.1](#). La cual también nos da una estructura de Hodge mixta en la cohomología relativa. En particular,

$$\mathbf{H}^* \left( K \cdot \left( \tilde{V}(i), \tilde{V}(i-1) \right) \right) \cong H^*(P_i, P_{i-1}). \quad (6.9)$$

En el trabajo de Steenbrink-Zucker se hace notar que los puntos de ruptura son aquellos que realmente están aportando a cada nivel de la filtración polar. Esto nos motiva a considerar los siguientes conjuntos:

- $C_i = \{E_\alpha \mid \alpha \text{ es un punto de ruptura de } V \text{ y } r(\alpha) = r_i\}$ .
- $C'_i = p^{-1}(C_i)$  es una unión disjunta de componentes de  $\tilde{E}$ .
- $\Sigma'_i = \{C'_i \cap E_\beta \mid r(\beta) < r_i\}$ .
- $\tilde{C}_i = C_i \setminus \Sigma'_i$  es una curva suave.
- $\Sigma_i = \bigcup \{\tilde{C}_i \cap \tilde{E}_\beta \mid \tilde{r}(\beta) > r_i\}$ .

**Teorema 6.1.4 (Steenbrink-Zucker, [15])** *Existe un isomorfismo natural de estructuras de Hodge mixtas*

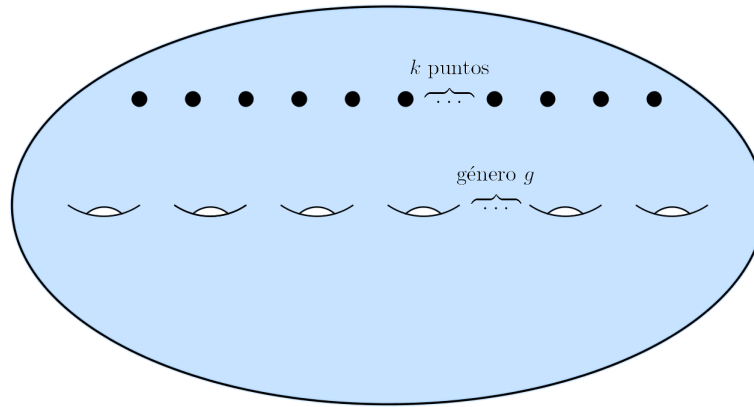
$$H^*(P_i, P_{i-1}) \xrightarrow{\cong} H^*(\tilde{C}_i, \Sigma_i). \quad (6.10)$$

*el cual transfiere la acción de la monodromía de  $H^*(P_i, P_{i-1})$  a la acción de la transformación cubriente  $\tilde{C}_i \rightarrow C_i$  en  $H^*(\tilde{C}_i, \Sigma_i)$ .*

### 6.1.3. Descripción Geométrica de la Estructura de Hodge Mixta (de Deligne) de Superficies de Riemann de género $g$ con agujeros.

Veamos que es posible construir una Estructura de Hodge Mixta para  $S$  una superficie de Riemann de género  $g$  a la cual se le han retirado  $k$  puntos:





Consideremos

- $S$
- $\Lambda_k = S \setminus \{k \text{ pts.}\}$
- $\{k \text{ pts.}\}$

y la sucesión exacta de cohomología relativa:

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H_c^0(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^0(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^0(S, \Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^1(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^1(S, \Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H_c^2(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^2(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^2(S, \Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow 0;
 \end{aligned}$$

como  $S$  es compacto,  $H_c^i(S, \Lambda_k) = H^i(S, \Lambda_k) \simeq H_c^i(\{k \text{ pts.}\})$  entonces

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H_c^0(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^0(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^0(\{k \text{ pts.}\}, \mathbf{C}) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^1(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^1(\{k \text{ pts.}\}, \mathbf{C}) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H_c^2(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^2(S, \mathbf{C}) \longrightarrow H_c^2(\{k \text{ pts.}\}, \mathbf{C}) \longrightarrow 0,
 \end{aligned}$$

por dualidad de Poincaré:

$$\begin{aligned}
 H_c^0(\Lambda_k, \mathbf{C}) &\simeq H_2(\Lambda_k, \mathbf{C}) = 0 \\
 H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{C}) &\simeq H_1(\Lambda_k, \mathbf{C}) \\
 H_c^2(\Lambda_k, \mathbf{C}) &\simeq H_0(\Lambda_k, \mathbf{C}) = \mathbf{C}
 \end{aligned}$$

y, como  $\{k \text{ pts.}\}$  es compacto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_c^0(\{k \text{ pts.}\}, \mathbf{C}) &= H^0(\{k \text{ pts.}\}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^k \\ H_c^1(S, \mathbf{C}) &= H_1(S, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{2g} \end{aligned}$$

sustituyendo obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^k \longrightarrow H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}^{2g} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow 0 \quad (6.11)$$

por tanto,

$$H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{2g+k-1}. \quad (6.12)$$

Para describir la filtración por peso  $W$  de  $H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{Q})$ , consideremos  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}\}$  generadores de  $H_1(S, \mathbf{Z})$  Como la secuencia de cohomología relativa es compatible entre Estructuras de Hodge Mixtas, es posible obtener una filtración por peso como sigue

$$0 \longrightarrow H^0(S) \longrightarrow W_0 H^0(\{k \text{ pts.}\}, \mathbf{Q}) \longrightarrow W_0 H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{Q}) \longrightarrow 0, \quad (6.13)$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}^k \longrightarrow W_0 H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{Q}) \longrightarrow 0, \quad (6.14)$$

obteniendo así que

$$W_0 H_c^1(\Lambda_k, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{k-1}; \quad (6.15)$$

además,

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow GrW_1 H_c^1(\Lambda_k) \xrightarrow{\cong} GrW_1 H^1(S) \longrightarrow 0; \quad (6.16)$$

esto implica que

$$GrW_1 H_c^1(\Lambda_k) = \mathbf{Q}^{2g}; \quad (6.17)$$

el cual tiene una filtración de Hodge de peso 1 dada por

$$F^0 GrW_1 H_c^1(\Lambda_k) = \mathbf{C}^{2g} \supset F^1 GrW_1 H_c^1(\Lambda_k) = \mathbf{C}^g \supset 0. \quad (6.18)$$

Por otro lado, consideremos los siguientes conjuntos:

- $S$
- $U = S \setminus \{k \text{ pts.}\}$ ,
- $V = \sqcup_{i=1}^k D_i$  donde cada  $D_i$  es un disco alrededor de cada punto removido;

y la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H^0(S) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow & (6.19) \\
 &\longrightarrow H^1(S) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H^2(S) \longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \longrightarrow H^2(U \cap V) \longrightarrow 0;
 \end{aligned}$$

sustituyendo en (6.19):

$H^*(S)$	$H^*(U \cap V) = \bigoplus_{i=1}^k H^*(S^1)$	$H^*(V) = \bigoplus_{i=1}^k H^*(D^1)$	$H^*(U)$
$H^0(S) \cong \mathbf{C}$ $H^1(S) \cong \mathbf{C}^{2g}$ $H^2(S) \cong \mathbf{C}$	$H^0(U \cap V) \cong \mathbf{C}^k$ $H^1(U \cap V) \cong \mathbf{C}^k$ $H^2(U \cap V) = 0$	$H^0(V) \cong \mathbf{C}^k$ $H^1(V) = 0$ $H^2(V) = 0$	$H^0(U) \cong \mathbf{C}$ $H^2(U) = 0$

obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}^{2g} \longrightarrow H^1(U) \oplus 0 \longrightarrow \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow 0. \quad (6.20)$$

Haciendo la suma alternada de las dimensiones de cada elemento de la sucesión exacta, despejando la dimensión de  $H^1(U)$  y usando (6.12) obtenemos que

$$H^1(U) = H^1(S \setminus \{k \text{ pts.}\}) \cong \mathbf{C}^{2g+k-1} = H_c^1(S \setminus \{k \text{ pts.}\}). \quad (6.21)$$

De lo anterior, podemos concluir que:

**Proposición 6.1.5** *Las dimensiones de las filtraciones de la Estructura de Hodge Mixta de una superficie de Riemann  $S$  de género  $g$  con  $k$  puntos removidos se pueden calcular a partir de  $g$  y  $k$ .*

## 6.2. Construcción Algebraica de Estructuras de Hodge Mixtas en la fibra singular.

Aunque en el trabajo de Steenbrink-Zucker se considera una Estructura Mixta de Hodge asociada a los divisores excepcionales resultantes de la reducción semi-estable de la singularidad de la curva, i.e., al límite cuando  $t \rightarrow 0$  de la fibra de Milnor, no se habla de ella en  $t \neq 0$ . El resultado principal de este trabajo lo complementa en ese sentido.

**Teorema 6.2.1** Sean  $f, h$  polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $\mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]$  tal que:

- Si  $t = 0$ , entonces  $X_0 = \{f = 0\}$  es una curva singular reducida con singularidad local irreducible con  $m$  exponentes de Puiseux.
- Si  $t \neq 0$  entonces  $X_t = \{f - th = 0\}$  es una curva proyectiva lisa.

Entonces, para cada  $t \neq 0$  con  $|t| \ll 1$  existe  $(F_t, P_t)$  una estructura mixta de Hodge compatible con la estructura mixta de Hodge de los divisores excepcionales  $(F^*, P^*)$ , i.e.,  $(F_t, P_t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (F^*, P^*)$

*Demostración:* Consideremos  $X_t = \{f - th = 0\}$  curva proyectiva lisa si  $t \neq 0$ , luego existe una estructura de Hodge pura

$$F_t^1 : F^1 H^1(X_t, \mathbf{C}) = H^0(X_t, \Omega_{X_t}^1)$$

$\cap$

$$H^1(X_t, \mathbf{C})$$

Recordemos que, aunque  $F_t^1$  depende de  $t$ , su dimensión es constante, lo cual nos da una aplicación propia de la familia de curvas sobre el disco

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \pi \downarrow \\ \Delta \end{array}$$

Luego, tenemos que  $R^1 \pi_* \mathbf{C}_{\mathcal{X}}$  es un fibrado vectorial localmente trivial sobre el disco, por tanto es trivial igual a  $\Delta \times \mathbf{C}^{2g}$ , donde  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

Entonces se tiene una función del disco agujerado a la Grassmanniana sin singularidades esenciales en  $t = 0$ .

$$\begin{array}{l} \mathcal{F} : \Delta^* \longrightarrow \text{Grass}(g, 2g) \\ t \longmapsto F^1 H^1(X_t, \mathbf{C}) \end{array}$$

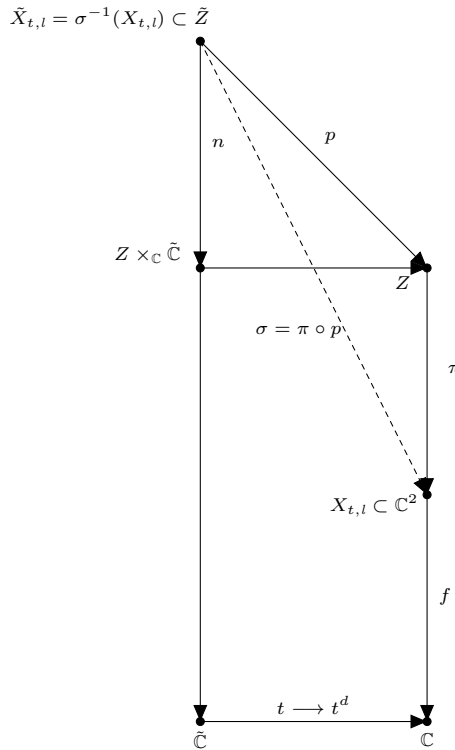
La cual tiene una extensión continua a  $t = 0$ . Sea  $F = \mathcal{F}(0)$ .

Consideremos la construcción hecha en la sección 5 donde se describe la reducción semiestable a partir de una curva singular, aplicada a la parte local de  $X_0$ .

Si  $r_1 > r_2 > \dots > r_m$  son los cocientes polares del germen en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  :  $X_{0,l} = \{f = 0\}$  y  $X_{t,l}$  es la fibra de Milnor de  $X_{0,l}$ ; entonces tenemos una filtración geométrica de

$$\tilde{Y}_{t,l} = \tilde{X}_{t,l} \cap \mathcal{U},$$

donde  $\mathcal{U} = \cup \tilde{U}_i$ ,  $\tilde{U}_i = p^{-1}(U_i)$ , para  $U_i$  vecindades tubulares de los divisores excepcionales  $E_i$  como en (4.6).



Por la observación 4.2.5, si  $t, t' \neq 0$  entonces  $X_{t,l}, X_{t',l}$  son difeomorfas, luego  $\tilde{Y}_{t,l}, \tilde{Y}_{t',l}$  también son difeomorfas y, ambas se retraen por deformación a  $\sigma^{-1}(X_{0,l})$  vía  $r_t : \tilde{X}_{t,l} \rightarrow \tilde{Y} + \tilde{E}$ .

Por tanto, topológicamente, podemos considerar la filtración por peso polar en el divisor  $\tilde{E}$ , donde  $\sigma^{-1}(X_{0,l}) = \tilde{Y} + \tilde{E}$ , dada por:

$$Q_i = \mathbf{H}^*(K^*(\tilde{V}(i)), \mathbf{Q}),$$

la cual carga con una estructura mixta de Hodge (Steenbrink-Zucker, [15]).

Considerando  $H^1(X_t, \mathbf{Q}_i)_{\lambda=1}$ , la parte de la cohomología racional de  $X_t$ ,  $H^1(X_t, \mathbf{Q}_i)$  invariante bajo la monodromía, tenemos que la filtración  $P$  está dada por:

$$P_i := \sigma_*(r_t^*(Q_i)) \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}$$

$$P_{m+1} := P_m \oplus H^1(X_t, \mathbf{Q}_i)_{\lambda=1}$$

dicha filtración es rígida pues tiene coeficientes en  $\mathbf{Q}$ , luego se preservan las dimensiones correctas conforme  $t$  se mueve y se induce una estructura mixta de Hodge en la fibra  $X_{t,l}$ .

Debido a que  $\mathcal{F}_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} F$ , tenemos que  $(F, P)$  cumple con lo deseado.

□

### 6.3. Filtración Polar asociada a la estructura de Hodge de la fibra de Milnor en el anillo de polinomios.

En esta sección mostraremos como lo visto en el capítulo 1 se complementa con las secciones anteriores de este capítulo. Utilizando la filtración obtenida en la sección anterior, se dará una filtración polar en el anillo de polinomios.

**Corolario 6.3.1** *Dado  $f : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  un polinomio de grado  $d$  de tal forma que la familia de curvas*

$$X_t = \{z \in \mathbf{C}^2 \mid f(z) = t\} \tag{6.22}$$

*son lisas si  $t \neq 0$  y tienen una singularidad aislada en  $(0, 0)$  si  $t = 0$ . Existe una filtración en el subespacio vectorial de polinomios de grado  $2d - 3$ , compatible con la filtración  $(F, P)$ .*

*Demostración:* Tomemos la inclusión natural  $X_t \hookrightarrow \mathbf{CP}^2$  como curvas proyectivas lisas si  $t \neq 0$ . Esto es,  $\tilde{X}_t$  es la familia de curvas proyectivas lisas definidas para cada  $t$  por los ceros del polinomio resultante de homogeneizar  $f - t$  ( $F_t = \overline{f - t}$ ). Como se vio en la sección 1.6.2, para cada  $t \neq 0$ , tenemos filtraciones en los anillos de polinomios

$$0 \subset J_{F_t} \cap \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \subset \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}; \tag{6.23}$$

así como filtraciones de Hodge en la cohomología primitiva  $H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})_0$  dadas por la imagen de la función residuo aplicado a clases de formas diferenciales en

$H^2(\mathbf{CP}^2 - \tilde{X}_t)$ , que varían de manera holomorfa en  $t$  y son determinadas por polinomios en  $\mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}$ :

$$\begin{aligned} 0 &\subset F^1 H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C}) = H^0(\tilde{X}_t, \Omega_{\tilde{X}_t}^1) = \text{res}\left(\Omega_{\mathbf{P}^2}^2(1\tilde{X}_t)\right) \\ &\subset H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C}) = \text{res}\left(\Omega_{\mathbf{P}^2}^2(2\tilde{X}_t)\right). \end{aligned}$$

Consideremos que la monodromía de  $H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})$  es unipotente y por tanto existe una descomposición en suma directa de eigenspacios asociados a eigenvalores distintos a 1 con un eigenspacio asociado al valor propio 1:

$$H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C}) = \bigoplus_{\lambda \neq 1} H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})_{\lambda} \oplus H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})_1.$$

Realicemos un análisis restringido a la parte de la cohomología que no queda fija bajo la monodromía. Esto define un subespacio  $F^1 A_t \subset A_t \subset \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3}$  definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_t &= \left\{ g \in \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \mid \text{res}\left(\frac{g\Omega}{(f-t)^2}\right) \in \bigoplus_{\lambda \neq 1} H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})_{\lambda} \right\} \\ &\cup \\ F^1 A_t &= \left\{ g \in J_{F_t} \cap \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \mid \text{res}\left(\frac{g\Omega}{(f-t)^2}\right) \in \bigoplus_{\lambda \neq 1} H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})_{\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Notemos que, como  $H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})$  es un fibrado en el disco agujerado y la función residuo es sobreyectiva en la cohomología primitiva entonces los siguientes espacios vectoriales tienen dimensión constante:

$$B_t = A_t / \text{Ker}(\text{res}) \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} &\cup \\ F^1 B_t &= F^1 A_t / \text{Ker}(\text{res}) \quad (6.25) \end{aligned}$$

donde  $\text{res} : \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2]_{2d-3} \rightarrow H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})$ . Por tanto, podemos afirmar que es posible estudiar localmente la cohomología de orden 1 de la fibra de Milnor  $X_t = \{z \in U \mid f(z) = t\}$ , para  $U$  una vecindad del origen vía  $B_t$ .

Por otro lado, recordemos que por el teorema [4.2.4](#) la filtración polar  $P_i$  es difeomorfa a

$$\overline{U(1)} \cap \tilde{f}^{-1}(t) \subset \dots \subset \overline{U(m)} \cap \tilde{f}^{-1}(t),$$

además cada  $p^{-1}(\overline{U(i)} \cap \tilde{f}^{-1}(t))$  se retrae por deformación a  $p^{-1}(V(i))$ , cuya topología sólo depende de los puntos de ruptura de la gráfica dual y no de  $t$ . Por tanto, podemos definir  $\{T^i\}$  como sigue:

Dado el conjunto ordenado de cocientes polares  $r_1 > r_2 > \dots > r_m$ , sea  $0 < t < \epsilon \ll 1$ , y  $P_i$  es como en [4.5](#); la siguiente filtración creciente  $T^\cdot$  está dada por:

$$T_t^i = \left\{ \omega \in \bigoplus_{\lambda \neq 1} H^1(\tilde{X}_t, \mathbf{C})_\lambda : \int_\gamma \omega = 0, \forall \gamma \in H_1(P_i, \mathbf{C}) \right\}. \quad (6.26)$$

Además define una filtración en  $B_t$  dada por:

$$\tilde{T}_t^i = \left\{ [g] \in B_t : \operatorname{res} \left( \frac{g\Omega}{(f-t)^2} \right) \Big|_{P_i} = 0 \right\} \quad (6.27)$$

U

$$F^1 \tilde{T}_t^i = \left\{ [g] \in F^1 B_t : \operatorname{res} \left( \frac{g\Omega}{(f-t)^2} \right) \Big|_{P_i} = 0 \right\} \quad (6.28)$$

las cuales; tanto  $T_t^i$  como  $\tilde{T}_t^i$ , son filtraciones de espacios vectoriales que varían de manera holomorfa en  $t$  y; análogamente a  $P_i$ , tienen dimensión independiente de  $t$ .

Por tanto, dado un  $0 < \epsilon \ll 1$ ,  $\Delta^* = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \|z\| < \epsilon\}$  existe una función  $\mathcal{D}_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i : \Delta^* &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ t &\mapsto \dim(\tilde{T}_t^i); \end{aligned} \quad (6.29)$$

es semicontinua superiormente.

Luego, existe una función  $\mathcal{D} : \Delta^* \rightarrow \Pi Gr(d_i, d,)$  con  $d, d_i$  enteros positivos para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  continua.

Las filtraciones  $F^1 \tilde{T}_t^i \subset \tilde{T}_t^i$  definidas para  $t \neq 0$  pueden extenderse a  $t = 0$ , y ya que las filtraciones definidas en el teorema anterior para  $t \neq 0$  son compatibles con la filtración en  $t = 0$ , también lo será  $F^1 \tilde{T}_t^i \subset \tilde{T}_t^i$ .

□





# Bibliografía

- [1] E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves: Translated by John Stillwell*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] J. Carlson and P. Griffiths. Infinitesimal variations of hodge structure and the global Torelli problem. *A. Beauville*, pages 51–76, 1980.
- [3] P. Deligne. *Théorie de Hodge*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1970.
- [4] A. Durfee et al. Mixed hodge structures on punctured neighborhoods. *Duke Math. J*, 50(4):1017–1040, 1983.
- [5] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 2014.
- [6] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Publ. math. IHES*, 29(1):95–103, 1966.
- [7] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. Toroidal embeddings, lectures notes in mathematics vol. 339, 1973.
- [8] V. S. Kulikov. *Mixed Hodge structures and singularities*, volume 132. Cambridge University Press, 1998.
- [9] D.-T. Lê. *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*. Institut Fourier, 1973.
- [10] D.-T. Lê. Exposants polaires et résolution des surfaces. *Acta Mathematica Vietnamica*, 2(2):127–135, 1985.
- [11] J. Milnor. Singular points of complex hypersurface, volume 61 of. *Annals Math. Studies*, 1968.

- 
- [12] J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Annals of Mathematics*, pages 197–278, 1955.
- [13] J. Steenbrink. Mixed hodge structures associated with isolated singularities. singularities, part 2 (arcata, calif., 1981), 513–536. In *Proc. Sympos. Pure Math*, volume 40.
- [14] J. Steenbrink. Limits of hodge structures. *Inventiones mathematicae*, 31(3):229–257, 1976.
- [15] J. Steenbrink and S. Zucker. Polar curves, resolution of singularities and the filtered mixed hodge structure on the vanishing cohomology. In *Singularities, Representation of Algebras, and Vector Bundles*, pages 178–202. Springer, 1987.
- [16] B. Teissier. Variétés polaires. *Inventiones mathematicae*, 40(3):267–292, 1977.
- [17] C. Voisin. Hodge theory and complex algebraic geometry. i, volume 76 of *Cambridge studies in advanced mathematics*, 2002.