Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

JUEGOS COOPERATIVOS EN DIFERENTES ESTRUCTURAS

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Aplicadas

Presenta

Miguel Angel Vargas Valencia

Director de Tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 08 de Diciembre de 2017

A mi hermosa
y amada familia

Agradecimientos

A mis padres, a mi hermana y a Hireke por todo su incondicional apoyo, paciencia y amor.

A mis amigos por acompañarme durante este proceso y regalarme tantos momentos divertidos. Agradezco especialmente a Luisa por acompañarme y hacer agradables todos los momentos.

A CIMAT y a todas las personas que lo componen por haberme recibido y acogido amablemente.

Al Doctor Francisco Sánchez Sánchez por su apoyo y por todo el tiempo y conocimiento que me ha brindado a lo largo del doctorado.

A CONACYT y CIMAT por el apoyo económico que hizo posible mi dedicación a este proyecto.

Introducción

La Teoría de Juegos es una rama de la matemática que se dedica a modelar y caracterizar formalmente situaciones en las que se deben tomar decisiones, especialmente en el campo de la economía y la politología, aunque también se ha aplicado exitosamente en ámbitos, como la biología y la ciencia militar.

El objetivo de la Teoría de Juegos consiste en analizar las estrategias óptimas para la toma de decisiones, además del comportamiento de los agentes participantes en la situación o juego. Este estudio es de gran importancia, pues todos los acaeceres del mundo demandan la toma de alguna decisión, por más simple que pueda parecer. Algunas de estas situaciones requieren de una profunda reflexión, mientras que otras se hacen prácticamente de forma automática. Cabe notar que las decisiones tomadas están vinculadas a los objetivos personales que se pretendan alcanzar, y así, cuando se conocen las consecuencias de cada alternativa, la elección de una solución determinada resulta una tarea racional.

La Teoría de Juegos ya se percibía desde muchos siglos atrás, aunque no existía como tal. El Talmud es una recopilación de leyes y tradiciones antiguas desde el siglo V D.C. que supone la base religiosa de los judíos; en dicho texto se discute la toma de decisiones para la repartición de bienes, como el ejemplo del caso de la muerte de un hombre que tiene tres esposas. Pero formalmente, Emile Borel desde 1921 a 1927 y John von Neumann en 1928 publican artículos encontrando la solución y probando el teorema de minimax para juegos bipersonales, respectivamente. Sin embargo, son los matemáticos John Von Neumann y Oskar Morgenstern los considerados padres de la Teoría de Juegos desde la publicación en 1944 de la obra *The Theory of Games and Economic Behaviour*.

El gran impacto que la Teoría de Juegos ha tenido en el desarrollo de la Economía actual queda evidentemente reconocido con los cinco Premio Nobel de Economía que se han otorgado a personas que trabajan en dicha área: John Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi y recientemente Alvin Roth y Lloyd Shapley.

Los juegos se clasifican en dos clases: los cooperativos y los no cooperativos. En los juegos cooperativos los jugadores disponen de mecanismos que les permiten realizar acuerdos condicionales. El problema central de los juegos cooperativos es el de brindar métodos para repartir entre los jugadores las utilidades que se obtienen con su cooperación. En los juegos no cooperativos, los jugadores no poseen mecanismos para disponer de acuerdos y los jugadores actúan de forma independiente. El objetivo de la teoría de juegos no cooperativos, es proporcionar recomendaciones del comportamiento que deben seguir los jugadores para obtener estados deseables.

El conocimiento de conceptos básicos en estas dos ramas de la teoría es necesario para el desarrollo del trabajo que aquí se realiza. Por ello, en el Capítulo 1 se presentan varias definiciones y resultados importantes en la literatura de juegos cooperativos. Por otro lado, el Capítulo 2 contiene las definiciones y conceptos de solución más conocidos en la teoría de juegos no cooperativos.

En este trabajo se presentan modelos de juegos en dos diferentes estructuras, las cuales presentaremos a continuación.

En el Capítulo 3 estudiamos una clase de juegos que fue propuesta en Vargas-Valencia (2013). Dichos juegos modelan situaciones en las cuales la cooperación satisface restricciones anidadas dadas por una estructura de nivel. Esta estructura es definida por una familia ordenada de particiones del conjunto de jugadores de tal forma que cada partición es un refinamiento de la siguiente partición. Esta estructura modela situaciones en las cuales los agentes están clasificados en una jerarquía de varias niveles, como lo son la estructura de división política en un país, o la división de una empresa en departamentos o áreas que agrupan actividades y tareas con relaciones jerárquicas que se dan entre estas. Posteriormente, proponemos un valor para estos juegos mediante una adaptación del valor de Shapley. En este trabajo, presentamos una nueva caracterización axiomática para el nuevo valor obtenido. Para cumplir este propósito, introducimos una nueva propiedad llamada *contribución de clases balanceadas* que generaliza otras propiedades en la literatura. Finalmente, implementamos los valores obtenidos de dos formas diferentes, la primera con un proceso multietapa y la segunda mediante la definición y estudio de la extensión multilineal de la nueva clase de juegos. Los resultados de este capítulo serán publicados en Sanchez-Sanchez y Vargas-Valencia (2016). Este capítulo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 3.1, se presenta el modelo describiendo el conjunto de coaliciones factibles y se muestran algunas propiedades algebraicas de este conjunto como un conjunto parcialmente ordenado con la relación de inclusión, dichas propiedades son la principal herramienta para dar una representación de un juego anidado con respecto a una base de los juegos de unanimidad anidados. En la Sección 3.2, se determina un valor de Shapley para juegos anidados definiéndolo primero sobre la base de juegos de unanimidad anidados y luego extendiéndolo linealmente. Para interpretar la adaptación del valor de Shapley, se define un juego para cada clase donde sus jugadores serán las subclases que lo componen, con el valor de Shapley ponderado de estos juegos, donde los pesos son las cardinalidades de las subclases, se define una distribución entre los agentes que forman tales subclases. En la Sección 3.3, considerando un vector de pesos para modelar la asimetría entre los agentes, se brinda un valor de Shapley ponderado adaptado para juegos anidados. En la Sección 3.4, se propone un *proceso multietapa* que proporciona un algoritmo para calcular los valores propuestos, con este proceso se obtiene una visión sencilla e intuitiva de las reglas de asignación desarrolladas a lo largo del capítulo. Finalmente, en la Sección 3.5 definimos una *extensión multilineal* para los juegos anidados. Esta extensión nos permite mostrar una forma diferente de calcular el valor de Shapley adaptado.

Juarez y Kumar (2013) estudia los mecanismos de repartición de costos compartidos para la conexión de una red, con los cuales se implementa una red de mínimo costo. En este trabajo presentamos un estudio estrechamente relacionado. En el Capítulo 4 presentamos un nuevo modelo donde los jugadores cooperan invirtiendo tiempo para desarrollar ciertos proyectos y en este caso, nuestro objetivo es caracterizar y estudiar los mecanismos que implementen asignaciones de tiempo que generen la mayor productividad. La estructura de las coaliciones está dada solamente por los proyectos factibles, es decir, un conjunto de jugadores que no pueda desarrollar un proyecto no es una coalición. Los jugadores están dotados con tiempos fijos que invierten en los diferentes proyectos, los cuales generan utilidades dependiendo de la forma en que los jugadores asignen los tiempos. Un *mecanismo* reparte las utilidades totales generadas por los proyectos entre los jugadores dependiendo de la asignación de los tiempos y de la utilidad generada por cada uno de los proyectos. En este trabajo, se estudian los mecanismos que incentivan a los jugadores a contribuir con su tiempo de forma que genere la máxima utilidad agregada en el equilibrio de Nash, sin importar la forma en que se producen dichas utilidades (*eficiencia*). El principal resultado obtenido es la caracterización de todos los mecanismos que satisfacen dicha eficiencia, más aún, también se caracteriza una clase más pequeña de mecanismos que además de satisfacer la eficiencia, son anónimos (*simétricos*) e independientes de las asignaciones de tiempo. Posteriormente, se estudia la robustez de los mecanismos eficientes cuando hay cambios en las características iniciales del juego, como lo son el aumento en los tiempos eficientes o incremento en el conjunto de jugadores, las mejoras tecnológicas para aumentar la utilidad de los proyectos o la aparición de nuevos proyectos factibles. De aquí, una clase de mecanismos es caracterizada al requerir que los pagos aumenten si dichas condiciones iniciales también aumentan. Finalmente, se estudian y caracterizan los mecanismos que son libres de manipulación de grupos (mecanismos a prueba de estrategias de grupo). Los resultados de este capítulo son un trabajo en colaboración con Ruben Juarez y Kohei Nitta, que está establecido en Juarez *et al.* (2017). Este capítulo se desarrolla de la siguiente forma: En la Sección 4.1 se presenta el modelo para la situación de asignación de tiempos en proyectos y se introducen algunos mecanismos de repartición conocidos. En la Sección 4.2 se define un juego no cooperativo que ayuda a estudiar la implementación de los mecanismos en el modelo descrito, se establece el concepto de equilibrio de Nash para dicho juego y se describe el estado del juego socialmente más deseable (eficiencia). Posteriormente, se definen los mecanismo *separables*, pues aquí se demuestra que estos resultan ser los únicos mecanismos que implementan eficiencia como un equilibrio de Nash. Además, se caracteriza una subfamilia de mecanismos eficientes que satisfacen las propiedades de anonimidad y tiempo-independencia. En la Sección 4.3 se estudia la monotonicidad de los pagos a los jugadores con respecto al aumento de tiempo disponible de trabajo y con respecto al incremento en las funciones de producción. Al requerir que dichos pagos no disminuyan con el incremento del tiempo y/o las funciones de producción, se caracteriza una familia de mecanismos que dependen de la conexión de los proyectos (a través de la intersección de pares no vacíos). Finalmente, en la Sección 4.4 se encuentra una condición necesaria y suficiente para caracterizar la familia de mecanismos eficientes que es libre de manipulación de grupos.

El objetivo general del presente trabajo de investigación es modelar, caracterizar, solucionar e implementar matemáticamente *juegos en diferentes estructuras* y sus mecanismos de repartición. Dicho objetivo se conforma paso a paso con los siguientes objetivos específicos:

- Modelar, definir y caracterizar matemáticamente la situación de juegos con restricciones de cooperación anidadas.

- Proponer y caracterizar soluciones para los juegos cooperativos con restricciones *anidadas*, que cumplan axiomas específicos que modelan características deseables en la realidad.

- Brindar algoritmos y expresiones para la implementación de dichas soluciones.

- Modelar y definir la situación de repartición de ganancias en estructuras de proyectos.

- Caracterizar mecanismos de repartición en estructuras de proyectos que implementen la eficiencia social como un equilibrio de Nash.

- Investigar los mecanismos eficientes de repartición con respecto a su robustez y su libertad de manipulación de grupos.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos básico de juegos cooperativos

Supóngase la siguiente situación: México, Colombia y Brasil desean cooperar para realizar un evento sobre ciencia y tecnológica en latinoamérica. Si México organiza el evento por sí solo, debido a su cobertura, el costo de realización es de USD 60000. Por otro lado, si Colombia hace el evento, teniendo en cuenta la cantidad de participantes, el evento tiene un costo de USD 40000. Pero, si Brasil lleva a cabo el evento, su costo es de USD 80000. En caso, que dos de los países organicen el evento conjuntamente los costos son: Para México y Colombia el costo es de USD 80000, si se une México y Brasil es de USD 120000, y para Colombia con Brasil es de USD 110000. Ahora bien, si los tres paises realizan el evento conjuntamente el costo del evento es de USD 150000. Así, se concluye que si los tres países cooperan se obtiene un ahorro en los gastos de realización. Pero, con esta situación surge el problema de repartir el costo total de forma "justa" entre los participantes, teniendo en cuenta todas las situaciones posibles. El objetivo de los juegos cooperativos es resolver este tipo de situaciones.

Al principio de este capítulo se abordan conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos, específicamente se formaliza y caracteriza el conjunto de dichos juegos; dotandolos, además, con una estructura de espacio vectorial, pues con esta caracterización se obtienen resultados y axiomatizaciones de valores que cumplen la propiedad de linealidad. Luego, se muestran las interpretaciones y caracterizaciones de algunos de los principales valores conocidos dentro de los juegos cooperativos, como son el valor de Shapley y el valor de Shapley ponderado. Posteriormente, se presenta una sección dedicada al potencial de un juego.

1.1. Modelo

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto finito y no vacío de *jugadores*. Se le llamará *coalición* a cualquier subconjunto no vacío $S \subseteq N$, que se interpretan como los diferentes grupos de jugadores que se forman para jugar unidos. Se denotará por 2^N al conjunto potencia del conjunto de jugadores, es decir, al conjunto de todos los subconjuntos de N el cual representa a todas las posibles coaliciones de jugadores que se pueden generar.

En varias aplicaciones de juegos cooperativos los jugadores modelan personas o grupos de personas, por ejemplo, sindicatos, ciudades, naciones, etc. Sin embargo, existen interesantes modelos de teoría de juegos de problemas económicos en los cuales los jugadores no son personas. Los jugadores también pueden ser objetivos de un proyecto económico, factores de producción, o algunas otras variables económicas de la situación en cuestión.

Definición 1.1.1. Un juego cooperativo es un par (N, v), en el cual N representa el conjunto de jugadores participantes y v es una función que le asocia un número real $v(S)$ a cada uno de los subconjuntos S de N,

$$v : 2^N \to \mathbb{R}.$$

Además, se asumirá que $v(\emptyset) = 0$.

La interpretación que se le da a un juego cooperativo es que los jugadores pertenecientes una coalición S deciden jugar unidos, en éste caso, consiguen una valía conjunta $v(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la conforman deciden jugar unidos, sino que también están de acuerdo en como repartir la ganancia conjunta $v(S)$. Así, el juego v especifica la ganancia que puede obtener cada una de las coaliciones. Como resultado del juego, se tiene un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$, donde su i-ésima entrada, x_i, representa el valor asignado al jugador i en el juego correspondiente. De aquí, se tiene que el problema principal de los juegos cooperativos es obtener un vector de pagos que sea "justo" dadas las condiciones en que se lleva a cabo el juego.

Durante el desarrollo del presente trabajo se supone la divisibilidad arbitraria de los pagos. Es decir, no se tendrán en cuenta situaciones en las que no se pueda realizar la división de la utilidad, como por ejemplo, la situación en la cual una coalición obtenga un objeto indivisible como lo es una joya, pues ésta evidentemente solo puede pertenecer a un jugador.

Ejemplo 1.1.2. Supóngase la situación en la cual las fábricas 1, 2 y 3 se encuentran sobre una mismo camino y desean cooperar para pavimentarlo, con el fin de comunicarse con la autopista P. La organización de las fábricas y el costo de pavimentación de cada uno de los tramos, en unidades monetarias, se representa en el siguiente diagrama:

$$\overset{\mathbf{P}}{\triangle} \xleftarrow{\quad 30 \quad} \overset{\mathbf{1}}{\bigcirc} \xleftarrow{\quad 20 \quad} \overset{\mathbf{2}}{\bigcirc} \xleftarrow{\quad 10 \quad} \overset{\mathbf{3}}{\bigcirc}$$

Ésta situación se modela con un juego cooperativo donde $N = \{1,2,3\}$ y para todo $S \subseteq N$, $v(S)$ representa el costo de pavimentación para comunicar las industrias en la coalición S con la autopista, y se muestra en el Cuadro 1.1.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	30	50	60	50	60	60	60

Cuadro 1.1: Representación del juego (N, v) que modela el costo de la pavimentación del camino en unidades monetarias.

Ahora, el problema radica en dividir el costo total de la pavimentación del camino entre las fábricas que desean cooperar (1, 2 y 3).

Definición 1.1.3. Un **vector de pagos** x es un elemento de $\mathbb{R}^n$ cuya i-ésima coordenada representa el pago correspondiente en el juego cooperativo del i-ésimo jugador. Se denotará por $x(S)$ a

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \quad \forall S \subseteq N.$$

Los juegos cooperativos modelan situaciones en las que los jugadores pueden recibir o dar cierta utilidad, por ello, la palabra *pago* debe interpretarse según la situación, pues el jugador puede obtener o aportar dicho pago.

Se dice que un vector de pagos tiene *racionalidad individual* sí y sólo si $x_i \geq v(\{i\})$ para todo $i \in N$. También, se dice que tiene *racionalidad de grupo* sí y sólo si $x(S) \geq v(S)$ para toda $S \in 2^N$. Así mismo, se dirá que un vector de pagos x es eficiente sí y sólo si $x(N) = v(N)$. Entonces, con un vector de pagos individualmente racional, cada jugador garantiza que obtiene al menos lo que obtendría si juega por si solo, mientras que en un vector con racionalidad de grupo, cada una de las coaliciones consigue por lo menos lo que ella garantiza si todos sus integrantes jugaran como un solo agente.

Existen diversas propiedades que pueden cumplir los juegos cooperativos, y éstas se pueden interpretar según la situación que dichos juegos modelan. A continuación se describen algunas de estas características, las cuales clasifican los juegos cooperativos.

Definición 1.1.4. Se dice que un juego (N, v) es **superaditivo** sí y sólo si

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

siempre que $S \cap T = \emptyset$, con $S, T \subset N$.

La mayoría de los juegos cooperativos que surgen en la realidad son superaditivos, ya que si los elementos de $S \cup T$ juegan juntos, pueden acordar jugar la partida como dos coaliciones diferentes, garantizando con ello al menos $v(S) + v(T)$. Sin embargo, muy a menudo se viola la superaditividad. Por ejemplo, pueden existir leyes antimonopolio, lo cual reduce las ganancias de $S \cup T$, si se llega a formar. Además, las grandes coaliciones pueden ser ineficaces, ya que es más difícil para ellos llegar a acuerdos sobre la distribución de sus beneficios.

Definición 1.1.5. Un juego (N, v) es **convexo** sí y sólo si

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \quad \forall S, T \subset N.$$

Claramente, un juego convexo es superaditivo. La siguiente caracterización de juegos convexo es equivalente: Un juego es convexo sí y sólo si, para todo $i \in N$,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \quad \forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Por lo tanto, el juego (N, v) es convexo sí y sólo si la contribución marginal de un jugador para una coalición es monótona no decreciente con respecto a la inclusión de teoría de conjuntos. Esto explica dicho término *convexo*. Los juegos cooperativos convexos aparecen en algunas aplicaciones importantes de la teoría de juegos.

Definición 1.1.6. Se dirá que un juego es **monótono** si $v(S) \leq v(T)$ para todo T y S subconjuntos de N tal que $S \subseteq T$.

Los juegos cooperativos monótonos se presentan en situación en las que se obtiene un mayor beneficio cuando se dejan ingresar jugadores a una coalición.

Definición 1.1.7. Se dice que un juego (N, v) es **simétrico** sí y sólo si, para cualesquiera dos coaliciones S y T de N con la misma cardinalidad, se tiene que $v(S) = v(T)$.

Los juegos simétricos modelan situaciones en las que la valía obtenida por una coalición depende de la cantidad de jugadores que posee, sin importar quienes son, es decir, estos juegos no perciben diferencias entre un jugador y otro.

Definición 1.1.8. Un juego (N, v) es de **suma constante** sí y sólo si

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \quad \forall S \subseteq N.$$

Los juegos cooperativos de suma constante se han investigado ampliamente en los primeros trabajos en la teoría de juegos (véase Von Neumann y Morgenstern (1944)). A menudo los juegos políticos son de suma constante.

Definición 1.1.9. Se dice que un juego es **simple** sí y sólo si $v(S) = 0$ ó 1 para toda $S \subset N$ y $v(N) = 1$. Dado un juego simple se dirá que

1. S es una coalición ganadora sí y sólo si $v(S) = 1$.

2. i es un jugador vetador sí y sólo si está en toda coalición ganadora.

Los juegos simples son utilizados, generalmente, para ver la importancia o *poder* que poseen los jugadores en una situación dada. Usualmente, son utilizados para modelar juegos de votación.

Definición 1.1.10. Un juego (N, v) es **inesencial** sí y sólo si es un juego aditivo, que cumple que $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para toda $S \subseteq N$.

Es evidente que un juego inesencial es trivial desde el punto de vista de la teoría de juegos. Es decir, si cada jugador $i \in N$ aporta $v(\{i\})$ al entrar en cualquier coalición, entonces la distribución de $v(N)$ se determina únicamente.

De aquí en adelante se denotará por

$$\Theta = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$$

y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}.$$

Es decir, Θ contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se desea interpretar de otra forma, es el conjunto de todas las permutaciones de los n jugadores. De ésta forma, θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego. Es decir, el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$ y

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$$

el papel de S.

1.2. Estructura y descomposición

Dado un conjunto fijo de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n := |N|$. En caso de que no exista ambigüedad con el conjunto de jugadores, el juego cooperativo (N, v) se denotará solamente por su función característica v. Sea G_N el conjunto de juegos cooperativos con conjunto de jugadores N:

$$G_N = \{v \mid v : 2^N \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0\}.$$

A continuación se definen operaciones de suma, producto por escalar y elemento neutro sobre el conjunto G_N, con el fin de dotarlo de una estructura de espacio vectorial.

Definición 1.2.1. Sean $v, w \in G_N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

- $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$, para todo $S \in 2^N$ (suma).
- $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$ para todo $S \in 2^N$ (producto por escalar).
- $v_0(S) = 0$ para todo $S \in 2^N$ (elemento neutro).

De inmediato se observa que el conjunto G_N con la estructura definida anteriormente es un espacio vectorial. Entonces, ordenando los conjuntos pertenecientes a $2^N \setminus \{\emptyset\}$ con una función biyectiva

$$\sigma : 2^N \setminus \{\emptyset\} \to \{1, 2, ..., 2^n - 1\},$$

es posible asignar a cada coalición $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ la entrada $\sigma(S)$ de un vector en $\mathbb{R}^{2^n-1}$. Así, teniendo en cuenta que cada función característica en G_N le asigna el valor de cero al conjunto vacío, es claro que G^N es isomorfo a $\mathbb{R}^{2^n-1}$, esto se debe al morfismo que asigna a cada función $v \in G_N$ el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2^n-1}$, tal que $(\mathbf{v})_{\sigma(S)} = v(S)$ y su inverso.

Con lo anterior se ha mostrado que para N fijo, G_N tiene una estructura de espacio vectorial con dimensión $2^n - 1$. Ahora, es importante dar una base para éste espacio, que será útil para la descomposición y análisis de los juegos cooperativos. Por ello se introducirán los siguientes juegos.

Juegos de unanimidad

En esta sección se definen y estudian los llamados *juegos de unanimidad*, pues ellos constituirán una base para G_N, que es de gran importancia a lo largo de éste trabajo.

Definición 1.2.2. Para $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, se le llamará **juego de unanimidad en** T al juego (N, u_T), donde

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \textit{si } S \supseteq T, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 1.2.3. El conjunto $U_N := \{u_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ es una base de G_N.

Demostración. Existen $2^n - 1$ juegos de unanimidad y la dimensión de G_N también es $2^n - 1$. Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que los juegos de unanimidad son linealmente independientes. Supongamos, por contradicción, que $\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T = 0$, donde no todos los $\alpha_T \in \mathbb{R}$ son cero. Sea T_0 un conjunto minimal en

$$\{T \subseteq N \mid T \neq \emptyset,\ \alpha_T \neq 0\}.$$

Entonces,

$$\left(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T\right)(T_0) = \alpha_{T_0} \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, el conjunto U_N es linealmente independiente y tiene $2^n - 1$ elementos, es decir, es una base de G_N. □

Así, la única descomposición de un juego v en términos de los juegos de unanimidad está dada por

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \delta_T u_T,$$

donde $\{\delta_T\}$ es un conjunto de números reales que representan los coeficientes de la combinación lineal, estos son conocidos como los coeficientes de Harsanyi (1963).

Ejemplo 1.2.4. Tomando el juego cooperativo de tres jugadores presentado en el Ejemplo 1.1.2, su descomposición en términos de los juegos de unanimidad es:

$$v = 30u_{\{1,2,3\}} - 30u_{\{1,2\}} - 30u_{\{1,3\}} - 50u_{\{2,3\}} + 30u_{\{1\}} + 50u_{\{2\}} + 60u_{\{3\}}.$$

Los coeficientes de Harsanyi se determinan de manera recursiva como sigue:

Evaluando la la descomposición en una coalición $S \neq \emptyset$ se tiene que,

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} \delta_T,$$

entonces,

$$\delta_S = v(S) - \sum_{T \subset S} \delta_T \tag{1.1}$$

donde $\delta_\emptyset = 0$. Cada coeficiente δ_S se pueden interpretar como el beneficio adicional que la coalición S obtiene en caso de que ésta se forme, tomando en cuenta que todas las subcoaliciones de S ya han sido formadas.

Evidentemente, los coeficientes (1.1) son únicos para cada $v \in G_N$. Existe otra representación para dichos coeficientes, como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 1.2.5. Sea $v \in G_N$ y su descomposición lineal $v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \delta_T u_T$, entonces

$$\delta_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \tag{1.2}$$

1.3. Soluciones para juegos cooperativos

Ésta sección esta dedicada a la mostrar y caracterizar soluciones para los juegos cooperativos. Intuitivamente, la solución de juegos cooperativos debe brindar un vector de pagos, o alternativamente, un conjunto de vectores de pagos para cada juego (N, v). Es deseable que una solución cumpla con propiedades que modelen características deseables en la realidad (las cuales se propondrán como axiomas) y además demostrar que existe una única solución que cumple dichas propiedades.

Esta idea de solución posee la ventaja que no pide condiciones a la solución de un juego en particular. El problema de dividir la valía que obtenga cada coalición se transforma en el de si los jugadores aceptan o no los supuestos elementales que reflejan situaciones en la realidad. Desde luego los jugadores deberán aceptar el resultado que de ellos se desprende.

Se comenzará por definir formalmente una solución para juegos cooperativos.

Definición 1.3.1. Una solución para juegos cooperativos en G_N es un operador

$$\varphi : G_N \to \mathbb{R}^n,$$

donde su i-ésima entrada representa el pago que la solución le asocia al jugador i.

Para simplificar la notación, de aquí en adelante se dirá que

$$\varphi(N, v) = (\varphi_i(N, v))_{i \in N} = \varphi(v)$$

es una solución asociada al juego (N, v). También, dado un juego (N, v) fijo y un subconjunto $S \subseteq N$, el juego $(S, v) := (S, v|_S)$ denota el subjuego obtenido restringiendo v a los subconjuntos de S, y de igual forma su solución se representará por $\varphi(S, v) = \varphi(v|_S)$. Así mismo, se utilizarán las correspondientes letras minúsculas para referirse a la cardinalidad de las coaliciones ($|S| = s$, $|T| = t$, $|R| = r$, etc.).

A continuación se presentan y caracterizan dos conocidos valores que serán de gran importancia en el desarrollo de este trabajo.

1.3.1. Valor de Shapley

En Shapley (1953), el ganador del premio noble en economía (2012) Lloyd S. Shapley establece una solución de gran importancia en el ámbito de la teoría de juegos, pues, ha generado una gran cantidad de investigaciones. Ya que, como menciona Alvin Roth, también ganador del premio, en el libro *The Shapley value, Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, "La razón de que el valor de Shapley ha sido el foco de tanto interés es que representa un enfoque distinto a los problemas de interacción estratégica compleja que la teoría de juegos pretende iluminar".[1]

Shapley menciona: "El fundamento de la teoría de juegos es la suposición de que los jugadores de un juego pueden evaluar, con sus propias medidas de utilidad, cada "posibilidad" que pueda surgir como consecuencia de una jugada. Al tratar de aplicar la teoría a cualquier campo, uno normalmente esperaría que se permita incluir en la categoría de "posibilidades", la posibilidad de tener que jugar un juego. Por consiguiente, la capacidad de evaluar el juego es de importancia crítica"[2]. En esta sección se estudia el valor de Shapley, que proporciona una evaluación *a priori* de cada partida coalicional.

El valor de Shapley es una solución para juegos cooperativos que se caracteriza por los siguientes axiomas.

Axioma 1.3.2. ***Aditividad.*** *Para todo* (N, v) *y* $(N, w) \in G_N$*, una solución* φ *satisface el axioma de aditividad si*

$$\varphi(N, v) + \varphi(N, w) = \varphi(N, v + w).$$

Este axioma tiene una interpretación que, aunque intuitiva, es importante, pues tiene un gran sentido en la modelación de situaciones reales que se interpretan como juegos cooperativos. Lo que expresa el axioma de aditividad es que, si se desean repartir ciertos costos en dos procesos de negociación diferentes, el resultado debe ser el mismo si se hacen por separado o de manera conjunta.

Axioma 1.3.3. ***Eficiencia.*** *Para todo* $(N, v, \mathcal{B}) \in G_{N,\mathcal{B}}$*, una solución* φ *satisface el axioma de eficiencia si*

$$\varphi(v)(N) = v(N).$$

Lo que este axioma le está requiriendo al operador solución es que la cantidad total repartida entre los jugadores en cada juego sea igual al monto que puede obtener la gran coalición en dicho juego.

[1] Traducción del texto original Roth (1988).
[2] Traducción del texto original Shapley (1953).

Definición 1.3.4. Se dirá que un jugador i es nulo en (N, v) sí y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Un jugador nulo representa en un juego cooperativo a un agente que se encuentra presente en la situación de juego simplemente como un observador, es decir, su presencia no afecta la forma del juego.

Axioma 1.3.5. ***Nulidad.*** *Una solución φ satisface el axioma de nulidad, si i es un jugador nulo en (N, v), entonces,*

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

Este axioma establece que a alguien que participe únicamente como observador dentro del juego no le corresponderle pago alguno.

Para presentar el siguiente axioma se deben tener en cuenta las siguientes definiciones.

Definición 1.3.6. Para cualquier par $(\theta, v) \in \Theta \times G_N$ se define el **juego cooperativo permutado** $(N, \theta * v)$ de tal forma que $(\theta * v) : 2^N \to \mathbb{R}$ y

$$(\theta * v)(\theta^{-1}(S)) = v(S), \quad \forall S \in 2^N.$$

Los que desea captar la definición anterior es que $\theta * v$ represente un nuevo juego donde los jugadores cambian papeles de acuerdo a la permutación θ; entonces, como los jugadores en $\theta(S)$ suplantan a los que están en S, el monto que puede obtener $\theta(S)$ en $\theta * v$ debe ser el igual al que podría conseguir S en v. De igual manera se define la permutación de un vector de pagos, como sigue.

Definición 1.3.7. Para cada par $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ se define un nuevo vector de pagos $\theta * x$, donde su $i - \acute{e}sima$ coordenada está dada por

$$(\theta * x)_i = x_{\theta^{-1}(i)}.$$

Axioma 1.3.8. ***Simetría.*** *Para todo $(\theta, v) \in \Theta \times G_N$, una solución φ satisface el axioma de simetría si*

$$\varphi(N, \theta * v) = (\theta * \varphi)(N, v).$$

La propiedad que este axioma representa es que la solución no dependa de las características personales del jugador. Por lo tanto, si los jugadores cambian papeles durante el juego y cada coalición logra obtener la misma valía que la coalición a la que suplanta, se debe obtener que a cada jugador en el nuevo juego se le asigne lo mismo que se le asignó al jugador al cual sustituye en el juego original.

El siguiente lema se utilizará durante la demostración del posterior teorema.

Lema 1.3.9. Sean $R, T \subseteq N$, $|R| = r$, $|T| = t$, entonces,

$$\sum_{T \supseteq R} \frac{(-1)^{t-r}}{t} = \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}.$$

Teorema 1.3.10. Shapley, 1953. Existe un único valor φ sobre G_N, conocido como *Valor de Shapley*, que satisface los axiomas de **aditividad**, **eficiencia**, **nulidad** y **simetría**. Además, dicho valor está dado por la siguiente expresión:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \quad \forall i \in N. \tag{1.3}$$

Demostración. Por el Lema 1.2.3 se tiene que

$$v = \sum_{T \subseteq N} \delta_T u_T,$$

así, si dicho valor φ existe, por su aditividad se obtendría que

$$\varphi(v) = \sum_{T \subseteq N} \varphi(\delta_T u_T),$$

por ello, para obtener el resultado, basta probar que el valor φ existe y es único para los juegos

$$\delta_T u_T(S) = \begin{cases} \delta_T & si\ S \supseteq T, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Obsérvese que:

1. La valía de la gran coalición para dichos juegos es $\delta_T u_T(N) = \delta_T$.

2. Si $i \notin S$, entonces i es un jugador nulo en $\delta_T u_T$.

3. Si $i, j \in N$, $i, j \in T$ y θ es tal que $\theta^{-1}(i) = j$ y $\theta^{-1}(T) = T$, por el axioma de simetría se tiene que

$$\varphi_i(\theta * \delta_T u_T) = \varphi_{\theta^{-1}(i)}(\delta_T u_T) = \varphi_j(\delta_T u_T).$$

   Entonces, dada la forma en que se tomó θ, se tiene que, $\delta_T u_T = \theta * \delta_T u_T$, y así

$$\varphi_i(\theta * \delta_T u_T) = \varphi_i(\delta_T u_T);$$

   por tanto,

$$\varphi_i(\delta_T u_T) = \varphi_j(\delta_T u_T)\ \forall i, j \in N.$$

De esta forma, si se tiene que φ satisface los últimos tres axiomas, el único valor posible para $\delta_S u_S$ es

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T) = \begin{cases} \frac{\delta_T}{t} & si\ i \in T, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Así, φ existe y es única, ésta es

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{T \ni i} \frac{\delta_T}{t}. \tag{1.4}$$

Para finalizar la prueba, se demostrará que (1.4) es igual a (1.3). Por el Lema 1.2.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \sum_{T \ni i} \frac{\delta_T}{t} = \sum_{T \ni i} \sum_{R \subseteq T} \frac{(-1)^{t-r}}{t} v(R) \\ &= \sum_{R \ni i} \sum_{T \supseteq R} \frac{(-1)^{t-r}}{t} v(R) - \sum_{R \not\ni i} \sum_{T \supseteq R \cup \{i\}} \frac{(-1)^{t-(r+1)}}{t} v(R), \end{aligned} \tag{1.5}$$

así, aplicando el Lema 1.3.9 a los términos en (1.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \sum_{R \ni i} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} v(R) - \sum_{R \not\ni i} \frac{(r)!(n-r-1)!}{n!} v(R) \\ &= \sum_{S \not\ni i} \frac{(s)!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right]. \end{aligned}$$

□

El valor de Shapley tiene una expresión alternativa que brinda una interesante interpretación, como se muestra a continuación.

Sea $\mathcal{R} \in \mathcal{S}_N$ (el grupo de todos los ordenes de N) y $i \in N$. El conjunto de jugadores que preceden a i en el orden $\mathcal{R}$ se denotará por

$$P_i^{\mathcal{R}} = \{ j \in N \mid \mathcal{R}(j) < \mathcal{R}(i) \}$$

y por $m_i^{\mathcal{R}} = v\left(P_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}\right) - v\left(P_i^{\mathcal{R}}\right)$. Así, el valor de Shapley esta dado por

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{SYM}_N} m_i^{\mathcal{R}}. \tag{1.6}$$

Para ver que la expresiones (1.3) y (1.6) son iguales, sólo hay que notar que

$$\left|\{\mathcal{R} \mid P_i^{\mathcal{R}} = S\}\right| = s!(n-s-1)!$$

El valor de Shapley con la expresión (1.6) tiene la siguiente interpretación probabilística: si se elige al azar un orden $\mathcal{R}$ de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y se le asigna al jugador i la utilidad marginal que aporta cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $m_i^{\mathcal{R}}$, entonces, $\varphi_i(v)$ es el pago esperado que obtiene i.

En lo que sigue, se denotará el valor de Shapley por $Sh(N,v) = (Sh_i(v))_{i\in N}$. Además, observando la expresión del valor de Shapley, inmediatamente se concluye que es un operador lineal, es decir: para $v, w \in G_N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$Sh(\alpha v + \beta w) = \alpha Sh(v) + \beta Sh(w).$$

Ejemplo 1.3.11. Considérese el juego cooperativo dado en el Ejemplo 1.1.2. El calculo del valor de Shapley para este juego se presenta en el Cuadro 1.2

$\mathcal{R}$	$m_i^\pi = v(P_i^\pi \cup \{i\}) - v(P_i^\pi)$		
	$i=1$	$i=2$	$i=3$
123	30	20	10
132	30	0	30
213	0	50	10
231	0	50	10
312	0	0	60
321	0	0	60
$Sh_i(v)$	10	20	30

Cuadro 1.2: Valor de Shapley para el juego del Ejemplo 1.1.2. Para calcular los pagos $Sh_i(v)$ se suman los valores en las columnas de cada jugador y se promedian por la cantidad de ordenes, $3! = 6$.

Después de la publicación del artículo Shapley (1953), muchas investigaciones se han realizado, y gran parte de ellas se centran en reformular la axiomática del valor de Shapley pues consideran que algunos de los axiomas son insatisfactorios. A continuación se presenta una caracterización axiomática de dicho valor que se mencionará posteriormente.

Myerson (1977) introduce un concepto muy importante para la teoría del valor en juegos cooperativos, éste es,

Axioma 1.3.12. ***Contribuciones balanceadas.*** *Para cualesquiera dos jugadores $i, j \in N$ y todo $(N, v) \in G_N$, una solución φ satisface el axioma de contribuciones balanceadas si*

$$\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N\setminus\{j\}}) = \varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N\setminus\{i\}}).$$

La interpretación que se le da a este axioma es la siguiente: lo que le afecta cualquier jugador, $j \in N$, a cualquier otro jugador $i \in N$, al salir del juego, es igual a lo que afecta el jugador i, al jugador j, al salir del juego. Es decir, el hecho de que un jugador salga del juego perjudica de la misma manera a todos los jugadores que permanecieron. Con esto, Myerson introduce un valor que asocia un vector de pagos a los juegos donde se tiene un grafo que representa conexiones o lasos de comunicación entre los jugadores, y como resultado, propone la siguiente caracterización:

Teorema 1.3.13. Myerson, 1977. El valor de Shapley es la única solución para juegos cooperativos que satisface los axiomas de eficiencia y contribuciones balanceadas.

1.3.2. Valor de Shapley ponderado

Otro operador solución que además tiene la característica de ser lineal es el valor de Shapley ponderado. Este valor tiene como objetivo brindar una solución que tenga en cuenta el "esfuerzo" que los jugadores necesitan realizar. Teniendo en cuenta esta premisa, la idea es repartir el monto total de acuerdo a ponderaciones que modelan dicho "esfuerzo". Esta idea de repartición da lugar al valor de Shapley ponderado, un valor que no necesariamente satisface el axioma de simetría.

Como se observa en la demostración del Teorema 1.3.10, el valor de Shapley es una aplicación lineal que al jugador $i \in N$ en el juego de unanimidad (N, u_s), con $S \subseteq N$, le asocia el vector de pagos

$$Sh_i(u_s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & si\ i \in S, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{1.7}$$

Intuitivamente se observa que los los jugadores en S reparten una unidad de forma igualitaria entre los miembros que la conforman. El valor de Shapley ponderado generaliza esta idea proponiendo diferentes formas de dividir esta unidad entre los agentes de S en u_S y para ello, se tiene en cuenta un vector de pesos positivos $\lambda = (\lambda_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^n$ dado en forma exógena y en cada u_S los jugadores reparten la unidad proporcionalmente a sus pesos.

Definición 1.3.14. El **valor de Shapley ponderado** con un sistema de pesos simple $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, es un operador lineal $\varphi^\lambda : G_N \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi_i^\lambda(u_T) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda(T)} & si\ i \in T, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{1.8}$$

donde $\lambda(S) = \sum_{i \in S} \lambda_i$.

Cabe notar que φ^λ es equivale al valor de Shapley sí y sólo si $\lambda = (1, 1, ..., 1)$.

De aquí en adelante, se denotará el valor de Shapley ponderado de un juego (N, v), con vector de pesos λ por

$$WSh^\lambda(N, v) = \left(WSh_i^\lambda(v)\right)_{i \in N}.$$

Ejemplo 1.3.15. Sea el juego de tres jugadores considerado en el Ejemplo 1.1.2, supóngase que se desea dividir el costo de la pavimentación teniendo en cuenta las producciones y ganancias de las empresas y así apoyar a las fábricas menos favorecidas. Entonces, teniendo en cuenta que la fábrica 3 tiene mayor ganancias, seguida de la fábrica 2 y la que menos ganancias obtiene es la fábrica 1, de tal forma que el esfuerzo que 1 hace para participar en el proyecto es tres veces más que el de la fábrica 3 y dos veces más que el de la fábrica 2 se asigna al juego el vector de pesos $\lambda = (3, 2, 1)$; el valor de Shapley ponderado para este vector es

$$WSh^\lambda(v) = \left(\frac{9}{2}, 17\frac{1}{2}, 40\frac{5}{6}\right).$$

Así, se observa el apoyo que la fábrica 3 brinda a las otras dos fábrica, además, de la disminución de los costos para que las fábricas 1 y 2 participen en el proyecto.

Análogo al valor de valor de Shapley, el valor de Shapley ponderado tiene una interpretación probabilística con la siguiente expresión. Sea λ un vector de pesos; para toda $i \in N$ se tiene

$$WSh_i^\lambda(v) = \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{SYM}_N} pr^\lambda(\mathcal{R}) m_i^{\mathcal{R}} \tag{1.9}$$

donde, para cada orden $\mathcal{R} = (i_1, i_2, ..., i_n)$,

$$pr^\lambda(\mathcal{R}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{i_j}}{\sum_{k=1}^{j} \lambda_{i_k}}.$$

Para interpretar esta fórmula probabilística, considérese la situación en la que un jugador en N, digamos i_n, se selecciona de manera aleatoria utilizando una distribución de probabilidad tal que la probabilidad que un jugador sea elegido es proporcional a su peso, y se posiciona al final del orden. Posteriormente, se selecciona otro jugador, i_{n-1}, utilizando el mismo proceso para $n-1$ jugadores y se coloca en la penúltima posición. Continuando el mismo proceso $n-2$ veces, se obtiene un orden $\mathcal{R} = (i_1, i_2, ..., i_n)$ y la probabilidad que ocurra dicho orden es justamente la fórmula anterior.

A continuación se introducen conceptos y axiomas para la caracterización del valor de Shapley ponderado.

Definición 1.3.16. Se dirá que la coalición $S \subseteq N$ es una coalición natural de socios en el juego (N, v), si para todo $T \subsetneq S$ y $R \subseteq N \setminus S$ se tiene que

$$v(R \cup T) = v(R).$$

Una coalición natural de socios se comporta como un solo individuo, ya que ninguna de sus subcoaliciones propias refleja un cambio al entrar a otra coalición.

Axioma 1.3.17. ***Asociación.*** *Sea S es una coalición de socios en (N, v), entonces una solución ϕ satisface el axioma de asociación si*

$$\phi_i(v) = \phi_i\left(\phi(v)(S)u_S\right), \quad \forall i \in S,$$

donde $\phi(v)(S) = \sum_{i\in S} \phi_i(v)$.

Este axioma se puede interpretar de la siguiente forma: se espera que cada coalición natural de socios juegue como un solo individuo en v y reparta lo obtenido entre sus jugadores en forma independiente.

Axioma 1.3.18. ***Positividad.*** *Sea (N, v) un juego monótono, una solución ϕ cumple el axioma de positividad si*

$$\varphi(v) \geq 0.$$

Teorema 1.3.19. Kalai & Samet, 1987. Una solución ϕ satisface los axiomas de eficiencia, aditividad, positividad, nulidad y asociación sí y sólo si existe un sistema de pesos λ tal que ϕ es el valor de Shapley ponderado WSh^{λ}.

Para estudiar la demostración del teorema anterior se puede referir a Kalai y Samet (1987). De igual forma, en dicha referencia es posible encontrar diversas automatizaciones del valor de Shapley ponderado.

1.4. El potencial de un juego

En esta sección se presentan resultados que se usan durante el desarrollo del trabajo. Lo aquí presentado se basa en el conocido articulo, *Potential, value, and consistency* de Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell.

En la economía, ocasionalmente se abordar el problema de repartición asignando a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición, es decir, al jugador i le corresponde

$$\phi_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

Evidentemente, esta regla de repartición no se puede llevar a cabo en general, pues la suma de estas contribuciones marginales puede ser diferente a la valía de la gran coalición, y no habrá forma de conseguirla (esto es, ϕ no cumple el axioma de eficiencia). Hart y Mas-Colell (1989) introducen el concepto de potencial de un juego, propuesto como un operador que asigna un número real a cada subcoalición de N de tal forma que a cada jugador se le asigne su contribución marginal a la gran coalición con respecto a esta función potencial; por ello, al requerir que la asignación sea eficiente, el proceso queda determinado de manera única.

Definición 1.4.1. Se llamará **función potencial** a la aplicación $P : G_N \to \mathbb{R}$, que asocia un número real $P(S, v|_s)$ a cada subjuego $(S, v|_s)$ de $(N, v) \in N$ de tal forma que

$$\sum_{i \in N} D^i P(N, v) = v(N) \quad \text{y} \quad P(\emptyset) = 0 \quad \forall (N, v) \in G_N, \tag{1.10}$$

donde, $D^i P(N, v) = P(N) - P(N \setminus \{i\})$ es la contribución marginal del i-ésimo jugador respecto a P.

Por tanto, una función potencial cumple la característica de que la asignación de las contribuciones marginales de cada jugador con respecto a la gran coalición (para dicha función potencial) siempre suma exactamente la valía de la gran coalición.

Con el fin de simplificar la notación, se escribirá $P(S)$ para hacer referencia a $P(S, v|_S)$, con $S \subseteq N$.

Teorema 1.4.2. Hart & Mas-Colell, 1989. Para todo juego $(N, v) \in G_N$, el vector de pago resultante $(D^i P(N))_{i \in} N$ coincide con el valor de Shapley del juego. Más aún, el potencial de cualquier juego está únicamente determinado por las condiciones dadas en (1.10) aplicadas únicamente al juego y a sus subjuegos (es decir, $(S, v|_S)$ para toda $S \subseteq N$).

Por las condiciones dadas en (1.10), y aplicando la función potencial a toda $S \subseteq N$, se obtiene que

$$P(S) = \frac{1}{s}\left[v(S) + \sum_{i\in S} P(S \setminus \{i\})\right].$$

Fijando inicialmente $P(\emptyset) = 0$, se determina $P(S)$, $S \subseteq N$, de manera recursiva. De aquí, por el teorema anterior, se tiene un algoritmo recursivo determinado de manera única que calcula el valor de Shapley, mediante el uso de la función potencial

$$Sh_i(N, v) = P(N) - P(N \setminus \{i\}).$$

De forma análoga se caracteriza el valor de Shapley ponderado con la siguiente función.

Definición 1.4.3. Se llamará **w-función potencial** a la aplicación $P_w : G_N \to \mathbb{R}$, que asocia un número real $P_w(S, v|_s)$ a cada subjuego $(S, v|_s)$ de $(N, v) \in N$ de tal forma que

$$\sum_{i\in N} w^i D^i P_w(N, v) = v(N) \quad \text{y} \quad P_w(\emptyset) = 0, \tag{1.11}$$

para todo, $(N, v) \in G_N$ y toda colección de pesos positivos $w = (w^i)_{i\in N}$.

Teorema 1.4.4. Para toda colección $w = (w^i)_{i\in N}$ de pesos positivos existe una única función w-potencial P_w. Más aún, la función solución resultante, asociada al vector de pagos $(w^i D^i P_w(N, v))_{i\in N}$ a el juego (N, v), coincide con el valor de Shapley ponderado WSh^w. Finalmente, P_w puede ser calculado recursivamente por la formula

$$P_w(N, v) = \frac{1}{\sum\limits_{i\in N} w^i}\left[v(N) + \sum_{i\in N} P_w(N \setminus \{i\}, v)\right].$$

En Hart y Mas-Colell (1989) también se muestra que los valores de Shapley y Shapley ponderado, para todo (N, v) y cualquier vector de pesos positivos $w = (w^i)_{i\in N}$ cumplen *el principio de preservación de diferencias*, como siguen:

$$Sh_i(N, v) - Sh_i(N \setminus \{j\}, v) = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v)$$

$$\frac{WSh_i^w(N, v) - WSh_i^w(N \setminus \{j\}, v)}{w^i} = \frac{WSh_j^w(N, v) - WSh_j^w(N \setminus \{i\}, v)}{w^j}.$$

Capítulo 2

Conceptos básicos de juegos no cooperativos

Los modelos de juegos *no cooperativos* representan situaciones abstractas de la vida real, en las cuales individuos racionales (*jugadores*) deben tomar decisiones por si solos acerca del comportamiento o acciones (estrategias) que deben realizar para obtener un beneficio, teniendo en cuanta que éste depende de las acciones de cada uno de los demás individuos. En estos modelos, los jugadores no poseen mecanismos externos que les permitan garantizar el cumpliendo de acuerdos o compromisos entre grupos de agentes, es decir los jugadores actúan de forma independiente. De esta forma, el principal objetivo de ésta teoría es establecer cuales estrategias deben seguir los jugadores, basándose en el comportamiento esperado de los demás jugadores, obteniendo situaciones con características deseables. Específicamente, la teoría recomienda perfiles de estrategias que conducen a un *equilibrio*, en el cual la estrategia asignada a cada jugador debe ser óptima para él cuando los demás jugadores toman las estrategias que se les fueron asignadas. Así, cada jugador no tiene incentivos para desviarse del comportamiento que le fue recomendado, lo que garantiza que la recomendación propuesta es realizable por si misma.

En esta sección nos enfocamos en el modelo de *juegos en forma normal*, los cuales permiten representar matemáticamente las situaciones de juegos no cooperativos en los cuales los resultados obtenidos por cada perfil de estrategias pueden ser representados con un vector de utilidades que favorece a cada uno de los jugadores. Posteriormente, con el objetivo de proponer sugerencias de estrategias para que sean implementadas (o no ser implementadas) por los jugadores se introducen varios conceptos. El primer concepto es la dominancia (débil o estricta), el cual dota al conjunto de perfiles de estrategias con un orden parcial para cada jugador, es decir, nos informa cuando una estrategia es "mejor" que otra. Bajo la hipótesis de que los jugadores son "racionales" y que no implementan estrategias dominadas, se puede introducir un proceso de *eliminación iterada de estrategias dominadas*, también llamado *racionalización*. En dicho proceso, las estrategias dominadas son sucesivamente eliminadas del juego y de este modo lo simplifica. Posteriormente, se introduce la noción de *estabilidad*, la cual es capturada con el concepto de *equilibrio de Nash*. Finalmente, se presentan algunas propiedades interesantes que posee dicho equilibrio, lo cual lo hace favorable como implementación.

Para obtener mayores detalles, demostraciones y ejemplos el lector se puede referir al libro Maschler *et al.* (2013), el cual fue texto guía para el desarrollo de este capítulo.

2.1. Juegos en forma estratégica

Un juego en forma estratégica es un modelo el cual consiste de un conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias para cada jugador, y un resultado para cada vector de estrategias, el cual es usualmente dado por un vector de funciones de utilidades que favorece a los jugadores.

Definición 2.1.1. Un **juego en forma estratégica** es una terna ordenada $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, tal que:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ es un conjunto finito de jugadores.
- S_i es el conjunto de estrategias del jugador i, para todo jugador $i \in N$. Se denota el conjunto de todos los vectores de estrategias por

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n.$$

- $u_i : S \to \mathbb{R}$ es una función que asocia cada vector de estrategias $s = (s_i)_{i\in N}$ con el pago (utilidad) $u_i(s)$ del jugador i, para todo jugador $i \in N$.

Cabe resaltar que en esta definición el conjunto de estrategias disponible para los jugadores no tiene que ser finito, de hecho, en el Capítulo 4 se presenta un juego con un conjunto de estrategias que puede ser infinito. En el caso que los conjuntos de estrategias de cada jugador sean finitos, se dirá que el juego es finito.

El hecho de que cada función u_i depende del vector de todas las estrategias s y no solamente de la estrategia del jugador i, s_i, le da el sentido a estos juegos, es decir, describe una situación en la cual hay interacción entre las decisiones de los diferentes jugadores.

Notación 2.1.2. Dado un jugador $i \in N$, el conjunto de perfiles de estrategias de los demás jugadores se denota por

$$S_{-i} = \times_{j \neq i} S_j.$$

En este modelo se supondrá que todos los jugadores determinan las estrategias de manera simultanea, omitiendo elementos temporales en el análisis de los juegos.

2.2. Dominancia

Existen situaciones en las que un jugador posee una estrategia que le proporciona mejores resultados que sus otras estrategias, para cualquier conjunto de estrategias de los demás jugadores. En este caso al jugador le conviene utilizar dicha estrategia para optimizar su utilidad.

Definición 2.2.1. Una estrategia s_i del jugador i es **estrictamente dominada** si existe otra estrategia t_i del jugador i tal que para cada vector de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ de los otros jugadores se tiene que

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}).$$

En este caso se dice que s_i es estrictamente dominada por t_i, ó que t_i domina estrictamente a s_i.

También se puede utilizar esta idea para que un jugador evite el uso de las estrategias que le generen menor beneficio en el resultado, en el caso que no exista una única estrategia que le convenga utilizar más que otras.

Definición 2.2.2. Una estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i es **débilmente dominada** si existe otra estrategia $t_i \in S_i$ tal que:

- Para cada vector de estrategias $s\_i \in S\_i$ de los otros jugadores,

$$u_i(s_i, s\_i) \leq u_i(t_i, s\_i).$$

- Existe un vector de estrategias $t\_i \in S\_i$ de los jugadores tal que

$$u_i(s_i, t\_i) < u_i(t_i, t\_i).$$

En este se dirá que la estrategia s_i es débilmente dominada por la estrategia t_i, y que la estrategia t_i domina débilmente a la estrategia s_i.

Si un jugador decide restringir sus estrategias y no usar sus estrategias débilmente dominadas, no será afectado y su utilidad no disminuye, pues existen otras estrategias que le generarán al menos el mismo beneficio sin importar que hagan los demás jugadores.

Definición 2.2.3 (Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas)**.** Sea $S_i^0 = S_i$ y se define S_i^k, $k > 0$ de la siguiente forma:

$$S_i^{k+1} = \left\{ s_i \in S_i^k \mid \nexists t_i \in S_i^k \text{ tal que } u_i(t_i, s_-i) > u_i(s_i, s_-i),\ \forall s_-i \in S_{-i}^k \right\},$$

además

$$S_i^\infty = \cap_{k=1}^\infty S_i^k.$$

El conjunto S_i^∞ se denomina el conjunto de estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa del jugador i y el conjunto $S^\infty = \times_{i=1}^N S_i^\infty$ el conjunto de estrategias conjuntas no dominadas estrictamente de forma iterativa del juego G.

El proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas es llamado *racionalización.*

Definición 2.2.4. Si S^∞ consiste de un sólo elemento, decimos que el juego es **resoluble en estrategias no dominadas estrictamente** de forma iterativamente.

El proceso de racionalización es una herramienta eficiente que permite algunas veces obtener resultados significativos, de aquí podemos introducir un concepto de solución más general. Una solución es cualquier regla que determine el comportamiento de los agentes en un juego dado.

2.3. Equilibrio de Nash

Uno de los conceptos de solución más importante en la literatura de teoría de juegos no cooperativos es el *equilibrio de Nash*, dicho equilibrio caracteriza un concepto de estabilidad en un juego. En éste es necesario que los agentes tengan una expectativa correcta sobre lo que los demás van a jugar y viceversa, es un perfil de estrategias en el cual la estrategia de cada jugador es óptima dadas las estrategias de los demás jugadores.

Definición 2.3.1. Un vector de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ es un **equilibrio de Nash** si para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i$ se satisface que:

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

El vector $u(s^*)$ es el equilibrio de pagos correspondiente a el equilibrio de Nash s^*.

El proceso de racionalización y el equilibrio de Nash están relacionados como sigue.

Proposición 2.3.2. *Todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.*

Proposición 2.3.3. *Si un juego es resoluble en estrategias no dominadas iterativamente entonces esa estrategia conjunta es un equilibrio de Nash y además es el único equilibrio de Nash.*

El concepto de equilibro de Nash se puede obtener desde otra perspectiva, a continuación se introducen las definiciones necesarias para describirla.

Definición 2.3.4. La estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ es una **desviación rentable** del jugador i en el perfil de estrategias $s \in S$ si $u_i(\widehat{s}_i, s_-i) > u_i(s)$.

En un perfil que es equilibrio de Nash, cada jugador no posee una desviación rentable.

Definición 2.3.5. Un equilibrio de Nash s^* es estricto si toda desviación de algún jugador le produce una pérdida; es decir, si $u_i(s^*) > u_i(s_i, s^*_{-i})$ para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i \setminus \{s^*_i\}$.

La estabilidad es una de las propiedades mas deseables que posee el equilibrio de Nash, pues lo hace ser un perfil autoejecutable. Una condición necesaria para que se cumpla ésta propiedad, es que dados los perfiles de los demás jugadores, cada jugador no tenga una estrategia alternativa que le genere un beneficio mejor estrictamente.

Definición 2.3.6. Sea $s_-i \in S_-i$ un perfil de estrategias de todos los jugadores sin incluir a i. La estrategia de un jugador i es una **mejor respuesta** a s_-i si

$$u_i(s_i, s_-i) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_-i).$$

La siguiente definición, basada en el concepto de mejor respuesta, es equivalente a la definición de equilibrio de Nash en la Definición 2.3.1

Definición 2.3.7. El perfil de estrategias $s^* = (s^*_1, s^*_2, ..., s^*_n)$ es un equilibrio de Nash si s^*_i es una mejor respuesta a s^*_{-i} para cada jugador $i \in N$.

En un equilibrio de Nash, cada jugador responde de la mejor forma posible según el comportamiento potencial de los demás jugadores. Además nigun jugador puede mejorar su utilidad si se desvía individualmente del perfil de estrategias que se recomienda.

Proposición 2.3.8. *Sea* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ *un perfil de estrategias. Entonces* s_i^* *es una mejor respuesta a* s_{-i}^* *para cada jugador* $i \in N$ *si y sólo si para cada jugador* $ßinN$ *y cada estrategia* $s_i \in S_i$ *se cumple* $u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

Esto establece que las dos definiciones de equilibrio de Nash 2.3.1 y 2.3.1 son equivalentes.

Las normas de comportamiento social pueden verse como equilibrios Nash, pues si una norma no fuera un equilibrio, algunos individuos en la sociedad podrían encontrar alguna desviación de la norma que le genere una ganancia, y así dejaría de ser una norma.

Capítulo 3

Juegos con restricciones anidadas

Existen situaciones reales en las cuales un conjunto de agentes poseen mecanismos para realizar acuerdos. Usualmente, esas situaciones pueden ser modeladas como juegos cooperativos (de utilidad transferible). Uno de los principales problemas en éste tipo de modelos es la distribución de pagos entre los agentes. Cuando existen acuerdos coalicionales *a priori*, estas situaciones son modeladas con juegos cooperativos con estructura coalicional (es decir, una partición del conjunto de jugadores). Diferentes extensiones del valor de Shapley para esos juegos han sido presentados por Aumann y Dreze (1974) y Owen (1977). Sin embargo, algunas veces la información brindada por las estructuras coalicionales son insuficientes. Específicamente, una estructura coalicional no puede describir las situaciones donde la cooperación surge en varios niveles (es decir, con multiples particiones del conjunto de jugadores). Para este caso, Winter (1989) introduce juegos con *estructuras de nivel* y presenta una extensión del *valor de Owen* para dichas estructuras.

En el modelo clásico de juegos cooperativos, cualquier conjunto de jugadores es una coalición factible. De hecho, un juego cooperativo puede ser modelado como una función real valuada definida sobre el conjunto potencia del conjunto de jugadores. Pero en algunas situaciones, la cooperación entre jugadores puede estar restringida por condiciones exogenas, las cuales evitan la formación de algunas de dichas coaliciones. Algunos trabajos enfocados a juegos con cooperación restringida son presentados en Myerson (1977) y Owen (1986), para juegos de comunicación; Faigle y Kern (1992), para juegos cooperativos bajo restricciones de precedencia; Bilbao y Edelman (2000), para juegos en geometrías convexas; y Koshevoy y Talman (2014), para juegos con estructura general de coalición.

En éste capítulo se presenta un modelo con restricciones de cooperación dadas por una estructura de nivel. Para dar un ejemplo, a continuación se presenta una situación con estructura de división política. Considere el problema de asignación del pago de cada ciudad para el mantenimiento de autopistas. Los segmentos de autopista son generalmente la responsabilidad de la entidad sobre la cual fueron construidas, en este sentido, la cooperación entre las entidades gubernamentales puede reducir los costos de mantenimiento del sistema completo de autopistas. Usualmente se alienta a las entidades individuales a utilizar los fondos federales para mejorar la eficiencia y la seguridad de dicho sistema, entonces, un porcentaje de los costos de construcción y mantenimiento de las carreteras interestatales en muchos países se han pagado principalmente a través de impuestos sobre los combustibles, tasas de usuarios, impuestos sobre la propiedad y otros impuestos recaudados por los gobiernos federal, estatal y local. Los costos de mantenimiento y los porcentaje subsidiados son diferentes, además la información es recolectada por cada entidad. Por esta razón, las coaliciones son solamente posibles entre ciudades en el mismo condado, entre condados en el mismo estado y entre estados.

Una estructura de nivel (mencionada en el párrafo anterior, como estructura de división política) describe una jerarquía de cooperación entre los jugadores, como hemos mencionado anteriormente, siendo las ciudades los jugadores. Winter (1989) brinda un modelo con esta estructura y propone una solución llamada *valor de estructura de nivel* (LS-value). Este valor se calcula como las contribuciones marginales esperadas del jugador a las coaliciones formadas por un proceso secuencial, de tal forma que cualquier orden que sea consistente con la estructura de nivel[1], cada jugador se une a sus predecesores en el orden, con una distribución uniforme sobre estos órdenes. Sin embargo, los valores de esas contribuciones marginales no pueden ser calculadas en la situación descrita anteriormente. Este valor requiere información de las coaliciones que no son factibles. Por ejemplo, cuando sólo una ciudad se une a sus ciudades predecesoras en un orden consistente con la división política, podemos obtener conjuntos de condados junto a ciudades en una parte de otro condado, o conjuntos de estados junto con condados en otro estado junto a algunas ciudades en otro condado. En este capítulo nos centramos en resolver este problema con información restringida.

En este capítulo se presentan juegos con estructura coalicional similar a la presentada por Winter (1989), pero con una importante diferencia conceptual, la cooperación entre jugadores está restringida por restricciones anidadas dadas por una estructura de nivel. Así, el dominio de la *función característica* no es el conjunto de potencia del conjunto de jugadores. En esta estructura, el conjunto de jugadores se clasifica en varios niveles, de acuerdo a una familia de particiones del conjunto de jugado-

[1]Un orden es consistente con la estructura de nivel si los jugadores de la misma clase aparecen sucesivamente.

res, $(\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, ..., \mathcal{P}^{p+1})$, donde cada partición es un refinamiento de la siguiente. A lo largo del capítulo, $\mathcal{P}^0$ denota la partición de singuletes y la última partición $\mathcal{P}^{p+1}$ denota la partición de la gran coalición, estas serán llamadas particiones triviales. Los elementos de cada partición serán llamados *clases* y cada una de estas posee un conjunto de subclases, el cual es el conjunto de elementos en la anterior partición contenidos en la clase. De hecho, las subclases proporcionan una partición de la clase a la que pertenecen. En este modelo, serán consideradas *coaliciones factibles* solamente los subconjuntos de jugadores que satisfacen *restricciones anidadas* en el siguiente sentido: Una coalición S es la unión de subclases pertenecientes a la misma clase. Los juegos definidos en el conjunto de coaliciones factibles serán llamados *juegos cooperativos con estructuras anidadas* o simplemente *juegos anidados*. El modelo clásico ocurre exactamente cuando el conjunto de jugadores sólo tiene las particiones triviales. En este sentido, las restricciones anidadas son consideradas como una *regla de formación* y se considera que solamente las *coaliciones factibles* pueden tener valía.

Los artículos citados anteriormente, en los cuales se estudia la cooperación restringida, proponen adaptaciones del valor de Shapley para solucionar los juegos en las nuevas estructuras de cooperación; en ellos podemos observar dos enfoques diferentes de adaptación: Para juegos de comunicación y juegos con estructura de coalición general, se proponen diferentes maneras de extender la función característica a las coaliciones infactibles en las que se puede calcular el valor de Shapley. Por otra parte, los modelos de juegos cooperativos bajo restricciones de precedencia y juegos sobre geometrías convexas definen procesos en los que sólo se usan las coaliciones factibles. Esto evita una definición artificial del valor en coaliciones infactibles. En este capítulo se sigue el segundo enfoque y se da una solución para el nuevo tipo de juegos definidos en modelo de juegos anidados, usando solamente el valor de coaliciones factibles. Específicamente, se desarrolla una adaptación del valor Shapley para estos juegos, se estudia la estructura de las coaliciones factibles y se obtiene un valor calculado con una modificación de las contribuciones marginales, en estas toda una subclase se incorpora o abandona la coalición. En el caso particular en el cual sólo hay una partición distinta de las triviales, $(\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2)$, la adaptación propuesta del valor de Shapley coincide con *el valor colectivo* presentado por Kamijo (2013).

Existen caracterizaciones conocidas para los valores en juegos con estructuras de nivel las cuales utilizan generalizaciones o adaptaciones del *principio de contribuciones balanceadas* de Myerson (1980). Calvo *et al.* (1996) proporcionaron una caracterización del *valor de estructura de nivel* usando la propiedad de *contribuciones balanceadas* la cual establece que para cualquiera dos subclases que pertenezcan a la misma clase, la ganancia o el déficit en el pago total de los miembros en cada subclase debe ser igual cuando la otra subclase abandona el juego. Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2011) propusieron otro valor para juegos con estructuras de nivel; lo caracterizan con la *propiedad de contribuciones balanceadas per capita*, ésta propiedad establece que para cualquiera dos subclases que pertenezcan a la misma clase, la cantidad promedio que los jugadores en cada subclase ganaría o perdería debería ser igual cuando la otra subclase abandone el juego, dicho promedio se toma sobre la cardinalidad de cada subclase.

En este trabajo, se introduce una propiedad para juegos anidados mediante una generalización de la propiedad *contribuciones balanceadas colectivas* de Kamijo (2013), que será llamada propiedad de *contribución de clases balanceadas*, la cual establece que para cualesquiera dos subclases que pertenezcan a la misma clase, el cambio en el pago para cada jugador en cada subclase debe ser igual cuando la otra subclase completa abandona el juego.

La *extensión multilineal* de (Owen, 1988, sec. 10) es una herramienta eficiente para calcular el valor de Shapley para juegos con un conjunto grande de jugadores. Owen *et al.* (1992) modifican este método para calcular el *valor coalicional* de Owen (1977). También, proponen una camino para generalizar este método para el valor de estructura de nivel. En este trabajo, se define la *extensión multilineal para juegos anidados* y se usa para obtener otra expresión del valor de Shapley adaptado.

3.1. Modelo

Para presentar el modelo de juegos bajo restricciones anidadas de cooperación, es necesario introducir algunos aspectos generales y notaciones. Para describir la estructura de nivel, se consideran múltiples particiones del conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$, las cuales tienen ciertas características que se presentan a continuación.

Sean P y Q particiones de N, se dice que P es un refinamiento de Q, y es denotado por $P \prec Q$, si para todo $X \in P$, existe $Y \in Q$ tal que $X \subseteq Y$.

Definición 3.1.1. Una *estructura de nivel* es una sucesión $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, ..., \mathcal{P}^{p+1})$, con $\mathcal{P}^k$ una partición de N, $0 \leq k \leq p+1$, tal que:

- $\mathcal{P}^0 = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\}$
- $\mathcal{P}^{p+1} = \{N\}$
- $\mathcal{P}^k \prec \mathcal{P}^{k+1}$, para todo $0 \leq k \leq p$.

$\mathcal{P}^k$ es llamado el *k-ésimo nivel* de $\mathfrak{P}$. El 0-nivel y el $(p+1)$-nivel son llamados niveles triviales. En el caso que no existan particiones diferentes a las triviales, se dirá que $\mathfrak{P}$ es una estructura de nivel *trivial*.

Se denotará por $\mathcal{P}^k = \{C_1^k, C_2^k, ..., C_{m_k}^k\}$ y $M^k = \{1, 2, ..., m_k\}$, en éste sentido, cada elemento de $\mathcal{P}^k$ será llamado una *k-clase*. Además, se considera *el conjunto de indices* de C_t^k definido por:

$$M_t^k = \{s \mid C_s^{k-1} \subseteq C_t^k\}. \tag{3.1}$$

Entonces, toda clase C_t^k puede ser caracterizada como la unión de los elementos en la partición $\mathcal{P}^{k-1}$ que la compone, como sigue:

$$C_t^k = \bigcup_{s \in M_t^k} C_s^{k-1}.$$

Ahora es posible introducir el modelo de juegos bajo las restricciones anidadas dadas por una estructura de nivel. Dado que este modelo sólo considera coaliciones de jugadores en conjuntos de $(k-1)$-clases que pertenecen a la misma k-clase, solamente estas coaliciones serán permitidas, el conjunto compuesto por dichas coaliciones será llamado *el conjunto de coaliciones factibles de* C_t^k, el cual es

$$B_t^k = \left\{ \bigcup_{s \in T} C_s^{k-1} \mid T \subseteq M_t^k \right\}, \tag{3.2}$$

para $k = 1, ..., p+1$ y $t = 1, ..., m_k$. Entonces, *el conjunto de coaliciones factibles en el nivel* k es

$$B^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} B_t^k.$$

Por lo tanto, el conjunto de todas las coaliciones factibles en una situación de cooperación con restricciones anidadas es la unión de todas las coaliciones factibles en los $(p+1)$-niveles,

$$\mathcal{B}_N = \bigcup_{k=1}^{p+1} B^k.$$

Observación 3.1.2. Las clases C_t^k, $t = 1, ..., m_k$ son coaliciones factibles en los niveles k y $k+1$.

Es posible considerar $(\mathcal{B}_N, \subseteq)$ como un conjunto parcialmente ordenado (o *poset*). Mas aún, $\mathcal{B}_N$ es un *lattice finito* con los operadores usuales *unión* e *intersección*[2], este tiene algunas propiedades interesantes. Para este trabajo especifico las siguientes propiedades son de primordial importancia.

Observación 3.1.3. Por (3.2) es posible asegurar que cada subconjunto parcialmente ordenado $(B_t^k, \subseteq)$ y $(2^{M_t^k}, \subseteq)$ son isomorfos. De hecho, todo *intervalo*

$$[S, T] = \{R \in \mathcal{B}_N \ : \ S \subseteq R \subseteq T\}$$

con $S, T \in B_t^k$, $S \subseteq T$, es un *álgebra de Boole*.

Observación 3.1.4. Dados $S, T \in \mathcal{B}_N$, si $S \subseteq T$ y $S \in B_t^k$ pero $T \notin B_t^k$ entonces

$$[S, T] = [S, C_t^k] \cup [C_t^k, T].$$

Esto quiere decir que $[S, T]$ es un conjunto atómico parcialmente ordenado, debido a que la unión de todas las coaliciones que cubren a S es $C_t^k \subsetneq T$[3].

A continuación, se muestra una situación con restricciones anidados de cooperación que se utilizará utilizar para ejemplificar varios aspectos a lo largo del capítulo, éste tiene la estructura de división política mencionada en la introducción en el problema de asignación de costos en el mantenimiento de autopistas.

Ejemplo 3.1.5. *Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de ciudades en un pais. Dichas ciudades están agrupadas en condados: $C_1^1 = \{1\}$, $C_2^1 = \{2, 3\}$ y $C_3^1 = \{4\}$. Además, estas ciudades provienen de diferentes estados $C_1^2 = \{1, 2, 3\}$ y $C_2^2 = \{4\}$. Más aún, se denota la clase del pais completo por $C_1^3 = \{1, 2, 3, 4\}$. Así, entonces el conjuntpo de indices que caracterizan las clases de los niveles superiores son:*

$$M_1^2 = \{1, 2\}, \ M_2^2 = \{3\}, \ M_1^3 = \{1, 2\}.$$

Entonces, el conjunto de coaliciones factibles es

$$\mathcal{B}_N = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

El conjunto $\mathcal{B}_N$ define las coaliciones factibles para restricciones anidadas de cooperación (en adelante denominado *estructura anidada*), lo que nos permite dar una definición para este tipo de juegos análogos a los juegos TU,

[2] La *minima cota superior* de S y T en el poset es S unido T. De forma dual, *la máxima cota inferior* de S y T es S intersectado T, (Stanley, 1998, p. 285).

[3] R cubre a S si $S \subset R$ y no existe $Q \in \mathcal{B}_N$ tal que $S \subset Q \subset R$.

Definición 3.1.6. Se llamará *juego cooperativo anidado* al par $(v, \mathcal{B}_N)$, donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores, $\mathcal{B}_N$ es una estructura anidada y $v : \mathcal{B}_N \to \mathbb{R}$ es una función característica tal que $v(\emptyset) = 0$.

A lo largo de este trabajo, la función v está restringida a subconjuntos propios de $\mathcal{B}_N$, que también son estructuras anidadas. Haciendo abuso de la notación, se usa la misma letra para designar la función en $\mathcal{B}_N$ y su restricción en los subconjuntos propios.

Ejemplo 3.1.7. *Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de ciudades con estructura anidada presentada en el Ejemplo 3.1.5. La función característica que modela los costos de mantenimiento de un sistema de autopistas está representado en la Tabla 3.1*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3,4\}$
$v(S)$	1	1	0	1	2	4	6

Cuadro 3.1: Función característica de los costos de mantenimiento de un sistema de autopistas

Se llamará *conjunto de juegos cooperativos anidados* en $\mathcal{B}_N$ al conjunto

$$G_{\mathcal{B}_N} = \{v \mid v : \mathcal{B}_N \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0\}.$$

Análogamente al caso de juegos cooperativos TU, se denota $G_{\mathcal{B}_N}$ con una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los numeros reales. Sea $v, w \in G_{\mathcal{B}_N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$, para todo $S \in \mathcal{B}_N$ (suma).
- $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$ para todo $S \in \mathcal{B}_N$ (producto por escalar).
- $v_0(S) = 0$ para todo $S \in \mathcal{B}_N$ (elemento neutro).

De aquí se sigue que

$$G_{\mathcal{B}_N} \simeq \mathbb{R}^{|\mathcal{B}_N|-1}$$

y una base para este espacio vectorial es:

$$U_{\mathcal{B}_N} = \{u_T | T \in \mathcal{B}_N,\ T \neq \emptyset\},$$

donde u_T es el *juego anidado de unanimidad* definido como

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ S \supseteq T \\ 0 \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $S \in \mathcal{B}_N$.
Todo juego anidado es combinación lineal de los juegos anidados de unanimidad,

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}_N} \Delta_T(v) u_T \quad \text{y} \quad v(S) = \sum_{\substack{T \subseteq S \\ T \in \mathcal{B}_N}} \Delta_T(v), \quad \forall S \in \mathcal{B}_N.$$

Usando *la fomula de inversión de Möbius* (Stanley, 1998, p. 303),tenemos que

$$\Delta_T(v) = \sum_{\substack{R \subset T \\ R \in \mathcal{B}_N}} \mu(R,T) v(R), \quad \forall T \in \mathcal{B}_N,$$

donde μ es la *función de Möbius*. Por lo tanto, por las Observaciones 3.1.3 y 3.1.4, aplicando técnicas para el cálculo de la función de Möbius (Stanley, 1998, Example 3.8.3, Corollary 3.9.5), $\mu(R,T)$ toma la siguiente forma:

$$\mu(R,T) = \begin{cases} (-1)^{\ell(R,T)} & \text{si} \quad R,T \in B_t^k \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\ell(R,T) := \left|\left\{C_r^{k-1} \ : \ C_r^{k-1} \subseteq T \setminus R\right\}\right|$. Entonces,

$$\Delta_T(v) = \sum_{\substack{R \subset T \\ R,T \in B_t^k}} (-1)^{\ell(R,T)} v(R), \quad \forall T \in \mathcal{B}_N, \tag{3.3}$$

Siguiendo el trabajo de Harsanyi (1963), $\Delta_T(v)$ es llamado el *dividendo* de T en el juego v.

Ahora, se definirán los *los juegos de k-classes*[4]. La principal idea de éstos juegos es observar las $(k-1)$-clases como agentes mediante los conjuntos de indices definidos en (3.1).

Definición 3.1.8. Sea $(v, \mathcal{B}_N)$ un juego anidado. El *juego de clases en* C_t^k de $(v, \mathcal{B}_N)$ es un juego clásico $(M_t^k, v_{C_t^k})$ definido por

$$v_{C_t^k}(R) = v\left(\bigcup_{s \in R} C_s^{k-1}\right),$$

para cada $R \subseteq M_t^k$.

En caso de que no exista confusión, se denotará el juego $(M_t^k, v_{C_t^k})$ solamente con su función característica $v_{C_t^k}$.

[4]Este juego es conocido como juego cociente en Owen (1977).

Observación 3.1.9. Por definición, podemos notar que si $C_t^k \subseteq C_s^{k+1}$, entonces el índice $t \in M_s^{k+1}$ es un jugador en $v_{C_s^{k+1}}$ y M_t^k es la gran coalición en $v_{C_t^k}$. De hecho,

$$v(C_t^k) = v_{C_t^k}(M_t^k) = v_{C_s^{k+1}}(\{t\}).$$

Ejemplo 3.1.10. *Los juegos de clases para el juego anidado $(v, \mathcal{B}_N)$ del Ejemplo 3.1.7 son $(M_1^2, v_{C_1^2})$, $(M_2^2, v_{C_2^2})$ y $(M_1^3, v_{C_1^3})$, con funciones características presentadas en las Tablas 3.2 y 3.3, respectivamente.*

R	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v_{C_1^2}(R)$	1	2	4

R	$\{3\}$
$v_{C_2^2}(R)$	1

Cuadro 3.2: Juegos de clases donde los condados son jugadores.

R	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v_{C_1^3}(R)$	4	1	6

Cuadro 3.3: Juegos de clases con estados como jugadores.

Dado un jugador fijo $i \in N$, este pertenece a una clase por cada nivel, dichas clases están presentes en diferentes *juegos de clases* en los cuales el jugador i tiene un rol. Se denotará el conjunto de todos los juegos de clases en los cuales i está presente por

$$J_i := \{v_{C_t^k} \mid i \in C_t^k\}.$$

Con el fin de simplificar la notación para el resto del documento, usualmente se denotará el índice de la k-clase que contiene el jugador i como $[i]^k$, y se representará simplemente por $[i]$ cuando no exista ninguna confusión, es decir, el jugador i está en la clase $C_{[i]}^k$, para cada k.

3.2. Adaptación del valor de Shapley

Una solución o valor para juegos cooperativos anidados es una función f tal que asigna a todo juego $(v, \mathcal{B}_N)$ un vector $f(v, \mathcal{B}_N) \in \mathbb{R}^n$, donde sus entradas representan el pago para cada jugador en N. A continuación se introduce un valor para los juegos anidados que es una adaptación del valor Shapley.

Aquí se presenta un valor similar al valor de Shapley en el sentido que a los juegos en la base $U_{\mathcal{B}_N}$ se les asigna el mismo valor que el valor de Shapley asigna a los juegos de unanimidad clásicos,

$$\varphi_i(u_T,\mathcal{B}_N)=\begin{cases}\frac{1}{|T|} & \text{si } \ i\in T,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases} \tag{3.4}$$

El valor lineal que satisface (3.4) para todo juego $v\in G_{\mathcal{B}_N}$ es

$$\varphi_i(v,\mathcal{B}_N)=\sum_{\substack{S\ni i\\ S\in\mathcal{B}_N}}\frac{\Delta_S(v)}{|S|}, \tag{3.5}$$

donde $\Delta_S(v)$ son los dividendos de v. Por lo tanto, de la fórmula para los dividendos, tenemos que la ecuación (3.5) toma la forma

$$\varphi_i(v,\mathcal{B}_N)=\sum_{\substack{S\ni i\\ S\in\mathcal{B}_N}}\gamma_S\left(v(S)-v(S_{-i})\right),$$

donde $S_{-i}:=S\setminus C^{k-1}_{[i]}$, para todo $S\in B^k$ y

$$\gamma_S=\sum_{\substack{T\supsetneq S\\ S,T\in B^k_t}}\frac{(-1)^{\ell(S,T)}}{|T|},\quad S\neq\emptyset.$$

Esta expresión de φ permite observar la similaridad con el valor de Shapley ponderado[5] para los juegos en J_i si tomamos cada $C^{k-1}_t\subset C^k_r$ como un jugador en $(M^k_r, v_{C^k_r})$. Se presentará la siguiente expresión de φ, ya que será útil para brindar una interpretación inicial de este valor. Además, se mostrará un proceso intuitivo para calcular φ en la Sección 3.4.

$$\varphi_i(v,\mathcal{B}_N)=v(i)+\sum_{w\in J_i}\frac{Sh^{\lambda}_{[i]}(w)-w([i])}{\lambda_{[i]}} \tag{3.6}$$

donde cada peso $(\lambda)_j$ es la cardinalidad de la clase representada por j en el juego de clases w. Es sencillo comprobar que (3.6) es lineal y satisface (3.4).

Cada término

$$D_i(w):=\frac{Sh^{\lambda}_{[i]}(w)-w([i])}{\lambda_{[i]}},$$

tiene la siguiente interpretación: El juego de clases es solucionado con un valor de Shapley ponderado ($Sh^{\lambda}_{[i]}$), donde los pesos representan la asimetría del tamaño en

[5]El valor de Shapley ponderado fue introducido por Kalai y Samet (1987), este valor será denotado por $Sh^{\lambda}(w)$ para un juego w y un vector de pesos λ.

las clases participantes. La diferencia $Sh^{\lambda}_{[i]}(w) - w([i])$ representa el exceso o defecto de lo que el valor asigna a la clase y la cantidad que ella puede obtener por si sola ($w([i]) = v(C^k_{[i]})$). Finalmente, una distribución igualitaria de dicha diferencia es realizada entre los miembros de la misma clase. La distribución en partes iguales de esa cantidad proporciona una solución que sugiere un apoyo "colectivo" en cada clase. De hecho, la expresión (3.6) de φ surge como una generalización para el conocido *valor colectivo* presentado por Kamijo (2013) para estricturas coalicionales. Tomando $\mathfrak{P} = (P^0, P^1, P^2)$ el cual tiene solamente una partición diferente de las triviales, se obtiene la expresión simplificada

$$\varphi_i(v, \mathcal{B}_N) = Sh_i(v) + \frac{Sh^{\lambda}_{[i]}(v_{C^2_{[i]}}) - v(C^1_{[i]})}{|C^1_{[i]}|}, \quad \forall i \in N,$$

que es equivalente al *valor colectivo.*

A continuación, se muestran algunas propiedades interesantes que el valor φ satisface. Para esto, se debe considerar $\mathcal{B}_N$ restringido a una coalición S, como sigue,

$$\mathcal{B}_S := \{T \in \mathcal{B}_N \mid T \subseteq S\}.$$

Si se restringe el juego anidado a una clase C^l_r, se tiene que el valor φ para el jugador $i \in C^l_r$ es dado por,

$$\varphi_i(v, \mathcal{B}_{C^l_r}) = v(i) + \sum_{k=1}^{l} D_i(v_{C^k_{[i]}}).$$

De esta manera, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *Sea $C^l_r \subseteq C^{l+1}_s$. Dado un jugador $i \in C^l_r$, entonces el valor en la estructura restringida $\mathcal{B}_{C^{l+1}_s}$ es*

$$\varphi_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_s}) = \varphi_i(v, \mathcal{B}_{C^l_r}) + D_i(v_{C^{l+1}_s}).$$

Ejemplo 3.2.2. *Para calcular el pago que asigna la solución (3.6) al jugador 2 del juego presentado en le Ejemplo 3.1.7 se tiene que:*

$$v(\{2\}) = 1, \; D_2(C^1_2) = \frac{1}{2}, \; D_2(C^2_1) = \frac{1}{3}, \; D_2(C^3_1) = \frac{1}{4}.$$

Así, la asignación final del valor esta dado por

$$\varphi(v, \mathcal{B}_N) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{19}{12}, \frac{25}{12}, \frac{13}{12}, \frac{5}{4}\right).$$

3.2.1. Caracterización

A continuación se presentará una caracterización axiomática para el valor φ, para ello se presentan las propiedades de eficiencia y otra propiedad que extiende *la propiedad de contribuciones balanceadas*.

Definición 3.2.3. Un valor f es *eficiente* si,

$$\sum_{i \in N} f_i(v, \mathcal{B}) = v(N)$$

para cada $v \in G_{\mathcal{B}_N}$.

Definición 3.2.4. Un valor f satisface *Contribución de Clases Balanceadas (CCB)* sí y sólo si, para todo $C_t^l, C_s^l \subset C_r^{l+1}$ $(l = 0, ..., p)$ se tiene que

$$f_i(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1}}) - f_i(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1} \setminus C_s^l}) = f_j(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1}}) - f_j(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1} \setminus C_t^l}),$$

para todo $i \in C_t^l$, $j \in C_s^l$ y todo $v \in G_{\mathcal{B}_N}$.

CCB requiere que dadas dos clases C_t^l y C_s^l en la misma clase superior C_r^{l+1}, el cambio en el pago medido con el valor para cada jugador en C_t^l, si la clase C_s^l abandona el juego, debe ser igual al cambio en el pago medido con el valor para cada jugador en C_s^l si C_t^l abandona el juego.

Observación 3.2.5. En el caso que solamente se tengan los niveles triviales $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1)$, entonces $\mathcal{B}_N = 2^N$. Así, la propiedad CCB coincide con la siguiente propiedad definida por by Myerson (1980).
Un valor f satisface *Contribuciones Balanceadas* sí y sólo si

$$f_i(v, 2^N) - f_i(v, 2^{N \setminus \{j\}}) = f_j(v, 2^N) - f_j(v, 2^{N \setminus \{i\}}),$$

para todo $i, j \in N$ y todo juego anidado $v \in G_{2^N}$.

Observación 3.2.6. Cuando existe solamente un nivel diferente a los niveles triviales $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2)$, la propiedad CCB coincide con la siguiente propiedad presentada por Kamijo (2013).
Un valor f satisface *Contribuciones Balanceadas Colectivas* sí y sólo si

$$f_i(v, \mathcal{B}_N) - f_i(v, \mathcal{B}_{N \setminus C_s^1}) = f_j(v, \mathcal{B}_N) - f_j(v, \mathcal{B}_{N \setminus C_t^1}),$$

para cada $i \in C_t^1$, $j \in C_s^1$, $t \neq s$, y para todo $v \in G_{\mathcal{B}_N}$.

Proposición 3.2.7. *φ es eficiente y satisface CCB.*

Demostración. Es sencillo verificar que φ es eficiente. Ahora veamos que φ satisface CCB: Sean $(v, \mathcal{B}_N)$ y $C^l_{[i]}, C^l_{[j]} \subset C^{l+1}_r$, para un r fijo. Debido a la definición de φ, note que si $l = 0$ entonces φ es el valor de Shapley sobre C^1_r y claramente este cumple CCB. Ahora, si $l \geq 1$, por Proposición 3.2.1 tenemos

$$\varphi_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[i]}}) - \varphi_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = D_i(v_{C^{l+1}_r}) - D_i(v_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[j]}})$$

De igual forma, obtenemos una expresión análoga para el jugador j y debemos verificar que

$$D_i(v_{C^{l+1}_r}) - D_i(v_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[j]}}) = D_j(v_{C^{l+1}_r}) - D_j(v_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[i]}}),$$

así, calculando esta expresión obtenemos que

$$\frac{Sh^\lambda_{[i]}(v_{C^{l+1}_r}) - Sh^\lambda_{[i]}(v_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[j]}})}{\lambda_{[i]}} = \frac{Sh^\lambda_{[j]}(v_{C^{l+1}_r}) - Sh^\lambda_{[j]}(v_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[i]}})}{\lambda_{[j]}},$$

lo cual fue demostrado por Hart y Mas-Collel, p. 604 Hart y Mas-Colell (1989). Así, se concluye que φ cumple la propiedad de CCB. □

Ahora, presentaremos una caracterización de φ utilizando las dos propiedades mencionadas en la Proposición 3.2.7.

Teorema 3.2.8. *Existe un único valor para juegos cooperativos con estructura anidada que satisface las propiedades de* eficiencia *and* CCB*. Dicho valor es φ en 3.6.*

Demostración. Como se probó en la Proposición 3.2.7, sabemos que φ es eficiente y satisface CCB. Fijemos una estructura $\mathcal{B}_N$ con al menos un nivel de anidación. Supongamos que existen dos valores eficientes f y g que satisfacen CCB. Veamos que, dado $i \in N$, $f_i(v, \mathcal{B}_N) = g_i(v, \mathcal{B}_N)$, para todo $v \in G_{\mathcal{B}_N}$.
La demostración se realizará utilizando inducción sobre los niveles. Consideremos el nivel $k = 1$. Dado que las clases del nivel inferior son conjuntos de un solo elemento, tenemos que las coaliciones realizables en $\mathcal{B}_{C^1_{[i]}}$ son

$$B^1_{[i]} = 2^{C^1_{[i]}},$$

así, el juego del primer nivel, $(v, \mathcal{B}_{C^1_{[i]}})$, es un juego cooperativo tradicional y la propiedad de CCB es equivalente a la propiedad de *contribuciones balanceadas*, definida por Myerson (1980). Por tanto, podemos concluir que

$$f_i(v, \mathcal{B}_{C^1_{[i]}}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^1_{[i]}}) = Sh_i(C^1_{[i]}, v).$$

Ahora bien, supongamos que el resultado se cumple para los niveles k, $k \leq l \leq p$, es decir,

$$f_i(v, \mathcal{B}_{C^k_{[i]}}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^k_{[i]}}).$$

y procedemos a probarlo para el nivel $l+1$.
Usemos inducción sobre la cardinalidad del conjunto de indices de C^{l+1}_r, que denotaremos por M^{l+1}_r.
Sea $i \in C^l_{[i]} \subseteq C^{l+1}_r$. Primero, supongamos que $|M^{l+1}_r| = 1$, es decir que la única subclase que posee C^{l+1}_r es $C^l_{[i]}$, entonces

$$(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = (v, \mathcal{B}_{C^l_{[i]}}),$$

y así, por hipótesis de inducción concluimos que

$$f_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = f_i(v, \mathcal{B}_{C^l_{[i]}}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^l_r}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r})$$

Supongamos que el resultado se tiene para $|M^{l+1}_r| = m$. Ahora probemos el resultado para $|M^{l+1}_r| = m+1$.
Tomemos $|M^{l+1}_r| = m+1 > 1$, entonces existe $j \in C^l_{[j]} \subseteq C^{l+1}_r$, tal que $C^l_{[i]} \neq C^l_{[j]}$. Debido a la propiedad de CCB, tenemos que para $h = f$ y $h = g$ se cumple

$$h_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) - h_j(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = h_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[j]}}) - h_j(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[i]}}),$$

Entonces, por hipótesis de inducción sobre $|M^{l+1}_r|$ tenemos que $f_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[j]}}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[j]}})$ y $f_j(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[i]}}) = g_j(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r \setminus C^l_{[i]}})$ y así se obtiene que

$$f_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) - g_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = f_j(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) - g_j(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}).$$

Ahora, debido a la eficiencia, fijando i y sumando sobre $j \in C^{l+1}_r$, se obtiene que

$$f_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) - g_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = 0.$$

Así, hemos probado que $f_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^{l+1}_r})$ para todo $i \in C^{l+1}_r$. Entonces, aplicando inducción sobre l, hemos probado que $f_i(v, \mathcal{B}_{C^k_r}) = g_i(v, \mathcal{B}_{C^k_r})$ para todo $k \leq p+1$, en particular tomando $k = p+1$, se obtiene que para todo $i \in N$,

$$f_i(v, \mathcal{B}_N) = g_i(v, \mathcal{B}_N).$$

□

Proposición 3.2.9. *(Myerson (1980), Theorem 1) Sea $\mathcal{B}_N = 2^N$) la estructura anidada trivial. El valor de Shapley es el único valor eficiente que satisface CCB.*

La demostración es inmediata de la Observación 3.2.5 y el Teorema 3.2.8

Proposición 3.2.10. *(Kamijo (2013), Theorem 2) Sea $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2)$ una estructura de nivel. El* valor colectivo *(3.2) es la única solución eficiente que satisface CBC.*

Kamijo (2013) obtiene la caracterización del valor colectivo mediante las propiedades de eficiencia, contribuciones balanceadas y contribuciones balanceadas colectivas. Así, la demostración del resultado anterior es inmediata de las Observaciones 3.2.5, 3.2.6 y el Teorema 3.2.8. Más aún, este trabajo provee un enfoque diferente de éste resultado pues el dominio de las funciones características en los juegos anidados es $\mathcal{B}_N$. De aquí, se concluye que el valor colectivo sólo usa la información de las coaliciones que satisfacen las restricciones anidadas cuando la estructura de nivel es $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2)$.

3.3. Adaptación del valor de Shapley ponderado

Se introduce un vector de pesos para modelar cierta asimetría entre los jugadores. Para obtener una solución que tenga en cuenta esta asimetría, proponemos un valor que asigna a los juegos de unanimidad anidados el mismo valor que el valor de Shapley ponderado asigna a los juegos de unanimidad clásicos, es decir,

$$\varphi_i^{\omega}(u_T, \mathcal{B}_N) = \begin{cases} \frac{\omega_i}{\omega(T)} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.7}$$

donde $\omega = (\omega_i)_{i \in N}$ es un *vector de pesos positivos* y $\omega(T) = \sum_{i \in T} \omega_i$. Es sencillo verificar que un valor que satisface (3.7), para todo juego $(v, \mathcal{B}_N) \in G_{\mathcal{B}_N}$ es

$$\varphi_i^{\omega}(v, \mathcal{B}_N) = v(i) + \omega_i \sum_{w \in J_i} \frac{Sh_{[i]}^{\omega}(w) - w([i])}{\omega_{[i]}},$$

donde ω_j es la suma de los pesos de los miembros en la clase que j representa en el juego de clases w.

Para caracterizar este valor es necesario adaptar ligeramente la propiedad CCB como sigue.

Definición 3.3.1. Un valor f satisface ω-*Contribuciones Balanceadas de Clase* (ω-CCB) sí y sólo si, para todo $C_t^l, C_s^l \subset C_r^{l+1}$ $(l = 0, ..., p)$, se tiene que

$$\frac{f_i(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1}}) - f_i(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1} \setminus C_{[j]}^l})}{\omega_i} = \frac{f_j(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1}}) - f_j(v, \mathcal{B}_{C_r^{l+1} \setminus C_{[i]}^l})}{\omega_j},$$

para todo $i \in C_t^l$, $j \in C_s^l$ y todo $v \in G_{\mathcal{B}_N}$.

En este sentido, ω-CCB requiere que la contribución de las clases es balanceada en proporción a los pesos de cada jugador. Con esta nueva propiedad, es posible caracterizar el valor φ^ω en los siguientes resultados.

Proposición 3.3.2. *φ^ω es eficiente y satisface ω-CCB.*

Teorema 3.3.3. *Existe un único valor para juegos cooperativos con estructuras anidadas que satisface las propiedades de* eficiencia *y* ω-CCB, *dicho valor es φ^ω.*

Las demostraciones de los resultados anteriores son análogas a las demostraciones realizadas de la Proposición 3.2.7 y el Teorema 3.2.8, respectivamente.

3.4. Valor como un *proceso multietapa*

En esta sección se presenta un proceso intuitivo para solucionar los juegos anidados como implementación del valor φ. Este proceso brinda otra interpretación del valor desarrollado a lo largo del capítulo.

Se comienza distribuyendo el monto $v(N)$ entre las clases en el nivel superior (nivel p) tomándolas como jugadores. Esto se logra definiendo el juego de clases $v_{C_1^{p+1}}$ el cual es solucionado con el valor de Shapley ponderado con pesos iguales al tamaño de las clases. Así, se ha asignado

$$Sh_t^\lambda(v_{C_1^{p+1}})$$

a cada clase C_t^p.

Posteriormente, se distribuye el monto obtenido entre las subclases de cada clase C_t^p. Pero ahora se debe tener en cuenta que el nuevo valor para cada clase C_t^p es $Sh_t^\lambda(v_{C_1^{p+1}})$ y no $v(C_t^p)$. Esto es modelado mediante la definición del siguiente juego.

$$w_t^p(R) = \begin{cases} v_{C_t^p}(R) & \text{si } \; R \subset M_t^p \\ Sh_t^\lambda(v_{C_1^{p+1}}) & \text{si } \; R = M_t^p. \end{cases}$$

Posteriormente, el juego anterior es solucionado con el valor de Shapley ponderado, donde los pesos son la cardinalidad de cada subclase. Se obtiene que el pago asignado a la clase $C_s^{p-1} \subseteq C_t^p$ es

$$Sh_s^\lambda(w_{C_t^p}).$$

Este proceso se repite hasta el primer nivel, lo que daría lugar a una asignación entre los agentes debido a que las subclases de clases en el primer nivel son singuletes.

Además, esta asignación es eficiente porque en cada paso generamos una solución eficiente y empezamos a distribuir $v(N)$.
El algoritmo de asignación para obtener el beneficio de un jugador con el proceso *multietapa* descrito anteriormente se presenta en el Algoritmo 1.

Algorithm 1 Proceso multietapa para juegos cooperativos anidados

---

Input: Juego anidado $(v, \mathcal{B}_N)$ y $i \in N$.
  $w_1^{p+1}(R) \leftarrow v_{C_1^{p+1}}(R)$.
  $a_{p+1} \leftarrow Sh^{\lambda}_{[i]}(v_{C_1^{p+1}})$.
  for $k = p$ **a** 1 **do**
    Se define el juego

$$w^k_{[i]}(R) = \begin{cases} v_{C^k_{[i]}}(R) & \text{si} \quad R \subset M^k_{[i]} \\ a_{k+1} & \text{si} \quad R = M^k_{[i]}. \end{cases}$$

    Calcular $a_k \leftarrow Sh^{\lambda}_{[i]}(w^k_{[i]})$.
  end for
  return a_1, pago para el jugador i.

El resultado proporcionado por este algoritmo coincide con el valor discutido en la Sección 3.2 para un jugador $i \in N$ en el juego anidado.

Proposición 3.4.1. *Sea $(v, \mathcal{B}_N)$ y $i \in N$. Entonces $a_1 = \varphi_i(v, \mathcal{B}_N)$, donde a_1 es el resultado del Algoritmo 1.*

Para probar esta proposición, es necesario observar cómo cambia el valor Shapley ponderado debido a una variación en el valor de la gran coalición, el siguiente lema expone dicho cambio.

Lema 3.4.2. *Sea (N, v) y (N, w) son juegos TU y $a \in \mathbb{R}$, tales que:*

$$w(S) = \begin{cases} v(S) & si \quad S \subset N \\ a & si \quad S = N, \end{cases}$$

Entonces para todo vector de pesos $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ se tiene que:

$$Sh^{\lambda}_i(N, w) = Sh^{\lambda}_i(N, v) + \lambda_i \frac{a - v(N)}{\lambda(N)}$$

Demostración. De acuerdo a la formula del valor de Shapley ponderado presentada en (Dragan, 2008, p. 2), se tiene que para cada jugador $i \in N$,

$$Sh^{\lambda}_i(N, w) = \lambda_i \sum_{S \ni i} \gamma_S \left(w(S) - w(S \setminus \{i\}) \right), \tag{3.8}$$

donde,

$$\gamma_S = \sum_{T:T\cap S=\emptyset} \frac{(-1)^t}{\lambda(S\cup T)}, \quad \forall S\subseteq N,\ S\neq\emptyset.$$

Por otro lado $\gamma_N = \frac{1}{\lambda(N)}$ y $w(S) = v(S)$ para todo $S\subset N$. Entonces, sumando y restando $\lambda_i\frac{v(N)}{\lambda(N)}$ a la ecuación (3.8) se obtiene que

$$Sh_i^\lambda(N,w) = Sh_i^\lambda(N,v) + \lambda_i\frac{a-v(N)}{\lambda(N)}.$$

□

Usando el Lema anterior, se obtiene que el termino a_k del Algoritmo 1 es,

$$a_k = Sh_{[i]}^\lambda(v_{C_{[i]}^k}) + |C_{[i]}^{k-1}|\frac{a_{k+1}-v(C_{[i]}^k)}{|C_{[i]}^k|}.$$

Por recursión, es sencillo verificar que a_k tiene la siguiente expresión.

$$a_k = Sh_{[i]}^\lambda(v_{C_{[i]}^k}) + |C_{[i]}^{k-1}|\left(\sum_{l=k}^{p}\frac{Sh_{[i]}^\lambda(v_{C_{[i]}^{l+1}})-v(C_{[i]}^l)}{|C_{[i]}^l|}\right).$$

Considerando que $|C_{[i]}^0| = 1$, se puede concluir la demostración de la Proposición 3.4.1. Esta implementación se puede desarrollar de forma análoga para el valor ponderado φ^ω.

3.5. La extensión multilineal para juegos anidados

Como lo mencionan Owen *et al.* (1992), *la extensión multilineal* (MLE) ha mostrado ser una herramienta eficiente para calcular el valor de Shapley para juegos TU con una gran cantidad de jugadores. Por esta razón ellos modifican el método de MLE para calcular el valor de Owen (1977) para juegos con estructura coalicional. Más aún, ellos proponen un camino para generalizar dicho método para el valor en estructuras de nivel de Winter (1989). En esta sección, se modifica la MLE para calcular el valor φ para juegos anidados.

De acuerdo con el trabajo de (Owen, 1988, sec. 10) se define *la extensión multilineal de un juego anidado extension* usando la descomposición lineal presentada en la Sección 3.1 como sigue:

$$f(v)[q_1,...,q_n] = \sum_{S\in\mathcal{B}_N}\prod_{j\in S} q_j\Delta_S(v),$$

donde $\Delta_S(v)$ para todo $S \in \mathcal{B}_N$ son los *dividendos* definidos en (3.3).

Es posible calcular el valor φ para un juego anidado utilizando esta extensión. El siguiente resultado muestra una nueva forma de hacerlo.

Proposición 3.5.1. *Sea $(v, \mathcal{B}_N)$, $i \in N$ y $f(v)$ la extensión multilineal de v. Entonces el valor φ está dado por*

$$\varphi_i(v, \mathcal{B}_N) = \int_0^1 \frac{\partial f(v)}{\partial q_i}[t, .., t]dt.$$

Demostración. Calculando la derivada parcial de $f(v)$ con respecto a q_i se tiene que

$$\frac{\partial f(v)}{\partial q_i}[q_1, ..., q_n] = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \in \mathcal{B}_N}} \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} q_j \Delta_S(v).$$

Ahora, evaluando esta derivada en la diagonal principal $[t, ..., t]$ e integrando con respeto a t, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial f(v)}{\partial q_i}[t, ..., t]dt &= \int_0^1 \sum_{\substack{S \ni i \\ S \in \mathcal{B}_N}} t^{|S|-1} \Delta_S(v) dt \\ &= \sum_{\substack{S \ni i \\ S \in \mathcal{B}_N}} \frac{\Delta_S(v)}{|S|} = \varphi(v, \mathcal{B}_N). \end{aligned}$$

□

3.6. Conclusiones y trabajo futuro

La principal conclusión de este capítulo es que el modelo de juegos con restricciones anidadas dan lugar a un tipo especial de juegos con un dominio de coaliciones factibles en una nueva estructura compuesta de álgebras booleanas. Debido a las propiedades de dicha estructura, la adaptación algebraica del valor de Shapley que se usa para este tipo de juegos permitió caracterizarlo y obtener una expresión cerrada para este valor.

Hay una serie de direcciones que se pueden tomar para trabajos futuros, en particular para el avance de aplicaciones en el estudio de situaciones más complejas. Por un lado, sería interesante estudiar este modelo con una estructura de comunicación (gráfica o red) y proponer nuevos valores. Como primer paso en esta dirección, el estudio de los modelos de estructura de comunicación de dos niveles ha sido presentado por van den Brink *et al.* (2015). De hecho, dado que la caracterización de los valores aquí presentados se realiza con la propiedad de CBC, esto sugiere un camino claro para proponer un valor de Myerson adaptado para la estructura de comunicación en n-niveles. Por otro lado, también es relevante estudiar diferentes soluciones para la extensión multilineal de los juegos anidados, por ello sería interesante proponer un modelo para juegos con coaliciones *fuzzy* bajo una estructura de cooperación anidada.

También sería interesante proponer adaptaciones y caracterizar diferentes conceptos de solución del valor de Shapley para los juegos que surgen en nuestro modelo. El índice de poder de Banzhaf podría ser adaptado para juegos simples como la generalización presentada por Álvarez-Mozos y Tejada (2011) y otros conceptos generales de solución como el núcleo y el nucleolo podrían ser estudiados. Todos éstos caminos se dejarán para trabajos futuros y no se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Repartición de ganancias en proyectos

Los mecanismos de repartición de ganancias son ampliamente utilizados por compañías para aumentar sus ganancias. Dichos mecanismos incluyen bonos en efectivo a los empleados, que se otorgan en función de su desempeño individual o colectivo. Por ejemplo, bajo un plan de propiedad de acciones de empleados, las empresas asignan acciones de su *stock* a los empleados, por lo tanto recompensan a los empleados en base a la ganancia agregada de la empresa.[1]

Aunque varios estudios empíricos abordan la efectividad de los mecanismos de repartición de ganancias para aumentar la productividad de una empresa, poco se ha dicho teóricamente sobre la relación directa entre la rentabilidad de las empresas y las recompensas para los empleados.[2] Nuestro trabajo es el primer estudio en esta área, caracterizando una gran clase de mecanismos que relacionan las ganancias de la empresa con los pagos a sus empleados.

Para abordar estos aspectos, consideramos un modelo en el que los jugadores deciden cómo asignar su dotación fija de tiempo entre diferentes proyectos que generan ganancias. Cada proyecto podría tener diferentes funciones de producción que generan utilidades dependiendo de las asignaciones de tiempo de los jugadores. Nos enfocamos en el caso con información asimétrica: Un planificador (como el propietario de la empresa o gerente) no conoce las funciones de producción mientras que los em-

[1]El plan de acciones de los empleados está ampliamente utilizado en empresas de Silicon Valley y ha generado varios empleados millonarios, por ejemplo en Google, Facebook y Yahoo. Este mecanismo se asemeja a los mecanismos de ganancia promedio u otras variaciones asimétricas discutidas en el capítulo.

[2]Estudios empíricos sobre repartición de ganancias en las empresas han sido estudiados en Kruse (1992), Bhargava (1994) and Kraft y Ugarković (2006), Weitzman y Kruse (1990) y Prendergast (1999)

pleados tienen información perfecta sobre ello, el planificador debe asignar los pagos dependiendo únicamente de la ganancia total final generada por cada proyecto y la asignación de tiempo de los jugadores en los diferentes proyectos.[3] Una aplicación de este problema es la división del excedente de fin de año en las empresas.

La idea central es que aunque el planificador trata de maximizar la ganancia total de la empresa, es posible que no conozca las funciones de producción. Es decir, el objetivo del planificador es regular un esquema de pago como un mecanismo que implementa la asignación de tiempo que genera la máxima ganancia total en el equilibrio de Nash para cualquier conjunto de funciones de producción. Llamamos a esta propiedad *eficiencia*. Así, aunque el planificador tiene una desventaja en la información con respecto a los jugadores, esta noción de *eficiencia* conduce al mejor resultado para el planificador, como si el éste tuviera información completa.

Por ejemplo, considere el mecanismo de reparto proporcional que divide la utilidad total de cada proyecto entre los jugadores en proporción a su asignación de tiempo a tales proyectos. Este mecanismo no es necesariamente eficiente porque los jugadores pueden tener incentivos para dedicar una mayor proporción de tiempo a proyectos que les generan mayor utilidad según lo invertido, mientras que la empresa podría producir una mayor ganancia cuando los jugadores invierten su tiempo colectivamente en un solo proyecto.

Para ver esto, considere el siguiente ejemplo. Sean tres jugadores 1, 2 y 3 y tres proyectos colaborativos entre estos jugadores, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$. Supongamos que cada jugador está dotado de una unidad de tiempo que se dividen entre los proyectos a los que pertenecen, y cada proyecto genera beneficios basados en el tiempo asignado por los jugadores. Por ejemplo, supongamos que las funciones de producción de dichos proyectos son $\alpha\left(t_1^{\{1,2\}}+t_2^{\{1,2\}}\right)$ para el proyecto $\{1,2\}$, $\beta\,\text{mín}\left(t_1^{\{1,3\}},t_3^{\{1,3\}}\right)$ para el proyecto $\{1,3\}$ y $\gamma\,\text{mín}\left(t_1^{\{1,2,3\}},t_2^{\{1,2,3\}},t_3^{\{1,2,3\}}\right)$ para el proyecto $\{1,2,3\}$. Cuando $\alpha=2.5$, $\beta=3$ y $\gamma=6$, las asignaciones de tiempo eficientes son

$$\left(\left(t_1^{\{1,2\}},t_1^{\{1,3\}},t^{\{}1,2,3\}_1\right),\left(t_2^{\{1,2\}},t_2^{\{1,2,3\}}\right),\left(t_3^{\{1,3\}},t_3^{\{1,2,3\}}\right)\right)=((0,0,1),(0,1),(0,1)),$$

es decir, se requiere que todos los jugadores inviertan su tiempo en el proyecto $\{1,2,3\}$ y genera una utilidad de 6 unidades.

[3]Esta información asimétrica es natural en grandes empresas, donde el propietario de la empresa establece políticas generales de la repartición de ganancias para los empleados antes de que se realicen las funciones de producción.

Bajo el reparto proporcional, cada jugador recibe 2 unidades de ganancia. Sin embargo, esto no es un equilibrio bajo el mecanismo de reparto proporcional ya que tanto los jugadores 1 como 2 tienen incentivos de asignar todos los recursos al proyecto $\{1, 2\}$, donde pueden recibir 2.5 unidades de ganancia en lugar de 2.

Por otro lado, considere el mecanismo de repartición de ganancia promedio, en el que cada jugador recibe una parte fija de la ganancia total generada por la empresa.[4] Este mecanismo es eficiente porque si un jugador se desvía del equilibrio que genera la máxima ganancia total (equilibrio eficiente), entonces la ganancia total de la empresa no aumenta y tampoco aumentaría su pago.

De otro modo, considere el mecanismo de Shapley, donde la utilidad de cada proyecto es igualmente distribuida entre los jugadores que pertenecen al proyecto, independiente de como se asignen los tiempos. Cuando los proyectos factibles tienen el mismo tamaño, por ejemplo si todos los proyectos tuvieran que ser realizados por 2 jugadores, el mecanismo de Shapley es eficiente. Esto se debe a que si un jugador se desvía del equilibrio eficiente, entonces la ganancia total de la empresa no aumenta. Por lo tanto, dado que la ganancia de la empresa es sólo la suma de las utilidades de cada proyecto, la utilidad agregada de los proyectos en los que participa este jugador no aumenta, y tampoco su pago. Sin embargo, en general, el mecanismo Shapley no es eficiente cuando los proyectos tienen diferentes tamaños.[5]

De forma más general, considere un mecanismo donde los pagos de cada jugador sólo dependen positivamente de la utilidad total (agregada) generada por los proyectos en los cuales el jugador participa, como tambien de las asignaciones de tiempo y utilidades generadas en los proyectos en los cuales él no participa, estos mecanismos serán llamados *separables*. Dichos mecanismos son eficientes debido a que si un jugador decide cambiar sus asignaciones de tiempo, entonces su decisión sólo puede cambiar la utilidad total de sus proyectos. Si la utilidad total de sus proyectos disminuye, entonces la utilidad total de la empresa también disminuye, así el jugador empeoraría su pago. La repartición de ganancias promedio y el mecanismo de Shapley, son casos particulares de mecanismos separables.

El principal resultado que aquí se presenta es la caracterización de todos los mecanismos que satisfacen la eficiencia, la clase de mecanismos eficientes coincide exactamen-

[4]El mecanismo puede interpretarse como el mecanismo de adjudicación de acciones, en el cual se da a los jugadores una proporción fija de acciones en la empresa, por lo que su asignación final de ganancias depende de la ganancia total generada por la empresa.

[5]Esto se puede ver en el ejemplo anterior, donde existen proyectos de tamaño 2 y 3. En este caso, los jugadores 1 y 2 tienen el incentivo de desviarse del equilibrio eficiente.

te con la clase de mecanismos separables (Teorema 4.2.8). La clase de mecanismos eficientes, anónimos e independientes del tiempo es pequeña y puede describirse fácilmente como combinaciones lineales de Shapley y mecanismos de ganancia promedio, donde el peso asignado a los mecanismos depende del tamaño de los proyectos que pueden realizarse (Proposición 4.2.9).

También observamos la monotonía de los pagos a los jugadores con respecto al aumento de tiempo disponible de trabajo (*tiempo-monotonía*) y con respecto al incremento en las funciones de producción (*tecnología-monotonía*). En particular, la propiedad *tiempo-monotonía* requiere que los incrementos en el tiempo disponible para los jugadores no empeoren los pagos; un caso particular de esta propiedad es la propiedad *jugador-monotonía*, la cual requiere que los jugadores no empeoren cuando nuevos jugadores llegan a la empresa. La propiedad *tecnología-monotonía* requiere que las mejoras en la tecnología de los proyectos (representados como aumentos en la función de producción en cualquier asignación de tiempo) no deben empeorar los pagos de los jugadores; un caso particular de dicha propiedad es la propiedad *proyecto-monotonía* que requiere que los pagos de los jugadores no deben empeorar cuando nuevos proyectos se crean en la empresa.

La clase de mecanismos eficientes que satisfacen estas propiedades de monotonía dependen de la conexión de los proyectos (a través de la intersección de pares no vacíos). Los jugadores que están conectados (directa o indirectamente a través de la intersección no vacía entre pares de proyectos a los que pertenecen) deben obtener un pago que sea monótono en la utilidad total generada por los proyectos que están conectados (Proposición 4.3.7).

Finalmente, se anexa una propiedad a la clase de mecanismos mencionada anteriormente, que resulta ser necesaria y suficiente para caracterizar los mecanismos eficientes que satisfacen la propiedad de equilibrio fuerte de Nash, donde los jugadores no pueden mejorar sus pagos formando coaliciones para coordinar sus asignaciones de tiempo en los diferentes proyectos y perjudicando a los que están fuera de dicha coalición[6] (Proposición 4.4.4).

Literatura relacionada

El concepto de implementación de la asignación eficiente en un equilibrio de Nash ha sido ampliamente explorado en la literatura. Maskin y Sjöström (2002) estudia la implementación total de asignaciones eficientes en diferentes funciones de producción.

[6] Mecanismos a prueba de estrategias de grupo

Sin embargo, la literatura de implementación en economías generales ha dado lugar típicamente a imposibilidades, en contraste con esta literatura aquí se presenta una economía específica en la que varios mecanismos pueden implementar la asignación eficiente.

Este capitulo se centra en el caso en que los jugadores deben aportar su asignación de tiempo completo y la ganancia total se asigna a los jugadores, por lo tanto, los temas tradicionales de los riesgos morales están descartados (por ejemplo, Holmstrom, 1982), esta restricción es similar a los mecanismos de asignación para un recurso divisible fijo (tal como un dólar) dependiendo de lo que reportan los jugadores (por ejemplo, de Clippel *et al.*, 2008 y Tideman y Plassmann, 2008).

Un trabajo estrechamente relacionado estudia los mecanismos de repartición de costos compartidos que implementan una red de mínimo costo. Por ejemplo, Juarez y Kumar (2013) se enfoca en la implementación de la asignación eficiente en la red de conexión, donde los jugadores deben tener incentivos para seleccionar la red de mínimo costos, este equilibrio debe Pareto-dominar todos los otros equilibrios. Otra obra estrechamente relacionada, Hougaard y Tvede (2012, 2015) caracteriza de manera veraz la implementación de redes de mínimo costo al cambiar la regla en que se reporta la información. Las clases de mecanismos caracterizadas por Juarez y Kumar (2013) y Hougaard y Tvede (2012, 2015) se asemejan a la estrecha clase de mecanismos caracterizada en la Proposición 4.2.9, en contraste con esta literatura, el modelo que aquí se presenta permite implementar una clase más grande de reglas de asignación que no han sido exploradas en la literatura de implementación.

4.1. Modelo

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de jugadores en una economía. Ciertas coaliciones de jugadores de N se pueden formar para colaborar en el desarrollo de actividades o proyectos, la realización de dichas actividades generan utilidades según el tiempo que los jugadores inviertan en cada proyecto. Por simplicidad, se asume que no hay proyectos repetidos, aunque un argumento similar puede hacerse cuando los proyectos se repiten.

Formalmente, sea $L \subset 2^N \setminus \{\emptyset\}$ el conjunto compuesto de los diferentes proyectos. Cada proyecto es representado por la coalición de jugadores necesaria para desarrollarlo. Por ejemplo, si L contiene todas las coaliciones de 2 jugadores, entonces todo grupo de dos jugadores puede colaborar en algún proyecto. Si $L = 2^N \setminus \{\emptyset\}$ entonces cualquier coalición puede desarrollar en un proyecto. Se denotará por L_i al conjunto de proyectos de L que contiene al jugador i y por L_{-i} al conjunto de proyectos de L que no contienen al jugador i.

Dado un conjunto A y $T \geq 0$, se define

$$\Delta(T, A) := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^A \mid \sum_{i \in A} x_i = T \right\}$$

como el T-simplex sobre el conjunto A.

Cada jugador i tiene una dotación de T_i unidades de tiempo las cuales puede dividir entre los proyectos en los cuales participa. Entonces, el conjunto de todas las posibles asignaciones de tiempo que el jugador i puede realizar están descritas en el conjunto $D_i = \Delta(T_i, L_i)$. Así, el conjunto de todas las asignaciones de tiempo para todos los jugadores es $\mathbb{D} = \Pi_{i \in N} D_i$. Para una asignación de tiempo $t \in \mathbb{D}$, la cantidad t_i^K será interpretada como la cantidad de tiempo que el jugador i invierte en el proyecto K. En esta sección el conjunto de jugadores N, el conjunto de proyectos L y las dotaciones de tiempo $T_1, T_2, \ldots, T_n$ serán fijas. En la Sección 4.3 se estudiará la posibilidad de cambios con respecto a N, L y $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Cada proyecto genera cierta utilidad, sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}_+^L$ el vector de utilidades para todos los proyectos, donde para cada $F \in \mathbb{F}$, el monto F^K es la utilidad generada por la realización del proyecto $K \in L$.

4.1.1. Mecanismos

Dado el modelo anterior, es necesario proponer una forma de repartir las utilidades generadas por los diferentes proyectos entre los jugadores que los desarrollan, para ello introducimos el siguiente concepto del cual se estudiarán propiedades deseables.

Definición 4.1.1. Sean N, L y $T_1, T_2, \ldots, T_n$, un **mecanismo** es una función continua $\varphi : \mathbb{D} \times \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i (t, F) = \sum_{K \in L} F^K. \tag{4.1}$$

Las variables independientes en un mecanismo son las diferentes asignaciones de tiempo y utilidades de cada proyecto, por otro lado las variables dependientes es una distribución completa de la ganancia total entre los jugadores.

Dicha función recibe el nombre de mecanismo pues es la herramienta por la cual un planificador puede lograr que los jugadores que desarrollan los proyectos alcancen una producción socialmente eficiente, esto mediante la fijación de la forma de repartir dichas utilidades.

La restricción en 4.1 quiere decir que la cantidad total repartida es exactamente igual al total agregado de las utilidades que producen los proyectos, es decir que no sobran o faltan ganancias por repartir en la economía, a esta propiedad se le llamará *balance de presupuesto* a lo largo de este capítulo.

A continuación, se presentan algunos de los mecanismo más utilizados.

Mecanismo de ganancia promedio

La ganancia final de la economía entera es dividido en partes iguales entre todos los miembros. Es decir, para cada $i \in N$,

$$\varphi_i(t, F) = \frac{1}{n} \sum_{K \in L} F^K$$

Mecanismo de Shapley

La ganancia final producida por el proyecto $K \in L$ es repartida en partes iguales entre los jugadores en K. La asignación total para cada jugador es la suma de las asignaciones en los proyectos. Es decir, para cada $i \in N$,

$$\varphi_i(t, F) = \sum_{K \in L_i} \frac{F^K}{|K|},$$

donde $|K|$ el el número de jugadores en el proyecto K.

Mecanismo de repartición proporcional

La utilidad final producida por el proyecto K es dividida en proporción a las contribuciones de tiempo de los jugadores en K. Esto es, para cada $i \in N$,

$$\varphi_i(t, F) = \sum_{K \in L_i} Pr_i^K(t^K) F^K, \text{ donde } Pr_i^K(t^K) = \begin{cases} \frac{t_i^K}{\sum_{j \in K} t_j^K} & \text{si} \quad \sum_{j \in K} t_j^K > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j \in K} t_j^K = 0 \end{cases}$$

Mecanismo de Shapley generalizado

La asignación de cada jugador es una proporción fija de la ganancia generada por los proyectos en los que participa y una parte de la ganancia no asignada de los proyectos en los que no participa. Formalmente, considere cualquier colección de proyectos $L \subset 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ y cantidades individuales positivas $\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_n$ tales que para cualquier proyecto $K \in L$, el total de cantidades en dicho proyecto no exceda de 1, $\sum_{j \in K} \gamma_j \leq 1$. Así, para cada jugador i se tiene,

$$\varphi_i(t, F) = \gamma_i \sum_{K \in L^i} F^K + \sum_{M \in L^{-i}} \frac{\gamma_i}{\sum_{l \in N \setminus M} \gamma_l} \left(1 - \sum_{j \in M} \gamma_j\right) F^M.$$

Cabe resaltar que los mecanismos de ganancia promedio, Shapley y Shapley generalizado son independientes de la asignación de los tiempos. Pero por otro lado, el mecanismo de repartición proporcional depende de la forma en que los agentes asignan sus tiempos. Además, cualquier combinación convexa de mecanismos es también un mecanismo.

4.2. Mecanismos eficientes

La estrategia del jugador i es una asignación de su recurso de tiempo entre los diferentes proyectos en los que participa.

Sea $f = (f^K)_{K \in L}$ el vector de funciones de producción, donde $f^K : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ es una función continua y no decreciente en cada variable. Se denotará por $\mathcal{F}$ al conjunto de vectores de funciones de producción.

En ésta sección, se estudia el juego no cooperativo de información perfecta donde la estrategia del jugador i es una función de $\mathcal{F}$ a D_i que asigna a cada vector de funciones de producción una asignación de tiempo para cada proyecto. Sea $\mathcal{S}_i$ el conjunto de funciones de $\mathcal{F}$ a D_i. El pago de un jugador depende de su propia asignación de tiempo y de las asignaciones de los demás jugadores, de las funciones de producción y de la asignación dada por el mecanismo.

Definición 4.2.1. Dado un mecanismo φ, se estudia el **Juego no cooperativo** $G^\varphi = [N, (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n), (\pi_1^\varphi, \ldots, \pi_n^\varphi)]$ donde

- El **espacio de estrategias** del jugador i es $\mathcal{S}_i$;

- La **función de utilidad** del jugador i en el vector de estrategias (S_i, S_{-i}) y vector de funciones de producción $f \in \mathcal{F}$ es

$$\pi_i^{\varphi}(S_i, S_{-i}, f) = \varphi_i\left((t_i, t_{-i}), \left[f^K(t^K)\right]_{K\in L}\right), \quad \text{donde } t_j = S_j(f)\ \forall j \in N$$

Estamos interesados en las estrategias que son equilibrios de Nash, donde los jugadores no tienen incentivos para desviarse, asumiendo que las estrategias de los otros jugadores permanecen fijas.

Definición 4.2.2. Un perfil de estrategias $(S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*)$ es un **equilibrio de Nash** del juego G^{φ} si para cada vector de funciones de producción $f \in \mathcal{F}$,

$$\pi_i^{\varphi}(S_i^*, S_{-i}^*, f) \geq \pi_i^{\varphi}(S_i, S_{-i}^*, f), \quad \forall S_i \in \mathcal{S}_i$$

Bajo un vector de funciones de producción, un conjunto de estrategias genera asignaciones para los diferentes proyectos, una estrategia eficiente domina cualquier otra estrategia para cualquier conjunto de funciones de producción. Dichas estrategias son las que generan un estado socialmente óptimo.

Definición 4.2.3. Un **perfil de estrategias** $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ **es eficiente** si para cada f y para cualquier otra estrategia $\tilde{S}$

$$\sum_{K\in L} f^K(t^K) \geq \sum_{K\in L} f^K(\tilde{t}^K), \quad \text{donde } t_i = S_i(f) \text{ y } \tilde{t}_i = \tilde{S}_i(f)$$

Para un planificador es deseable tener un mecanismo que mantenga el estado de los jugadores con asignaciones que proveen las dos propiedades anteriores, pues bajo estas, los jugadores no tendrán incentivos para desviarse de la producción socialmente óptima. Por ello, se definen a continuación los mecanismo que se desean caracterizar.

Definición 4.2.4. Un **mecanismo es eficiente** si un perfil de estrategias eficientes es un equilibrio de Nash.

Como se discutió anteriormente, el mecanismo de ganancia promedio es eficiente. Los mecanismos de Shapley y Shapley generalizado son eficientes para algunos conjuntos de proyectos L.

4.2.1. Mecanismos separables

En esta sección, se caracterizan los mecanismos que son eficientes. Existen muchas restricciones que la eficiencia impone sobre un mecanismo, una de ellas es que el pago de un jugador debe depender de la ganancia total generada por los proyectos en los cuales él participa, en lugar de las ganancias de los proyectos individuales. Otra restricción es que la asignción de tiempo de un jugador no debe influenciar su propio pago (pero puede influenciar el pago de otros jugadores). Los mecanismos separables discutidos a continuación incluyen estas dos restricciones.

Definición 4.2.5. Un **mecanismo** φ **es separable** si existen funciones no-decrecientes en la primera coordenada $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ tales que,

$$\varphi_i(t, F) = g_i\left(\sum_{K \in L_i} F^K, (t^B, F^B)_{B \in L_{-i}}\right) \quad \forall i \in N.$$

Un mecanismo es separable si el pago del jugador i sólo depende de la ganancia total agregada de sus proyectos, $\sum_{K \in L_i} F^K$ y de las asignaciones de tiempo y ganancias de los proyectos que no contienen a i, $(t^B, F^B)_{B \in L_{-i}}$. La clase de mecanismos separables es amplia, a continuación se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 4.2.6. A. El mecanismo de ganancia promedio es un mecanismo separable generado por las funciones

$$g_i^{AP}\left(\sum_{k \in L_i} F^K, (t^B, F^B)_{B \in L_{-i}}\right) = \frac{\sum_{H \in L} F^H}{n}, \quad \forall i \in N.$$

B. Suponga que la gran coalición no es factible, es decir $N \notin L$. Considere el mecanismo $\varphi_i^*(t, F) = \sum_{B \in L^{-i}} \frac{F^B}{|N \setminus B|}$, para cada $i \in N$, donde todo jugador obtiene como pago el promedio de las ganancias de los proyectos a los cuales él no pertenece. Dicho mecanismo es separable y generado por las funciones,

$$g_i^*\left(\sum_{K \in L_i} F^K, (t^B, F^B)_{B \in L_{-i}}\right) = \sum_{B \in L_{-i}} \frac{F^B}{|N \setminus B|}, \quad \forall i \in N.$$

C. El mecanismo de Shapley es separable sólo cuando el conjunto L contiene coaliciones del mismo tamaño c. En este caso,

$$g_i^{Sh}\left(\sum_{K \in L_i} F^K, \left(t^B, F^B\right)_{B \in L_{-i}}\right) = \frac{1}{c} \sum_{K \in L_i} F^K, \quad \forall i \in N.$$

D. El mecanismo de Shapley generalizado es un mecanismo separable generado por las funciones

$$g_i^{GSh}\left(\sum_{K\in L_i} F^K, (t^B, F^B)_{B\in L_{-i}}\right) = \gamma_i \sum_{K\in L^i} F^K + \sum_{M\in L^{-i}} \frac{\gamma_i}{\sum_{l\in N\setminus M}\gamma_l}\left(1-\sum_{j\in M}\gamma_j\right) F^M.$$

Observación 4.2.7. Cabe resaltar, que la combinación convexa de mecanismos separables es también un mecanismo separable generado por la combinación convexa de las funciones g.

El mecanismo de repartición proporcional no es separable debido a que el pago de un jugador depende de sus asignaciones de tiempo a los diferentes proyectos.

La proposición 4.2.9 proporcionará una clase entera de mecanismos separables bajo dos supuestos adicionales. Para caracterizar dicha clase, primero se mostrará el Teorema principal de este Capítulo.

Teorema 4.2.8. Un mecanismo es eficiente si y sólo si es separable.

Demostración. Primero, mostraremos que si un mecanismo es separable, entonces el mecanismo es eficiente.

Supongamos que un jugador, digamos $i \in N$, se desvía de una estrategia eficiente bajo un mecanismo separable. Entonces, la desviación por el jugador i no conduce a un aumento en la utilidad total de sus proyectos en cualquier función de producción debido a la definición de estrategia eficiente. Así, el jugador i no puede aumentar su ganancia porque g_i es una función no decreciente en la primera coordenada, lo cual es una contradicción.

A continuación, mostramos que si un mecanismo es eficiente, entonces el mecanismo es separable para cualquier conjunto de funciones de producción.

Paso 1: Mostraremos que si un mecanismo es eficiente, entonces el pago del jugador i no depende de su asignación de tiempos. Esto es,

$$\varphi_i\left(t_i, t_{-i}, F\right) = h_i\left(t_{-i}, F\right),$$

donde t_i es la estrategia del jugador i y $t_{-i} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$ representa la colección de estrategias de todos los demás jugadores.

Primero, consideremos $\bar{k} \in L^i$ y definimos las funciones de producción como siguen:

$$\begin{aligned} f^k(t) &= c^k, \quad \text{for } k \neq \bar{k}; \\ f^{\bar{k}}(t) &= c^{\bar{k}} + \epsilon\left(t_i^{\bar{k}}\right); \end{aligned}$$

donde $c^k \in \mathbb{R}_+$ es una constante para cada $k \in L$.

Por definición de estrategia eficiente, el jugador i asigna todo su recurso al proyecto $\bar{k}$, es decir, $t_i = E_i^{\bar{k}} \in D_i$, donde $E_{i,k}^{\bar{k}} = T_i$ si $k = \bar{k}$, y $E_{i,k}^{\bar{k}} = 0$ si $k \in L_i \setminus \{\bar{k}\}$.

Entonces, para todo $\tilde{t}_i \in D_i$ tenemos que

$$\varphi_i\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, f(E_i^{\bar{k}}, t_{-i})\right) \geq \varphi_i\left(\tilde{t}_i, t_{-i}, f(\tilde{t}_i, t_{-i})\right).$$

Sea $c = [c^k]_{k \in L}$, cuando ϵ tiende a 0, $f(t) \to c$. Por lo tanto, por continuidad de φ tenemos que

$$\varphi_i\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, c\right) \geq \varphi_i(\tilde{t}_i, t_{-i}, c), \quad \text{para } \tilde{t}_i \in D_i. \tag{4.2}$$

Por otro lado, fijemos $\tilde{t}_i \in D_i$ y consideremos las siguientes funciones de producción:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^k(t^k) &= c^k + \epsilon\left(\text{mín}\{\tilde{t}_i^k, t_i^k\}\right), \quad \text{for } k \in L_i; \\ \tilde{f}^k(t^k) &= c^k, \quad \text{para } k \in L \setminus L_i. \end{aligned}$$

Note que el perfil óptimo del jugador i es igual a $\tilde{t}_i$. Dado que φ es eficiente, tenemos que,

$$\varphi_i\left(\tilde{t}_i, t_{-i}, \tilde{f}\left(\tilde{t}_i, t_{-i}\right)\right) \geq \varphi_i\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, \tilde{f}\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}\right)\right).$$

Cuando ϵ tiende a 0, $f(t) \to c$. Así, debido a la continuidad de φ tenemos que,

$$\varphi_i\left(\tilde{t}_i, t_{-i}, c\right) \geq \varphi_i\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, c\right). \tag{4.3}$$

Por lo tanto, las desigualdades (4.2) y (4.3) nos permiten concluir que

$$\varphi_i\left(\tilde{t}_i, t_{-i}, c\right) = \varphi_i\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, c\right).$$

Así, el pago del jugador i es independiente de su asignación de tiempo. Análogamente, los beneficios de los otros jugadores son también independientes de su propia asignación de tiempo.

Paso 2: Mostrarémos que el pago para el jugador i depende de la suma de las ganancias de los proyectos a los que él pertenece.

Primero, consideremos $\bar{k} \in L_i$ y definamos las siguientes funciones de producción:

$$\begin{aligned} f^{\bar{k}}(t) &= c^{\bar{k}} + t_i^{\bar{k}} + \gamma \sum_{j \in \bar{k} \setminus \{i\}} t_j^{\bar{k}}; \\ f^{k}(t) &= c^{k} + \gamma \left(\sum_{j \in k} t_j^{k} \right), \quad \text{para } k \in L \setminus \{\bar{k}\} \end{aligned}$$

donde $\gamma < 1$ y $c^k \in \mathbb{R}_+$ son constantes arbitrarias.

Debido a la eficiencia, para todo $\tilde{t}_i \in D_i$ tenemos que

$$\varphi_i \left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, f\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i} \right) \right) \geq \varphi_i \left(\tilde{t}_i, t_{-i}, f\left(\tilde{t}_i, t_{-i} \right) \right).$$

Por tanto, cuando γ tiende a 1 tenemos que

$$f\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i} \right) \to \left(c^{\bar{k}} + T_i + \sum_{j \in \bar{k} \setminus \{i\}} t_j^{\bar{k}}, \left[c^k + \sum_{j \in k \setminus \{i\}} t_j^k \right]_{k \in L_i \setminus \bar{k}}, \left[c^k + \sum_{j \in k} t_j^k \right]_{k \in L \setminus L_i} \right) = F^*,$$

y además,

$$f\left(\tilde{t}_i, t_{-i} \right) \to \left[c^k + \sum_{j \in k} t_j^k \right]_{k \in L} = G^*.$$

Así, por la continuidad de φ_i, tenemos que

$$\varphi_i \left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, F^* \right) \geq \varphi_i \left(\tilde{t}_i, t_{-i}, G^* \right).$$

Por tanto, transferir todo el tiempo de i al proyecto $\bar{k}$ no disminuye el pago para el jugador i.

Por otro lado, dado $\tilde{t}_i \in D_i$, consideremos las siguientes funciones de producción,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{k}(t) &= c^{k} + \gamma \min \left\{ \tilde{t}_i^{k}, t_i^{k} \right\} + \sum_{j \in k} t_j^{k}, \quad \text{para } k \in L_i; \\ \tilde{f}^{k}(t) &= c^{k} + \left(\sum_{j \in k} t_i^{k} \right) \text{ donde } k \in L \setminus L_i. \end{aligned}$$

Para $\gamma < 1$, el perfil óptimo debe ser $t_i = \tilde{t}_i$. Comparando éste con el perfil subóptimo $t_i = (T_i, 0, \ldots, 0)$, y haciendo γ tender a cero, tenemos que:

$$\varphi_i\left(E_i^{\bar{k}}, t_{-i}, F^*\right) \leq \varphi_i\left(\tilde{t}_i, t_{-i}, G^*\right).$$

Por tanto, tenemos que el pago del jugador i es invariante a la reasignación de utilidades en los proyectos que contienen al jugador i.

Así, de los Pasos 1 y 2 tenemos que φ_i depende de la utilidad agregada de los proyectos en los cuales el jugador i pertenece, así como de las utilidades de los demás proyectos y las asignaciones de tiempo de los demás jugadores.

Paso 3: Veamos que el mecanismo es una función no-decreciente de las utilidades totales de los proyectos.

Consideremos las siguientes funciones de producción:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{\bar{k}}(t) &= c^T + (\gamma + \delta) t_i^{\bar{k}} + \gamma \sum_{j \in \bar{k} \setminus \{i\}} t_j^{\bar{k}}; \\ \tilde{f}^{k}(t) &= c^k + \gamma \sum_{j \in \bar{k}} t_j^k, \quad \text{para } k \in L \setminus \{\bar{k}\}, \end{aligned}$$

donde $\gamma < 1$ y $\delta > 0$.

Entonces, en el perfil óptimo, el jugador i asigna su todo su tiempo al proyecto $\bar{k}$. Así, para cualquier perfil arbitrario t_i, se tiene:

$$\varphi_i\left(\sum_{k \in L_i} c^k + (\gamma + \delta) T_i + \gamma \sum_{k \in L_i} \sum_{j \in k \setminus \{i\}} t_j^{\bar{k}}, F_{-i}, t_{-i}\right) \geq \varphi_i\left(\sum_{k \in L_i} c^k + (\delta) t_i^{\bar{k}} + \gamma \sum_{k \in L_i} \sum_{j \in k} t_j^{\bar{k}}, F_{-i}, t_{-i}\right).$$

Cuando γ tiende a 0, tenemos que,

$$\varphi_i\left(\sum_{k \in L_i} c^k + \delta T_i, F_{-i}, t_{-i}\right) \geq \left(\sum_{k \in L_i} c^k + \delta t_i^{\bar{k}}, F_{-i}, t_{-i}\right).$$

Por lo tanto, el Paso 3 se concluye dado que $\delta \in [0, 1]$, $\{c^k\}_{k \in L_i}$ y $t_i^{\bar{k}} \leq T_i$ son numeros arbitrarios. $\square$

Se dirá que un mecanismo es **anónimo** si es independiente del nombre de los jugadores, es decir que un jugador i puede ser reemplazado con un jugador j, pero las asignaciones de tiempo y pagos siguen siendo iguales. Cabe resaltar, que para tener un mecanismo anónimo es necesario que dado un conjunto en L, entonces todos los conjuntos de su tamaño también deben estar en L.

También, un mecanismo es **tiempo-independiente** si el mecanismo sólo depende de la utilidad generada por los diferentes proyectos pero no depende de las asignaciones de tiempo de ningún jugador en los diferentes proyectos. La clase de mecanismos eficientes y anónimos es amplia, a continuación se mostrará una caracterización de los mecanismo eficientes, anónimos y tiempo-independientes.

Proposición 4.2.9.

- *Dado c un entero tal que $0 < c < n$ y sea $L^c = \{S \subset N \mid |S| = c\}$ el conjunto de proyectos con igual tamaño c. Un mecanismo es eficiente, anónimo y tiempo-independiente en L^c si y sólo si es una combinación convexa del mecanismo de Shapley y φ^*.*

- *Dado $L^T = \cup_{c \in T} L^c$ para algún $T \subseteq \{1 \ldots, n-1\}$. Un mecanismo φ es eficiente, anónimo y tiempo-independiente en L^T si y sólo si φ es un mecanismo de Shapley generalizado con el mismo peso para todos jugadores. Es decir, existe $0 \leq \alpha \leq min_{l \in L} \frac{1}{|l|}$ tal que $\varphi_i(F_i, F_{-i}) = \alpha \sum_{S \in L_i^T} F^S + \sum_{R \in L_{-i}^T} \frac{1-|R|\alpha}{n-|R|} F^R$.*

- *Dado L tal que $L = L^T \cup \{N\}$ para algún $T \subseteq \{1 \ldots, n-1\}$. Un mecanismo es anónimo, eficiente y tiempo-independiente en L si y sólo si es el mecanismo de ganancia promedio.*

Demostración. Consideremos el mecanismo φ eficiente, anónimo y tiempo-independiente.

Paso 1: Mostraremos que φ es lineal.

Note que por Teorema 4.2.8, anonimidad e independencia de tiempo, existe una función g tal que φ_i puede ser representado como sigue,

$$\varphi_i(F) = g\left(\sum_{K \in L_i^T} F^K, (F^B)_{B \in L_{-i}^T}\right) \tag{4.4}$$

para todo $i \in N$ y $F \in \mathbb{F}$.

Es importante resaltar que debido a la anonimidad el resultado de

$$g\left(\sum_{K\in L_i^T} F^K, (F^B)_{B\in L_{-i}^T}\right)$$

es el mismo para cualquier permutación de las utilidades de los proyectos con igual cardinalidad en L_{-i}^T.

De hecho, si $\bar{M} = (M, M, ..., M)$ para algún $M \in \mathbb{R}$, por anonimidad y balance de presupuesto

$$\varphi_i(\bar{M}) = g(|L_i^T|M, M, ..., M) = \frac{|L^T|}{|N|}M, \quad \forall i \in N.$$

Ahora, procedemos a mostrar que g es lineal. Sea F un vector de utilidades arbitrarías en L^T.

Sin perdida de generalidad, existen proyectos $R\cup\{1\}$ y $R\cup\{2\}$ en L^T, donde $|R|+1 \in T$ y $1 \notin R$, $2 \notin R$. Denotamos el vector $\tilde{F}$ tal que,

$$\tilde{F}^K = \begin{cases} F^{R\cup\{1\}}, & \text{si} \quad K = R\cup\{2\} \\ F^{R\cup\{2\}}, & \text{si} \quad K = R\cup\{1\} \\ F^K, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que $\sum_{K\in L^T} F^K = \sum_{K\in L^T} \tilde{F}^K$. Más aún, por anonimidad tenemos que $\varphi_i(F) = \varphi_i(\tilde{F})$ para todo $i \in N\setminus\{1,2\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi_1(F) + \varphi_2(F) &= \sum_{K\in L^T} F^K - \sum_{i\in N\setminus\{1,2\}} \varphi_i(F) \\ &= \sum_{K\in L^T} F^K - \sum_{i\in N\setminus\{1,2\}} \varphi_i(\tilde{F}) \\ &= \varphi_1(\tilde{F}) + \varphi_2(\tilde{F}) \end{aligned}$$

debido al balance de presupuesto. Entonces, $\varphi_1(F) - \varphi_1(\tilde{F}) = \varphi_2(\tilde{F}) - \varphi_2(F)$.

Así, si

$$\begin{aligned} A &= \sum_{K\in L_1^T} F^K, \quad x = F^{R\cup\{2\}}, \quad z_{-1} = (F^B)_{B\in L_{-1}^T\setminus R\cup\{2\}}, \\ B &= \sum_{K\in L_2^T} F^K, \quad y = F^{R\cup\{1\}}, \quad z_{-2} = (F^B)_{B\in L_{-2}^T\setminus R\cup\{1\}}. \end{aligned}$$

por (4.4) tenemos que

$$g(A, x, z_{-1}) - g(A + x - y, y, z_{-1}) = g(B + y - x, x, z_{-2}) - g(B, y, z_{-2}).$$

Así, para $\alpha = x - y$ y $C = B - \alpha$ tenemos que

$$g(A, x, z_{-1}) - g(A + \alpha, x - \alpha, z_{-1}) = g(C, x, z_{-2}) - g(C + \alpha, x - \alpha, z_{-2}).$$

Lo anterior significa que el cambio en los resultados de g cuando transferimos un monto de un proyecto a la primera entrada, solamente depende del monto transferido y la cardinalidad del proyecto.

Por tanto, la función $h_b(\alpha) = g(A, x) - g(A + \alpha, x_b - \alpha, x_{-b})$ es aditiva, debido a que

$$\begin{array}{rcl} h_b(\alpha) & = & g(A, x) - g(A + \alpha, x_b - \alpha, x_{-b}) \\ h_b(\beta) & = & g(A + \alpha, x_b - \alpha, x_{-b}) - g(A + \alpha + \beta, x_b - \alpha - \beta, x_{-b}), \end{array}$$

y entonces,

$$\begin{array}{rcl} h_b(\alpha) + h_b(\beta) & = & g(A, x) - g(A + \alpha + \beta, x_b - \alpha - \beta, x_{-b}) \\ & = & h_b(\alpha + \beta). \end{array}$$

Dado que g es continua, $h_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y aditiva, entonces existe $\lambda_b \in \mathbb{R}$ tal que, $h_b(z) = \lambda_b z$.

Ahora, listamos todos los proyectos en L^T_{-i} por $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$. Si $\bar{F} = \frac{1}{|L^T|} \sum_{k \in L^T} F^k$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} h_{b_j}(F^{b_j} - \bar{F}) & = & g\left(\sum_{k \in L^T_i} F^k + \sum_{p=1}^{j-1} (F^{b_p} - \bar{F}), \bar{F}, \cdots, \bar{F}, F^{b_j}, \cdots, F^{b_r} \right) \\ & - & g\left(\sum_{k \in L^T_i} F^k + \sum_{p=1}^{j} (F^{b_p} - \bar{F}), \bar{F}, \bar{F}, \cdots, \bar{F}, F^{b_j+1}, \cdots, F^{b_r} \right) \end{array}$$

Así, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{r} h_{b_j}(F^{b_j} - \bar{F}) = g\left(\sum_{k \in L^T_i} F^k, F^{b_1}, \cdots, F^{b_r} \right) - g\left(|L^T_i| \bar{F}, \bar{F}, \cdots, \bar{F} \right).$$

Entonces,

$$g\left(\sum_{k\in L_i^T} F^k, F^{b_1}, \cdots, F^{b_r}\right) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{b_j}(F^{b_j} - \bar{F}) + \frac{|L^T|}{|N|}\bar{F},$$

y así podemos concluir que g es lineal, es decir φ también es lineal.

Paso 2: Mostraremos que

$$\varphi_i(F) = \alpha \sum_{S\in L_i^T} F^S + \sum_{R\in L_{-i}^T} \frac{1-|R|\alpha}{n-|R|} F^R.$$

Como mostramos anteriormente g y φ son lineales, entonces

$$\varphi_i(F) = \alpha \sum_{S\in L_i^T} F^S + \sum_{R\in L_{-i}^T} \beta_R F^R.$$

Sea E_P el vector de utilidades tal que $E_P^K = 1$ si $K = P$ y 0 en otro caso. Por anonimidad $\varphi_i(E_P) = \alpha$ para todo $i \in P$ y $\varphi_j(E_P) = \beta_P$ para todo $j \notin P$.

Ahora, debido a la propiedad de balance de presupuesto tenemos que

$$|P|\alpha + (n - |P|)\beta_P = 1.$$

Entonces,

$$\beta_P = \frac{1-|P|\alpha}{n-|P|} \quad \text{para } P \in L^T.$$

De aquí, se concluye el Paso 2 inmediatamente.

Paso 3: Mostraremos que si $N \in L^T$, entonces φ es el mecanismo de ganancia promedio.

Si $L = \{N\}$ entonces,

$$g\left(F^N\right) = \frac{1}{|N|}F^N,$$

lo cual es claro por balance de presupuesto.

Ahora, si $T \neq \emptyset$ entonces existen proyectos $R \cup \{1\}$ y $R \cup \{2\}$ en L^T, donde $1 \notin R$, $2 \notin R$ y así podemos proceder como en el paso anterior para obtener que,

$$\varphi_i(F) = \alpha \sum_{S \in L_i^T} F^S + \sum_{R \in L_{-i}^T} \frac{1 - |R|\alpha}{n - |R|} F^R,$$

para algún α.

Por anonimidad $\varphi_i(E_N) = \alpha$ para todo $i \in N$. Así, $\alpha|N| = 1$ por balance de presupuesto, entonces $\alpha = 1/n$ y

$$\varphi_i(F) = \frac{1}{n} \sum_{K \in L^T} F^K.$$

□

Observación 4.2.10. Es importante resaltar que las propiedades de eficiencia, anonimidad e independencia de tiempo, fueron suficientes para obtener una familia de mecanismos que son lineales.

4.3. Monotonía

Hasta ahora, el modelo presentado ha tenido fijos la cantidad de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, las asignaciones de tiempo $T = (T_1, \ldots, T_n)$ y el conjunto de proyectos L, así Para cada problema $[N, T, L]$, en la Sección 4.1 se ha encontrado la clase de mecanismos eficientes. En esta sección, el trabajo se enfoca en analizar la robustez de dichos mecanismos eficientes con respecto a los cambios en N, L y T. En particular, se estudia la monotonía de la asignación de un mecanismos con respecto al aumento de N, T y L.

Dado el problema $[N, T, L]$, se denotará por $Eff^{\varphi}[N, T, L]$ al conjunto de equilibrios de Nash bajo φ.

Aumentos en los tiempos de trabajo suceden frecuentemente en las empresas, estos cambios usualmente benefician a los empleados que reciben el aumento, pero pueden perjudicar a aquellos empleados cuyo tiempo no cambia. La siguiente propiedad requiere que dicho aumento en el tiempo no debe dañar a los agentes en el equilibrio eficiente, independientemente de si recibieron un aumento en su asignación de tiempo o no.

Definición 4.3.1. Un mecanismo eficiente φ es **tiempo-monótono en** $[N, T, L]$ si para cualquier jugador i, y tiempos $\tilde{T}_i > T_i$, algún equilibrio eficiente $S^* \in Eff^{\varphi}[N, T, L]$ y algún equilibrio eficiente $\tilde{S} \in Eff^{\varphi}[N, (\tilde{T}_i, T_{-i}), L]$, entonces

$$\varphi(S^*(f), f(S^*(f)) \leq \varphi(\tilde{S}(f), f(\tilde{S}(f)).$$

Así, esta propiedad requiere que si cualquier jugador aumenta su tiempo disponible, entonces el pago de todos los jugadores en cualquier equilibrio eficiente debe ser débilmente mejor que los pagos en cualquier otro equilibrio que cuando no hay incremento del tiempo disponible. Además, un mecanismo es *tiempo-monótono* si no hay una situación de equilibrio eficiente en la que todos los jugadores estén de acuerdo en que un jugador reporte un menor tiempo disponible.

Un caso particular de tiempo-monotonía ocurre cuando se considera monotonía de tiempo en el problema $[N, T, L]$ con $T_i = 0$ y $\tilde{T}_i > 0$, esta situación se puede interpretar como un aumento en el conjunto de jugadores ó **jugador-monotonía** del mecanismo, donde los jugadores no deben estar en peores condiciones cuando nuevos jugadores se unan al juego.

Se dirá que un vector de funciones de producción $\tilde{f}$ es una **mejora tecnológica** de f si para algún proyecto $K \in L$ y asignaciones de tiempo t^K se tiene que $\tilde{f}^K(t^K) \geq f^K(t^K)$.

La siguiente propiedad requiere que las mejoras tecnológicas no deben perjudicar a ningún jugador, independientemente de si están o no participando en los proyectos que mejoraron.[7]

Definición 4.3.2. Un mecanismo eficiente φ es **tecnología-monótono en** $[N, T, L]$ si para algún equilibrio eficiente $S^* \in Eff^{\varphi}[N, T, L]$, alguna función de producción f y alguna mejora tecnológica $\tilde{f}$ de f, entonces $\varphi(S^*(f), f(S^*(f)) \leq \varphi(S^*(\tilde{f}), \tilde{f}(S^*(\tilde{f}))$.

La propiedad de *tecnología-monotonía* requiere que si las utilidades por proyecto aumentan incluso con la misma asignación de tiempo, entonces debe haber un aumento en los pagos para todos los jugadores. De hecho, los jugadores pueden tener diferentes herramientas y habilidades que les permitan desarrollar proyectos con el mismo tiempo invertido, así con un mecanismo tecnológico-monotónico, los jugadores deben elegir herramientas y métodos de trabajo que generen la mejor calidad y mayores beneficios de los proyectos para obtener utilidades más altas.

Un caso particular de tecnología-monotonía ocurre para cuando hay una mejora tecnológica de una cero-tecnología, es decir $f^K(t^K) = 0$ para todo t^K, a una no-cero tecnología $\tilde{f}^K(t^K) > 0$ para algún $\tilde{t}^K$. Este caso se puede interpretar como **proyecto-monotonía**, donde los jugadores no deben empeorar, en caso que aumenten los proyectos disponibles.

[7] Thomson (2007) define un concepto muy similar, que se llama "monotonía estricta de recursos" en problemas de asignación.

Definición 4.3.3. Dos proyectos H y K en L son **conectados** en L, denotado $H \sim K$, si $H = K$ ó existe una sucesión de proyectos en L, $(P_0, P_1, ..., P_m)$, tal que $H = P_0$, $K = P_m$, y $P_{r-1} \cap P_r \neq \emptyset$ para todo $r = 1, ..., m$.

La anterior definición quiere decir que dos proyectos están conectados si podemos encontrar una secesión de proyectos factibles donde cada par de proyectos consecutivos tienen al menos un jugador en común.

Es sencillo verificar que la *conectividad* es una *relación de equivalencia*, entonces la **clase de equivalencia** de P bajo $\sim$ es definida como $[P] := \{H \in L | P \sim H\}$. Además, hay una partición única de L que agrupa los proyectos si y sólo si están conectados, se denotrá esta partición por

$$L/_\sim := \{[P] | P \in L\}.$$

Definición 4.3.4. El mecanismo separable φ es un mecanismo **clase-equivalente** si existen funciones $g_i : \mathbb{R}_+^{L/\sim} \to \mathbb{R}_+ \quad$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que

$$\sum_{i \in N} g_i(A) = \sum_{[P] \in L/_\sim} A_{[P]} \quad \forall A \in \mathbb{R}_+^{L/\sim}$$

y para todo t y F,

$$\varphi(t, F) = (g_1(A), g_2(A), \ldots, g_n(A)),$$

donde

$$A_{[P]} = \sum_{H \in [P]} F^H.$$

Cuando L contiene a la gran coalición N, entonces todos los proyectos están conectados. Por lo tanto, los mecanismos *clase-equivalente* asignan pagos a los jugadores sólo en función de la utilidad total producida. Sin embargo, existe una gran clase de mecanismos *clase-equivalentes* que dependen en gran medida del conjunto de proyectos disponibles, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.5. Suponga que el conjunto de proyectos realizables es

$$L = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7, 8\}\}.$$

Entonces, existen dos clases de equivalencia $\{1, 2, 3\}$ y $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Así, los mecanismos *clase-equivalentes* son tales que la asignación de los jugadores depende únicamente de los valores $F^{12} + F^{123}$ and $F^{45} + F^{56} + F^{678}$.
Por ejemplo, un mecanismo plausible es tal que la asignación para los jugadores en $\{1, 2, 3\}$ puede estar en proporción al número de proyectos en los que participan:

$$\varphi_{[1,2,3]}(t, F) = \left(\frac{2(F^{12} + F^{123})}{5}, \frac{2(F^{12} + F^{123})}{5}, \frac{F^{12} + F^{123}}{5} \right),$$

y la asignación de los jugadores en $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ puede ser equidistribuida:

$$\varphi_i(t, F) = \frac{F^{45} + F^{56} + F^{678}}{5} \quad \text{para } i \in \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Cuando el conjunto de proyectos factibles incrementa y se incluye el proyecto $\{3, 4\}$, es decir, ahora

$$\bar{L} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7, 8\}, \{3, 4\}\},$$

entonces todos los proyectos están conectados, por tanto los únicos mecanismos plausibles de clase equivalente asignan una parte a los jugadores dependiendo únicamente del valor total producido:

$$F^{12} + F^{123} + F^{45} + F^{56} + F^{678} + F^{34}.$$

Dado que los mecanismos *clase-equivalentes* son separables, la función $g_i(A_i, A_{-i})$ es no-decreciente en A_i, la utilidad total generada por la clase que contiene al jugador i. Sin embargo, tal jugador podría verse afectado negativamente una vez que los beneficios de una clase diferente aumentan. Esto se descarta bajo monotonía, como se define a continuación.

Definición 4.3.6. Un mecanismo *clase-equivalente* es **monótono** si ningún jugador empeora cuando una clase diferente aumenta su utilidad, es decir, la función g es monótona en cada coordenada, $g(A) \leq g(\bar{A})$ para $A \leq \bar{A}$.

Proposición 4.3.7. *Las siguientes tres propiedades son equivalentes para un mecanismo eficiente φ:*

(I) *φ es tiempo-monótono.*

(II) *φ es tecnología-monótono.*

(III) *φ es un mecanismo clase-equivalente que es monótono.*

Demostración. Propiedad (III) $\Rightarrow$ *Propiedad* (I) es trivial.

Ahora probaremos que *Propiedad* (I) $\Rightarrow$ *Propiedad* (III).
Paso A1: Probaremos φ_i es independiente del tiempo.

Por Teorema 4.2.8, el pago del jugador i, depende solamente de las asignaciones de tiempo de los demás jugadores. Entonces,

$$\varphi_i(t, F) = \varphi_i\left(F; t_{-i}\right), \quad \forall i \in N.$$

Ahora, veamos que φ_i es independiente de las otras asignaciones de tiempo t_{-i}.

Considere las siguientes funciones de producción constantes:

$$f^k(t^k) = \alpha^k, \quad \forall k \in L.$$

Note que bajo estas funciones de producción, cualquier asignación de tiempo es un equilibrio de Nash eficiente. Supongamos que el tiempo para cualquier jugador $j \neq i$ incrementa, $\tilde{T}_j = T_j + \epsilon$.
Entonces, para algún proyecto $k \in L$, por tiempo-monotonía tenemos que

$$\varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-\{i,j\}}, \tilde{t}_j^k + \epsilon, \left(\tilde{t}_j^p\right)_{p \in L_j \setminus \{k\}}\right) \geq \varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Tomando el limite cuando ϵ tiende a cero se tiene que

$$\varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-i}\right) \geq \varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Intercambiando los roles de t_{-i} y $\tilde{t}_{-i}$ tenemos que

$$\varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right) \geq \varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Así,

$$\varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right) = \varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Paso A2: Ahora, veremos que el pago de un jugador es invariante a transferencias de utilidades entre proyectos conectados.

Consideremos dos proyectos conectados S y T, donde j es un jugador en $S \cap T$. Además, consideremos el siguiente conjunto de funciones de producción, para cualquier $\beta \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f^T(t^T) &= \alpha^T + \beta t_j^T; \\ f^S(t^S) &= \alpha^S + \beta t_j^S; \\ f^K(t^K) &= \alpha^K, \quad \forall K \neq S, T \end{aligned}$$

Note que bajo eficiencia, el jugador j asigna cualquier distribución de su tiempo solamente a los proyectos S y T mientras que los otros jugadores pueden asignar su tiempo arbitrariamente.

Ahora, consideremos que el tiempo para el jugador j incrementa, $\tilde{T}_j = T_j + \epsilon$.

Por tiempo-monotonía, el pago de cualquier jugador $i \in N$ satisface que

$$\varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S + \beta T_j, \alpha^T\right) \leq \varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S, \alpha^T + \beta(T_j + \epsilon)\right).$$

Así, el limite cuando ϵ tiende a 0 es

$$\varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S + \beta T_j, \alpha^T\right) \leq \varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S, \alpha^T + \beta T_j\right).$$

Intercambiando las asignaciones de tiempo, tenemos que

$$\varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S, \alpha^T + \beta T_j\right) \leq \varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S + \beta(T_j + \epsilon), \alpha^T\right).$$

Si ϵ tiende a 0, entonces

$$\varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S, \alpha^T + \beta T_j\right) \leq \varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S + \beta T_j, \alpha^T\right).$$

Por tanto,

$$\varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S, \alpha^T + \beta T_j\right) = \varphi_i\left(\alpha^{-S,T}, \alpha^S + \beta T_j, \alpha^T\right),$$

Así, el pago del jugador i es invariante a transferencias de utilidad entre proyectos conectados.

La demostración se concluye repitiendo este argumento para todos los pares de proyectos conectados. Así, el mecanismo φ es equivalente a un mecanismo clase-equivalente g.

Paso A3: Ahora, probaremos que g_i es monótono para todo $i \in N$.

Sin perdida de generalidad, sea $S \in L$ cualquier proyecto dado. Consideremos las siguientes funciones de producción,

$$\begin{aligned} f^S(t^S) &= a^S + t_j^S, \quad \text{para algún } j \in S, \\ f^K(t^K) &= a^K, \quad \forall K \neq S, \end{aligned}$$

donde a^K es una constante para cada $K \in L$, tal que

$$A_{[P]} = \sum_{K \in [P]} a^K.$$

Tenga en cuenta que bajo eficiencia, el jugador j asigna su tiempo total al proyecto S mientras que los otros jugadores pueden asignar su tiempo arbitrariamente.

Suponga que $T_j = 0$ y supongamos que el tiempo del jugador j incrementa, $T_j = \epsilon > 0$. Debido a tiempo-monotonía y el Paso A2, el pago del jugador i satisface que

$$g_i(A_{[S]}, A_{-[S]}) \leq g_i(A_{[S]} + \epsilon, A_{-[S]}), \quad \forall i \in N.$$

Por tanto, la función g_i es no-decreciente en toda entrada. Entonces, el mecanismo clase-equivalente g es monótono.

Propiedad (III) $\Rightarrow$ *Propiedad* (II) es trivial.

Ahora, probaremos que la *Propiedad* (II) $\Rightarrow$ *Propiedad* (III).

Paso B1: Veamos que φ_i es independiente del tiempo.

Por Teorema 4.2.8 tenemos que el pago del jugador i, depende de las asignaciones de tiempo de los demás jugadores, esto es,

$$\varphi_i(t, F) = \varphi_i\left(F; t_{-i}\right), \quad \forall i.$$

Ahora probaremos que φ_i es independiente de las demás asignaciones de tiempo t_{-i}.

Consideremos las siguientes funciones de producción constantes:

$$f^k(t^k) = \alpha^k, \quad \forall k \in L.$$

Observe que bajo estas funciones de producción, cualquier asignación de tiempo es un equilibrio de Nash eficiente. Supongamos que la tecnología en el proyecto S tiene una mejora.

$$\tilde{f}^S(t^S) = \alpha^S + \epsilon.$$

Entonces, por tecnología-monotonía, tenemos que

$$\varphi_i\left(\left(\alpha^k\right)_{k \in L \setminus S}, \alpha^S + \epsilon; \tilde{t}_{-i}\right) \geq \varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Tomando el limite cuando ϵ tiende a cero, se tiene

$$\varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-i}\right) \geq \varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Intercambiando los roles de t_{-i} y $\tilde{t}_{-i}$ tenemos que

$$\varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right) \geq \varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Por tanto,

$$\varphi_i\left(\alpha; t_{-i}\right) = \varphi_i\left(\alpha; \tilde{t}_{-i}\right), \quad \forall i, \quad t_{-i} \quad \text{y} \quad \tilde{t}_{-i}.$$

Paso B2: En este paso, probaremos que el pago de un jugador es invariante a transferencias de utlidad entre proyectos conectados.

Considere dos proyectos conectados S y T tales que j es un jugador en $S \cap T$. Además, considere el siguiente conjunto de funciones de producción:

$$\begin{aligned} f^T(t^T) &= c^T + \beta t_j^T; \\ f^S(t^S) &= c^S + \beta t_j^S; \\ f^K(t^K) &= c^K, \quad \forall K \neq S, T \end{aligned}$$

Note que bajo eficiencia, el jugador j asigna cualquier distribución de su tiempo a los proyectos S y T mientras que los otros jugadores pueden asignar su tiempo arbitrariamente.

Considere la siguiente mejora tecnológica de f^T:

$$\begin{aligned} f^T(t^T) &= c^T + \beta t_j^T + \epsilon; \\ f^S(t^S) &= c^S + \beta t_j^S; \\ f^K(t^K) &= c^K, \quad \forall K \neq S, T. \end{aligned}$$

Por monotonía tecnológica, el pago para cualquier jugador $i \in N$ satisface

$$\varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S + \beta T_j, c^T\right) \leq \varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S, c^T + \beta T_j + \epsilon\right).$$

Así, del limite cuando ϵ tiende a 0, tenemos que

$$\varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S + \beta T_j, c^T\right) \leq \varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S, c^T + \beta T_j\right).$$

Alternativamente, considere las siguientes funciones de producción,

$$\begin{aligned} f^S(t^S) &= c^S + \beta t_j^S + \epsilon; \\ f^T(t^T) &= c^T + \beta t_j^T; \\ f^K(t^K) &= c^K, \quad \forall K \neq S, T \end{aligned}$$

Repitiendo el argumento anterior tenemos que

$$\varphi_i\left(c^{-S,T}, c^T + \beta T_j, c^S\right) \leq \varphi_i\left(c^{-S,T}, c^T, c^S + \beta T_j + \epsilon\right).$$

Cuando ϵ tiende a cero, esto nos lleva a que

$$\varphi_i\left(c^{-S,T}, c^T + \beta T_j, c^S\right) \leq \varphi_i\left(c^{-S,T}, c^T, c^S + \beta T_j\right).$$

Así,

$$\varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S, c^T + \beta T_j\right) = \varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S + \beta T_j, c^T\right),$$

Por tanto, el pago del jugador i es invariante a transferencias de utilidad entre proyectos conectados.

La demostración se completa repitiendo este argumento para todos los pares de proyectos conectados. Así, φ es un mecanismo clase-equivalente g.

Paso B3: Ahora, probaremos que g_i es monótono para todo $i \in N$.

Consideremos las siguientes funciones de producción constantes:

$$f^k(t^k) = a^k, \quad \forall k \in L,$$

tales que

$$A_{[P]} = \sum_{K \in [P]} a^K.$$

Observe que cualquier asignación de tiempo es un equilibrio de Nash eficiente.

Supongamos que la tecnología en el proyecto S ha sido mejorada,

$$\tilde{f}^S(t^S) = \alpha^S + \epsilon.$$

Entonces por monotonía tecnológica tenemos que

$$g_i(A_{[S]}, A_{-[S]}) \leq g_i(A_{[S]} + \epsilon, A_{-[S]}), \quad \forall i \in N.$$

Así, la función g_i es no-decreciente en todas las entradas. Por tanto, el mecanismo g es monótono.

□

4.4. Manipulación de grupo

Hasta ahora, se han estudiado equilibrios en los cuales los jugadores no tienen incentivos para desviarse individualmente, es decir por si solos no les conviene cambiar sus asignaciones, si los demás jugadores las conservan. Pero, pueden existir situaciones en las cuales hay comunicación entre los jugadores y pueden formar coaliciones para desviar sus estrategias aumentando sus ganancias, lo cual puede perjudicar al resto de jugadores. Dicha situación no solo causaría daños a algunos jugadores, sino que también puede causar que se pierda la generación de la utilidad socialmente óptima. Por ello, es importante para el planificador, tener mecanismos que eviten lo mencionado anteriormente.

La siguiente propiedad evita la coordinación de asignación de tiempo por los jugadores en un equilibrio. Esta es capturada mediante el uso de una noción tradicional de *equilibrio fuerte de Nash* (Aumann (1959)).

Definición 4.4.1. Se dice que un equilibrio de Nash $(S_1^*, \ldots, S_n^*)$ de un juego G^φ es un **Equilibrio fuerte de Nash** si dado un grupo de jugadores $T \subset N$ y estrategias $\tilde{S}_T$ de ellos, si existe una función de producción f tal que $\varphi_i(S^*(f), f(S^*(f)) < \varphi_i(\tilde{S}(f), f(\tilde{S}(f))$ para algún $i \in T$, entonces existe $j \in T$ tal que $\varphi_j(S^*(f), f(S^*(f)) > \varphi_j(\tilde{S}(f), f(\tilde{S}(f))$, donde $\tilde{S} = (S_T, S^*_{-T})$.

Bajo un equilibrio fuerte de Nash no hay ningún grupo de jugadores que pueda coordinar asignaciones de tiempo y mejorar débilmente todos sus pagos, y que por lo menos un jugador en el grupo mejore estrictamente. Esto está relacionado con la literatura sobre mecanismos a prueba de estrategias de grupo (coalición) Moulin (1999).

Definición 4.4.2. Un mecanismo clase-equivalente satisface la propiedad de **monotonía de grupo débil (MGD)** si para todo $S \subset N$, $A \in \mathbb{R}_+^{L/\sim}$ y $\bar{A}_S \leq A_S$ tales que $g_i(A) = g_i(\bar{A}_S, A_{-S})$ para todo $i \in S$, entonces $g_j(\bar{A}_S, A_{-S}) \leq g_j(A)$ para todo $j \notin S$.

Observación 4.4.3. Cabe resaltar que MGD es una propiedad más débil que la monotonía. De hecho, considere un mecanismo *clase-equivalente* tal que para algún jugador i, $g_i(A_i, A_{-i})$ es estrictamente creciente en A_i, este mecanismo satisface MGD, pero no satisface monotonía necesariamente, pues no impone ninguna restricción al cambio de g_i cuando las ganancias de proyectos diferentes de A_i varían.

La siguiente proposición, caracteriza los mecanismos eficientes que son a prueba de manipulación de grupo.

Proposición 4.4.4. *Sea φ un mecanismo eficiente. Existe un equilibrio eficiente en el juego G^φ que es un equilibrio fuerte de Nash si y sólo si φ es un mecanismo clase-equivalente que satisface MGD.*

Demostración. La parte *sólo si* es clara pues bajo la función g, cada jugador asigna sus recursos de tiempo para alcanzar el nivel máximo (eficiente) de la utilidad total en su clase de equivalencia, incluso si algunos jugadores forman una coalición, no pueden aumentar su pago individual porque la utilidad agregada tampoco puede aumentar. Pero, si las utilidades de un conjunto de jugadores se mantienen iguales si estos disminuyen las utilidades de algunos proyectos, entonces el pago de todos los demás jugadores no aumenta, es decir el mecanismo tiene un equilibrio fuerte de Nash.

Probemos la parte *si*:

Paso 1: Veamos que φ_i es independiente de las asignaciones de tiempo, t_i y t_{-i}. Por Teorema 4.2.8, φ es tal que,

$$\varphi_i(t,F) = \varphi_i\left(\sum_{k\in L_i} F^k, \left(F^b\right)_{b\in L_{-i}}, t_{-i}\right), \quad \forall i.$$

Consideremos las siguientes funciones de producción que no dependen del tiempo:

$$f^k(t^k) = \alpha^k, \quad \forall k \in L,$$

donde α^k son constantes arbitrarias.

Supongamos que φ_i depende de t_{-i}. Entonces, un jugador j puede ayudar al jugador i a recibir un mayor pago por cambiar su asignación de tiempo, pues las otras asignaciones se mantendrían constantes, lo cual violaría la propiedad de equilibrio de Nash fuerte. Por tanto, tenemos que

$$\varphi_i(t,F) = \varphi_i\left(\sum_{K\in L_i} F^K, \left(F^B\right)_{B\in L_{-i}}\right), \quad \forall i \in N.$$

Paso 2: Ahora, mostraremos que el pago de cualquier jugador es invariante a la transferencia de utilidades entre proyectos conectados.

Consideremos dos proyectos conectados S y T tales que j es un jugador en $S \cap T$. Además, consideremos el siguiente conjunto de funciones de producción:

$$\begin{aligned} f^T(t^T) &= c^T + \beta t_j^T; \\ f^S(t^S) &= c^S + \beta t_j^S; \\ f^K(t^K) &= c^K, \quad \forall K \neq S, T \end{aligned}$$

para cualquier $\beta > 0$.

Note que bajo eficiencia, el jugador j asigna cualquier distribución de su tiempo entre los proyectos S y T mientras que los demás jugadores pueden asignar sus tiempos de forma arbitraria.

Por Teorema 4.2.8 y Paso 1, tenemos que el pago del jugador j es invariante a transferencias de utilidades entre S y T, debido a que la primera entrada de g_j no cambia.

Entonces, por equilibrio fuerte de Nash, tenemos que para cualquier jugador $i \in N$,

$$\varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S + \beta T_j, c^T\right) = \varphi_i\left(c^{-S,T}, c^S, c^T + \beta T_j\right).$$

Así, el pago de cualquier jugador i es invariante a transferencias de utilidad entre proyectos conectados.

Repitiendo el argumento para todo par de proyectos conectados, tenemos que φ es un mecanismo clase-equivalente g.

Paso 3: Ahora, probaremos que g satisface MGD.

Actuando por contrarecíproco , suponga que existen $S \subset N$ y $A \in \mathbb{R}_+^{L/\sim}$ tales que $\bar{A}_S \leq A_S$, $g_i(A) = g_i(\bar{A}_S, A_{-S})$ y para algún $j \in N \backslash S$, $g_i(\bar{A}_S, A_{-S}) > g_i(A)$. Entonces, la coalición $S \cup \{j\}$ viola la propiedad de equilibrio fuerte de Nash. $\square$

4.5. Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se introdujo una clase grande de mecanismos que implementan las asignaciones de tiempo eficientes. El principal resultado muestra que la clase de mecanismos eficientes coincide con la clase de mecanismos separables, en los cuales los pagos de los jugadores solamente dependen de la utilidad total generada por sus propios proyectos, como también de las asignaciones de tiempo y utilidades generadas de los proyectos en los cuales no participa. Esta gran clase de mecanismos eficientes se contrae sustancialmente cuando otras propiedades son impuestas. Cuando se anexa la anonimidad e independencia de tiempo, se caracterizó una subclase de mecanismos que resultó además ser lineal. Otra interesante subclase fue obtenida al imponer propiedades de monotonía con respecto al tiempo y la tecnología, dicha clase depende de la conexión entre los proyectos factibles y las utilidades de las clases de equivalencia de proyectos que generan la relación de conexión. Esto también es cierto al enfocarse en los mecanismos que evitan que coaliciones de jugadores puedan coordinarse para asignar sus tiempos y mejorar sus pagos, perjudicando a los demás.

Es necesario realizar una investigación más profunda para entender la repartición de las utilidades en problemas dinámicos (en el tiempo), Juarez *et al.* (2016) ha iniciado este estudio centrándose en la división axiomática de ganancias finitas y secuenciales en redes.

Bibliografía

Álvarez-Mozos, M. y Tejada, O. (2011). Parallel characterizations of a generalized shapley value and a generalized banzhaf value for cooperative games with level structure of cooperation. *Decision Support Systems*, 52(1):21–27.

Aumann, R. J. (1959). Acceptable points in general cooperative n-person games. En Luce, R. D. y Tucker, A. W., editores, *Contribution to the theory of game IV, Annals of Mathematical Study 40*, pp. 287–324. Princeton University Press.

Aumann, R. J. y Dreze, J. H. (1974). Cooperative games with coalition structures. *International Journal of game theory*, 3(4):217–237.

Bhargava, S. (1994). Profit sharing and the financial performance of companies: Evidence from u.k. panel data. *Economic Journal*, 104(426):1044–1056.

Bilbao, J. M. y Edelman, P. H. (2000). The shapley value on convex geometries. *Discrete Applied Mathematics*, 103(1):33–40.

Calvo, E., Lasaga, J. J., y Winter, E. (1996). The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation. *Mathematical Social Sciences*, 31(3):171–182.

de Clippel, G., Moulin, H., y Tideman, N. (2008). Impartial division of a dollar. *Journal of Economic Theory*, 139(1):176–191.

Dragan, I. C. (2008). On the computation of weighted shapley values for cooperative tu games. Technical report, University of Texas at Arlington.

Faigle, U. y Kern, W. (1992). The shapley value for cooperative games under precedence constraints. *International Journal of Game Theory*, 21(3):249–266.

Gómez-Rúa, M. y Vidal-Puga, J. (2011). Balanced per capita contributions and level structure of cooperation. *Top*, 19(1):167–176.

Harsanyi, J. C. (1963). A simplified bargaining model for the n-person cooperative game. *International Economic Review*, 4(2):194–220.

Hart, S. y Mas-Colell, A. (1989). Potential, value, and consistency. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 589–614.

Holmstrom, B. (1982). Moral hazard in teams. *Bell Journal of Economics*, 13(2):324–340.

Hougaard, J. L. y Tvede, M. (2012). Truth-telling and nash equilibria in minimum cost spanning tree models. *European Journal of Operational Research*, 222(3):566–570.

Hougaard, J. L. y Tvede, M. (2015). Minimum cost connection networks: Truth-telling and implementation. *Journal of Economic Theory*, 157:76–99.

Juarez, R., Ko, C. Y., y Jingyi, X. (2016). Sharing sequential values in a network.

Juarez, R. y Kumar, R. (2013). Implementing efficient graphs in connection networks. *Economic Theory*, 54(2):359–403.

Juarez, R., Nitta, K., y Vargas, M. (2017). Profit-sharing and efficient time allocation. *Manuscript*.

Kalai, E. y Samet, D. (1987). On weighted shapley values. *International Journal of Game Theory*, 16(3):205–222.

Kamijo, Y. (2013). The collective value: a new solution for games with coalition structures. *Top*, 21(3):572–589.

Koshevoy, G. y Talman, D. (2014). Solution concepts for games with general coalitional structure. *Mathematical Social Sciences*, 68:19–30.

Kraft, K. y Ugarković, M. (2006). Profit sharing and the financial performance of firms: Evidence from germany. *Economics Letters*, 92(3):333–338.

Kruse, D. L. (1992). Profit sharing and productivity: Microeconomic evidence from the united states. *Economic Journal*, 102(410):24–36.

Maschler, M., Zamir, S., y Solan, E. (2013). *Game Theory*. Cambridge University Press.

Maskin, E. y Sjöström, T. (2002). *Implementation Theory*, capítulo 5, pp. 237–288. North Holland, Amsterdam.

Moulin, H. (1999). Incremental cost sharing: Characterization by coalition strategy-proofness. *Social Choice and Welfare*, 16(2):279–320.

Myerson, R. B. (1977). Graphs and cooperation in games. *Mathematics of operations research*, 2(3):225–229.

Myerson, R. B. (1980). Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory*, 9(3):169–182.

Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. En *Mathematical economics and game theory*, pp. 76–88. Springer.

Owen, G. (1986). Values of graph-restricted games. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(2):210–220.

Owen, G. (1988). Multilinear extensions of games. En Roth, A. E., editor, *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*, capítulo 10, pp. 139–151. Cambridge University Press.

Owen, Guillermo and Winter, Eyal and others (1992). The multilinear extension and the coalition structure value. *Games and Economic Behavior*, 4(4):582–587.

Prendergast, C. (1999). The provision of incentives in firms. *Journal of Economic Literature*, 37(1):7–63.

Roth, A. E. (1988). *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press.

Sanchez-Sanchez, F. y Vargas-Valencia, M. (accepted, 2016). Games with nested constraints given by a level structure. *Journal of Dynamics and Games*.

Shapley, L. (1953). A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games,*, II:307–317. by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. Princeton University Press, Princeton.

Stanley, R. (1998). Enumerative combinatorics, vol. 1, wadsworth & brooks/cole, pacific grove, california, 1986.

Thomson, W. (2007). On the existence of consistent rules to adjudicate conflicting claims: a constructive geometric approach. *Review of Economic Design*, 11(3):225–251.

Tideman, T. N. y Plassmann, F. (2008). Paying the partners. *Public Choice*, 136:19–37.

van den Brink, R., Khmelnitskaya, A., y van der Laan, G. (2015). An owen-type value for games with two-level communication structure. *Annals of Operations Research*, pp. 1–20.

Vargas-Valencia, M. A. (2013). Juegos cooperativos con estructuras anidadas. Tesis de máster.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press Princeton, NJ.

Weitzman, M. y Kruse, D. (1990). *Profit Sharing and Productivity*, pp. 95–140. Brookings.

Winter, E. (1989). A value for cooperative games with levels structure of cooperation. *International Journal of Game Theory*, 18(2):227–240.