

EL PROBLEMA DE KEPLER Y EL SEMIPLANO DE POINCARÉ

Fausto Ongay and Celina Palacios

Comunicación Técnica No I-03-04/17-02-2003
(MB/CIMAT)



EL PROBLEMA DE KEPLER Y EL SEMIPLANO DE POINCARÉ

FAUSTO ONGAY Y CELINA PALACIOS

Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, Guanajuato, Gto. 36000

Resumen. El objetivo de este artículo es mostrar cómo el semiplano de Poincaré puede ser considerado, de una manera muy natural, como el espacio fase reducido para los problemas de fuerzas centrales; es decir, para aquellos problemas de dinámica hamiltoniana que tienen simetría rotacional.

Para ello, describiremos el proceso de reducción simpléctica de una manera simplificada, pero razonablemente autocontenida, y usando esta construcción reuniremos a dos de los objetos más clásicos dentro de las matemáticas, que en principio no parecen guardar relación entre sí. En particular, como consecuencia de nuestro estudio obtendremos una reinterpretación de la norma del vector de Runge-Lenz y veremos una descripción de las condiciones que conducen a los distintos tipos de órbitas cónicas para el problema clásico del movimiento planetario de Kepler, o en otras palabras, para el movimiento de una partícula puntual sujeta a una fuerza del tipo $1/r^2$.

1. INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DEL MOVIMIENTO PLANETARIO DE KEPLER

La fama de Issac Newton se debió, en buena medida, a la notable deducción que hizo de las tres leyes del movimiento planetario, que habían sido enunciadas unos setenta y cinco años antes por Johannes Kepler.

Como sabemos, el máximo triunfo de Kepler fue enunciar —alrededor de 1610 y después de una larga serie de observaciones, tanto por parte de su predecesor, Tycho Brahe, como de él mismo—, las siguientes tres leyes relativas al movimiento de los planetas alrededor del Sol:

-Primera Ley: Las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol situado en uno de los focos.

-Segunda Ley: El radio vector que conecta el Sol con cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Trabajo apoyado por CONACyT, proyecto 37558-E

-Tercera Ley: El cociente del cubo de la distancia media del planeta al Sol entre el cuadrado del periodo de revolución es una constante, independiente del planeta.

Estos notables logros de Kepler fueron sin embargo opacados poco después por la revolución que introdujeron —en el estudio de la física en general, y en la mecánica celeste en particular— las leyes de Newton. Y es que en efecto, aunque quizá no sea del todo correcto decir que Newton “explicó” las leyes de Kepler, lo que sí es indiscutible es que consiguió enmarcarlas dentro de un esquema mucho más rico en posibilidades.

La premisa más básica de la mecánica newtoniana es que el movimiento de una partícula puntual se rige por la Segunda Ley de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

donde \mathbf{F} es la fuerza, \mathbf{a} la aceleración, \mathbf{v} la velocidad, \mathbf{r} la posición y m la masa de la partícula

En el problema de Kepler, suponiendo que el planeta es una partícula puntual de masa mucho menor que la del Sol, la ley de fuerzas está dada por la Ley de la Gravitación Universal

$$\mathbf{F} = -\frac{C\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición del planeta relativo al Sol, C es una constante que involucra las masas del planeta y del Sol, así como a la constante de gravitación universal.

A lo largo de esta sección seguiremos la convención usual de los textos elementales de denotar a los vectores en el espacio tridimensional por negritas y a sus normas por la correspondiente letra itálica. Con esta convención y combinando las dos ecuaciones anteriores podemos decir que el gran logro de Newton fue transformar las observaciones empíricas de Kepler en el problema matemático preciso de resolver la ecuación diferencial

$$(1) \quad m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{C}{r^2} \mathbf{R},$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}/r$ denota al vector unitario en la dirección de \mathbf{r} , ecuación que Newton —usando los métodos del cálculo diferencial, que él mismo había creado— pudo resolver explícitamente, recuperando con ello las leyes de Kepler.

Recordemos ahora algunos de los aspectos matemáticos más básicos de este problema, en el que tienen su germen un sinnúmero de ideas, tanto de las matemáticas como de la física teórica.

La clave para integrar la ecuación (1) es la *conservación del momento angular*. El argumento (en una notación matemática relativamente moderna y que por supuesto no es la de Newton) se puede describir como sigue:

Primeramente, si denotamos por $\mathbf{u} = m\mathbf{v}$ al momento (lineal) de la partícula y recordamos que el momento angular se define como $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$, entonces por (1) obtenemos

que

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

ya que los vectores multiplicados en ambos productos cruz son paralelos. Esta es la ecuación que describe la conservación del momento angular.

Cabe hacer un paréntesis aquí para mencionar que la idea de considerar un “momento angular” —o la noción íntimamente relacionada de una *torca* o *par de fuerzas*—, no era algo nuevo en tiempos de Newton; en efecto, es posible rastrearla en el tiempo al menos hasta el principio de la palanca de Arquímedes, fundamental para resolver problemas de estática. Sin embargo, no fue sino hasta que Newton escribió las ecuaciones de movimiento como un enunciado de carácter cuantitativo, que estas ideas se pudieron aplicar de manera efectiva a la solución de problemas dinámicos, como es el caso del movimiento planetario.

Regresando a la ecuación (2), ésta nos dice que \mathbf{l} , y por consiguiente l , son *constantes del movimiento* (también llamadas *integrales primeras* o *cantidades conservadas*). De aquí inmediatamente se sigue que

$$(3) \quad 0 = \frac{dl^2}{dt} = \mathbf{r} \cdot \frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{l})}{dt} = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{l} \right),$$

y como además, usando propiedades elementales del triple producto escalar,

$$\frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{l})}{dt} \cdot \mathbf{l} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{l} \right) \cdot \mathbf{l} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{l}) = 0,$$

vemos que $d(\mathbf{u} \times \mathbf{l})/dt$ es ortogonal tanto a \mathbf{r} como a \mathbf{l} y, por lo tanto, paralelo a $d\mathbf{R}/dt$.

Hasta aquí los argumentos se aplican a cualquier problema de *fuerzas centrales*, es decir, los problemas donde la fuerza tiene una expresión del tipo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(q)\mathbf{R}$ y el punto que nos interesaba destacar es la relevancia de la cantidad $\mathbf{u} \times \mathbf{l}$. Pero si ahora usamos la forma explícita de la fuerza para el problema de Kepler, usando ahora propiedades elementales del triple producto vectorial, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{l})}{dt} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{l} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = -\frac{C}{r^2} \mathbf{R} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{r})}{dt} \right) \\ &= -\frac{C}{r^2} \mathbf{R} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{R}r)}{dt} \right) \\ &= -\frac{C}{r^2} \mathbf{R} \times \left(\mathbf{r} \times \left(m\mathbf{R} \frac{dr}{dt} + r \frac{d(m\mathbf{R})}{dt} \right) \right) \\ &= -\frac{C}{r^2} \mathbf{R} \times \left(mq\mathbf{R} \times mr \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = m^2 C \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \frac{d\mathbf{R}}{dt} \\ &= m^2 C \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{l} = mC\mathbf{R} + \mathbf{b}$$

para algún vector constante \mathbf{b} , llamado a veces *vector de Runge-Lenz*. Luego,

$$l^2 = q\mathbf{R} \cdot (mC\mathbf{R} + \mathbf{b}) = q(mC + \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}) = q(mC + b \cos \theta),$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{R} y \mathbf{b} , que es la ecuación en coordenadas polares de una cónica

Con ello hemos recuperado la primera ley de Kepler y, para los propósitos de este trabajo, esto es todo lo que necesitaremos recordar de la solución newtoniana del problema de Kepler. Por conveniencia, en lo que sigue normalizaremos estas ecuaciones de modo que $C/l^2 = 1$ y $m = 1$, así la ecuación de la trayectoria se escribe como

$$(4) \quad 1 = q \left(1 + \frac{b}{l^2} \cos \theta \right),$$

que es la ecuación de una cónica con excentricidad $e = b/l^2$. Por otro lado, aunque no detallaremos los argumentos aquí, conviene enfatizar que las otras dos leyes de Kepler también se siguen fácilmente de la teoría de Newton: De hecho, la segunda ley es válida para *cualquier* fuerza central (y en el fondo no es sino una forma débil de la conservación del momento angular), en tanto que la tercera es una consecuencia del hecho que en la fuerza de la gravitación universal, el exponente de q es *exactamente* -2 , y esto se ha utilizado experimentalmente como un modo de verificar la Ley de la Gravitación Universal.

El propósito de este artículo es pues retomar este problema clásico, desde el punto de vista moderno de la reducción simpléctica y la integrabilidad completa, y la consecuencia principal de nuestro estudio será que existe una relación, hasta cierto punto sorprendente, del problema de Kepler con otro objeto clásico en matemáticas: el semiplano de Poincaré.

A grandes rasgos, el plan del trabajo es como sigue:

En las secciones 2 a 4 daremos un breve panorama de la herramienta básica, a saber, la mecánica hamiltoniana. Aunque la mayoría de los cálculos explícitos se harán para el ejemplo especial del momento angular, casi todos los resultados se pueden obtener de manera general, por lo que nuestra descripción alternará entre estos dos ámbitos; la filosofía de este enfoque es mostrar que no se trata de métodos *ad hoc*, pero a la vez tratar de mantener el trabajo a un nivel lo más sencillo posible.

En la sección 5, que es la sección medular de este trabajo, describimos con detalle la construcción del espacio fase reducido del momento angular y su estructura simpléctica, y establecemos la relación de este espacio con el semiplano de Poincaré.

Finalmente, en la sección 6 analizamos algunas consecuencias de la reducción del problema de Kepler y, en particular, damos otra interpretación del vector de Runge-Lenz.

2. SISTEMAS INTEGRABLES Y MECÁNICA HAMILTONIANA

Un momento de reflexión nos muestra que la conservación del momento angular en realidad nos da no una, sino *tres* cantidades conservadas (las componentes de \mathbf{l}), y esto

está íntimamente relacionado con el hecho de que el problema resulta ser *completamente integrable*; *i.e.*, con el hecho que podamos escribir soluciones en forma explícita, como en la ecuación (2). El marco natural para el estudio de los sistemas integrables es la mecánica hamiltoniana, así que revisaremos ahora rápidamente los elementos básicos de esta teoría. Por simplicidad, en lo que sigue supondremos que todas las funciones que aparezcan son infinitamente diferenciables, lo que denotamos $f \in C^\infty(M)$, donde M es el dominio de f .

Como mencionamos en la sección anterior, la dinámica newtoniana clásica de una partícula puntual ocurre en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , cuyas coordenadas escribiremos en esta sección como vectores columna, de modo que $\mathbf{r}^t = \mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)$, donde el superíndice t denota la transpuesta de una matriz (esta elección se explica porque queremos que ciertas matrices actúen por la izquierda). El sistema mecánico propiamente dicho queda especificado por una función de fuerza \mathbf{F} , y la dinámica por la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Ahora bien, la clase más importante de fuerzas son las *conservativas*, que son aquellas que pueden expresarse en la forma $\mathbf{F} = -\nabla U$, para alguna función U , llamada (energía) *potencial*. La fuerza que nos interesa para el problema de Kepler es claramente conservativa, con potencial $U = 1/r$.

Dada una fuerza conservativa \mathbf{F} podemos considerar a la velocidad \mathbf{v}^t , o mejor aún al momento $\mathbf{p} = \mathbf{u}^t$, como una variable independiente y pasar a un sistema de primer orden: Es decir, si reescribimos la segunda ley de Newton como $\mathbf{F} = d\mathbf{u}/dt$, ésta es equivalente al sistema

$$(5) \quad \frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} h \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\partial_{q_i} h \quad ; i = 1, 2, 3,$$

donde ∂_{q_i} denota a $\partial/\partial q_i$; $i = 1, 2, 3$, etc., y donde la función $h = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}/2m + K = \mathbf{u}\mathbf{u}^t/2m + U = K + U$ se conoce como el *hamiltoniano* del problema. Aquí K es la *energía cinética*, de modo que para la situación que estamos considerando, el hamiltoniano es simplemente la energía mecánica total. Las ecuaciones en (5) se llaman *ecuaciones de Hamilton* y nos permiten reformular el problema en términos de hallar las curvas integrales de un campo vectorial, en el espacio de dimensión seis $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con coordenadas q, p ; éste se llama el *espacio fase* del problema.

Pero las ecuaciones de Hamilton son mucho más que una simple reformulación de la segunda ley de Newton para sistemas conservativos: son realmente la base para una nueva y poderosa teoría.

Podemos empezar a darnos una idea de su importancia como sigue: Consideremos una función cualquiera en el espacio fase, $f(q, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, como por ejemplo cualquiera de las componentes del momento angular. (Por razones bastante obvias a estas funciones se les suele llamar *observables físicas*, aunque el problema de decidir cuáles funciones son realmente físicamente observables no es un problema trivial.) Entonces, para cualquier observable f y cualquier curva $(q(t), p(t))$, la regla de la cadena dice que la evolución en el tiempo de esta observable está dada por

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \partial_{q_i} f \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \partial_{p_i} f \frac{dp_i}{dt}.$$

Pero si en particular la curva es una trayectoria del sistema, usando las ecuaciones de Hamilton esta expresión se convierte en

$$(6) \quad \frac{df}{dt} = \sum_i \partial_{p_i} h \partial_{q_i} f - \sum_i \partial_{q_i} h \partial_{p_i} f = \{h, f\}.$$

Y, si aún más en particular hacemos $f = h$, obtenemos de inmediato $dh/dt = 0$, que es la ley de conservación de la energía.

Ahora bien, la segunda igualdad en (6) en realidad define una nueva función, que hemos denotado por $\{h, f\}$, llamada *paréntesis de Poisson* de h y f ; y también es claro que esta definición no involucra ninguna propiedad especial del hamiltoniano, de modo que se puede extender a cualquier par de funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Es entonces un ejercicio sencillo verificar que esto define una operación bilineal y antisimétrica en el espacio de las observables, que además satisface la *identidad de Jacobi*:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

En términos técnicos, el paréntesis de Poisson dota a $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ de una estructura de *álgebra de Lie*.

Pero incluso hay más, ya que de hecho, $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ junto con el paréntesis de Poisson es un *álgebra de Poisson*; esto significa que (además de las condiciones de álgebra de Lie), si fijamos una de las variables, el paréntesis de Poisson es una derivación en la otra variable; i.e., satisface la *fórmula de Leibniz*

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

Vemos así que el conjunto de las observables posee una rica estructura algebraica; incluso, si extrapolásemos un poco con espíritu bourbakiano, podríamos decir que desde un punto de vista abstracto la mecánica es el estudio de este tipo de estructuras.

Pero en cualquier caso y sin llegar a esos extremos, lo que sí podemos retener de la discusión anterior es que, dado un hamiltoniano h , la dinámica de una observable está determinada por su paréntesis de Poisson con el hamiltoniano. En particular, esto nos permite caracterizar a las cantidades conservadas como aquellas que “Poisson-conmutan” con el hamiltoniano h ; i.e., aquellas que satisfacen $\{h, f\} = 0$; en tal caso decimos también que las funciones h y f están *en involución*.

La importancia de tener cantidades conservadas para resolver las ecuaciones de Hamilton es, por supuesto, que en esas condiciones las soluciones *estarán contenidas en la intersección de las superficies de nivel de las cantidades conservadas*. En otras palabras y hablando de un modo genérico, cada cantidad conservada impone una restricción, disminuyendo así en uno la dimensión del espacio donde se encuentra la solución. De este modo, si además del hamiltoniano tenemos suficientes invariantes independientes podemos, al menos en principio, describir a la solución como intersección de hipersuperficies, es decir, como solución de un sistema de ecuaciones: Por ejemplo, en el caso que estamos

considerando, de una partícula puntual, las soluciones, que son curvas y por lo tanto de dimensión uno, “viven” en el espacio fase, que es un espacio de dimensión seis; por consiguiente, *a priori* cinco invariantes (en los que puede estar incluido el hamiltoniano, que siempre es constante del movimiento) nos bastarían para describirlas.

En realidad se requieren menos constantes de movimiento, *suponiendo que están dos a dos en involución*; a los sistemas que tienen esta propiedad se les llama *sistemas completamente integrables*. Para sistemas arbitrarios (que en general requieren espacios fase de dimensión mayor que seis, aunque siempre par), el número de cantidades conservadas en involución que se necesitan, para que el sistema sea completamente integrable, es exactamente la mitad de la dimensión del espacio fase. Esto es lo que se conoce como *teorema de Liouville*, que es el resultado central de la teoría de los sistemas completamente integrables en dimensión finita y del que hablaremos un poco más en la sección 4; de momento digamos simplemente que el teorema de Liouville proporciona un conjunto completo de coordenadas locales para el espacio fase, donde el problema queda resuelto de una manera explícita, lo que explica el término “completamente integrable”.

Tomando de nuevo como ejemplo el caso de una sola partícula puntual, esto significa que basta con tres cantidades conservadas (incluyendo al hamiltoniano), para tener integrabilidad completa. (Por otro lado, cabe notar que si el espacio fase tiene dimensión dos, entonces el sistema siempre es completamente integrable, ya que basta con una sola cantidad conservada: ¡el propio hamiltoniano!)

En la práctica los sistemas completamente integrables en más de una dimensión no son muy comunes y, en realidad, no se conocen demasiados ejemplos explícitos de ellos. Sin embargo, aunque tal vez no sea del todo obvio en este punto, el problema de Kepler *sí* es completamente integrable: De hecho, nuestros cálculos de la conservación del momento angular muestran que $\{h, l_i\} = 0$, esto es, que las componentes del momento angular están en involución con el hamiltoniano. Por supuesto, esto no basta para que el sistema sea completamente integrable, ya que estas componentes no están en involución entre sí, y es un cálculo sencillo ver que satisfacen las relaciones

$$(7) \quad \{l_1, l_2\} = l_3 ; \{l_2, l_3\} = l_1 ; \{l_3, l_1\} = l_2.$$

Sin embargo, combinando estos mismos cálculos con la regla de Leibniz que satisface el paréntesis de Poisson, tenemos que el *cuadrado* de la norma del momento angular, l^2 , está en involución tanto con h como con cualquiera de las tres componentes de \mathbf{l} , de modo que el sistema es completamente integrable en el sentido descrito en los párrafos anteriores. En efecto, tenemos por ejemplo

$$\{l_1, l^2\} = \{l_1, \sum_{i=1}^3 l_i^2\} = 2 \sum_{i=1}^3 \{l_1, l_i\} l_i = 2(\{l_1, l_2\} l_2 + \{l_1, l_3\} l_3) = 2(l_3 l_2 - l_2 l_3) = 0,$$

de modo que l_1 , l^2 y h forman un conjunto completo de integrales primeras en involución.

La discusión anterior ilustra bien la ventaja principal del formalismo hamiltoniano sobre el newtoniano, y es que aquél se presta más para un tratamiento geométrico diferencial, lo

que en particular permite entender mejor el papel de las simetrías en un problema dado. Para hacer esta afirmación algo más precisa, vamos a describir desde otro punto de vista las construcciones anteriores.

Primeramente, observemos que el paréntesis de Poisson de dos funciones f y g puede pensarse como una operación antisimétrica y bilineal, que actúa en la pareja de campos vectoriales ∇f y ∇g (aquí consideramos los gradientes con respecto de las seis coordenadas q_i, p_i): Más explícitamente, si hacemos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$), entonces

$$(8) \quad \{f, g\} = \nabla f^t J \nabla g;$$

y nótese que se tiene la relación $J^2 = -I_6$. Así, desde el punto de vista de la geometría diferencial, la ecuación (8) dice que la matriz J es la representación, en las coordenadas cartesianas, de una 2-forma diferencial en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$; ésta es la llamada *estructura (o forma) simpléctica estándar* de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, frecuentemente denotada por ω_0 , y que en la notación usual de formas diferenciales tiene la expresión

$$(9) \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dp_i.$$

Aunque aquí introdujimos ω_0 en coordenadas especiales, la forma simpléctica admite una descripción intrínseca; por otro lado, un teorema debido a Darboux asegura que para toda forma simpléctica hay coordenadas apropiadas (usualmente llamadas *canónicas*), donde la forma tiene esta escritura.

Ahora bien, la construcción anterior implica también que aquí hemos identificado al espacio fase con el *haz cotangente* al “espacio físico” \mathbb{R}^3 . En efecto, cada punto del espacio fase $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es una pareja (\mathbf{r}, \mathbf{u}) , donde \mathbf{u} es un vector paralelo al vector tangente \mathbf{v} ; esto sugiere, en primera instancia, que el espacio fase podría pensarse como el *haz tangente*, denotado $T\mathbb{R}^3$, es decir, como el espacio de parejas de la forma

“(punto del espacio físico, vector tangente en ese punto)”.

Sin embargo, la interpretación correcta es verlo como el haz cotangente, $T^*\mathbb{R}^3$, que es el espacio de parejas

“(punto del espacio físico, *covector* tangente en ese punto)”;

y esto se explica como sigue: la expresión de la energía cinética $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^t/2$ muestra que \mathbf{u} es un covector (es decir, es una funcional lineal) que actúa en el vector tangente \mathbf{v} . (En términos abstractos, la masa de la partícula junto con el producto interior usual de \mathbb{R}^3 ,

determinan una *métrica riemanniana*, que nos permite identificar al vector tangente en un punto de \mathbb{R}^3 , \mathbf{v} , con el covector tangente (en ese mismo punto), $\mathbf{u} = m\mathbf{v}$.)

Finalmente, notemos que gracias a la forma simpléctica J , dada una función f h podemos asociarle un *campo vectorial hamiltoniano*, definido por

$$(10) \quad X_f = \nabla f^t J = \sum_i \partial_{p_i} f \partial_{q_i} - \sum_i \partial_{q_i} f \partial_{p_i},$$

y que, para el hamiltoniano h , es el campo cuyas curvas integrales dan la solución de las ecuaciones de Hamilton. Estos campos se pueden definir de manera intrínseca a través de ω_0 , mediante la relación

$$\omega_0(X_f, \cdot) = df.$$

Podemos ahora sintetizar lo anterior de una manera conveniente para nuestros propósitos: En el espacio fase $T^*\mathbb{R}^3$, provisto de su estructura simpléctica estándar ω_0 (o si se prefiere J), un sistema mecánico está determinado por una observable fija h (su hamiltoniano), y la dinámica está dada por la integración del correspondiente campo vectorial hamiltoniano X_h .

(Conviene en este punto advertir al lector que hay distintas convenciones de signos en la literatura, que esencialmente se traducen en considerar $-J$ en vez de J .)

3. APLICACIONES MOMENTO

Las construcciones descritas en la sección anterior tienen una vasta y natural generalización, llamada mecánica hamiltoniana por los físicos y geometría simpléctica por los matemáticos, ampliamente detallada por ejemplo en las referencias [1] a [3]. En particular, esto conduce a la idea de reducción simpléctica, la que puede ser pensada como una forma de integración de problemas dinámicos donde se tiene una simetría explícita. En esta sección y la que sigue describiremos este proceso, centrando nuestra atención, en la medida de lo posible, en el contexto del ejemplo que nos ocupa. Por otro lado, para simplificar, en lo que resta de este trabajo por una variedad entenderemos una hipersuperficie, contenida en algún espacio euclidiano apropiado.

Comencemos entonces por notar que las ecuaciones (7) muestran que el momento angular define una *representación del álgebra de Lie del grupo de rotaciones en \mathbb{R}^3* ; es decir, los paréntesis de Poisson de las componentes del momento angular satisfacen las relaciones que definen el paréntesis de Lie de esta álgebra, denotada por $\mathfrak{so}(3)$. Precisemos qué es lo que esto significa.

Para nuestros propósitos será suficiente con considerar un grupo de Lie como un grupo de matrices; es decir, como un subconjunto de las matrices invertibles, cerrado bajo el producto matricial y bajo la inversión. Una ventaja es que las hipersuperficies que forman muchos de estos grupos (llamados también *grupos de Lie lineales*), frecuentemente están definidas por ecuaciones explícitas en el correspondiente espacio de matrices.

El álgebra de Lie de un tal grupo es simplemente el espacio tangente en la matriz identidad, que necesariamente es uno de los elementos del grupo. El calificativo de álgebra de Lie se debe a que en este espacio se puede definir, de manera natural, un corchete o paréntesis de Lie, y la importancia de éste proviene de que mide —en la aproximación lineal— que tanto se aleja el grupo de ser conmutativo. Así por ejemplo, si un grupo de Lie es abeliano, su álgebra de Lie es también abeliana, es decir, el corchete es idénticamente nulo. Pero además, para grupos de matrices tal corchete admite una descripción elemental, pues sus álgebras de Lie también pueden ser identificadas con espacios de matrices (ahora no necesariamente invertibles) y el corchete es simplemente el conmutador de matrices:

$$[A, B] = AB - BA.$$

En particular, recordando que el grupo de rotaciones se define como el conjunto de matrices de 3×3 dado por:

$$SO(3) = \{A \mid AA^t = I, \det A = 1\},$$

su álgebra de Lie se obtiene al “derivar” estas relaciones, y, en concreto, $\mathfrak{so}(3)$ son las matrices de 3×3 antisimétricas y con traza 0:

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \mid A + A^t = 0, \text{tr} A = 0\}.$$

(En este caso la segunda condición es automática, ya que por la primera, las matrices en $\mathfrak{so}(3)$ tienen ceros en la diagonal principal.)

Una base conveniente para $\mathfrak{so}(3)$ está dada por

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

y es un ejercicio simple verificar que satisfacen

$$[E_1, E_2] = E_3; \quad [E_2, E_3] = E_1; \quad [E_3, E_1] = E_2;$$

exactamente como las componentes del momento angular, como habíamos dicho. Esta elección permite además identificar de inmediato a $\mathfrak{so}(3)$ con otra álgebra de Lie bien conocida, a saber, \mathbb{R}^3 con el paréntesis de Lie dado por el producto cruz.

El que el grupo de rotaciones $SO(3)$ aparezca en el problema de Kepler no es inesperado, ya que la energía potencial, que es la observable que determina al problema, tiene claramente simetría rotacional; o dicho en términos más sofisticados, la acción natural por la izquierda —de multiplicación de matrices por vectores— de $SO(3)$ en el espacio de configuración \mathbb{R}^3 *deja invariante* el problema de Kepler. Pero lo anterior no explica todavía la relación del momento angular con $\mathfrak{so}(3)$, ya que la observable \mathbf{L} involucra a las p_i ; aclararlo será nuestra siguiente tarea.

Recordemos pues que una acción por la izquierda de un grupo G (y el lector puede seguir pensando en grupos de matrices) en un conjunto X es una función $\rho: G \times X \rightarrow X$, denotada $\rho(g, x) = g \cdot x$, que satisface $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$. Así, el producto usual de matrices por vectores columna determina una acción izquierda de $SO(3)$ en \mathbb{R}^3

Con esta definición en mente, la primera observación es que hay un *levantamiento natural* de la acción de $SO(3)$ al espacio fase: En efecto, $SO(3)$ también actúa por rotaciones en los vectores tangentes a \mathbb{R}^3 ; es decir, cada rotación $A \in SO(3)$ define una transformación lineal $A_* : T_q \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{Aq} \mathbb{R}^3$, que es simplemente la derivada en el punto q de la función dada por $q \mapsto Aq$; esto es, $A_* = DA_q$. Y, ya que la función es lineal, A_* corresponde a multiplicar a los vectores tangentes por la misma matriz A .

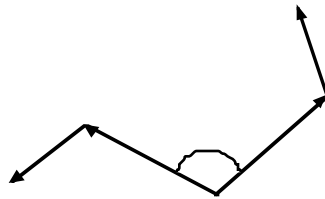


Figura 1. Acción de $SO(3)$ en los vectores tangentes.

Por dualidad obtenemos entonces una acción en los covectores: explícitamente, dado un covector $p \in T_q^* \mathbb{R}^3$, para poder aplicarlo a un vector tangente que hemos “rotado” a $T_{Aq} \mathbb{R}^3$, debemos “regresar” éste al punto q , es decir, debemos pre-componer p con A^{-1} . esto nos lleva a considerar la forma lineal $A^* p = p \circ A^{-1} \in T_q^* \mathbb{R}^3$, y esto define la acción izquierda de $SO(3)$ en $T^* \mathbb{R}^3$ que mencionamos, y esta acción es un ejemplo de lo que se conoce como “pullback”. (Cabe además hacer la observación que las acciones de $SO(3)$ en el espacio de configuración y en los vectores tangentes son claramente acciones izquierdas; pero es la combinación de componer por la derecha junto con tomar el inverso de A , lo que hace que la acción en los covectores también sea por la izquierda.)

Podemos ahora introducir la noción de aplicación momento. Aunque en el contexto del problema de Kepler el resultado final es muy simple de describir, para tratar de mostrar que efectivamente es algo natural, convendrá abrir un nuevo paréntesis en nuestro discurso y considerar el problema en un contexto más amplio.

Para ello, notamos primero que la construcción que acabamos de hacer es en realidad general: dada una acción de un grupo de Lie G en una variedad Q siempre se tiene un levantamiento natural a su haz cotangente T^*Q , donde la acción en la segunda coordenada es por “pullback”. Explícitamente, el levantamiento está dado como sigue: sea $(q, p) \in T^*Q$ y denotemos por ρ a la acción de G en Q ; entonces definimos la acción Ψ de G en T^*Q mediante

$$(10) \quad \Psi_g(q, p) = (\rho_g q, \rho_{g^{-1}}^*(p))$$

donde $\rho_k^* p = p \circ D\rho_k$ y D denota a la derivada. (Para aclarar esta construcción, recalquemos que p es una forma lineal en $T_q Q$ y que si $F: M \rightarrow N$ es una función entre dos variedades, entonces $DF_x: T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$, de modo que la expresión anterior tiene sentido.)

Ahora bien, dada la acción por la izquierda $\rho: G \times Q \rightarrow Q$, para cada punto $x \in Q$ tenemos una función $G \rightarrow Q$. Linealizándola, obtenemos una función $\mathfrak{g} \rightarrow T_x Q$, donde \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de G (recordemos que $\mathfrak{g} = T_e G$, donde e es el elemento identidad). Por dualidad tenemos entonces una función $T_x^* Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ y, al hacer variar x , obtenemos una función $L: T^* Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Esta función es la *aplicación momento* de la acción.

Como se puede ver, las construcciones del párrafo anterior son enteramente naturales, pues no involucran nada más que el simple hecho de tener la acción de G en Q . Pero para dar una expresión más manejable de la aplicación momento, procedemos como sigue:

Primeramente, si un grupo de Lie G actúa en una variedad Q , y como antes denotamos la acción $(g, q) \mapsto g \cdot q$, entonces, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, el *generador infinitesimal* de la acción de G en Q correspondiente a ξ , es el campo vectorial definido por

$$X_\xi(q) = \frac{d}{dt}(\exp t\xi \cdot q)|_{t=0},$$

donde $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es la *aplicación exponencial*. Esta construcción da, en particular, una identificación explícita del álgebra de Lie \mathfrak{g} con una subálgebra del álgebra de campos vectoriales $\mathfrak{X}(Q)$, que puede ser usada para obtener el paréntesis de Lie en \mathfrak{g} . Además, recordemos que en el caso de grupos de matrices \exp se puede definir con la serie usual para la exponencial.

Ahora bien, ya que los elementos de \mathfrak{g}^* son funciones de \mathfrak{g} en \mathbb{R} , una aplicación momento L se puede identificar con una función $\hat{L}: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(T^*Q)$ mediante: $\hat{L}(\xi)(q, p) = L(q, p)(\xi)$, y la aplicación \hat{L} está dada de manera explícita por

$$(11) \quad \hat{L}(\xi)(q, p) = p(X_{\xi_Q}(q)) \quad ; \quad (q, p) \in T^*Q, \quad \xi \in \mathfrak{g},$$

donde X_{ξ_Q} es el generador infinitesimal de la acción de G en la base Q .

Las aplicaciones momento se pueden considerar en un contexto aún más general, pero aquí nos contentaremos con señalar que su importancia reside esencialmente en lo siguiente: Recordando que para toda variedad Q , T^*Q es una *variedad simpléctica* —es decir, una variedad con una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada—, como hemos visto, dada una acción de un grupo G en la variedad Q , en T^*Q existen dos tipos especiales de campos vectoriales: los campos hamiltonianos (que están relacionados con la dinámica) y los generadores infinitesimales de la acción (que están relacionados con la simetría asociada al grupo que actúa): Una aplicación momento, L , es una aplicación que —a través de \hat{L} — permite ver a los generadores infinitesimales de la acción como una subálgebra de Lie de los campos hamiltonianos.

Cerremos aquí el paréntesis, regresando a la situación del problema de Kepler. Como dijimos, $\mathfrak{so}(3)$ se puede identificar con \mathbb{R}^3 , con el paréntesis de Lie correspondiendo al producto cruz. La identificación explícita, que usaremos sistemáticamente en lo que sigue, es:

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} = \xi.$$

Más aún, el producto interior usual de \mathbb{R}^3 nos permite hacer una identificación natural de $\mathfrak{so}(3)$ con $\mathfrak{so}^*(3)$ (en el contexto más general de un grupo semisimple arbitrario se puede usar la *forma de Killing*). Lo importante es que con estas identificaciones se tiene la expresión

$$\frac{d}{dt}(\text{expt}\xi \cdot q)|_{t=0} = \xi \times q,$$

para la acción del generador infinitesimal dado por $\xi \in \mathfrak{so}(3)$, en el punto $q \in \mathbb{R}^3$. De este modo, bajo las identificaciones que hemos hecho, la aplicación momento está dada por el triple producto escalar

$$\hat{L}(\xi)(q, p) = p \cdot (\xi \times q) = (q \times p) \cdot \xi;$$

o escrito de otro modo,

$$(12) \quad L(q, p) = q \times p,$$

¡que es la definición usual del momento angular! (El lector puede ver en [6] todos los detalles de estos cálculos, aunque cabe tal vez notar aquí que tenemos de hecho la identificación $T^*\mathbb{R}^3 = \mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{so}(3)$.)

4. REDUCCIÓN SIMPLÉCTICA

La discusión de la sección anterior muestra que $SO(3)$ actúa en el dominio de la aplicación momento como grupo de simetrías del problema. En física clásica, las simetrías se traducen en conservación de cantidades y la presencia de cantidades conservadas se interpreta como una disminución en el número de grados de libertad del sistema, es decir, como una disminución en la dimensión del espacio fase; la reducción simpléctica es una manera de hacer precisa esta idea. Para describirla, necesitamos ahora recordar otro hecho fundamental, que es la *acción adjunta* de un grupo G en su álgebra de Lie \mathfrak{g} y la correspondiente *acción coadjunta* en \mathfrak{g}^* .

Básicamente, la acción adjunta es otra forma de describir que tan lejos está un grupo de ser conmutativo. Para grupos de Lie lineales, como es el caso de $\mathfrak{so}(3)$, la situación es muy sencilla de describir, ya que la acción adjunta está dada por conjugación: si $A \in G$ y $\xi \in \mathfrak{g}$ entonces

$$\text{Ad}_A \xi = A \xi A^{-1};$$

y la linealización de esta ecuación es el corchete en el álgebra de Lie del grupo. De nuevo por dualidad —y con un argumento similar al usado para definir el levantamiento de la acción al haz cotangente—, G actúa también en \mathfrak{g}^* , con la llamada *acción coadjunta*, Ad^* .

En el caso de $SO(3)$, dado que $\xi^t = -\xi$ y $A^t = A^{-1}$, un cálculo sencillo muestra que, bajo la identificación anterior y salvo por un signo, la acción adjunta se convierte en rotaciones en \mathbb{R}^3 , de manera explícita:

$$(13) \quad \text{Ad}_A \xi = A \xi A^{-1} = A \xi A^t \mapsto -A \hat{\xi}.$$

Identificando ahora $\mathfrak{so}^*(3)$ con \mathbb{R}^3 con el producto cruz, la acción coadjunta corresponde a las rotaciones usuales en \mathbb{R}^3 , *sin el signo menos* (ya que al dualizar debemos considerar A^{-1} en vez de A).

En vista de lo anterior, cuando un grupo de Lie actúa en una variedad, actúa tanto en el dominio como en el codominio de la correspondiente aplicación momento inducida en el haz cotangente; el elemento clave para la reducción es la *equivariancia* de la aplicación momento bajo estas acciones. Que L sea equivariante significa que se pueden intercambiar el orden en que operan las acciones y la aplicación momento; en términos precisos

$$(14) \quad L(g \cdot x) = \text{Ad}_{g^{-1}}^* L(x).$$

Esto tiene la siguiente consecuencia: si fijamos un valor dado $\mu \in \mathfrak{g}^*$, su *subgrupo de isotropía* bajo la acción coadjunta, $G_\mu = \{g \in G; \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mu = \mu\}$, actúa también en el espacio de nivel de ese valor, $M_\mu = L^{-1}(\mu)$; es decir, si $x \in M_\mu$, también $g \cdot x \in M_\mu$.

Ahora, como sabemos, siempre que un grupo actúa en un conjunto la acción divide al conjunto en clases de equivalencia, llamadas *órbitas*, definidas por la condición

$$x \sim y \quad \text{si, y sólo si, existe } g \in G, \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Al conjunto de clases de equivalencia se le llama *espacio cociente* y, si el grupo es de Lie y el conjunto una variedad, bajo ciertas condiciones el espacio cociente también tiene estructura de variedad. Estas condiciones son algo técnicas, por lo que no daremos una discusión de ello aquí (véase por ejemplo [1]); afortunadamente, en el caso que nos interesa será claro que el cociente es variedad.

Regresando a la situación de las aplicaciones momento, el *espacio fase reducido* es el espacio cociente del espacio de nivel de la aplicación momento, M_μ , bajo la acción del subgrupo G_μ , cuando este cociente existe como variedad. Más aún, se puede probar que la acción es simpléctica; para nosotros esto significa esencialmente que, además, la variedad cociente hereda una estructura simpléctica y, si tenemos un hamiltoniano invariante por la acción de G , entonces éste inducirá un hamiltoniano en el cociente. De nuevo, la descripción precisa de estas construcciones nos exigiría una considerable desviación en nuestro camino, así que en vez de ello, remitimos al lector a [1] para una exposición completa, limitándonos aquí a ilustrar con detalle el proceso de reducción en el caso particular de la aplicación del momento angular.

Pero por lo pronto, habiendo desarrollado este lenguaje, podemos ahora abrir un nuevo paréntesis para explicar un poco mejor el significado del teorema de Liouville sobre sistemas completamente integrables:

En efecto; en vista de las propiedades del paréntesis de Poisson, si ciertas cantidades están en involución, entonces determinan una representación de un álgebra de Lie abeliana; y en el caso de un sistema completamente integrable, su dimensión es la mitad de la del espacio fase. Esto se traduce en que en el espacio fase actúa, de manera simpléctica, un grupo de Lie abeliano, que tiene por álgebra de Lie a esta álgebra abeliana (de hecho, aunque

por la naturaleza de estas notas tampoco podemos extendernos mucho en este sentido, podemos señalar que la acción puede reconstruirse como un problema de integrabilidad en el sentido de Frobenius).

En el lenguaje de esta sección, la elección de las cantidades conservadas en involución determina una aplicación momento, con valores en un álgebra de Lie abeliana. En particular, si fijamos ciertos valores de las cantidades conservadas (y suponiendo que el valor así obtenido sea regular), el espacio de nivel resulta ser una variedad de la misma dimensión que el grupo; mediante la acción, obtenemos entonces coordenadas locales para este conjunto. Además, ya que el grupo es abeliano, coincide con el grupo de isotropía de cualquier valor de la aplicación momento; si hacemos la reducción simpléctica, vemos que el espacio reducido tiene dimensión cero, es decir, consiste de puntos aislados, que representan las órbitas asociadas a las constantes de integración que habíamos fijado.

Por otro lado, en el caso de un sistema completamente integrable, podemos construir de esta forma —al menos en principio— un conjunto explícito de coordenadas asociado a una elección de constantes de movimiento, de modo tal que la dinámica tiene una descripción muy simple: En efecto, los valores de las cantidades conservadas, junto con las coordenadas que acabamos de mencionar para el conjunto de nivel, proporcionan un conjunto completo de coordenadas locales, donde la dinámica consiste simplemente de traslaciones por elementos del grupo. Las coordenadas del conjunto de nivel se llaman *coordenadas de ángulo* (ya que si el conjunto de nivel es compacto, entonces es topológicamente un *toro*, *i.e.*, un producto de círculos), y a las cantidades en involución se les conoce como *coordenadas de acción* (ya que en general tienen unidades de acción). Ésta es la esencia del teorema de Liouville.

El lector puede ahora olvidar las generalidades pues, como comentamos arriba, en el caso del problema de Kepler todos los ingredientes para la reducción son sencillos de describir:

Así, no es difícil probar que $\mu \in \mathfrak{so}(3)^*$ es un valor regular de L si y sólo si $\mu \neq 0$. La discusión anterior, sobre la acción coadjunta de $SO(3)$, muestra que su subgrupo de isotropía G_μ es el subgrupo de las rotaciones que fijan este vector, que por lo tanto es (topológicamente) un círculo S^1 .

Usando la descripción explícita $L^{-1}(\mu) = \{ (q, p) \mid q \times p = \mu \}$, tampoco es difícil ver que $L^{-1}(\mu)$ es $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$: en efecto, dada la ecuación $q \times p = \mu$, podemos fijar p y resolver para q . Esta ecuación no tiene solución sólo cuando el valor que fijamos es paralelo a μ , así que el eje que se excluye es el determinado por el vector μ .

Es claro entonces que las órbitas en $L^{-1}(\mu)$ del subgrupo de isotropía son los círculos ortogonales al eje que hemos quitado en \mathbb{R}^3 , por lo que M_μ resulta ser topológicamente un plano; del teorema de Darboux se sigue entonces la existencia de una carta para M_μ , donde la forma simpléctica en el espacio reducido es la usual.

5. EL SEMIPLANO DE POINCARÉ

Lo descrito al final de la sección anterior es el tratamiento que usualmente se encuentra

en los textos, acerca de la reducción del espacio fase del sistema dinámico asociado al problema del momento angular. Sin embargo, como veremos a continuación, es posible obtener una descripción del espacio reducido, poco conocida hasta donde sabemos, pero ciertamente más interesante.

Para ello, fijemos un valor regular del momento angular, digamos $\mu = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$; vemos entonces que

$$(15) \quad L^{-1}(\mathbf{k}) = \{ (q, p) \mid q_3 = p_3 = 0 \quad \text{y} \quad q_1 p_2 - p_2 q_1 = 1 \},$$

de modo que tenemos una identificación natural $L^{-1}(\mathbf{k}) \cong SL(2, \mathbb{R})$. (Cabe señalar que no se pierde generalidad en suponer $\mu = \mathbf{k}$, ya que es claro que multiplicar μ por un escalar positivo no altera la topología del conjunto de nivel; además, cualquier valor regular está en la órbita de la acción coadjunta de un vector paralelo a \mathbf{k} . Intuitivamente, esto refleja el hecho de que la simetría esférica del problema nos permite elegir qué dirección declaramos como la vertical y que unidades de medida queremos considerar.)

La razón por la que queremos identificar a $L^{-1}(\mathbf{k})$ con $SL(2, \mathbb{R})$ es que todo grupo de Lie semisimple G (como $SL(2, \mathbb{R})$) tiene una descomposición estándar, llamada *descomposición de Iwasawa* o *descomposición KAN*, lo que significa que cada $C \in G$ se puede escribir como $C = KAN$, donde K es una matriz de un subgrupo compacto maximal, A pertenece a un subgrupo abeliano y N a uno nilpotente.

Aunque la descomposición de Iwasawa no es única, en el caso particular de $SL(2, \mathbb{R})$ (cf. [4]) en realidad sólo hay una manera clara de hacerla. En concreto, esto significa (como el lector puede constatar haciendo los cálculos explícitos) que las matrices en $SL(2, \mathbb{R})$ se pueden escribir en la forma KB , donde K es ahora una rotación

$$K = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y $B = AN$ es una matriz de la siguiente forma

$$(16) \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & zy^{-1} \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R}; y > 0,$$

lo que en particular corrobora que la estructura topológica de $M_\mu = SL(2, \mathbb{R})$ es la mencionada anteriormente. Precizando un poco más, si pensamos a $SL(2, \mathbb{R})$ como transformaciones que actúan en el plano, el subgrupo abeliano consiste de matrices diagonales invertibles; los elementos de la diagonal deben ser inversos uno del otro, para conservar la condición de que el determinante de la matriz sea igual a uno. Por su parte, el subgrupo nilpotente son las traslaciones en uno de los ejes; con la elección hecha aquí de poner z en la esquina superior derecha, este eje sería el de las abscisas. Finalmente el subgrupo compacto maximal se puede identificar con el subgrupo de rotaciones en el plano, que a su vez se puede identificar con el grupo de rotaciones alrededor del eje q_3 ; es decir, con el subgrupo de isotropía de \mathbf{k} , $G_{\mathbf{k}}$.

Pero ahora, en vista de lo anterior, es claro que el espacio cociente $M_{\mathbf{k}}$ puede identificarse con el conjunto de las matrices de la forma (16). Además, es evidente que estas matrices pueden identificarse con un semiplano $\mathcal{H} = \{ (s, t) \mid t > 0 \}$; por ejemplo, mediante la aplicación $B \mapsto (z, y)$. Así, en este punto ya no es sorpresa que el semiplano de Poincaré intervenga en nuestra descripción del problema, pues es bien conocido que $SL(2, \mathbb{R})$ actúa en él mediante transformaciones lineales fraccionales.

Sin embargo, por razones que detallaremos en seguida, el sistema de coordenadas — igualmente sugerido por la descomposición de Iwasawa— dado por $(x = z/y, y)$ es más conveniente y en lo que sigue utilizaremos la identificación de $M_{\mathbf{k}}$ con \mathcal{H} definida por

$$(17) \quad \Phi^{-1}(B) = (x, y).$$

Identificando a $L^{-1}(\mathbf{k})$ con $SL(2, \mathbb{R})$ y a $M_{\mathbf{k}}$ con las matrices como en (16), vemos que Φ^{-1} determina a la proyección $\pi_{\mathbf{k}}: L^{-1}(\mathbf{k}) \rightarrow M_{\mathbf{k}}$, ya que dada $C \in SL(2, \mathbb{R})$ determina la correspondiente matriz B .

El porqué de esta notación se aclarará en breve; por el momento digamos que una razón por la que ésta es una buena elección es que las variables x y y tienen un significado físico sencillo: cálculos directos muestran que

$$(18) \quad y = \frac{1}{(p_1^2 + p_2^2)^{1/2}}; \quad x = \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{(p_1^2 + p_2^2)^{1/2}},$$

de modo que y es simplemente el recíproco de la norma del momento lineal, en tanto que x es la proyección de la posición en la dirección del momento. Y quizá aún más interesante es que $x^2 + y^2 = q_1^2 + q_2^2$, de modo que esta identificación preserva las distancias en el plano donde ocurre el movimiento.

Sin embargo, desde nuestro punto de vista, la razón fundamental es que la inversa de Φ^{-1} determina una *sección* de la proyección natural $\pi_{\mathbf{k}}$: explícitamente, la función $\Phi: M_{\mathbf{k}} \rightarrow L^{-1}(\mathbf{k})$, dada por

$$(19) \quad \Phi(x, y) = (y, x, 0, 0, y^{-1}, 0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix},$$

satisface la relación $\pi_{\mathbf{k}} \circ \Phi = \text{id}_{M_{\mathbf{k}}}$. Y el punto importante es que ella nos permitirá describir explícitamente la relación entre la forma simpléctica $T^*\mathbb{R}^3$ y la forma simpléctica en $M_{\mathbf{k}}$.

En efecto, ya que $M_{\mathbf{k}}$ es un plano de dimensión 2, cualquier 2-forma (en particular la forma simpléctica reducida $\omega_{\mathbf{k}}$), se puede escribir como

$$(20) \quad \alpha = f(x, y) dx \wedge dy,$$

de modo que lo que necesitamos es determinar el coeficiente f . La relación que define a $\omega_{\mathbf{k}}$ se puede escribir como $\pi_{\mathbf{k}}^* \omega_{\mathbf{k}} = \omega_0|_{L^{-1}(\mathbf{k})}$; pero podemos ahora utilizar a Φ para hacer el pullback de ω_0 a $M_{\mathbf{k}}$, y leer esta ecuación como una ecuación en $M_{\mathbf{k}}$:

$$(21) \quad \Phi^* \omega_0|_{L^{-1}(\mathbf{k})} = \omega_{\mathbf{k}}.$$

Para calcular la función $f(x, y)$ necesitamos entonces evaluar las dos formas simplécticas en los correspondientes campos vectoriales, y para ello, primeramente calculamos la derivada de Φ en un punto (x, y) ;

$$D\Phi|_{(x,y)}: T_{(x,y)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow T_{(q,p)}L^{-1}(\mathbf{k}),$$

obteniendo

$$(22) \quad D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -y^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, si

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

es un vector tangente en (x, y) , de (22) obtenemos que

$$(23) \quad \begin{aligned} D\Phi(x, y)(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -y^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ 0 \\ 0 \\ -y^{-2}A_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien, ya que un campo vectorial en $T^*\mathbb{R}^3$ se escribe como

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial q_3} + X_4 \frac{\partial}{\partial p_1} + X_5 \frac{\partial}{\partial p_2} + X_6 \frac{\partial}{\partial p_3} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix},$$

si X y Y son dos campos se tiene

$$(24) \quad \begin{aligned} \omega_0(X, Y) &= \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dp_i(X, Y) \\ &= X_1 Y_4 - Y_1 X_4 + X_2 Y_5 - Y_2 X_5 + X_3 Y_6 - Y_3 X_6. \end{aligned}$$

Así, si X', Y' son campos vectoriales en $M_{\mathbf{k}}$, usando (22) junto con la expresión anterior obtenemos

$$(25) \quad \Phi^* \omega_0(X', Y') = -\frac{X'_1 Y'_2 - X'_2 Y'_1}{y^{-2}}$$

Por otro lado,

$$(26) \quad \begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}(X', Y') &= f(x, y)(dx \wedge dy) \left(X'_1 \frac{\partial}{\partial x} + X'_2 \frac{\partial}{\partial y}, Y'_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y'_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= f(x, y)(X'_1 Y'_2 - X'_2 Y'_1); \end{aligned}$$

comparando con (29) obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega_0|_{L^{-1}(\mathbf{k})}(X, Y) &= y^{-2}(X'_1 Y'_2 - X'_2 Y'_1) \\ &= f(x, y)(X'_1 Y'_2 - X'_2 Y'_1) = \omega_{\mathbf{k}}(X', Y') \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que $f(x, y) = -y^{-2}$. De esta manera, obtenemos finalmente que

$$(27) \quad \omega_{\mathbf{k}} = -\frac{dx \wedge dy}{y^2}.$$

Ahora, como objeto geométrico, el semiplano de Poincaré es más que el semiplano superior: tiene una métrica riemanniana hiperbólica g , de curvatura constante -1 , dada por

$$(28) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

y una estructura casi compleja estándar, dada por

$$(29) \quad J(X_1 \partial_x + X_2 \partial_y) = -X_2 \partial_x + X_1 \partial_y;$$

J es compatible con g , ya que, en cada espacio tangente, es una rotación por un ángulo de $\pi/2$ en sentido positivo y, por lo tanto, una isometría hiperbólica. En una variedad riemanniana arbitraria estas dos estructuras en conjunto determinan, de manera natural, una 2-forma, llamada *forma de Kähler* (cf. [7]), dada por

$$(30) \quad \omega(X, Y) = -g(X, JY).$$

Reinterpretada en este lenguaje, la ecuación (27) muestra que la forma simpléctica reducida que hemos determinado no es sino la forma de Kähler, asociada a la métrica hiperbólica y a la estructura compleja estándares del semiplano de Poincaré. Así, bajo nuestras identificaciones, $M_{\mathbf{k}}$ es *precisamente* el semiplano de Poincaré.

6. REDUCCIÓN DEL PROBLEMA DE KEPLER

Regresemos finalmente al problema de Kepler.

En las coordenadas originales (q, p) , el hamiltoniano tiene la expresión

$$(31) \quad h(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}};$$

luego, para el hamiltoniano reducido y utilizando las coordenadas (x, y) que hemos introducido en el espacio reducido, esto se convierte en

$$(32) \quad h(x, y) = \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Como el sistema reducido es de dimensión 2, las trayectorias ahí quedan completamente determinadas por las curvas de nivel del hamiltoniano reducido.

Para relacionar esto con los invariantes clásicos del problema de Kepler, descritos en la sección 1 (y regresando a la notación de esa sección), recordemos que la excentricidad de la cónica que corresponde a la órbita del planeta está dada por $e = b/l^2$ (recuérdese que hemos supuesto $\frac{C}{l^2} = 1$). En el caso bajo consideración $\mathbf{l} = \mathbf{k}$, de modo que en particular $l = 1$, y se tiene entonces

$$\mathbf{b} = (p_2, -p_1, 0) - (q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}(q_1, q_2, 0).$$

Un cálculo directo da

$$b^2 = \frac{-2(p_2 q_1 - q_2 p_1)}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}} + p_1^2 + p_2^2 + 1 = \frac{-2}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}} + p_1^2 + p_2^2 + 1.$$

En otras palabras, comparando con (32) tenemos la siguiente relación entre la excentricidad y la energía mecánica total:

$$(33) \quad E = \frac{e^2 - 1}{2}$$

La figura 2 nos muestra las curvas de nivel del hamiltoniano reducido; éstas corresponden precisamente a los niveles de energía o, equivalentemente, a la norma (elevada al cuadrado) del vector de Runge-Lenz, *en el espacio reducido*. Recuérdese asimismo que, en las unidades elegidas, la distancia de los puntos en este plano es la misma que en el espacio físico, de modo que el origen representa también la posición del Sol.

Nótese que, como se sigue inmediatamente de la expresión del hamiltoniano reducido, la figura es simétrica con respecto del eje y .

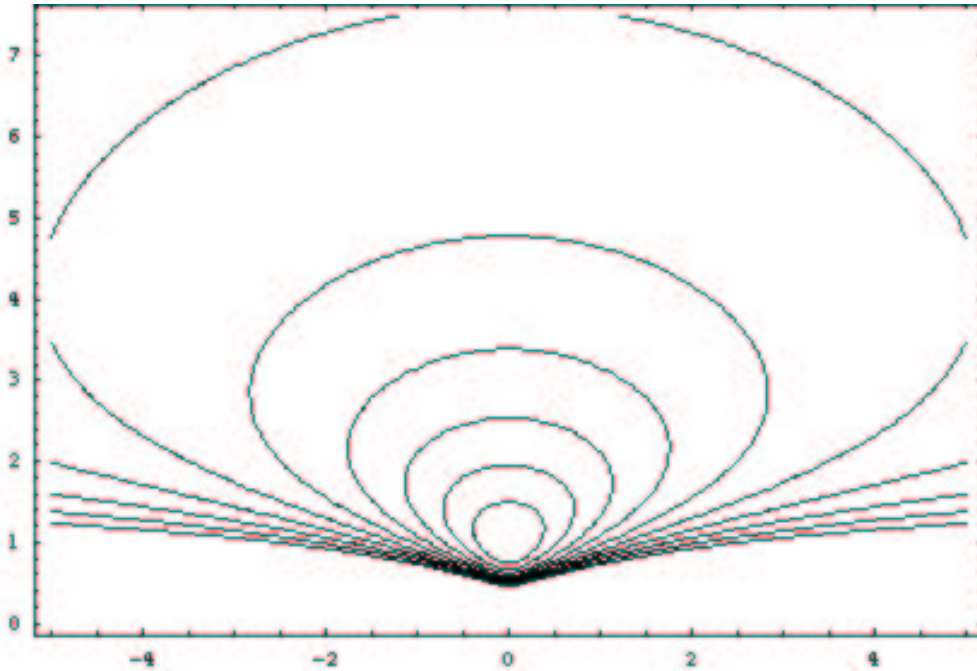


Figura 2. Curvas de nivel del hamiltoniano reducido.

Vemos así que hay una única órbita circular en el problema (recuérdese también que hemos fijado el momento angular), que corresponde al punto $(0, 1)$ y al mínimo de la energía, la que en las unidades que hemos escogido es $-1/2$. Sin embargo, las órbitas parabólicas ($e = 1$) corresponden a toda una curva no cerrada, que en la figura, es la que pasa cerca del punto $(5, 2)$; éstas son las órbitas que corresponden a energía cero. Las curvas abiertas que quedan por debajo de ella corresponden a las trayectorias hiperbólicas, que son las que tienen excentricidad > 1 o, equivalentemente, energía > 0 , en tanto que las curvas cerradas que están por arriba corresponden a las trayectorias elípticas, cuya excentricidad está en el intervalo $(0, 1)$ o, equivalentemente, cuya energía está en $(-1/2, 0)$.

Como dato anecdótico, cabe tal vez mencionar que las órbitas de los planetas de nuestro Sistema Solar, excepto Plutón —el que en la opinión de muchos astrónomos, después de todo quizá no deba considerarse como un planeta—, son todas bastante cercanas a una órbita circular, o sea que en términos de nuestro análisis están cerca de minimizar la correspondiente “energía reducida”; esto es una explicación de porqué durante tanto tiempo se pensó que las órbitas eran circulares (el propio Kepler así lo hizo al principio). Pero por supuesto, esto es sólo una aproximación y simplificación, ya que en el problema real, estrictamente hablando no se tienen ni un problema de dos cuerpos ni simetría rotacional.

A manera de conclusión, señalemos que hay muchos otros aspectos, que no hemos tocado aquí, que se pueden plantear en relación a este análisis; por ejemplo, ¿qué conclusiones, para el problema de Kepler, se podrían extraer de la gran variedad de construcciones que

existen en la geometría hiperbólica, como las geodésicas o los horociclos? La respuesta a este tipo de preguntas no la sabemos, pero esto parece indicar que nuestro estudio es como la punta de un iceberg y aún queda mucho por explorar dentro de este enfoque del problema de Kepler.

Agradecimientos. Este trabajo es una secuela bastante directa de otros anteriores: en parte de las notas de seminario [5], pero sobre todo de la tesis de licenciatura [6], donde una gran parte de los cálculos que aquí sólo se mencionan ahí se encuentran con todo detalle. C. Palacios desea hacer patente su agradecimiento al CIMAT, donde fue realizada esa tesis, por su apoyo.

Por su parte, F. Ongay desea agradecer la hospitalidad de la Universidad de California en San Diego, donde fue escrita una parte de este manuscrito.

La figura 2 fue realizada con la ayuda del programa *Mathematica*.

REFERENCIAS

1. Abraham, R. y J.E. Marsden., *Foundations of Mechanics, 2nd Edition*, Benjamin/Cummings, 1978.
2. Arnold, V., *Mathematical Aspects of Classical Mechanics*, Springer Verlag, 1978.
3. Berndt, R., *An Introduction to Symplectic Geometry*, vol. 26, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 2001.
4. Lang, S., *SL_2R* , Springer Verlag, 1989.
5. Ongay, F., *El teorema de reducción simpléctica de Marsden y Weinstein*, Comunicaciones Técnicas, CIMAT (1987).
6. Palacios, C., *Reducción Simpléctica del Momento Angular*, Tesis Profesional, Universidad de las Américas, Puebla, 2000.
7. Tian, G., *Canonical Metrics in Kähler Geometry*, Birkhäuser, 2000.