



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Subvariedades hélice,
frontera de sombra
y totalmente geodésicas**

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Gabriel Ruiz Hernández

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Luis Hernández Lamóneda

Noviembre 27 de 2006

Guanajuato, Gto. México

Dedico este trabajo a

mi madre, la Sra. Catalina Hernández González,

*y a los que hacen y han hecho posible el desarrollo de las Matemáticas en
México.*

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Luis Hernández Lamonedá, por haber aceptado dirigir este trabajo, por su apertura y la libertad que me brindó para llevarlo a cabo, por guiarme en las técnicas usadas en esta investigación y por su visión crítica que me ayudó a pulirlo.

Al Dr. Oscar Adolfo Sánchez Valenzuela, por sugerirme considerar un caso de estudio en superficies Riemannianas, lo que me ayudó a entender más acerca de la existencia de un campo paralelo en una subvariedad. Al Dr. Jimmy Petean Humen por algunas observaciones técnicas relevantes.

A los sinodales Dr. Javier Bracho Carpizo, Dr. Luis Montejano Peimbert, Dr. Jimmy Petean Humen, Dr. Oscar Adolfo Sánchez Valenzuela y al Dr. Efrén Morales Amaya, por haber aceptado revisar esta tesis.

A todos los que han compartido conmigo su conocimiento en Geometría Diferencial y en Matemáticas.

Al CIMAT y a la UNAM por ser las instituciones donde tuve el privilegio de acercarme a la ciencia Matemática, en un ambiente ideal.

Agradezco a Conacyt por la beca de doctorado que me otorgó y al Concyteg por el apoyo para la redacción de la tesis.

Subvariedades hélice, frontera de sombra y
totalmente geodésicas

Gabriel Ruiz Hernández

Introducción

El geómetra alemán W. Blaschke demostró que si la superficie frontera de un cuerpo convexo es regular, analítica y de curvatura Gaussiana nunca cero, y además la región de contacto de tal superficie con cada cilindro circunscrito es una curva plana, entonces el cuerpo es un elipsoide. De hecho la conclusión es la misma para un cuerpo convexo cualquiera tal que, para cada cilindro circunscrito, la región de contacto de este con el cuerpo contiene una sección plana de la frontera del cuerpo, véase [5]. En Geometría Convexa este último resultado se ha extendido, ver [22].

La región de contacto, entre la superficie y el cilindro, mencionada arriba es conocida como *frontera de sombra* (shadow boundary en inglés). Sin embargo, este concepto tiene sentido en superficies suaves en \mathbb{R}^3 . En este caso se tiene una definición equivalente: Dada una dirección en \mathbb{R}^3 , la frontera de sombra (f.s.) en esa dirección, consiste de los puntos sobre la superficie tales que la recta por ese punto y con tal dirección, es tangente a la superficie en dicho punto. De esta forma, cada dirección determina una f.s. de la superficie, la cual es un subconjunto cerrado de la misma, inclusive puede ser el total o el vacío. Para el caso de superficies suaves, esta definición se puede encontrar en Busemann ([5]), Nomizu, Sasaki ([23]) y en unas notas del geómetra diferencial-integral Ralph Howard (ver [14]). Es claro, que se puede dar una definición análoga para hipersuperficies suaves en \mathbb{R}^n . En adelante, se entenderá que las subvariedades que mencionemos son suaves.

En este trabajo se da una definición equivalente la cual hace más explícito el hecho de que el concepto f.s. es topológico-diferencial: $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $v \in \mathbb{R}^{n+k} - \{0\}$,

$$S\partial(M, v) = \{x \in M \mid v \in T_x M\}.$$

Tales frontera de sombra también tienen interés en Óptica, (véase por ejemplo [17]) y en Visualización computacional (ver [20]) debido a que se puede reconstruir un objeto tridimensional si se conocen muchas de sus f.s.

Una motivación inicial de este trabajo fue probar un teorema análogo al de Blaschke para hipersuperficies compactas M de un espacio Euclidiano, pero con la condición geométrico diferencial de que toda f.s. de M sea una subvariedad totalmente geodésica de M . La conclusión es que M es isométrica

a una esfera redonda. Esto se prueba en el teorema 2.3.1.

El capítulo I de este trabajo es material estandar de Geometría Riemanniana. El trabajo original de esta tesis esta distribuido en el capítulo dos y tres. En el dos se trabaja con subvariedades de un espacio Euclidiano, y en el tres, los datos son los siguientes: un espacio ambiente el cual es una variedad Riemanniana (\bar{M}, g) , una subvariedad Riemanniana M la cual admite un campo vectorial $X : M \rightarrow T\bar{M}$ paralelo con respecto a M (concepto que introducimos en la definición 3.1.2). En el cap. tres se generalizan y/o mejoran algunos de los resultados del cap. dos. Hay resultados que sólo estan probados en \mathbb{R}^n . También hay resultados en el tres que no tienen su contraparte en el dos.

En general, dada una subvariedad Riemanniana M , no siempre existe un campo vectorial paralelo con respecto a la misma. No he encontrado en la literatura un estudio de este concepto, salvo el caso clásico cuando $\dim M = 1$, donde un campo paralelo con respecto a una curva se obtiene por transporte paralelo de un vector inicial. Sin embargo, es natural considerar tal tipo de campos, que quizá no es necesario definirlos de manera explícita. Una noción cercana es la usual de campo paralelo sobre el ambiente $Y : \bar{M} \rightarrow T\bar{M}$ (global), tales campos se conocen muy bien (ver el teorema 3.3.1). Pero cuando el campo no es global, parece ser un problema abierto dar las condiciones para la existencia de un campo paralelo con respecto a una subvariedad. Un ejercicio muy ilustrativo es, ver cual es la solución a este problema en el caso de una curva encajada en una superficie Riemanniana. Esta situación esta descrita en la observación 3.1.2. También damos una respuesta para la existencia, del caso general, de un campo paralelo con respecto a una subvariedad en el teorema 3.1.1.

Cuando restringimos un campo global paralelo a una subvariedad $Y|_M : M \rightarrow T\bar{M}$ obtenemos uno que es paralelo c.r. a M . En tal situación, es posible extender el concepto *frontera de sombra* de M con respecto a X :

$$S\partial(M, X) = \{x \in M \mid X(x) \in T_x M\}.$$

Debido a que la frontera de sombra de una subvariedad $M \subset \bar{M}$ sólo es un conjunto cerrado de la misma y no necesariamente suave, es natural buscar condiciones para que lo sea. Esto se lleva a cabo en el teorema 2.2.3, donde se prueba que es suficiente que la curvatura seccional de una hip. Euclidiana

nunca se anule en los puntos sobre la frontera de sombra. Este resultado está generalizado en el cap. 3 (teorema 3.3.2), donde la codimensión de M en \overline{M} puede ser mayor a uno, y la condición es sobre la segunda forma fundamental de $M \subset \overline{M}$. En tal contexto la frontera de sombra es suave y de codimensión igual a la de M en el ambiente. En sus notas Howard prueba el caso cuando $\dim M = 2$ y $\overline{M} = \mathbb{R}^3$. Este caso también aparece en un artículo del 2002 de Ghomi (ver [10]), donde resuelve el “shadow problem” propuesto por Wentse, y en otras notas de Howard (ver [13]) donde explica la solución de Ghomi.

Otro resultado del estilo de Blaschke, es el teorema 2.3.3 en un ambiente Euclidiano y una generalización (teorema 3.4.3), donde el ambiente, \overline{M} , es un espacio de curvatura seccional constante, completo, conexo, simplemente conexo: Sea $M \subset \overline{M}$ es una hipersuperficie compacta y sea $x \in \overline{M} \setminus M$. Consideremos la familia de todas las hipersuperficies por x , totalmente geodésicas en \overline{M} y tal que intersecten a M transversalmente. Si la intersección de cada hipersuperficie (en dicha familia) con M es una subvariedad totalmente geodésica de M , entonces M es una esfera redonda. En el caso del teorema 2.3.3 en que \overline{M} es un espacio Euclidiano, se puede omitir que M sea compacta y concluir que M es una esfera redonda o un hiperplano. Takeuchi (ver [26]) prueba esto con una hipótesis menos restrictiva para el caso $\overline{M} = \mathbb{R}^3$ y $\dim M = 2$.

Una vez que conocemos cuándo una frontera de sombra de M puede ser subvariedad, un problema muy general es saber que tipo de propiedades puede tener. En particular, es interesante estudiar cuándo es una subvariedad totalmente geodésica de M . Por ejemplo probamos el siguiente resultado. Si N no es una subvariedad totalmente geodésica de \overline{M} y X es ortogonal a N , entonces $N \subset S\partial(M, X)$ si y sólo si N es totalmente geodésica en M . Un resultado cercano a este, en Geometría Diferencial Afín, fue probado por A. Schwenk en [25].

Para enunciar otro resultado cercano a este último, es necesario introducir el concepto de subvariedad hélice (def. 3.1.4): N es una hélice de \overline{M} con respecto al campo $X : N \rightarrow T\overline{M}$, si el ángulo entre $T_x M$ y $X(x)$ es constante (no depende de $x \in N$). El caso cuando $\dim N = 1$ es clásico (ver [1]) e incluso se ha generalizado (ver [9]). Si la $\dim N > 1$, no hay trabajos en la literatura donde se estudie este tipo de subvariedades.

Ahora sí, enunciemos el resultado anunciado arriba. Si $N \subset S\partial(M, X)$ y N

es stg de M , entonces N es una hélice de \overline{M} con respecto a X .

Hay que resaltar las tres condiciones que aparecen en los dos últimos teoremas:

$N \subset S\partial(M, X)$, N es una subvariedad totalmente geodésica de M y N es una hélice de \overline{M} con respecto a X . En el caso en que $\dim\overline{M} = 3$, $\dim M = 2$ y $\dim N = 1$, estas forman un “triángulo amoroso” ya que cualesquiera dos implican la tercera. Este caso particular es muy posible que sea conocido.

Por cierto, estudiar los campos paralelos con respecto a una subvariedad Riemanniana es interesante. Con esto en mente, en el cap. tres probamos que si existen en \overline{M} , $\text{cod}M$ -campos vectoriales paralelos c.r. a M los cuales puntualmente son base de las fibras del haz normal, entonces M es una subvariedad totalmente geodésica de \overline{M} . De igual forma, el estudio de las subvariedades hélice N de \overline{M} c.r. a un campo X tienen propiedades de interés. Por ejemplo, si $\text{cod}N = 1$, N es compacta y orientable entonces $\chi(N) = 0$ ó X es ortogonal a N .

Otra propiedad de las subvariedades Riemannianas que ha sido ampliamente estudiada es la de ser mínima. De hecho, toda subvariedad totalmente geodésica es mínima. En la parte final de este trabajo, analizamos bajo que condiciones una subvariedad $N \subset S\partial(M, X)$ es mínima en M , donde M es codimensión uno en el ambiente. Tal búsqueda nos llevo al siguiente teorema. Si X es transversal a N , entonces el vector de curvatura media de $N \subset \overline{M}$ es ortogonal a X si y sólo si N es mínima en M . En el caso en que $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, se puede probar que si además N esta contenida en un hiperplano, entonces no sólo es mínima sino que es totalmente geodésica.

Para ver más detalles y cuestiones no mencionadas en esta introducción, el lector es invitado a explorar la páginas de este trabajo.

Lista de Figuras

2.1	Intersección	11
2.2	Frontera de sombra	14
3.1	hélice \equiv geodésica \equiv frontera de sombra	43
3.2	Frontera de sombra singular	53

Contenido

Introducción	i
1 Subvariedades	1
1.1 Conexión inducida	1
1.2 Segunda forma fundamental	3
1.3 Subvariedades mínimas	4
2 Stg y una Caracterización de S^n	9
2.1 Subvariedades totalmente geodésicas	9
2.2 Subvariedades frontera de sombra vs. tg	13
2.3 Caracterización de la esfera e hiperplanos	22
2.4 Subv. Minimales y front. de sombra	26
3 Campos paralelos y Hélices	33
3.1 Campos en subvariedades y Hélices	33
3.2 Hélices vs Stg	41
3.3 Fronteras de sombra en campos paralelos	47
3.4 Esferas en Curvatura Constante	54
3.5 Una nota sobre subv. mínimas	57
REFERENCIAS	61

CAPITULO 1

Subvariedades

El siguiente material es estándar en Geometría Riemanniana y puede consultarse con mayor detalle en libros como [19], cap. 7 ; [6], cap. 2; [24], cap. 4.

Esta introducción no incluye todos los conceptos que son necesarios para seguir los argumentos de los resultados presentados en este trabajo. Para ello es necesario un curso básico de Geometría Riemanniana. Sea N una variedad de dimensión n inmersa en una variedad M de dim. m con $m > n$. La exposición siguiente trata de conceptos locales, por tal razón vamos a suponer que N esta encajada en M .

1.1 Conexión inducida

Supongamos que la variedad M es una variedad Riemanniana con métrica Riemanniana g , lo cual vamos a denotar como (M, g) . La subvariedad N también es una variedad Riemanniana con métrica $g_N(X, Y) = g(X, Y)$, con X y Y campos vectoriales sobre N . Para simplificar, vamos a abusar de la notación para denotar a g_N también como g . Un resultado fundamental en Geometría Riemanniana es que una variedad Riemanniana (M, g) tiene una única conexión $\bar{\nabla}$ con las siguientes dos propiedades

- $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - [\bar{X}, \bar{Y}] = 0$ (conexión libre de torsión).
- $\bar{X}g(\bar{Y}, \bar{Z}) = g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}) + g(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})$ (conexión compatible con la métrica),

donde $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ son campos vectoriales sobre M .

Observación 1.1.1 Nos vamos a referir a la conexión $\bar{\nabla}$ de cualquiera de las siguientes maneras: conexión de Levi-Civita, conexión Riemanniana, derivada covariante de la variedad Riemanniana (M, g) .

Definición 1.1.1 Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y $N \subset M$ una subvariedad. Decimos que $X : N \rightarrow TM$ es un campo vectorial en M a lo largo de N , si $X(x) \in T_x M$, para todo $x \in N$.

Para cada $x \in N$, se tiene la descomposición:

$$T_x M = T_x N \oplus T_x N^\perp,$$

geoméricamente cada vector tangente en el ambiente se proyecta ortogonalmente a un vector tangente en la subvariedad, y un vector ortogonal a la misma.

La anterior suma es directa, es decir, se tiene una descomposición única para cada $V \in T_x M$: $V = \tan(V) + \text{nor}(V)$. Donde $\tan(V) \in T_x N$, y $\text{nor}(V) \in T_x N^\perp$. Esto permite definir de manera natural dos aplicaciones, $\tan : TM \rightarrow TN$, y $\text{nor} : TM \rightarrow TN^\perp$.

Esto implica lo siguiente, cada campo vectorial suave X como el de la definición anterior se descompone en la suma $X = \tan(X) + \text{nor}(X)$ de dos campos vectoriales suaves.

La conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de M induce una conexión en N :

En el estudio de subvariedades Riemannianas, el siguiente resultado también es fundamental. La prueba se puede consultar en el libro de Bang-yen Chen [6], pag. 38.

Proposición 1.1.1 Sean N y M como antes y sean X y Y dos campos vectoriales sobre N . Sean \bar{X} y \bar{Y} extensiones a M de X y Y respectivamente. Entonces $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})|_N : N \rightarrow TM|_N$ no depende de las extensiones.

Si denotamos $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})|_N$ por $\bar{\nabla}_X Y$ tenemos la siguiente descomposición.

La fórmula de Gauss nos dice que

$$\bar{\nabla}_X Y = \tan \bar{\nabla}_X Y + \text{nor} \bar{\nabla}_X Y,$$

donde $\nabla_X Y = \tan \bar{\nabla}_X Y$ es la conexión de Levi-Civita de la subvariedad N con respecto a la métrica inducida por (M, g) .

Además, $\text{nor}\bar{\nabla}_X Y$ es un campo vectorial normal a lo largo de N , el cual es simétrico y bilineal en X y Y .

De manera más general, tenemos el siguiente resultado cuya prueba se puede consultar en [24], pag. 99.

Proposición 1.1.2 *Sea X un campo vectorial tangente sobre N y Y un campo vectorial en M a lo largo de N . Sean \bar{X} y \bar{Y} extensiones a M de X y Y respectivamente. Entonces $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})|_N : N \rightarrow TM|_N$ no depende de las extensiones.*

Denotemos ahora a $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})|_N$ por $\bar{\nabla}_X Y$. Esto nos conduce a otra descomposición. Sea Z un campo vectorial en M a lo largo de N y normal a N : $Z : N \rightarrow TN^\perp$. La fórmula de Weingarten nos dice que

$$\bar{\nabla}_X Z = \tan\bar{\nabla}_X Z + \text{nor}\bar{\nabla}_X Z.$$

Es usual escribir $\nabla_X^\perp Z$ en lugar de $\text{nor}\bar{\nabla}_X Z$, donde ∇^\perp se conoce como la conexión normal de $N \subset M$.

1.2 Segunda forma fundamental

Sea (M, g) una variedad Riemanniana con derivada covariante $\bar{\nabla}$ y sea $N \subset M$ una subvariedad.

La fórmula de Gauss nos hereda un tensor: la segunda forma fundamental II de $N \subset M$.

Definición 1.2.1 Sean $X, Y : N \rightarrow TN$ dos campos vectoriales sobre N . La *segunda forma fundamental* de $N \subset M$, se define como $II(X, Y) := \text{nor}\bar{\nabla}_X Y$.

Como II es un tensor, en cada punto $x \in N$ determina una aplicación bilineal

$$II_x : T_x N \times T_x N \rightarrow T_x N^\perp.$$

Observación 1.2.1 Si la segunda forma fundamental de $N \subset M$ es cero (la aplicación $II_x = 0$ para cada $x \in N$), entonces N se llama subvariedad totalmente geodésica.

Más adelante daremos más detalles de esta clase especial de subvariedades, las cuales no siempre existen (ver [28]). En particular enunciaremos una definición alternativa.

La segunda forma fundamental de $N \subset M$ nos permite definir el siguiente campo vectorial normal a N , el cual es de mucha relevancia.

Definición 1.2.2 Sea $x \in N$, $n = \dim N$ y sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal de $T_x N$. El *campo vectorial de curvatura media* H de $N \subset M$ en x , es

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II(e_i, e_i).$$

Observación 1.2.2 En cada $x \in N$, el vector $H(x) \in T_x N^\perp$, pues $II(e_i, e_i) \in T_x N^\perp$ para $i = 1, \dots, n$.

1.3 Subvariedades mínimas

Definición 1.3.1 Una subvariedad N de una variedad Riemanniana M se llama *mínima* si $H(x) = 0$ para cada $x \in N$.

La siguiente proposición nos dice como calcular el vector de curvatura media de un producto Riemanniano dentro de otro.

Proposición 1.3.1 Sean (\overline{M}_j, g_j) , $j = 1, 2$ dos variedades Riemannianas. Sean $M_j^{k_j} \subset \overline{M}_j$ dos subvariedades. Entonces

$$H(x, y) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} H_1(x) + \frac{k_2}{k_1 + k_2} H_2(y),$$

donde H es el vector de curvatura media de $M_1 \times M_2 \subset \overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ y H_j el de $M_j \subset \overline{M}_j$.

Demostración. Sea \overline{II} la segunda forma fundamental de $M_1 \times M_2 \subset \overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ y II_j la de $M_j \subset \overline{M}_j$. La prueba se deduce de la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{II}_{(x,y)}(X_j, X_j) &= II_1(X_j, X_j) & 1 \leq j \leq k_1 \\ \overline{II}_{(x,y)}(Y_i, Y_i) &= II_2(Y_i, Y_i) & 1 \leq i \leq k_2, \end{aligned}$$

donde X_j es base de $T_x M_1$ y Y_i de $T_y M_2$. \square

Corolario 1.3.1 La subvariedad $M_1 \times M_2$ es mínima en $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ si y sólo si M_j es mínima en \overline{M}_j , para $j = 1, 2$.

Demostración. La condición,

$$H(x, y) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} H_1(x) + \frac{k_2}{k_1 + k_2} H_2(y) = 0$$

se cumple si y sólo si $H_1(x) = 0 = H_2(y)$, debido a que es una suma directa.
□

Con las mismas hipótesis del corolario 1.3.1 tenemos el siguiente caso especial.

Corolario 1.3.2 *Si $\dim M_1 = 1$ y $M_1 \times M_2$ es mínima en $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$, entonces M_1 es geodésica en \overline{M}_1 .*

También va a ser de interés el caso de subvariedades mínimas de una subvariedad.

El siguiente resultado junto con su prueba fue tomado de [6] pag. 79.

Proposición 1.3.2 (*Lema de Bang*) *Sea N^n una subvariedad de N'^s , donde N' es una subvariedad de la variedad Riemanniana M^m . Entonces N es mínima en N' si y sólo si el vector de curvatura media de N en M es normal a N' .*

Demostración. Sean X y Y dos campos vectoriales sobre N , y sean ∇^M y ∇' las conexiones de M y N' respectivamente. La fórmula de Gauss para N' como subvariedad de M nos dice que

$$\nabla_X^M Y = \nabla'_X Y + II^M(X, Y),$$

donde II^M es la segunda forma fundamental de $N' \subset M$.

Sea ∇ la conexión Riemanniana de N y II' la segunda forma fundamental de $N \subset N'$. Entonces tenemos

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + II'(X, Y).$$

De las dos fórmulas anteriores tenemos que

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X Y + II'(X, Y) + II^M(X, Y).$$

Por consiguiente, la segunda forma fundamental II de $N \subset M$ es

$$II(X, Y) = II'(X, Y) + II^M(X, Y).$$

Por definición, II' es normal a N pero tangente a N' , II^M es normal a N' . Ahora, vamos a pasar a los vectores de curvatura media. Sean H y H' los vectores de curvatura media de $N \subset M$, y de $N \subset N'$ respectivamente. Sea $x \in N$ y sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal de $T_x N$. Entonces $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II'(e_i, e_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II^M(e_i, e_i)$. Es decir,

$$H(x) = H'(x) + H(N; N', M),$$

donde $H(N; N', M) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II^M(e_i, e_i)$. Nótese que este vector es normal a N' . Se sigue que N es mínima en N' si y sólo si $H(x) = H(N; N', M)(x)$. \square

Observación 1.3.1 Veamos que nos dice la prop. anterior en los dos siguientes casos. Si $N' = M$ la prop. se puede reescribir como: N es mínima en M si y sólo si el vector de curvatura media de N en M es ortogonal a M , es decir, tal vector tiene que ser cero. Este enunciado es la definición usual de subvariedad mínima.

Si $N = N'$: N es mínima en N si y sólo si el vector de curvatura media H de N en M es normal a N , lo cual se cumple por definición de H . Este caso nos da un enunciado trivial.

Vamos a describir un ejemplo famoso conocido como el **toro de Clifford**. Este toro es plano y además como consecuencia de la prop. 1.3.2 probaremos que es mínima de S^3 .

Ejemplo 1.3.1 Denotemos por $S^q(r)$ a la esfera de dimensión q y de radio r en \mathbb{R}^{q+1} . Sean n y p dos enteros positivos tales que $p < n$ y sea $M_{p,n-p}$ la variedad producto dada por

$$M_{p,n-p} = S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right) \times S^{n-p}\left(\sqrt{\frac{n-p}{n}}\right).$$

Vamos a considerar el siguiente encaje de $M_{p,n-p}$ en $S^{n+1}(1)$. Sea $(u, v) \in M_{p,n-p} \subset \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$, donde la norma de u como vector es $\sqrt{\frac{p}{n}}$ y la de v , $\sqrt{\frac{n-p}{n}}$. De manera que (u, v) es un vector de norma 1 en $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$. Es decir, $M_{p,n-p} \subset S^{n+1}$.

Afirmación: $M_{p,n-p}$ es mínima en S^{n+1} .

Prueba: sea $x = (u, v) \in M_{p,n-p}$ y sean $e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ bases ortonormales de $T_u S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right)$ y $T_v S^{n-p}\left(\sqrt{\frac{n-p}{n}}\right)$ respectivamente. De manera natural

la unión de estas bases nos da una de $T_x M_{p,n-p}$. Vamos a calcular el vector de curvatura media H de $M_{p,n-p}$ como subvariedad de \mathbb{R}^{n+2} . Entonces necesitamos calcular la segunda forma fundamental evaluada en la base descrita arriba para $T_x M_{p,n-p}$. Afirmación:

$$II(e_j, e_j) = \begin{cases} II_1(e_j, e_j) & 1 \leq j \leq p \\ II_2(e_j, e_j) & p+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

donde II_1 (resp. II_2) es la segunda forma fundamental de $S^p(\sqrt{\frac{p}{n}})$ (resp. $S^{n-p}(\sqrt{\frac{n-p}{n}})$) como subvariedad de $M_{p,n-p}$. Esto se deduce de la igualdad siguiente $II(e_j, e_j) = \text{nor}(\bar{\nabla}_{e_j} e_j) - \text{nor}(\nabla_{e_j}^1 e_j) = II_1(e_j, e_j)$, para $j = 1, \dots, p$ y análogamente para $p+1 \leq j \leq n$. Además $\bar{\nabla}, \nabla^1$ son las derivadas covariantes de $M_{p,n-p}$ como subvariedad de \mathbb{R}^{n+2} y de $S^p(\sqrt{\frac{p}{n}})$ como subvariedad de \mathbb{R}^{p+1} respectivamente.

Entonces el vector de curvatura media H de $M_{p,n-p}$ en \mathbb{R}^{n+2} se escribe en términos de los vectores de curvatura media H_1, H_2 de $S^p(\sqrt{\frac{p}{n}})$ en \mathbb{R}^{p+1} y de $S^{n-p}(\sqrt{\frac{n-p}{n}})$ en \mathbb{R}^{n-p+1} resp. Es decir, si $x = (u, v)$ entonces $H(x) = \frac{p}{n} H_1(u) + \frac{n-p}{n} H_2(v)$ el cual es un vector en $T_u \mathbb{R}^{p+1} \oplus T_v \mathbb{R}^{n-p+1} = T_x \mathbb{R}^{n+2}$. Pero, $H_1(u) = -\frac{n}{p} u$ y $H_2(v) = -\frac{n}{n-p} v$, donde $\frac{n}{p} = \frac{1}{(\sqrt{\frac{p}{n}})^2}$ es el cuadrado del recíproco del radio de la esfera en cuestión.

Se sigue que, $H(x) = -(u + v) = -x$, lo cual prueba que H es ortogonal a S^{n+1} y aplicando la prop. 1.3.2 se obtiene que $M_{p,n-p}$ es mínima en S^{n+1} .

El toro de Clifford es un caso especial de esta construcción cuando hacemos $n = 2$ y $p = 1$. Con lo que se obtiene un toro plano.

Como una segunda aplicación de esta prop. 1.3.2 probemos el siguiente resultado, el cual generaliza el bien conocido hecho que se obtiene sustituyendo el término mínima por totalmente geodésica.

Corolario 1.3.3 Sean M_1^k y M_2^k dos subvariedades de M . Sea N una subvariedad de M contenida en $M_1 \cap M_2$. Supongamos que la intersección de M_1 con M_2 es tangente a lo largo de N . Si N es mínima en M_1 entonces es mínima en M_2 .

Demostración. Sea H el vector de curvatura media de $N \subset M$. Como N es mínima en M_1 , por la prop. 1.3.2 resulta que H es normal a M_1 . Por hipótesis, para cada $x \in N$ se satisface la condición $T_x M_1 = T_x M_2$. Esto no permite concluir que H es normal a M_2 . Lo cual prueba que N es mínima en M_2 . \square

CAPITULO 2

Subvariedades Totalmente Geodésicas y una Caracterización de S^n

En este capítulo introducimos el concepto principal de este trabajo: *frontera de sombra* de una subvariedad Riemanniana M de \mathbb{R}^{n+k} . Este concepto lo usó W. Blaschke para caracterizar las superficies convexas analíticas en \mathbb{R}^3 con fronteras de sombras planas. La definición de tal concepto aparece en la literatura para el caso en que M es una superficie suave en \mathbb{R}^3 . Es natural la extensión al caso cuando M es de codimensión k en \mathbb{R}^{n+k} . Sin embargo, nosotros damos una definición equivalente (def. 2.2.1), la cual muestra que *frontera de sombra* es un concepto topológico-diferencial.

En general, para cada dirección en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^{n+k} se obtiene una *frontera de sombra* (f.s.) de M , la cual es un subconjunto cerrado de M . En el teorema 2.2.3 damos una condición para que una f.s. sea una subvariedad de M . Una vez que una f.s. puede ser subvariedad, nos preguntamos que tipo de subvariedad puede ser: ¿totalmente geodésica, minimal? En particular, inspirados por Blaschke, en el teorema 2.3.1 caracterizamos a las hipersuperficies compactas con fronteras de sombra totalmente geodésicas.

2.1 Subvariedades totalmente geodésicas

Definición 2.1.1 Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $N \subset M$ una subvariedad Riemanniana. Si toda geodésica de N es una geodésica de M ,

entonces N se llama una *subvariedad totalmente geodésica* (**stg**) de M .

Definición 2.1.2 Sea (M, g) una variedad Riemanniana con derivada covariante estándar ∇ y sea $M' \subset M$ una subvariedad Riemanniana. Decimos que M' es una *subvariedad totalmente geodésica de M en el punto $x \in M'$* , si para todo segmento geodésico γ de M' con $\gamma(0) = x$, se satisface que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}|_x = 0$.

Proposición 2.1.1 Sea (M^m, g) una variedad Riemanniana, sean $M', H \subset M$ dos subvariedades Riemannianas transversales de codimensión uno, y sea $x \in M'' = M' \cap H \neq \emptyset$ (vease la figura 2.1). Suponga que,

- H es una subvariedad totalmente geodésica de M ,
- M'' es una subvariedad totalmente geodésica de M' , y
- M'' no es una subvariedad totalmente geodésica de M en el punto x .

Entonces $T_x M'^{\perp} = T_x H \cap (T_x M'')^{\perp}$.

Demostración.

Primero, observe que M'' es una subvariedad de M' de codimensión uno, vease [12], pag. 22. Otro comentario es que los complementos ortogonales, como $T_x M'^{\perp}$ y $(T_x M'')^{\perp}$, se toman con respecto a $T_x M$. Denotemos por $\nabla, \nabla', \nabla^H$ y ∇'' la derivada covariante de M, M', H y M'' respectivamente. La fórmula de Gauss para M' como una subvariedad de M es

$$\nabla_{X'} Y' = \nabla'_{X'} Y' + II'(X', Y'),$$

donde X', Y' son campos vectoriales de M' . La ecuación correspondiente para M'' como una subvariedad de M' es $\nabla'_{X''} Y'' = \nabla''_{X''} Y'' + II''(X'', Y'')$, donde X'', Y'' son campos vectoriales de M'' . Como M'' es una subvariedad totalmente geodésica de M' , $II'' = 0$. Así

$$\nabla'_{X''} Y'' = \nabla''_{X''} Y''.$$

Como M'' no es una subvariedad totalmente geodésica de M en x , podemos considerar un segmento geodésico $\gamma : I \rightarrow M''$ (es decir, $\nabla''_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$), tal

que $\gamma(0) = x \in M''$ y el cual no es un segmento geodésico de M (es decir, $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)|_x \neq 0$). Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) &= \nabla'_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) + II'(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) \\ &= \nabla''_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) + II'(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) \\ &= II'(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) \in (T_x M')^\perp. \end{aligned}$$

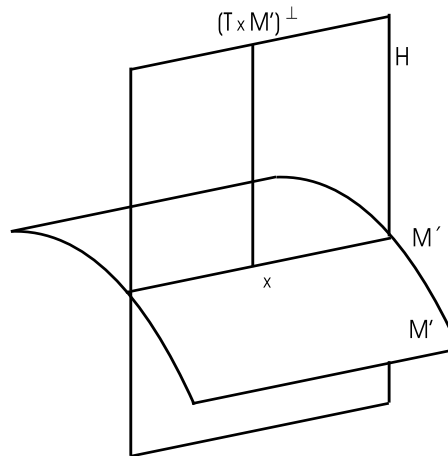
Como $\dim(T_x M')^\perp = 1$, $(T_x M')^\perp = \langle \nabla_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) \rangle$. Además, $2g(\nabla_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))|_{t=0} = 0$. Por lo tanto

$$0 \neq \nabla_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) \in (\dot{\gamma}(0))^\perp.$$

La afirmación $\nabla_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) \in (T_x M'')^\perp$, se deduce porque γ es geodésica de M'' . Finalmente, $\nabla_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}(0) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)}^H \dot{\gamma}(0) \in T_x H$.

Como $\dim(T_x M'')^\perp = 2$, y $\dim T_x H$ es de codimensión uno en $T_x M$, entonces $\dim(T_x H \cap (T_x M'')^\perp) \leq 1$. Esto nos permite concluir que $T_x M'^\perp = T_x H \cap (T_x M'')^\perp$. \square

Figura 2.1: Intersección



Observación 2.1.1 Es importante suponer que M'' no es una subvariedad totalmente geodésica de M en el punto $x \in M''$. Esto se puede apreciar con los siguientes ejemplos.

Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}^m$, M' y H son hiperplanos (no ortogonales) el resultado es falso.

Como un segundo ejemplo, consideremos $M = \mathbb{R}^3$, y M' un cilindro circular estándar, y H un plano paralelo al eje de M' (pero que no contiene a tal eje), entonces M'' consiste de dos líneas rectas. Así en este ejemplo M'' también es una subvariedad totalmente geodésica de M . Podemos ver que la conclusión de la última proposición es falsa.

Finalmente, para ver que pasa cuando H no es una subvariedad totalmente geodésica de M , vamos a modificar a H en este segundo ejemplo. Sea H una esfera de radio mayor al del cilindro, y con centro en el eje del cilindro. Por tanto M'' son dos círculos, los cuales son geodésicas de M' , pero no de M . Sin embargo, la recta normal al cilindro (en un punto de M'') no puede estar contenida en el plano tangente a la esfera. Lo cual contradice el resultado.

Definición 2.1.3 Sean M_1 y M_2 dos subvariedades de una variedad Riemanniana (M, g) . Supongamos que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Decimos que M_1 y M_2 se *intersectan ortogonalmente*, si para cada $x \in M_1 \cap M_2$ existe $w_j \in T_x M_j$, $j = 1, 2$ tal que $w_1 \in T_x M_2^\perp$ y $w_2 \in T_x M_1^\perp$.

El resultado que sigue induce a recordar el curso básico de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 , donde se menciona que una curva en una superficie, la cual es una “sección normal” en cada punto, es una geodésica.

Proposición 2.1.2 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana, y sea $M \subset \overline{M}$ una hipersuperficie. Sea H una subvariedad totalmente geodésica de \overline{M} de codimensión uno. Supongamos que M y H se intersectan ortogonalmente. Entonces $N = M \cap H$ es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Demostración. Sean ∇ y ∇^H las derivadas covariantes de \overline{M} y H respectivamente. Sea $x \in H \cap M$. Dado que H es de cod. uno, y existe $w \in T_x M$ con $w \in T_x H^\perp$, M y H se intersectan transversalmente. Entonces N es una subvariedad suave de codimensión uno de M .

Sea γ una geodésica de N que pasa por x . Debemos verificar que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in T_\gamma M^\perp$, para lo cual hay que tener presente que $T_\gamma M = T_\gamma N \oplus T_\gamma H^\perp = T_\gamma N \oplus \langle w \rangle$.

Por la fórmula de Gauss y como H es una subvariedad totalmente geodésica de \overline{M} , $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}^H \dot{\gamma}$. Esto prueba que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in T_\gamma H$, y debido a que γ es geod. de N , $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in T_\gamma N^\perp$. Concluimos que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in T_\gamma N^\perp \cap T_\gamma H = (T_\gamma N \oplus T_\gamma H^\perp)^\perp = T_\gamma^\perp M$. \square

La siguiente proposición es un resultado estándar de Geometría Riemanniana del cual haremos uso más adelante. Su prueba se incluye para que este trabajo sea (hasta donde sea posible) autocontenido.

Proposición 2.1.3 Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y sean $H_j \subset M$, con $j = 1, 2$ dos hipersuperficies totalmente geodésicas de M . Entonces $H = H_1 \cap H_2$ también es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Demostración. Sean ∇ y ∇^{H_j} , con $j = 1, 2$ las derivadas covariantes de M y H_j , con $j = 1, 2$ respectivamente. Supongamos que la intersección entre H_1 y H_2 es transversal, ya que si fueran tangentes en algún punto, tendrían que ser iguales. Sea γ una geodésica en H , necesitamos ver que también lo es del ambiente M . Por la fórmula de Gauss, y como cada H_j es una subvariedad totalmente geodésica de M , obtenemos que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}^{H_1}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}^{H_2}\dot{\gamma}$. Lo cual nos dice que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \in T_{\gamma}H_1 \cap T_{\gamma}H_2 = T_{\gamma}H$. Por hipótesis γ es geod. de H , o sea que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \in T_{\gamma}H^{\perp}$, así que, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. \square

2.2 Subvariedades frontera de sombra vs. tg

Observación 2.2.1 En las siguientes secciones, si no decimos lo contrario, todas las hipersuperficies y subvariedades de \mathbb{R}^{n+k} son suaves ($k \geq 1$), y, son consideradas como subvariedades Riemannianas de \mathbb{R}^{n+k} con su métrica Riemanniana estándar.

La siguiente definición, para el caso de una superficie en \mathbb{R}^3 , es equivalente a la dada en la pag.60 de [23].

Definición 2.2.1 Sea M^n una subvariedad de \mathbb{R}^{n+k} , esto es: una subvariedad suave de codimensión k de \mathbb{R}^{n+k} . Para cada $v \in \mathbb{R}^{n+k} - \{0\}$, definimos la *frontera de sombra* (*shadow boundary en inglés*) de M en la dirección v como el conjunto:

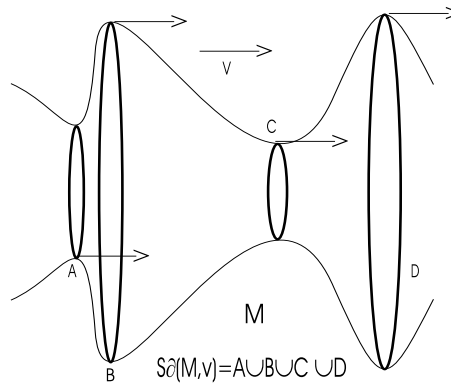
$$S\partial(M, v) = \{x \in M \mid v \in T_x M\}. \quad (2.1)$$

Observación 2.2.2 La frontera de sombra es, en general, un subconjunto cerrado de M (inclusive puede ser el vacío o el total) y no depende de la norma de v , sólo de su dirección: Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $S\partial(M, \lambda v) = S\partial(M, v)$. De hecho, si M no es compacto entonces (2.1) podría ser un conjunto vacío (por ejemplo si M es un hiperplano). Aunque M es suave, el conjunto

$S\partial(M, v)$ no es necesariamente suave: considere un toro T^2 de revolución en \mathbb{R}^3 , y sea v un vector ortogonal al eje de rotación. Así $S\partial(T^2, v)$ es la unión de los dos meridianos ortogonales a v y los dos círculos que limitan al toro arriba y abajo.

En el teorema 2.2.3, hay una condición sobre la curvatura seccional de M , que garantiza la suavidad de $S\partial$.

Figura 2.2: Frontera de sombra



Observación 2.2.3 ¿Como saber si un subconjunto de una subvariedad Euclidiana M esta contenida en alguna frontera de sombra de la misma? A continuación damos un criterio que responde este cuestionamiento.

Sea M^n una subvariedad de \mathbb{R}^{n+k} , con $k > 0$. Si $A \subset M$ es un subconjunto tal que

$$V = \cap_{x \in A} T_x M \neq \emptyset,$$

entonces

$$A \subset \cap_{v \in V} S\partial(M, v).$$

Esta propiedad nos dice que si un subespacio V de \mathbb{R}^{n+k} , es tangente (bajo traslación) a M a lo largo de los puntos de N , entonces N esta en toda frontera de sombra con respecto a una dirección en V .

Geométicamente y de manera inversa, dado un subespacio V , para hallar un conjunto A tal que V es tangente a M , a lo largo de A , se tiene que trasladar

a V a cada punto p de M .

En particular, supongamos que dado $v \in \mathbb{R}^{n+k}$, queremos hallar el conjunto Q de los puntos p de M tal que v es ortogonal a M en p . Si denotamos por V al subespacio de \mathbb{R}^{n+k} ortogonal a v , entonces $Q = \bigcap_{w \in V} S\partial(M, w)$.

Ejemplo 2.2.1 En la construcción siguiente, partiremos de una subvariedad N de codimensión dos en un espacio Euclidiano y vamos a generar una subvariedad de codimensión uno, tal que admite una frontera de sombra difeomorfa a N en el caso en que N sea orientable y en otro caso, difeomorfa a un **cubriente doble** de N .

Sea $N \subset \mathbb{R}^{n+2}$ una subvariedad. Supongamos que existe una constante $\epsilon > 0$, tal que $N_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} \mid |y - x| < \epsilon, \text{ para algún } x \in N\}$ es una vecindad tubular de N , ver [11] pag. 70, localmente difeomorfa a $N \times D^2$, donde D^2 es el disco unitario abierto en \mathbb{R}^2 . Si N es compacta, la constante ϵ siempre existe.

Supongamos que existe un vector $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, el cual es transversal a N : $v \notin T_x N$, para cada $x \in N$.

Podemos deducir de esta última condición que $T_x N \oplus \langle v \rangle$ es de codimensión uno en $T_x \mathbb{R}^{n+2}$. Por consiguiente, en cada punto de N podemos construir dos vectores de norma uno, denotados $Y(x)$, $-Y(x)$, ortogonales a la suma directa anterior. Cuando N es orientable, se puede definir un campo vectorial Y (globalmente) a lo largo de N , $Y : N \rightarrow TN^\perp$. Denotemos por \overline{N}_ϵ , la cerradura de la vecindad tubular con la que estamos trabajando. Sea $M = \partial(\overline{N}_\epsilon)$ la subvariedad frontera de tal cerradura. Entonces

$$N \pm \epsilon Y \subset S\partial(M, v).$$

Prueba: Sea $p \in N$, y sea $U \subset N$ una vecindad de p , y fijamos una orientación en U . Sea $Y : U \rightarrow TU^\perp$, con $Y(x)$ de norma uno y ortogonal a $T_x U \oplus \langle v \rangle$ y tal que la orientación de $T_x U \oplus \langle v \rangle \oplus Y(x)$ coincide con la de $T_x \mathbb{R}^{n+2}$. Sea $X : U \rightarrow TU^\perp$ otro campo vectorial normal de norma uno, tal que X, Y forman una base ortonormal de TU^\perp , X se determina pidiendo que la orientación de $T_x U \oplus X(x) \oplus Y(x)$ sea equivalente con la de $T_x \mathbb{R}^{n+2}$. Sea $\rho : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ una carta coordenada de $\rho(V) = U \subset N$. Con la ayuda de ρ , podemos parametrizar una vecindad de $M = \partial(\overline{N}_\epsilon)$:

$\sigma : V \times (-\pi, \pi) \rightarrow M$, con $\sigma(w, t) = \rho(w) + \epsilon \cos(t)X(\rho(w)) + \epsilon \sin(t)Y(\rho(w))$, con $w = (w_1, \dots, w_n)$. Queremos probar que

$$\{\sigma(w, \pm\pi/2) = \rho(w) \pm \epsilon Y(\rho(w)) \mid w \in V\} \subset S\partial(M, v).$$

Para alcanzar este objetivo, veamos que $v \in T_{\sigma(w, \pm\pi/2)}M$. Nótese que $T_{\sigma(w, t)}M$ es generado por σ_{w_j} , $j = 1, \dots, n$, σ_t y en particular $T_{\sigma(w, \pm\pi/2)}M$ lo es por

$$\sigma_{w_j|t=\pm\pi/2} = \rho_{w_j} \pm \epsilon(Y \circ \rho)_{w_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sigma_{t|t=\pm\pi/2} = -\epsilon X \circ \rho.$$

La clave es notar que $Y(\rho(w))$ es ortogonal a $T_{\sigma(w, \pm\pi/2)}M$ y a v : como Y es de norma uno, $\langle Y \circ \rho, (Y \circ \rho)_{w_j} \rangle = 0$, y por definición de Y , $\langle Y \circ \rho, \rho_{w_j} \rangle = 0$. Entonces

$\langle Y(\rho(w)), \rho_{w_j} \pm \epsilon(Y \circ \rho)_{w_j} \rangle = 0$. Finalmente, no perdamos de vista que, $\langle X(\rho(w)), Y(\rho(w)) \rangle = 0$. En resumen, $Y(\rho(w))$ es ortogonal a $T_{\sigma(w, \pm\pi/2)}M$. Pero, $\langle Y(\rho(w)), v \rangle = 0$, es decir, v esta en el complemento ortogonal de $Y(\rho(w))$ que no es otro sino $T_{\sigma(w, \pm\pi/2)}M$.

De hecho si ϵ es suficientemente chico y N es orientable, entonces $S\partial(M, v)$ consiste de dos copias de N . Si N es no orientable se obtiene el **cuadrante doble** de N .

Ejemplo 2.2.2 Vamos a rehacer el ejemplo anterior con la condición $\dim N = 1$, es decir, N es una curva encajada en \mathbb{R}^3 . Pero ahora nos apoyaremos en la teoría clásica de curvas para realizar los cálculos.

Supongamos que N esta parametrizada por $\gamma \subset \mathbb{R}^3$: una curva suave regular con curvatura nunca nula y que $v \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es transversal a γ . Por simplicidad, conviene asumir que γ esta parametrizada por longitud de arco, $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Sea $\mathbf{t} = \dot{\gamma}$, el vector tangente unitario. Denotemos por \mathbf{n} y \mathbf{b} al vector normal y binormal unitarios respectivamente. Recordemos que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ forman una base ortonormal de $T_\gamma \mathbb{R}^3$ y satisfacen las ecuaciones de Serret-Frenet:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}.$$

Vamos a definir la superficie siguiente:

$$M = \{\sigma(s, t) = \gamma(s) + \epsilon \cos(t)\mathbf{n}(s) + \epsilon \sin(t)\mathbf{b}(s) \mid (s, t) \in (a, b) \times (-\pi, \pi)\}.$$

También estamos suponiendo que $\epsilon > 0$ es una constante tal que M es variedad.

Sea $\alpha \subset M$, definida por la parametrización $\alpha(s) = \sigma(s, t(s)) = \gamma(s) + \epsilon Y(s)$,

donde $Y(s) = \cos(t(s))\mathbf{n}(s) + \sin(t(s))\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times v$ es de norma uno.

Afirmación: $\alpha \subset S\partial(M, v)$.

Vamos a hacer la prueba de manera directa. Por definición de $S\partial(M, v)$, nuestra meta se reduce a probar que $v \in T_{\alpha(s)}M$, lo cual es equivalente a que v sea ortogonal a un vector normal a $T_{\alpha(s)}M$.

Un vector normal a M se puede obtener usando la parametrización de M :

$$\sigma_s \times \sigma_t,$$

donde $\sigma_s(s, t) = \dot{\gamma}(s) + \epsilon \cos(t)\dot{\mathbf{n}}(s) + \epsilon \sin(t)\dot{\mathbf{b}}(s) = (1 - \kappa \epsilon \cos(t))\mathbf{t} - \tau \epsilon \sin(t)\mathbf{n} + \tau \epsilon \cos(t)\mathbf{b}$ y $\sigma_t(s, t) = -\epsilon \sin(t)\mathbf{n}(s) + \epsilon \cos(t)\mathbf{b}(s)$.

Estamos interesados en puntos de $\alpha(s) = \sigma(s, t(s))$. Bajo tal condición tenemos que el vector normal a M a lo largo de α , es

$$\begin{aligned} \sigma_s \times \sigma_t(s, t(s)) &= -\epsilon(1 - \kappa \epsilon \cos(t(s)))(\cos(t(s))\mathbf{n} + \sin(t(s))\mathbf{b}) \\ &= -\epsilon(1 - \kappa \epsilon \cos(t(s)))\mathbf{t} \times v. \end{aligned}$$

Esto prueba que la dirección normal a M es radial, es decir, la normal de M en el punto $\sigma(s, t)$ es un vector que va de $\gamma(s)$ a $\sigma(s, t)$.

Resulta claro que $\langle v, \sigma_s \times \sigma_t(s, t(s)) \rangle = 0$. Es decir $v \in T_{\alpha(s)}M$. De hecho,

$$S\partial(M, v) = \{\sigma(s, t(s)) \mid s \in (a, b)\} \cup \{\sigma(s, t(s) + \pi) \mid s \in (a, b)\}.$$

El siguiente resultado nos va a dar más ejemplos de subvariedades M , con fronteras de sombra suaves.

Teorema 2.2.1 *Sea M el producto Riemanniano $M_1 \times M_2$, de las subvariedades Euclidianas $M_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$ y $M_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$. Sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} = \mathbb{R}^{k_1+k_2}$. Entonces*

$$S\partial(M, v) = S\partial(M_1, v_1) \times S\partial(M_2, v_2).$$

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2) \in S\partial(M, v)$, es decir, $(v_1, v_2) \in T_x M \simeq T_{x_1} M \oplus T_{x_2} M$. Esto es equivalente a que $v_1 \in T_{x_1} M$, $v_2 \in T_{x_2} M$. Por consiguiente,

$$x_1 \in S\partial(M_1, v_1), \quad x_2 \in S\partial(M_2, v_2).$$

Lo cual concluye la prueba. \square

Observación 2.2.4 El teorema 2.2.1, se puede parafrasear como: la frontera de sombra de un producto es el producto de las fronteras de sombra. Además, en tal igualdad no importa si las fronteras de sombra son subvariedades. Aunque $v \neq 0$, alguno de los vectores v_1 o v_2 se puede anular. Si por ejemplo $v_2 = 0$, entonces $S\partial(M_2, v_2) = M_2$.

Ejemplo 2.2.3 Sea $M = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. Aplicando el teorema 2.2.1, obtenemos los siguientes casos:

1. $v = (v_1, 0)$, con $v_1 \neq 0$. Entonces
 $S\partial(M, v) = \{a, -a\} \times S^1$, donde $\{a, -a\} = S\partial(S^1, v_1)$.
2. Análogamente, si $v = (0, v_2)$,
 $S\partial(M, v) = S^1 \times \{b, -b\}$, donde $\{b, -b\} = S\partial(S^1, v_2)$.
3. $v = (v_1, v_2)$, con $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$. Entonces
 $S\partial(M, v) = \{a, -a\} \times \{b, -b\}$.

Conviene también considerar el siguiente ejemplo. Sea $M = S^2 \times S^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$. Aplicando el teorema 2.2.1, obtenemos los siguientes casos:

1. $v = (v_1, 0)$, con $v_1 \neq 0$. Entonces
 $S\partial(M, v) = S^1 \times S^2$, donde $S^1 = S\partial(S^2, v_1)$.
2. Análogamente, si $v = (0, v_2)$,
 $S\partial(M, v) = S^2 \times S^1$, donde $S^1 = S\partial(S^2, v_2)$.
3. $v = (v_1, v_2)$, con $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$. Entonces
 $S\partial(M, v) = S^1 \times S^1$.

Nótese que en estos ejemplos, toda frontera de sombra de M es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Observación 2.2.5 Las fronteras de sombra de una hipersuperficie compacta nunca son vacías. Pero si la hipersuperficie M no es compacta, puede existir una dirección tal que la frontera de sombra de M en tal dirección sea vacía. Tal es el caso si M es un hiperplano.

El siguiente resultado nos da un criterio para saber cuando una hipersuperficie conexa orientable tiene alguna frontera de sombra vacía o no.

Teorema 2.2.2 *Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie orientada. Si la imagen de M bajo la aplicación de Gauss contiene puntos antipodas, entonces toda frontera de sombra de M es no vacía.*

Demostración. Sea $n : M \rightarrow S^n$ la aplicación de Gauss de $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Primero observemos lo siguiente: dado $v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, los vectores ortogonales unitarios de los hiperplanos que contienen a v , forman una “esfera máxima” en S^n .

Supongamos que $n(M) \subset S^n$ contiene a los puntos $a, -a$. Como n mapea un subconjunto arco-conexo de M en un conjunto arco-conexo de S^n , se deduce que $n(M)$ es arco-conexo. Sea v cualquier dirección, entonces la “esfera máxima”, de los vectores normales unitarios a los hiperplanos que contienen a v , intersecta a $n(M)$. Es decir, hay un hiperplano H que contiene a v cuya dirección normal unitaria esta en $n(M)$. Esto prueba que una traslación de H es tangente a M en un punto x y en consecuencia, $x \in S\partial(M, v)$. \square

Observación 2.2.6 El recíproco del teorema anterior 2.2.2 es falso. Lo cual puede verse si escogemos adecuadamente como superficie, un abierto de la esfera unitaria.

El siguiente paso es, dada una frontera de sombra suave, entender bajo que condiciones puede ser una subvariedad totalmente geodésica (**tgs**). La relación entre estos dos conceptos se aclara por el siguiente lema.

Algunas condiciones, cercanas a las del siguiente lema, fueron consideradas en el trabajo de A. Schwenk [25].

Lema 2.2.1 *Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ($n \geq 2$) una subvariedad de codimensión k ($k \geq 1$). Sea $M' \subset M$ una subvariedad compacta, conexa, de codimensión uno (en M). Entonces cualesquiera dos de las siguientes implican la tercera (aunque se necesita que $k = 1$ para obtener a) y c) implica b)).*

a) M' es una subvariedad totalmente geodésica de M ,

b) $M' \subset S\partial(M, v)$ con $v \in \mathbb{R}^{n+k} - \{0\}$ y,

c) $M' \subset M \cap H$, donde H es algún hiperplano ortogonal a $v \in \mathbb{R}^{n+k} - \{0\}$.

Demostración.

a) y b) \Rightarrow c): Gracias a que M' es compacta, podemos considerar un hiperplano H en el espacio Euclidiano tal que:

i) es ortogonal a v ,

ii) es tangente a M' en algún punto $p \in M'$. Así $T_p M'$ es también ortogonal a v , y $v \in T_p M$ ya que $M' \subset S\partial(M, v)$. Luego,

$$T_p M = T_p M' \oplus \langle v \rangle. \quad (2.2)$$

Para alcanzar nuestro objetivo, vamos a verificar que: $T_x M'$ es ortogonal a v , para cada x en M' . Sea γ cualquier geodésica de M' desde p a x , entonces también es una geodésica de M . Ahora, consideremos el transporte paralelo τ en M a lo largo de γ desde p a x . Por tanto, $\tau : T_p M \rightarrow T_x M$ es una isometría. Así τ transforma la ecuación anterior, (2.2), en la descomposición ortogonal $T_x M = T_x M' \oplus \langle v \rangle$. Finalmente, una subvariedad como M' del espacio Euclidiano, tal que $T_x M'$ es ortogonal a un vector fijo v , esta contenida en un hiperplano ortogonal a v .

a) y c) \Rightarrow b): Recordemos que en esta implicación pedimos la condición $k = 1$. Sea $x \in M'$, para verificar la condición $x \in S\partial(M, v)$, necesitamos probar que: $v \in T_x M$. Para esto, usamos la prop. 2.1.1 para deducir que $T_x M^\perp = T_x H \cap (T_x M')^\perp$. Así

$$v \in T_x H^\perp \subset T_x H^\perp + T_x M' \subset (T_x H \cap (T_x M')^\perp)^\perp = T_x M.$$

b) y c) \Rightarrow a): Sea $x \in M'$ y ∇ la derivada covariante canónica de \mathbb{R}^{n+k} . Debido a que $\dim(T_x M'^\perp \cap T_x M) = 1$ y $v \in T_x M'^\perp \cap T_x M$, obtenemos que $\langle v \rangle = T_x M'^\perp \cap T_x M$. Por consiguiente tenemos la siguiente igualdad

$$T_x M = T_x M' \oplus (T_x M'^\perp \cap T_x M) = T_x M' \oplus \langle v \rangle. \quad (2.3)$$

Sea $\gamma \subset M'$ una geodésica que pasa por x , se sigue que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ es ortogonal a M' y como $M' \subset H \cap M$, también es ortogonal a v :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in (T_x M' \oplus \langle v \rangle)^\perp \subset T_x \mathbb{R}^{n+k}.$$

Entonces por (2.3), $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ es ortogonal a M , esto implica que γ es una geodésica de M . \square

Observación 2.2.7 La compacidad de M' no es usada en la implicación b) y c) \Rightarrow a).

Si M' no es compacta, las condiciones a) y b) implican que cada espacio tangente de M' forma un ángulo constante con v , el cual no es necesariamente $\pi/2$. Tal M' se llama subvariedad hélice (def. 3.1.4). Así en este caso M' no esta contenido en un hiperplano.

Veamos una condición para garantizar la suavidad de una frontera de sombra. Esto lo hacemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 2$) una hipersuperficie y sea $v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Supongamos que la curvatura seccional de M nunca se anula.*

Entonces $S\partial(M, v)$ es una subvariedad suave de M de codimensión 1.

Demostración. Sea $x \in S\partial(M, v)$, así $v \in T_x M$. Después de una transformación rígida de \mathbb{R}^{n+1} , podemos suponer que $x = 0$ e identificar $T_x M$ con $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Además existen vecindades abiertas: $U \subset M$ de x , $V \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$ de 0 ; y, finalmente, una función suave $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que U es la gráfica de f : $U = \{(y, f(y)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in V\}$. Sea $\phi : V \rightarrow U$ un sistema de coordenadas locales dadas por $\phi(y) = (y, f(y))$. Por construcción $\nabla f(0) = 0$ así 0 es un punto singular de f . Ahora observe que

$$S\partial(M, v) \cap U = \{(y, f(y)) \in U \mid v \in T_{(y, f(y))} U\}.$$

Pero $v \in T_{(y, f(y))} U$ si y sólo si $\langle \nabla f(y), v \rangle = 0$. Ahora considere la función $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(y) = \langle \nabla f(y), v \rangle$. Por lo tanto

$$\phi^{-1}(S\partial(U, v)) = F^{-1}(0).$$

Probemos que 0 es un valor regular de F . Observe que $\nabla F(y) = H(f)_y \cdot v$, donde $H(f)$ es el Hessiano de F .

Tenemos que probar que $H(f)_y$ es invertible para todo $y \in \phi^{-1}(S\partial(U, v))$. Aquí es donde necesitamos la hipótesis acerca de la curvatura seccional de M . Como U es una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} , podemos considerar la segunda forma fundamental de $U \subset M$ en el punto y :

$$II_y : T_{(y, f(y))} U \times T_{(y, f(y))} U \rightarrow T_{(y, f(y))} U^\perp.$$

Para todo $X, Y \in T_{(y, f(y))} U$,

$II(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N_y \rangle$ $N_y = -\frac{1}{r} \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j H(f)_{yij} N_y$, donde $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i$, y $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \partial_i$, $N_y = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}, -1)/r$ (con $r = (|\nabla f(y)|^2 + 1)^{1/2}$) es el vector ortogonal a U en $(y, f(y))$, y $\bar{\nabla}$ es la derivada covariante estándar de \mathbb{R}^{n+1} . La base ∂_i es inducida por las coordenadas locales descritas de U . Si denotamos, de nuevo, por X al vector $(X_1, \dots, X_n)^{tr}$, y similarmente con Y , entonces podemos escribir $II(X, Y) = -\frac{1}{r} X H(f)_y Y^{tr} N_y$.

Ahora, como II es simétrica, existe una base ortogonal $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ de

$T_{(y,f(y))}U$ tal que $II(Z_i, Z_i) = \lambda_i N_y$ ver [19], pag. 24. También $II(Z_i, Z_j) = 0$ para $i \neq j$. De hecho, la curvatura seccional del plano generado por $\{Z_i, Z_j\}$ esta dada por $K(Z_i, Z_j) = \lambda_i \lambda_j$. Pero la curvatura seccional nunca se anula, entonces $\lambda_i \neq 0$, for $i = 1, \dots, n$.

Estamos listos para ver que $H(f)_y$ es invertible:

$-\frac{1}{r}Z_i H(f)_y Z_i^{tr} N_y = II(Z_i, Z_i) = \lambda_i N_y$, por lo tanto $-\frac{1}{r}Z_i H(f)_y Z_i^{tr} = \lambda_i \neq 0$. De esto, podemos concluir que

$$-\frac{1}{r}H(f)_y Z_i^{tr} = \frac{\lambda_i Z_i^{tr}}{|Z_i|^2} \neq 0,$$

para $i = 1, \dots, n$. Así $H(f)_y$ transforma una base sobre una base.

Para terminar este lema, tenemos que usar el teorema de la preimagen (un resultado clásico en topología diferencial, ver [12], pag. 22), para concluir que $F^{-1}(0)$ es una subvariedad de codimensión uno de V . Por lo tanto, $\phi(F^{-1}(0)) = S\partial(U, v)$ es también una subvariedad de codimensión uno de U . \square

Observación 2.2.8 El punto esencial para la prueba de esta proposición es: el Hesiano de la función, que representa localmente a M , es no singular. Una condición la cual se satisface cuando M es una hipersuperficie cuya curvatura seccional no se anula (en todo punto y todo subespacio tangente 2-dim. de $T_x M$). Por ejemplo, es conocido que una hipersuperficie estrictamente convexa en \mathbb{R}^{n+1} (compacta o no) tiene curvatura seccional positiva, así toda frontera de sombra de ella, es una subvariedad suave de codimensión uno.

2.3 Caracterización de la esfera Euclidiana e hiperplanos

Observación 2.3.1 Importante: En esta sección, todas las hipersuperficies y subvariedades de \mathbb{R}^{n+1} son suaves, y tienen la métrica Riemanniana inducida por la métrica estándar de tal espacio Euclidiano.

Así al continuar por esta dirección, aparece de manera natural la pregunta: ¿Cuales hipersuperficies de \mathbb{R}^{n+1} tienen la propiedad: todas las fronteras de sombra son subvariedades totalmente geodésicas? Si además la hipersuperficie es compacta, en el Teorema 2.3.1 probamos que debe ser una esfera. Con lo cual se obtiene una caracterización de la esfera.

Lema 2.3.1 *Sea M una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} y sea l una línea recta en \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos que cada línea que pasa por M , ortogonalmente, interseca a l . Entonces M es parte de una hipersuperficie con eje de revolución l .*

Demostración. Denotemos por $(x, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1})$ las coordenadas del ambiente y sea $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Por simplicidad, supongamos que l es el eje x_1 . Sea $p \in M$ y sea $U \subset M$ una vecindad coordinada de p de la forma $(x, f(x))$, donde f toma valores reales.

El vector normal a M en cada punto de U , está dado por

$N(x) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}, -1)$, donde $f_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. La hipótesis se puede expresar con la ecuación siguiente. Para cada $x \in U$,

$$(x, f(x)) + \lambda(x)N(x) = s(x)e_1.$$

Sea d la distancia de $(x, f(x)) \in U$ a su proyección $x_1e_1 \in l$. Entonces $d^2 = x_2^2 + \dots + x_n^2 + (f(x))^2$.

Afirmación: d sólo depende de x_1 . Prueba: por la ecuación vectorial anterior $\frac{\partial d^2}{\partial x_k} = 2x_k + 2ff_{x_k} = 0$, para $2 \leq k \leq n$. Esto prueba que la vecindad U está contenida en una hipersuperficie de revolución. \square

El siguiente teorema está en el espíritu del teorema 5.8 de [23] (pag. 61). Es un resultado al estilo de Blaschke. M. Ghomi (ver [10]) publicó en 2002 un artículo donde su resultado principal es también de este estilo (resuelve el *shadow problem* planteado por Wente).

Teorema 2.3.1 *Sea M una hipersuperficie compacta y conexa de \mathbb{R}^{n+1} ($n \geq 2$). Si cada frontera de sombra de M es una subvariedad totalmente geodésica de codimensión 1, entonces M es una esfera.*

Demostración. Sea $x \in M$ y $v \in T_x M \setminus \{0\}$, entonces $S\partial(M, v) \subset M$ es una subvariedad totalmente geodésica de codimensión 1 y $x \in S\partial(M, v)$.

Por el lema 2.2.1 la componente conexa de $S\partial(M, v)$ que contiene a x está contenida en $H \cap M$, donde H es un hiperplano ortogonal a v . Así para todo hiperplano H el cual contiene a l_x (la línea normal a M en x), tenemos que: Si $(M \cap H)_x$ es la componente conexa de $M \cap H$ que contiene a x , entonces $(M \cap H)_x$ es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Veremos que x tiene una vecindad abierta $U \subset M$ tal que $U \setminus \{x\}$ es isométrica al producto warped (ver [24], pag. 204) $S^{n-1} \times_f I$ (es decir U es de revolución), donde S^{n-1} es la esfera estándar de dimensión $(n-1)$, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo estándar abierto. Y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva suave sobre I que multiplica a la métrica de S^{n-1} .

Primero, observemos que x es un punto aislado del siguiente conjunto

$$A = \{z \in M \mid T_z M \text{ es paralelo a } T_x M\}.$$

En otro caso, existiría una sucesión infinita $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que: $x_k \rightarrow x$, y $T_{x_k} M$ es paralelo a $T_x M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ esta contenido en toda frontera de sombra con dirección algún vector en $T_x M$. Entonces existiría $v \in T_x M \setminus \{0\}$, y $S\partial(M, v) \subset M$ tendría un número infinito de componentes conexas. Como $x_k \rightarrow x$ tenemos una contradicción porque $S\partial(M, v)$ es una subvariedad suave de M .

Segundo, tomemos una vecindad abierta U' de x , tal que:

- a) $U' \cap A = \{x\}$, y
- b) para cada $y \in U'$, x y y están en una componente conexa de $S\partial(M, v)$, para algún v como antes.

Sea $y \in U'$, y sea l_y la línea normal a M en y . Vamos a verificar que l_y intersecta a l_x . Consideremos a $\prod_{x,y}$, el plano 2-dimensional determinado por l_x y y . Dado que M no contiene intervalos, deducimos con la proposición 2.1.1 que l_y está contenido en cada hiperplano que contiene a $\prod_{x,y}$. Por consiguiente $l_y \subset \prod_{x,y}$. Pero, por la propiedad a) de U' , l_y intersecta a l_x .

Finalmente, por el lema 2.3.1, $U' \setminus \{x\}$ está contenida en una hipersuperficie de revolución y además el eje de rev. pasa por x . Sea $\pi_x : U' \rightarrow l_x$ la proyección ortogonal de U' en l_x . Sea $U \subset U'$ vecindad de x tal que $U = \pi_x^{-1}(\pi_x(U))$. Es un ejercicio probar que $U \setminus \{x\}$ es isométrica a $S^{n-1} \times_f I$, donde $I = \pi_x(U \setminus \{x\})$.

Esto prueba que M es de revolución en U , y por lo tanto $O(T_x M)$ actúa transitivamente sobre los planos en $T_x M$. De aquí se deduce que la curvatura seccional de M en x es constante. Por un teorema clásico se obtiene que M es de curvatura constante. La compacidad y conexidad de M implica que M es isométrica a una esfera redonda. \square

N. Takeuchi tiene un resultado relacionado al siguiente teorema. El trabajó con superficies completas (conexas por hipótesis) en \mathbb{R}^3 y, para ese caso,

probó un resultado más fuerte que el Teorema 2.3.3. Su resultado es el siguiente (ver [26]).

Teorema 2.3.2 (*Takeuchi*) *Sea M una superficie, completa en \mathbb{R}^3 . Para cada punto p de M , suponga que existen cuatro geodésicas de M a través de p tal que son curvas planas. Entonces M es una esfera o un plano.*

El teorema siguiente es una caracterización para hipersuperficies completas y conexas con muchas secciones, las cuales son subvariedades totalmente geodésicas.

Teorema 2.3.3 *Sea M una hipersuperficie completa y conexas de \mathbb{R}^{n+1} ($n \geq 2$), y sea $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M$. Si toda intersección transversal y no trivial, entre M y cualquier hiperplano conteniendo a x_0 , es una subvariedad totalmente geodésica de M , entonces M es una esfera o un hiperplano.*

Demostración. Podemos suponer que $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el punto fijo mencionado. Si M es un hiperplano, no hay nada más que hacer. Así supongamos que M no es un hiperplano.

Existe $x \in M$ tal que M no es una subvariedad totalmente geodésica de \mathbb{R}^{n+1} en x (e.g. M no es localmente un hiperplano en x), por consiguiente existen (al menos) n hiperplanos $\{H_i\}_{i=1}^n$ tal que:

- 1) Cada H_i contiene tanto a x como a 0 ,
- 2) Todo H_i es transversal a M .
- 3) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $M_i = M \cap H_i$ no es una subvariedad totalmente geodésica de \mathbb{R}^{n+1} en x (no es localmente una subvariedad lineal de codimensión uno de M , o no es localmente una subvariedad lineal de codimensión dos de \mathbb{R}^{n+1}).

Ahora, podemos aplicar la proposición 2.1.1. En este caso $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{std})$ es el espacio ambiente Riemanniano, donde g_{std} es la métrica Riemanniana estándar. Además, M y H_i son subvariedades Riemannianas de codimensión uno, donde la primera no es una subvariedad totalmente geodésica y la última es una subvariedad totalmente geodésica. Finalmente, M_i es una subvariedad totalmente geodésica de M (hipótesis mas la condición 2), y no es una subvariedad totalmente geodésica de \mathbb{R}^{n+1} en x (condición 3). Entonces por la prop. 2.1.1, podemos obtener que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(T_x M)^\perp = T_x H_i \cap (T_x M_i)^\perp.$$

Esto prueba que, un vector ortogonal a M en x esta en $T_x H_i$.
 Pero $\dim(\bigcap_{i=1}^n H_i) = 1$, por lo tanto

$$(T_x M)^\perp = \bigcap_{i=1}^n T_x H_i.$$

Así todo vector $w(x)$ ortogonal a M , en x , esta contenido en cada uno de dichos hiperplanos H_i . Entonces, la línea ortogonal a M que pasa por x , también contiene a 0 , y x fue un punto arbitrario de M .

Ahora es un ejercicio verificar que M es localmente una esfera:

Supongamos que $T_x M$ es paralelo al hiperplano $x_{n+1} = 0$, donde (x_1, \dots, x_{n+1}) son las cordenasadas de \mathbb{R}^{n+1} . Podemos hallar una vecindad abierta V de 0 dentro de $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y una vecindad U de $x \in M$ tal que para todo $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in U$,

$$x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n),$$

donde $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave.

Sea $N(x_1, \dots, x_n) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}, -1)$ el vector ortogonal a M en $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Debido a la condición $0 \notin M$, hemos probado que existe una función $r = r(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$, tal que $x + r(x_1, \dots, x_{n+1})N(x_1, \dots, x_n) = 0$. Como consecuencia, la función r satisface $r = x_{n+1}$. Además obtenemos que $x_j + x_{n+1}f_{x_j} = 0$. Ahora, apliquemos este hecho para ver que los puntos en la vecindad U son equidistantes de 0 . Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, tenemos

$$\frac{\partial(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)}{\partial x_j} = 2x_j + 2f_{x_j} = 0.$$

Esto significa que, $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ es una constante. Como $\dim M \geq 2$, no puede ser negativa o cero. En conclusión, para cada punto $x \in M$ (donde M no es localmente un hiperplano) M es localmente una esfera. Así M (una C^∞ -variedad) es una union de piezas: hiperplanos y esferas, lo cual no es posible. Entonces como M es conexa y completa, es una esfera. \square

2.4 Subv. Minimales y front. de sombra

En esta sección estudiaremos lo siguiente. Dada una subvariedad M de \mathbb{R}^{n+1} tal que su frontera de sombra (f.s.) (en alguna dirección) es suave, vamos a

encontrar una condición para que tal f.s. sea una subvariedad minimal de M .

Teorema 2.4.1 *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una subvariedad, y sea $v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Sea $N \subset S\partial(M, v)$ una subvariedad de M de codimensión uno. Supongamos que $v \notin T_p N$, para cada $p \in N$. Entonces N es minimal en M si y sólo si $\langle v, H \rangle = 0$, donde H denota al vector de curvatura media de N como subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} .*

Demostración. En general, el vector de curvatura media de N , H , es ortogonal a N : $H_p \in T_p N^\perp \subset T_p \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $p \in N$. Como $p \in N \subset S\partial(M, v)$, se satisface la condición $v \in T_p M$.

La clave de la prueba de esta proposición es el resultado en [6], pag. 79, el cual reproducimos en la proposición 1.3.2: N es minimal en M si y sólo si para todo $p \in N$, $H_p \in T_p M^\perp$.

Si ahora usamos la prop. citada, es inmediato que si N es minimal en M , $\langle v, H \rangle = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\langle v, H \rangle = 0$. Sabemos dos condiciones: $H_p \in T_p N^\perp$, y $H_p \in \langle v \rangle^\perp$. Como v no es tangente a N , se satisface la descomposición

$$T_p M = T_p N + \langle v \rangle.$$

Podemos concluir de esto que $H_p \in T_p M^\perp$. \square

Observación 2.4.1 Este teorema dice que la frontera de sombra, en alguna dirección, de una hipersuperficie del espacio Euclidiano es minimal de la hip. si y sólo si el vector de curvatura media de la f.s., como subvariedad del espacio Euclidiano, es ortogonal a la susodicha dirección.

Observación 2.4.2 Vamos a explorar más a detalle el teorema anterior en el caso en que $n = 2$. De esta forma, N es una subvariedad de dimensión uno de la superficie M^2 . Específicamente, N es una curva encajada en M y contenida en la frontera de sombra de $S\partial(M, v)$.

Ahora vamos a usar el siguiente hecho: una subvariedad de dim. uno es minimal si y sólo si es geodésica. La conclusión del teorema se puede enunciar como: N es una geodésica de M si y sólo si $\langle H, v \rangle = 0$. Para mayor claridad, veamos el significado de H . Por definición, H es el vector de curvatura media de N como subvariedad de \mathbb{R}^3 . Denotemos por ∇ a la derivada

covariante estándar de \mathbb{R}^3 . Entonces $H = \text{nor}(\nabla_X X)$, donde X es un campo de norma uno, tangente a N y nor es la proyección ortogonal de $T_x\mathbb{R}^3$ sobre $(TN)^\perp$. En resumen, $0 = \langle H, v \rangle = \langle \text{nor}(\nabla_X X), v \rangle$, es decir, $v \in (TN)^\perp$. Afirmamos que, $\nabla_X X = \text{nor}(\nabla_X X)$: la fórmula de Gauss de la curva N como subvariedad de \mathbb{R}^3 es $\nabla_X X = \nabla_X^N X + \text{nor}(\nabla_X X)$, pero $\nabla_X^N X = 0$ ya que N es una geodésica de si misma y X es un campo vectorial tangente a N de norma uno.

Entonces una curva contenida en la frontera de sombra $S\partial(M, v)$ es geodésica (de M) si y sólo si la dirección v es perpendicular a $\nabla_X X = \text{nor}(\nabla_X X)$, el cual es un vector que en principio sólo es ortogonal a la curva. El resultado clásico es, N es geodésica de M si y sólo si $\nabla_X X$ es ortogonal a M . En el análisis que acabamos de hacer, basta que $\nabla_X X$ sea ortogonal a v . Pero, además v es tangente a M y no lo es a N .

Corolario 2.4.1 *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una subvariedad, y sea $v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Sea $N \subset S\partial(M, v)$ una subvariedad compacta de M y codimensión uno. Supongamos que*

- N esta contenida en un hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} , el cual es transversal a v .

Si N es minimal entonces N es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Demostración. Sea Π el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} que contiene a N . Entonces el vector de curvatura media, H , de N como subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} esta contenido en Π : $H_p \in T_p\Pi$ para cada $p \in N$. Como Π es transversal a v , se sigue que v nunca es tangente a N . Ahora podemos aplicar el teorema anterior (ya que M es minimal) y deducir que $\langle H(p), v \rangle = 0$, para todo $p \in N$. En resumen, v es ortogonal a $H(p)$, donde éste es un vector en $T_p\Pi$.

Afirmamos que v es ortogonal a Π . Como N es compacta, al variar $x \in N$, podemos obtener una base de $T_p\Pi$, por traslación de los vectores $H(x)$ al punto p . Además los vectores $H(x)$ no pueden ser todos nulos ya que N es compacta y el espacio Euclidiano no contiene subvariedades compactas minimales (lo cual sería el caso si $H(x) = 0$, para cada $x \in N$).

Pero ya probamos que $H(x)$ es ortogonal a v , para todo x en N . Esto prueba que v es ortogonal a Π .

Finalmente, vamos a aplicar el lema 2.2.1, el cual nos dice que si N esta contenida en $S\partial(M, v) \cap H$ y H es ortogonal a v , entonces N es una subvariedad totalmente geodésica de M . \square

Observación 2.4.3 Un elipsoide n dimensional en \mathbb{R}^{n+1} tiene la propiedad que toda frontera de sombra esta contenida en un hiperplano transversal a la dirección de la f.s. (no necesariamente ortogonal a tal dirección). Por el corolario anterior, las fronteras de sombra minimales de un elipsoide, son totalmente geodésicas.

Ejemplo 2.4.1 La siguiente construcción, da un ejemplo de una variedad en \mathbb{R}^{n+2} que contiene a una subvariedad minimal, en alguna de sus fronteras de sombra.

Sea $v \in \mathbb{R}^{n+2} - \{0\}$, y sea $N^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$ una subvariedad tal que:

- v es transversal a N : $v \notin T_x N$ para cada $x \in N$,
- $\langle H, v \rangle = 0$,

donde H denota al vector de curvatura media de N como subvariedad de \mathbb{R}^{n+2} . Entonces N es una subvariedad minimal de la variedad $N_{\epsilon, v}$, definida por

$$N_{\epsilon, v} = \{y = x + \lambda v \in \mathbb{R}^{n+2} \mid x \in N, |\lambda| < \epsilon\},$$

el parametro ϵ denota a una función suave positiva de N , tal que $N_{\epsilon, v}$ es variedad. Si N es compacta, ϵ puede ser una función constante. Prueba: Esto es consecuencia del teorema 2.4.1. Debemos verificar que tenemos las condiciones del mismo. La variedad $N_{\epsilon, v}$ es una especie de vecindad “cilindrica” de N en la dirección v . Por tal razón, $S\partial(N_{\epsilon, v}, v) = N_{\epsilon, v}$, y entonces $N \subset S\partial(N_{\epsilon, v}, v)$.

Observación 2.4.4 Si en el ejemplo anterior hacemos $n = 1$, N resulta ser una curva γ . En tal caso su vector de curvatura media (con respecto al ambiente) es $H = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$. Si γ esta parametrizada por longitud de arco, este vector es la segunda derivada de γ .

Además se pide que este vector $\ddot{\gamma}$ sea ortogonal a una dirección fija v . Se puede ver que esta condición es equivalente a que la curva sea una **hélice clásica** (subvariedad de dimensión uno con ángulo constante respecto a la dirección v).

En resumen, dada una hélice con respecto a una dirección v , se puede construir una superficie de curvatura cero (localmente isométrica a un cilindro) que la contiene dentro de su frontera de sombra en la dirección v . Bajo estas condiciones la curva γ resulta ser una geodésica de la superficie de curvatura

cero. Lo cual se sigue del ejemplo anterior, ya que una subvariedad minimal de dimensión uno, es una geodésica.

Observación 2.4.5 En el ejemplo 2.4.1, se pide que la subvariedad Euclidiana, N , de codimensión dos, sea trasversal a v . No cualquier subvariedad de codimensión dos satisface esta condición.

Por ejemplo el *toro plano* encajado isométricamente en \mathbb{R}^4 :

$$N = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4,$$

no admite una dirección trasversal v , es decir, para cualquier $v \in \mathbb{R}^4$, existe un punto $x \in S^1 \times S^1$ tal que $v \in T_x(S^1 \times S^1)$.

Lo mismo pasa si $N = N_1 \times N_2$ es el producto de dos hipersuperficies Euclidianas compactas, $N_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$ y $N_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$. Ya que si $v = (v_1, v_2)$, fuera trasversal a $N = S^1 \times S^1$, entonces $S\partial(N, v) = \emptyset$. Pero por el teorema 2.2.1, $S\partial(N, v) = S\partial(N_1, v_1) \times S\partial(N_2, v_2)$. Para concluir, observamos que cualquier frontera de sombra de una hipersuperficie compacta es no vacía.

Ejemplo 2.4.2 La construcción del ejemplo 2.4.1 se basa en una subvariedad Euclidiana de codimensión dos, la cual es trasversal a una dirección v y cuyo vector de curvatura media es ortogonal a v . Como ya mencionamos, tener de codimensión dos no garantiza que exista una dirección trasversal. Sin embargo, si es posible satisfacer tales condiciones:

1. Sea $N_1 \subset \mathbb{R}^3$ una hélice clásica con respecto a la dirección v , incluso puede ser una curva en un plano ortogonal a v . Además asumimos que la curvatura N_1 nunca se anula. Que N_1 sea hélice es equivalente a que su vector de curvatura media H_1 en el espacio Euclidiano es ortogonal a v . De hecho $\|H_1\| \neq 0$ es su curvatura.

Consideremos la superficie $M = N_1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$.

Afirmación, $\langle H_M, v \rangle = 0$ y $v \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ es trasversal a M , donde H_M es el vector de curvatura media de $M \subset \mathbb{R}^4$:

Por la proposición 1.3.1, $H_M(x, y) = \frac{1}{2}H_1(x)$. como v es trasversal a $\{0\} \times \mathbb{R}$ y a N_1 , también lo es a M .

2. El hecho de tomar una hélice en la construcción de arriba puede parecer restrictivo. Otra forma de proceder es la siguiente.

Sea $N_1 \subset$ cualquier curva plana con curvatura nunca nula. Sea $N_2 \subset \mathbb{R}^3$ cualquier superficie minimal de \mathbb{R}^3 tal que admite una dirección $w \in \mathbb{R}^3$

trasversal. Sea $M^3 = N_1 \times N_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^5$, afirmamos que $w \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$ es transversal a M y que $\langle H_M, w \rangle = 0$. Como procedimos antes, $H_M(x, y) = \frac{1}{3}H_1(x) + \frac{2}{3}H_2(y) = \frac{1}{3}H_1(x)$. Se obtiene la afirmación si observamos que $H_1(x) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, w es ortogonal a N_1 y transversal a N_2 .

CAPITULO 3

Campos paralelos con respecto a una subvariedad y Hélices

En este capítulo extendemos algunos de los resultados del anterior. También se obtienen otros que no tienen un análogo en el cap. 2.

Lo primero es generalizar el concepto de *frontera de sombra* al caso en que el ambiente es una variedad Riemanniana con una subvariedad Riemanniana M , la cual admite un *campo paralelo a lo largo de ella*. Tal generalización no aparece en la literatura, pero es natural debido a la naturaleza topológica-diferencial del concepto.

Al llevar a cabo estas extensiones, saltarán a la vista las subvariedades *hélice* de una variedad Riemanniana. De hecho los conceptos de subvariedad *hélice*, *frontera de sombra* y *totalmente geodésica* están relacionadas como lo muestran los teoremas 3.2.1 y 3.2.2.

3.1 Campos en subvariedades y Hélices

Vamos a introducir campos vectoriales a lo largo de subvariedades, para esto nos apoyaremos en el texto de O'Neill [24], pags. 97-98.

Definición 3.1.1 Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y $N \subset M$ una subvariedad. Decimos que $X : N \rightarrow TM$ es un *campo vectorial en M a lo largo de N* , si $X(x) \in T_x M$, para todo $x \in N$.

Para cada $x \in N$, se tiene la descomposición:

$$T_x M = T_x N \oplus T_x N^\perp,$$

geoméricamente cada vector tangente en el ambiente se proyecta ortogonalmente a un vector tangente en la subvariedad, y un vector ortogonal a la misma.

La anterior suma es directa, es decir, se tiene una descomposición única para cada $V \in T_x M$: $V = \tan(V) + \text{nor}(V)$. Donde $\tan(V) \in T_x N$, y $\text{nor}(V) \in T_x N^\perp$. Esto permite definir de manera natural dos aplicaciones, $\tan : TM \longrightarrow TN$, y $\text{nor} : TM \longrightarrow TN^\perp$.

Esto implica lo siguiente, todo campo vectorial suave X como el de la definición anterior se descompone en la suma $X = \tan(X) + \text{nor}(X)$ de dos campos vectoriales suaves.

Dada una curva en una variedad Riemanniana, se pueden construir campos paralelos a lo largo de la curva. Para obtener dicho campo se hace uso del transporte paralelo a lo largo de la curva. Antes de continuar con la exposición necesitamos introducir el concepto de “campos paralelos” a lo largo de una subvariedad en lugar de una curva.

Sean M, N y X como en la definición anterior.

Definición 3.1.2 Sea ∇ la derivada covariante de (M, g) . El campo vectorial X es *paralelo con respecto a N* si $\nabla_W X = 0$, para todo $W \in T_y N$ y todo $y \in N$.

Observación 3.1.1 Además del caso de campos paralelos a lo largo de una curva en una variedad Riemanniana, hay otros dos casos cercanos al concepto que introducimos en la definición anterior. El primero es cuando el campo X a lo largo de N , es tangente a N , es decir, es un campo vectorial sobre N . Si X es paralelo con respecto a N , entonces X es un campo paralelo sobre N , es decir, $\nabla^N X = 0$ para la conexión estandar de N .

El segundo se tiene cuando X es normal a N . Si X es paralelo con respecto a N , entonces $\nabla^\perp X = 0$. Donde ∇^\perp es la conexión del haz normal TN^\perp .

Ejemplo 3.1.1 Si (M, g) es una variedad Riemanniana que admite un campo vectorial paralelo (vease la def. 3.3.1), entonces cuando restringimos X a cualquier subvariedad N de M obtenemos un campo paralelo con respecto a N .

El siguiente ejemplo muestra un campo paralelo con respecto a una subvariedad, pero que no es la restricción de algún campo paralelo del ambiente:

Sea $M = S^n$ la esfera n -dimensional con su métrica estándar. Sea $N = S^{n-1}$

una esfera máxima, y sea X un campo (a lo largo de N) normal a N (de norma uno). Hay que resaltar dos hechos, primero, X es un campo paralelo con respecto a N . Segundo, si X se pudiera extender a una vecindad de N , entonces M sería localmente un producto de la forma $\mathbb{R} \times M_1$, lo cual no es posible ya que M tiene curvatura constante.

Problema 3.1.1 El siguiente problema, puede ser de interés en Geometría Riemanniana de subvariedades: Consideremos una variedad Riemanniana (M, g) y una subvariedad N . Hallar las condiciones para la existencia de un campo vectorial en M a lo largo de N , $X : N \rightarrow TM$, el cual es paralelo con respecto a N .

Observación 3.1.2 Cuando $N = M$, la solución al problema anterior es bien conocida (ver [29], [30]).

Vamos a ver cual es la solución del problema 3.1.1 anterior para el caso en que $\dim M = 2$ y $\dim N = 1$. Es decir, la existencia de campos vectoriales paralelos a lo largo de una curva conexa N encajada en una superficie Riemanniana M . Es claro que si N no es compacta, dado cualquier vector $X_0 \in T_x M$ existe un campo vectorial paralelo a lo largo de N . El caso que resta por analizar es cuando N es compacta.

Dado $x \in N$, sea $\tau : T_x M \rightarrow T_x M$ el transporte paralelo en M a lo largo de la curva N . Como M es compacta, dado un vector $X_0 \in T_x M$, puede ser que $\tau(X_0) \neq X_0$. En caso contrario, X_0 definiría el campo buscado, X , por transporte paralelo.

1. Sea M orientable:
Existe un campo X paralelo a lo largo de la curva si y sólo si τ es la transformación identidad de $T_x M$.
2. Sea M no orientable y supongamos que τ invierte una orientación de $T_x M$. Existe un campo X paralelo a lo largo de la curva si y sólo si τ genera un grupo isomorfo a \mathbb{Z}_2 (τ^2 es la identidad).

Por ejemplo, si N es una geodésica de M , entonces su vector tangente es un campo paralelo. Se sigue que τ ó τ^2 es la identidad.

Sin embargo, como lo dicen los enunciados anteriores, también hay curvas encajadas que no son geodésicas y cuyo transporte paralelo induce la identidad en $T_x M$. Un ejemplo es una curva en un toro de revolución en \mathbb{R}^3 (donde la

curvatura Gaussiana es cero).

Parece natural pensar que el grupo de Holonomía de (M, g) debe jugar un papel relevante en la solución del problema 3.1.1.

Finalmente, hay otro caso interesante que conviene considerar. Supongamos que $\dim M = 2m + 1$ con $m \geq 1$ y que $\dim N = 1$. Es decir, N es una curva compacta encajada en una variedad de dimensión impar. En este caso, siempre existe un campo X paralelo con respecto a N :

la afirmación se sigue porque $\tau : T_x M \longrightarrow T_x M$ deja fija una dirección. Por consiguiente, existe X un campo paralelo a lo largo de N .

Vamos a ver una condición que resuelve el problema anterior, acerca de la existencia de un campo paralelo con respecto a una subvariedad. Para ello introducimos la siguiente terminología.

Definición 3.1.3 Sea N una subvariedad Riemanniana de (M^n, g) . Dado $y \in M$, denotamos por $Hol_y(M)$ al grupo de Holonomía, basado en x , de la conexión de Levi-Civita de (M, g) . Este subgrupo de $O(T_y M)$ consiste de las isometrías de $T_y M$ obtenidas por transporte paralelo P_γ a lo largo de una curva cerrada γ que pasa por y :

$$Hol_y(M) = \{P_\gamma : T_y M \longrightarrow T_y M \mid \gamma \subset M \text{ es suave por pedazos}\}.$$

Nótese que el grupo $Hol_y(M)$ actúa en $T_y M$.

Consideremos ahora el subgrupo de $Hol_x(M)$ donde $x \in N$, el cual definimos por

$$Hol_x(M, N) = \{P_\gamma \in Hol_x(M) \mid \gamma \subset N\}.$$

Llamamos a $Hol_x(M, N)$ el subgrupo de *Holonomía relativa* de $N \subset M$.

Teorema 3.1.1 Sean $N \subset M$ como en la def. anterior 3.1.3 y sea $G = Hol_x(M, N)$ con $x \in N$. Existe un campo, $X : N \longrightarrow TM$, paralelo con respecto a N si y sólo si existe $W \in T_x M$ tal que $G_W = G$, donde G_W es el subgrupo de isotropía en x bajo la acción de G en $T_x M$.

Demostración. Sea $W \in T_x M$ un vector fijo bajo la acción de G en $T_x M$. Para cada $z \in N$, definimos $X(z) = P_\beta(W)$, donde $\beta : [0, 1] \longrightarrow N$ es cualquier curva suave por pedazos, con $x = \beta(0)$ y $z = \beta(1)$. Hay que

ver que X no depende de β . Sea α otra curva con las mismas condiciones anteriores de β . Consideremos la curva suave por pedazos dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\beta}(t) = \beta(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(1 - 2t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por hipótesis, $P_\gamma(W) = W$, es decir, $P_\alpha(P_\beta(W)) = W$. Se deduce que $P_\beta(W) = P_\alpha^{-1}(W)$. Entonces $P_\beta(W) = P_\alpha(W)$. \square

Observación 3.1.3 Sea $X : N \longrightarrow TM$ un campo paralelo con respecto a N . Afirmamos que X tiene norma constante:

Sean $x \in N$, y $W \in T_x N$. $Wg(X, X) = 2g(\nabla_W X, X) = 0$. Como $g(X, X)$ es una función suave sobre N , entonces es constante. Se desprende de esto que X ó, es un campo constante igual a cero, ó nunca se anula. En adelante, a menos que se diga lo contrario, vamos a trabajar con campos X no nulos.

La segunda afirmación es que una curva integral de X es una geodésica de N

Observación 3.1.4 En un curso básico de Geometría Diferencial de curvas y superficies en el espacio Euclidiano, aparece el concepto de curva hélice: curva que forma ángulo constante con una dirección fija (ver [1]).

En la literatura aparecen generalizaciones de tal concepto clásico de hélice, ver por ejemplo [9]. En tal generalización la hélice sigue siendo una curva.

La siguiente definición habla acerca de subvariedades hélice, cuyo nombre se debe a la analogía geométrica del ángulo constante entre el espacio tangente de una subvariedad N y un campo en el ambiente paralelo con respecto a N . Es decir, es una generalización del concepto clásico, pero ahora consideramos también “hélices” de dimension mayor a uno.

Definición 3.1.4 Sea (M, g) una variedad Riemanniana, $N \subset M$ una subvariedad. Sea X un campo paralelo con respecto a N . Llamamos a N una subvariedad hélice de M con respecto a X , si la siguiente función es constante: $h : N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \max\{g(w, X(x)) \mid w \in T_x N, g(w, w) = 1\}. \quad (3.1)$$

Ejemplo 3.1.2 Sea (M, g) como antes. Sea $\gamma \subset M$ una geodésica, entonces γ es una hélice con respecto a cualquier campo paralelo a lo largo de γ .

En este ejemplo es importante que la curva γ sea geodésica: cualquier curva admite campos vectoriales paralelos a lo largo de si misma, pero su vector tangente no tiene por qué formar ángulo constante con tal campo.

Por supuesto también hay curvas que son hélices y no son geodésicas, tal como en los ejemplos clásicos de curvas en \mathbb{R}^3 . Este es el caso de una curva en una variedad Riemanniana $\alpha \subset M$, con un campo vectorial ortogonal a la curva y paralelo con respecto a la misma. El ángulo entre α y el campo es $\pi/2$.

Otro ejemplo es el de una subvariedad totalmente geodésica orientable, y de codimensión uno en una variedad Riemanniana. El campo ortogonal unitario determinado por la codimensión y la orientabilidad, es paralelo con respecto a tal subvariedad. Como la subvariedad y el campo son ortogonales, esta es una hélice con respecto al campo. Esta afirmación es la recíproca del corolario 3.2.1 con $r = 1$.

Proposición 3.1.1 Sea (M, g) una variedad Riemanniana, $N \subset M$ una hélice de M con respecto al campo vectorial X . Entonces $\tan(X)$, y $\text{nor}(X)$ tienen norma constante.

Demostración.

Ya vimos que X es de norma constante. Así basta checar que $X_0 := \tan(X)$ es constante, y como consecuencia $\text{nor}(X)$ también: $g(X, X) = g(\tan(X) + \text{nor}(X), \tan(X) + \text{nor}(X)) = g(\tan(X), \tan(X)) + g(\text{nor}(X), \text{nor}(X))$.

Por hipótesis, la función $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (3.1), es constante. Sea $y \in N$, como $h(y)$ es un máximo de un producto interior en $T_y N$, se tiene que $h(y) = g\left(\frac{X_0(y)}{(g(X_0(y), X_0(y)))^{1/2}}, X(y)\right)$. Ahora, usemos la relación $X = \tan(X) + \text{nor}(X) = X_0 + \text{nor}(X)$. Al sustituir obtenamos, $h(y) = g\left(\frac{X_0(y)}{(g(X_0(y), X_0(y)))^{1/2}}, X_0(y)\right) = (g(X_0(y), X_0(y)))^{1/2}$. Con esto alcanzamos nuestro objetivo. \square

Corolario 3.1.1 Sean M , N , X , como en la proposición anterior, con X sin puntos singulares. Si N es hélice compacta y orientable, entonces N tiene característica de Euler cero, ó X es ortogonal a N .

Demostración.

Supongamos que X no es ortogonal a N . Entonces por la prop. anterior,

$\tan(X) : N \longrightarrow TN$ es un campo vectorial de norma constante, y es no nulo ya que el campo X no es ortogonal. Por el teorema de Poincare-Hopf (ver [11], pag. 134), la característica de Euler de N es cero. \square

Observación 3.1.5 El corolario anterior sólo da información si $\dim N$ es par, ya que en otro caso la característica de Euler de una variedad compacta y orientable siempre es cero (ver [12], pag. 134).

Por ejemplo una esfera de dimensión par sólo puede ser hélice de un espacio Euclidiano con respecto a un campo, si el ángulo con este es ortogonal. Pero cabe la posibilidad que una de dim. impar sea, además, hélice con respecto a un campo no ortogonal a la misma.

Ahora vamos a dar una familia de ejemplos, donde la hélice no es ortogonal al campo.

Ejemplo 3.1.3 En primer lugar, cualquier variedad Riemanniana N es hélice del producto Riemanniano $N \times \mathbb{R}$, con respecto al campo vectorial ortogonal a N , y generado por \mathbb{R} .

Sea N una hélice de la variedad Riemanniana (M, g) , con respecto al campo vectorial $X : N \longrightarrow TM$, y supongamos que X es ortogonal a N . Si N admite un campo vectorial $Y : N \longrightarrow TN$ paralelo con respecto a N , entonces N es hélice de M con respecto al campo $X + Y$, el cual no es ortogonal a N . Surge una pregunta natural: ¿Que variedades compactas N de característica de Euler cero, son hélices de una variedad Riemanniana ambiente con respecto a un campo vectorial, el cual nos es ortogonal a N ? Un caso de estudio puede ser las variedades compactas de dimensión impar (ver [12], pags. 161 y 164).

Definición 3.1.5 Sea (\bar{M}, g) una variedad Riemanniana, y $M \subset \bar{M}$ una subvariedad. Si por cada punto de M , pasa una geodésica de \bar{M} contenida en M , entonces decimos que M es una subvariedad *reglada* de \bar{M} .

Proposición 3.1.2 Sea (\bar{M}, g) una variedad Riemanniana. Sea $M \subset \bar{M}$ una hipersuperficie. Sea $X : M \longrightarrow T\bar{M}$ un campo paralelo con respecto a M . Si M es hélice con respecto a X , entonces

a) Si X es ortogonal a M en algún punto, M es una subvariedad totalmente geodésica, ó

b) Si X es tangente a M en algún punto, M es localmente un producto Riemanniano de la forma $\mathbb{R} \times M_1$, ó

c) Si X es transversal a M en algún punto y las curvas integrales de $\tan X$ son geodésicas de M , M es reglada, es decir, tales curvas son geodésicas de \overline{M} .

Demostración.

- a). Como M es hélice, X es ortogonal a M en todo punto. De esto se sigue que M es una subvariedad totalmente geodésica de \overline{M} .
- b). Análogamente, X es tangente a M , es decir, es un campo vectorial de M . Se sigue que X es paralelo en M . Es bien conocido que una variedad Riemanniana que admite un campo vectorial paralelo, es localmente un producto como se afirma (consulte por ejemplo [29], [30]).
- c). Un argumento similar a los anteriores nos dice ahora que X será transversal a M en todo punto. Sea $X_0 = \tan X$ y $X_1 = \text{nor } X$. Sea $\alpha \subset M$ tal que, $\dot{\alpha}(t) = X_0(\alpha(t))$. Es decir α es una curva integral de X_0 . Entonces α también es una hélice con respecto a X . Esta última afirmación nos dice que $g(\dot{\alpha}, X(\alpha))$ es constante. Sea ∇ la derivada de \overline{M} . Si derivamos,

$$0 = \frac{d}{dt}g(\dot{\alpha}, X(\alpha)) = g(\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}, X) + g(\dot{\alpha}, \nabla_{\dot{\alpha}}X).$$

Como X es paralelo con respecto a M , $\nabla_{\dot{\alpha}}X = 0$, por consiguiente $g(\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}, X) = g(\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}, X_1) = 0$. Como α es geodésica de M , $\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$ es ortogonal a la hipersuperficie M y además vale cero (si no, X tendría que ser tangente a M). Este hecho prueba que α es geodésica de \overline{M} . \square

Observación 3.1.6 Vamos a considerar el caso cuando M es una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} , y, además, una hélice de \mathbb{R}^{n+1} con respecto a un campo vectorial constante X en el ambiente. Bajo estas condiciones se satisface lo siguiente.

- M no es compacta.
- M es orientable.
- La curvatura de Gauss-Kronecker de M es cero, pues el mapeo de Gauss $N : M \longrightarrow S^n$ es singular, debido a que es una hélice.

3.2 Hélices vs Subvariedades totalmente geodésicas

Proposición 3.2.1 *Sea (M^3, g) una 3-variedad Riemanniana. Sea $N \subset M$ una superficie, y sea $X : N \rightarrow TM$ un campo vectorial a lo largo de N . Finalmente consideremos una subvariedad α de N , 1-dimensional, conexa, y tal que $X|_\alpha$ es paralelo con respecto a α y transversal a α . Entonces cualesquiera dos de las siguientes condiciones implican la tercera.*

- a) α es una geodésica de N , pero no de M ,
- b) $X|_\alpha$ es tangente a N ,
- c) α es una hélice con respecto a $X|_\alpha$.

Demostración.

Sea ∇ la derivada covariante de (M, g) , y parametricemos a α por longitud de arco: $g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = 1$.

Supongamos las condiciones a) y b):

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\alpha}, X(\alpha)) = g(\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}, X) + g(\dot{\alpha}, \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X(\alpha)).$$

Por hipótesis, $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}X = 0$, además la condición a) establece que $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha} \perp T_\alpha N$, y b) nos da la siguiente propiedad: $X(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}N$. En consecuencia, $g(\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}, X) = 0$.

Supongamos las condiciones a) y c):

$g(\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}, X) = \frac{d}{dt}g(\dot{\alpha}, X(\alpha)) - g(\dot{\alpha}, \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X(\alpha))$. El primer término del lado derecho es cero por la condición c), y el segundo término también se anula, pues X es paralelo con respecto a α . Por consiguiente, ó $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha} \perp X(\alpha)$, ó $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha} = 0$. Finalmente, por a), $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha} \perp T_\alpha N$, entonces $X(\alpha) \in T_\alpha N$ (condición b)).

Supongamos las condiciones b) y c):

De manera análoga a las dos implicaciones anteriores, $g(\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}, X) = 0$. Además, $g(\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = 0$, por tanto, $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}$ es cero, ó es ortogonal tanto a X y a $\dot{\alpha}$ ambos vectores en $T_\alpha N$. Si estos fueran linealmente independientes, tendríamos de inmediato que $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}$ es ortogonal a N (condición para que α sea geodésica de N). Si $\dot{\alpha}(t) = \lambda X(\alpha(t))$, donde λ es constante pues la norma de los vectores involucrados lo es, $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}\lambda X = \lambda \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X = 0$. Lo cual contradice a). \square

Observación 3.2.1 En el trabajo [27] de M. Tamura, se estudian superficies en \mathbb{R}^3 la cuales tienen curvas que son geodésica y hélices. En el artículo de Y.

H. Kim ([16]), se hace un estudio similar, pero se consideran además curvas planas.

Ejemplo 3.2.1 La siguiente figura muestra un ejemplo que satisface las condiciones de la prop. anterior. La variedad ambiente es $M = \mathbb{R}^3$, y la superficie N es como se describe a continuación. Primero consideremos una hélice circular, con eje el eje z . Definimos a N como la frontera de una vecindad tubular (de radio constante) de esta curva. En forma coloquial: la superficie es como un tubo, enrollado en otro que es circular recto. El campo vectorial X , es el generado por un vector no nulo paralelo al eje z . Un cálculo directo prueba que $S\partial(M, X)$ consiste de dos hélices circulares, encajadas en cilindros circulares rectos paralelos (con el mismo eje: el z) y tangentes a N . Además, la superficie N esta contenida en la región acotada por tales cilindros, y la frontera de sombra es la intersección de cada cilindro con N .

Esta proposición no se puede extender a dimensiones mayores: una variedad ambiente de dimensión n , y una hipersuperficie con una subvariedad de codimensión uno en lugar de una curva. Sin embargo, alguna de las implicaciones anteriores si se pueden extender, y las otras necesitan hipótesis más restrictivas.

Eso es lo que se realiza en los siguientes resultados.

Teorema 3.2.1 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana y sea $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$ ($n \geq 2$) una subvariedad de codimensión k ($k \geq 0$). Consideremos una subvariedad $N \subset M$ de codimensión uno, la cual no es subvariedad totalmente geodésica de \overline{M} . Sea $X : N \rightarrow T\overline{M}$ un campo vectorial en \overline{M} paralelo con respecto a N y ortogonal a N . Entonces X es tangente a M si y sólo si N es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Demostración.

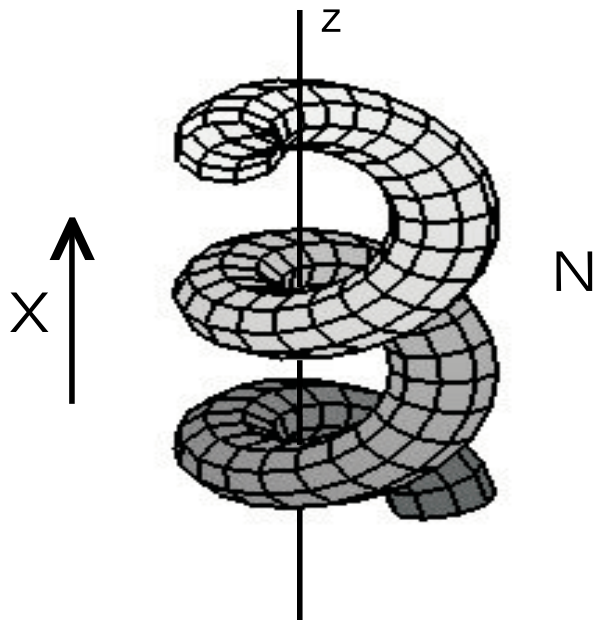
\implies) Sea ∇ la derivada covariante canónica de \overline{M} .

Sea $x \in N$, como $\dim(T_x N^\perp \cap T_x M) = 1$ y por hipótesis $X(x) \in T_x N^\perp \cap T_x M$, obtenemos que $\langle X(x) \rangle = T_x N^\perp \cap T_x M$. Por consiguiente, tenemos la siguiente igualdad para todo $x \in N$,

$$T_x M = T_x N \oplus (T_x N^\perp \cap T_x M) = T_x N \oplus \langle X(x) \rangle. \quad (3.2)$$

Sea $\gamma \subset N$ una geodésica y sea $x \in \gamma$ cualquier punto, de aquí que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ es ortogonal a N , es decir, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in T_x N^\perp$. Queremos probar que γ es geodésica

Figura 3.1: hélice \equiv geodésica \equiv frontera de sombra



de M . Por la igualdad (3.2), resta probar que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ es ortogonal a $X(x)$: Sabemos que $g(X(\gamma(t)), \dot{\gamma}) = 0$, se sigue que,

$$g(X(\gamma(t)), \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) + g(\nabla_{\dot{\gamma}}X(\gamma(t)), \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt}g(X(\gamma(t)), \dot{\gamma}) = 0.$$

Esto prueba que, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ es ortogonal a M , esto implica que γ es una geodésica de M .

\Leftarrow) Recordemos que en esta implicación asumimos que $k = 1$. Sea $x \in N$, necesitamos probar que: $X(x) \in T_x M$. Sea $\gamma \subset N$ una geodésica de N que pasa por x y que no es geodésica de \overline{M} . Por hipótesis, γ también es geodésica de M . Si ∇ denota la derivada covariante canónica de \overline{M} , $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \in (T_\gamma M)^\perp$. Veamos que $X(x)$ es ortogonal a $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$. Para esto, observe que $g(\dot{\gamma}, X(x)) = 0$. Se sigue que

$$g(X(\gamma(t)), \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) + g(\nabla_{\dot{\gamma}}X(\gamma(t)), \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt}g(X(\gamma(t)), \dot{\gamma}) = 0.$$

Pero $\nabla_{\dot{\gamma}}X(\gamma(t)) = 0$, ya que X es paralelo con respecto a N . Concluimos que $g(X(\gamma(t)), \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = 0$, pues M es de codimensión uno. \square

Observación 3.2.2 La primera de las implicaciones del teorema anterior se puede extender un poco, y permitir que la codimensión de N sea mayor a uno. Al partir de esta idea, y si como ingrediente extra pedimos que $M = \overline{M}$, se obtiene la siguiente condición necesaria para que una subvariedad sea totalmente geodésica.

Por último, obsérvese que en la implicación: si es totalmente geodésica entonces es tangente; la codimensión de M es uno (ver la demostración), a diferencia de la primera donde dicha codimensión es $k \geq 0$.

Corolario 3.2.1 *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana ($n \geq 2$). Sea $N \subset M$ una subvariedad de codimensión r , y sean $X_j : N \rightarrow TM$, $j = 1, \dots, r$, campos vectoriales de M paralelos con respecto a N , y tales que en cada $x \in N$, $\{X_1(x), \dots, X_r(x)\}$ forman una base de $T_x N^\perp$. Entonces N es una subvariedad totalmente geodésica de M .*

Demostración.

Sea ∇ la derivada covariante canónica de M .

Sea $x \in N$, por hipótesis tenemos que $\dim(T_x N^\perp) = r$, y

$$T_x M = T_x N \oplus (\oplus_{j=1}^r \langle X_j(x) \rangle). \quad (3.3)$$

Sea $\gamma \subset N$ una geodésica que pasa por x , de aquí que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ es ortogonal a N , es decir, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \in T_{\gamma}N^{\perp}$. Queremos probar que γ es geodésica de M . Por la igualdad (3.3), resta probar que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ es ortogonal a cada $X_j(\gamma)$: Sabemos que $g(X_j(\gamma), \dot{\gamma}) = 0$, se sigue que,

$$g(X_j(\gamma), \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) + g(\nabla_{\dot{\gamma}}X_j(\gamma), \dot{\gamma}) = dg(X_j(\gamma), \dot{\gamma}) = 0.$$

Es decir, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ es ortogonal a M , en consecuencia, γ es una geodésica de M . \square

Observación 3.2.3 Este corolario tiene dos casos de interés: Primero, si la codimensión de N es uno, se afirma que si hay un campo vectorial paralelo con respecto a N (y ortogonal), entonces N es una subvariedad totalmente geodésica de M . Segundo, si N es una subvariedad de dimensión uno (codimensión $n-1$) y con $n-1$ campos (ortogonales y linealmente independientes) paralelos a lo largo de la curva, entonces N es una geodésica de M . Nótese que tal curva es una hélice con respecto a cada uno de dichos campos, ya que el ángulo entre la curva y cada campo es $\pi/2$. De hecho para una curva que es hélice, tales ángulos no tienen por qué ser ortogonales para garantizar que es una geodésica.

Es un ejercicio probar la afirmación siguiente: Sea α una curva (subvariedad de dimensión uno) de una variedad Riemanniana (M^n, g) . Sean X_j , $j = 1, \dots, n-1$, campos vectoriales paralelos a lo largo de α , y tales que

- i) α es hélice con respecto a cada uno de estos campos,
- ii) $\{\dot{\alpha}, X_1(\alpha), \dots, X_{n-1}(\alpha)\}$ forman una base de $T_{\alpha}M$.

Entonces α es una geodésica de M .

Teorema 3.2.2 Sea (\bar{M}, g) una variedad Riemanniana. Sea $M^n \subset \bar{M}^{n+k}$ ($n \geq 2$) una subvariedad de codimensión k ($k \geq 0$). Sea $N \subset M$ una subvariedad de codimensión uno, y $X : N \rightarrow T\bar{M}$ un campo vectorial en \bar{M} paralelo con respecto a N y tangente a M . Si N es una subvariedad totalmente geodésica de M , entonces N es una hélice de \bar{M} con respecto a X .

Demostración.

Si $X(x) \in T_xN$, para todo $x \in N$, N es una hélice. En otro caso, sea $p \in N$ tal que $X(p) \notin T_pN$. Así que,

$$T_pM = T_pN \oplus \langle X(p) \rangle. \quad (3.4)$$

Para alcanzar nuestro objetivo, vamos a verificar que: $T_x N$ tiene ángulo constante (no depende de x) con $X(x)$, para cada x en N .

Sea γ cualquier geodésica de N de p a x , entonces también lo es de M . Ahora, consideremos el transporte paralelo τ en M a lo largo de γ de p a x . Por lo tanto, $\tau : T_p M \rightarrow T_x M$ es una isometría. Así τ transforma la ecuación anterior, (3.4), en la decomposición $T_x M = T_x N \oplus \langle X(x) \rangle$. Finalmente, observe que el transporte paralelo deja el ángulo entre $T_x N$ y $X(x)$ igual al que hay entre $T_p N$ y $X(p)$. \square

Observación 3.2.4 Los teoremas anteriores 3.2.1 y 3.2.2 se pueden enunciar usando el concepto de frontera de sombra. En la observación 3.3.1 están los enunciados.

Corolario 3.2.2 Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana ($n \geq 2$). Sea $N \subset M$ una subvariedad de codimensión uno, y $X : N \rightarrow M$ un campo vectorial de M paralelo con respecto a N . Si N es una subvariedad totalmente geodésica de M , entonces es una hélice con respecto a X .

Demostración.

Sólo hay que hacer $k = 0$, $M = \overline{M}$, y aplicar el resultado anterior. \square

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior (3.2.2) no es válido, y en consecuencia tampoco lo es el recíproco de su corolario. De hecho la primera implicación del teorema (3.2.1) dice que tal recíproco es verdadero siempre y cuando el ángulo (entre la subvariedad hélice y el campo en cuestión) sea ortogonal.

Ejemplo 3.2.2 Sea $\overline{M} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (con su métrica estándar), y sea $M = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$, finalmente definamos $N \subset M$ como $N = \{(x, y, z, 0) | z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$, esta superficie es un cono circular. Sea X el campo vectorial en \overline{M} a lo largo de N , generado por traslaciones del vector $(0, 0, 1, 0)$. Es claro que X es, tangente a M a lo largo de N y paralelo con respecto a N . Además N es una hélice con respecto a X , con un ángulo no ortogonal, sino de $\pi/4$. Sin embargo, N no es una subvariedad totalmente geodésica de M . Cuando el ángulo es $\pi/2$ probamos que N es subvariedad totalmente geodésica de M .

3.3 Fronteras de sombra en campos vectoriales paralelos

Definición 3.3.1 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana. Sea ∇ la derivada covariante canónica de (\overline{M}, g) , y X un campo vectorial sobre \overline{M} . Decimos que X es un *campo vectorial paralelo* sobre \overline{M} , si

$$\nabla_W X = 0, \text{ para todo } W \in T_x \overline{M} \text{ y } x \in \overline{M}.$$

Nótese que un campo paralelo tiene norma constante.

No cualquier variedad Riemanniana (M, g) admite un campo vectorial paralelo. Por ejemplo, si M es compacta entonces debe tener característica de Euler cero.

Ejemplo 3.3.1 Una variedad M isométrica a un producto Riemanniano de la forma $\mathbb{R} \times M_2$ siempre admite un campo vectorial paralelo:

Definimos $X : M \rightarrow TM$ como $X(t, y) = \partial_t$, donde estamos haciendo la identificación $T_{(t,y)}M = T_t\mathbb{R} \oplus T_yM_2$.

Proposición 3.3.1 Sea M el producto Riemanniano $\mathbb{R} \times M_2$, y sea $X = \partial_t$ el campo vectorial paralelo de M en la dirección de \mathbb{R} . Sea $N \subset M$ una subvariedad. Si N es compacta, entonces X es ortogonal a N en algún punto.

Demostración.

Como N es compacta, la proyección π_1 de N en \mathbb{R} es compacta, es decir $\pi_1(N) \subset \mathbb{R}$ tiene un máximo denotado por t_0 . Sea $x \in N$ tal que $\pi_1(x) = t_0$, afirmamos que $t_0 \times M_2 = \pi_1^{-1}(t_0)$ es tangente a N en x . Deducimos de este hecho que $T_x N \subset T_x(t_0 \times M_2)$. Pero observemos que X es ortogonal a $t_0 \times M_2$, como consecuencia tenemos que X es ortogonal a N en x . \square

Ya definimos qué es una hélice en la def. 3.1.4. Se definió en base a un campo paralelo con respecto a una subvariedad. Por el ejemplo 3.1.1, una hélice se puede definir con respecto a un campo vectorial paralelo en el ambiente.

Con las mismas hipótesis de la prop. anterior, podemos concluir lo siguiente.

Corolario 3.3.1 Si N es una hélice compacta en $M = \mathbb{R} \times M_2$, entonces $X = \partial_t$ es ortogonal a N (en todo punto).

Demostración.

Por la prop. 3.3.1, X es ortogonal a N en algún punto. Como N es hélice, el ángulo entre N y X es constante. Pero ya sabemos que en un punto, ese ángulo es $\pi/2$. De esto se sigue la afirmación que queríamos probar. \square

Uno puede preguntarse si una hélice compacta siempre debe ser ortogonal al campo X . La respuesta es que no, incluso con respecto a un campo paralelo en el ambiente. Debido a que lo esencial (en la prop. 3.3.1) no es la existencia de un campo en el ambiente, sino que el campo sea en la dirección del factor \mathbb{R} . Esto se observa con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.2 Sea $M = \mathbb{R} \times S^1 = \{(t, \theta)\}$, y sea $N = \{0\} \times S^1$. El campo vectorial sobre M que vamos a considerar es $X = \partial_t + \partial_\theta$. Este campo es paralelo en M ya que $\partial_t, \partial_\theta$ lo son. Además, N es una hélice compacta de M con respecto al campo X : El ángulo entre N y X es constante, pero no es $\pi/2$. En consecuencia, una hélice compacta con respecto a un campo vectorial paralelo no necesariamente es ortogonal al mismo.

Es natural preguntarse cuales variedades admiten un campo paralelo definido globalmente. La respuesta se muestra a continuación.

El siguiente teorema de D. J. Welsh y su prueba se puede consultar en [30]. Nos da las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de un campo vectorial paralelo en una variedad Riemanniana dada.

Teorema 3.3.1 *Una variedad Riemanniana completa y conexa admite p campos vectoriales paralelos linealmente independientes si y sólo si existe una variedad Riemanniana M_2 , y un grupo $L \subset \mathbb{R}^p \times I(M_2)$ tal que*

- (a) *la primera proyección $pr|L$ es inyectiva y*
- (b) *las orbitas de L en $\mathbb{R}^p \times M_2$ son discretas, así que M es isométrica a $(\mathbb{R}^p \times M_2)/L$.*

Definición 3.3.2 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana, y $X : M \rightarrow T\overline{M}$ un campo vectorial paralelo con respecto a M , donde M es una subvariedad de \overline{M} . Definimos la *frontera de sombra* de M con respecto a X como el siguiente subconjunto de M .

$$S\partial(M, X) = \{x \in M \mid X(x) \in T_x M\}. \quad (3.5)$$

Observación 3.3.1 Este concepto de frontera de sombra tiene como consecuencia la siguiente propiedad.

Sea $N \subset M$ una subvariedad. El campo $X : M \rightarrow T\bar{M}$ es tangente a M a lo largo de N si y sólo si $N \subset S\partial(M, X)$.

Lo anterior nos permite reenunciar los teoremas 3.2.1 y 3.2.2 respectivamente con la terminología de la frontera de sombra:

Sea (\bar{M}, g) una variedad Riemanniana y sea $M^n \subset \bar{M}^{n+k}$ ($n \geq 2$) una subvariedad de codimensión k ($k \geq 0$). Consideremos una subvariedad $N \subset M$ de codimensión uno y sea $X : M \rightarrow T\bar{M}$ un campo vectorial en \bar{M} paralelo con respecto a M . Los enunciados se reescriben como:

1. Si N no es subvariedad totalmente geodésica de \bar{M} y X ortogonal a N . Entonces $N \subset S\partial(M, X)$ si y sólo si N es una subvariedad totalmente geodésica de M .
2. Si $N \subset S\partial(M, X)$ y N es una subvariedad totalmente geodésica de M , entonces N es una hélice de \bar{M} con respecto a X .

Observación 3.3.2 Como mencionamos en el ejemplo 3.1.1, si $Y : \bar{M} \rightarrow T\bar{M}$ es un campo paralelo sobre \bar{M} entonces $X = Y|_M : M \rightarrow T\bar{M}$ es un campo paralelo con respecto a M , para cualquier subvariedad M . Así que dado Y un campo paralelo sobre \bar{M} , tiene sentido la frontera de sombra, de cualquier subvariedad M , con respecto a $Y|_M$.

El siguiente teorema es una generalización del teorema 2.2.3. En ese resultado se afirma que una hipersuperficie (codimensión uno) en el espacio Euclidiano, cuya curvatura seccional nunca se anula, tiene la propiedad de que toda frontera de sombra es subvariedad. En esta extensión la codimensión puede ser mayor a uno, y la curvatura seccional se puede anular.

Dada una subvariedad M de una variedad Riemanniana (\bar{M}, g) , la segunda forma fundamental de $M \subset \bar{M}$ es un tensor el cual denotamos como II , donde $II : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$. Si X es un campo vectorial sobre \bar{M} y $x \in M$ es tal que $X(x) \in T_x M$, entonces podemos considerar la aplicación lineal siguiente:

$$II(X(x), \cdot) : T_x M \rightarrow T_x M^\perp.$$

Si esta transformación lineal es sobreyectiva, diremos que $II(X(x), \cdot)$ es sobreyectiva. En particular, si $\text{cod}M = 1$, la condición anterior es equivalente a que $II(X(x), \cdot) \neq 0$.

Teorema 3.3.2 Sean (\overline{M}^{n+k}, g) ($n \geq k$), $M^n \subset \overline{M}$ como antes y X un campo paralelo sobre \overline{M} . Si $II(X(y), \cdot)$ es sobreyectiva para cada $y \in S\partial(M, X)$, entonces $S\partial(M, X)$ es una subvariedad de M de dimensión $n - k$.

Demostración.

Sea ∇ la derivada covariante de \overline{M} . Sea $p \in S\partial(M, X)$, y $U \subset M$ una vecindad abierta de p . Afirmación: $S\partial(M, X) \cap U$ es una subvariedad de M .

Sean $\xi_j : U \rightarrow TU^\perp$, $j = 1, \dots, k$ una base de campos vectoriales ortonormales (U es tal que existen estos campos). Consideremos la función $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, dada por

$$F(x) = (g(X(x), \xi_1(x)), \dots, g(X(x), \xi_k(x))).$$

Es claro que $F^{-1}(0) = S\partial(M, X) \cap U$. Para probar la afirmación, es suficiente verificar que $0 \in \mathbb{R}^k$ es un valor regular de F . Es decir, veamos que para cada $x \in S\partial(M, X) \cap U$, $F_{*x} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es sobreyectiva. Sean (y_1, \dots, y_n) coordenadas locales en U . Derivemos en estas coordenadas, $\frac{\partial F}{\partial y_l} = (\frac{\partial}{\partial y_l} g(X(x), \xi_1(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_l} g(X(x), \xi_k(x)))$, para $1 \leq l \leq n$. Además, como X es paralelo,

$$\frac{\partial}{\partial y_l} g(X(x), \xi_j(x)) = g(\nabla_{\partial y_l} X, \xi_j) + g(X, \nabla_{\partial y_l} \xi_j) = g(X, \nabla_{\partial y_l} \xi_j).$$

Por otro lado, la fórmula de Weingarten nos dice que $\nabla_{\partial y_l} \xi_j = -A_{\xi_j}(\partial y_l) + \nabla_{\partial y_l}^\perp \xi_j$. En conclusión,

$$\frac{\partial}{\partial y_l} g(X(x), \xi_j(x)) = g(X, -A_{\xi_j}(\partial y_l)) = -g(II(X, \partial y_l), \xi_j(x)),$$

para todo $x \in S\partial(M, X)$, $1 \leq j \leq k$, y $1 \leq l \leq n$.

Ahora si estamos en posición de ver que la matriz

$$(F_{*x})_{jl} = -(g(II(X, \partial y_l), \xi_j(x)))$$

tiene rango k . Supongamos que los vectores renglón son linealmente dependientes, hecho del cual obtenemos la siguiente condición

$\sum_{j=1}^k a_j g(II(X, \partial y_l), \xi_j(x)) = 0$, para cada $1 \leq l \leq n$, y donde $a_j \in \mathbb{R}$ son constantes. Esta expresión se puede reescribir como

$$g(II(X, \partial y_l), \sum_{j=1}^k a_j \xi_j(x)) = 0,$$

para cada $1 \leq l \leq n$. Como $II(X, \cdot)$ es sobre, $\sum_{j=1}^k a_j \xi_j(x) = 0$, por lo tanto $a_j = 0$. Lo cual prueba que 0 es un valor regular de F . Entonces por el teorema de la preimagen (topología diferencial), $F^{-1}(0) \cap U$ es una subvariedad de U de dimensión $n - k$. \square

Observación 3.3.3 Una versión de este resultado para el caso especial de una frontera de sombra de una superficie suave en \mathbb{R}^3 , se puede encontrar en las notas de Howard [14], [13] y en el artículo de Ghomi [10].

Observación 3.3.4 El teorema anterior 3.3.2, se puede extender al caso en que X es sólo un campo paralelo con respecto a M (es decir, $X : M \rightarrow T\overline{M}$), no necesariamente global. Se puede ver que la prueba es similar.

En particular, vamos a considerar nuevamente el caso donde $\dim \overline{M} = 2$ y $\dim M = 1$. Veamos como se traduce el teorema 3.3.2 anterior en tal situación. Sea $x \in M$, la curvatura geodésica de M en x es $\nabla_Z Z$, donde Z es un campo tangente unitario sobre M . Nótese que la frontera de sombra de M con respecto a X consiste de los puntos donde el campo es tangente a M . El enunciado del teorema toma la forma:

Si la curvatura geodésica en los puntos de $S\partial(M, X)$ nunca se anula, entonces $S\partial(M, X)$ es un subconjunto discreto de puntos de M . Si M es compacta, tal subconjunto es finito.

En forma más elemental: Sea X un campo paralelo a lo largo de una curva M encajada en una superficie Riemanniana. Si la curvatura geodésica de M es diferente de cero en los puntos de tangencia entre X y M , entonces tal conjunto de tangencia es discreto.

Observación 3.3.5 El Teorema 3.3.2 implica que:

Si M es una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} cuya curvatura seccional nunca se anula, entonces toda frontera de de sombra de M es una subvariedad de codimensión uno. Nótese que en este caso los campos paralelos son los constantes. La implicación se deduce porque en codimensión uno la hipótesis sobre la segunda forma fundamental se sigue de la condición más restrictiva acerca de la curvatura seccional.

Los siguientes ejemplos nos dan más detalles de la relevancia de algunas de las hipótesis de este último teorema.

Ejemplo 3.3.3 Consideremos el siguiente ejemplo.

Sea M el toro de revolución en $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, parametrizado como,

$$\sigma(u, v) = ((\cos v + 2) \cos u, (\cos v + 2) \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v),$$

donde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. De esta forma el eje de rev. es el eje z , y el parametro u es el ángulo de rotación con respecto a tal eje.

Sea X el campo vectorial constante $X = (1, 0, 0)$, el cual es ortogonal al eje de revolución. Antes de analizar al conjunto $S\partial(M, X)$, conviene calcular la segunda forma fundamental de M dentro del ambiente Euclidiano.

Por definición, $II_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M^\perp (\simeq \mathbb{R})$ esta dada por $II_p(Y, Z) = -\langle dN_p(Y), Z \rangle$, donde $p = \sigma(u, v)$, $N : M \rightarrow S^2$ es el mapeo de Gauss, y hacemos la identificación $T_p M \simeq T_{N(p)} S^2$. La matriz asociada a II_p con respecto a la base en $T_p M$ inducida por la parametrización $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ es:

$$A_{\sigma(u,v)} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm \operatorname{sen} v \end{pmatrix},$$

donde $e = \langle \sigma_{uu}, N \rangle$, $f = \langle \sigma_{uv}, N \rangle$, $g = \langle \sigma_{vv}, N \rangle$. Con la ayuda de esta matriz podemos expresar II_p como sigue:

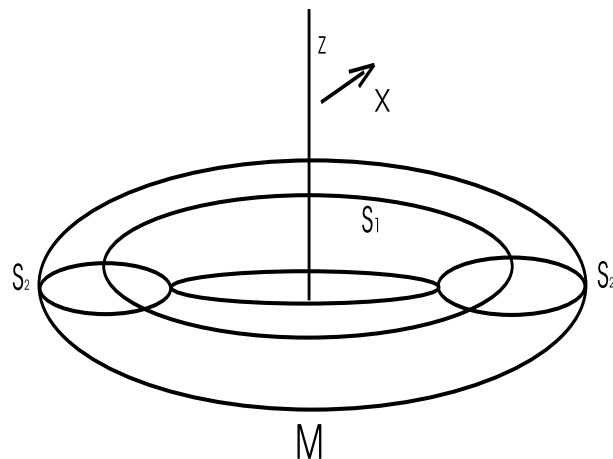
$$II_p(Y, Z) = (a \ b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm \operatorname{sen} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = bd \operatorname{sen} v,$$

donde $Y = a\sigma_u + b\sigma_v$, y $Z = c\sigma_u + d\sigma_v$ son vectores en $T_p M$.

Se puede ver que $S\partial(M, X) = S_1 \cup S_2 = \{\sigma(u, v) \in M \mid v = \pi/2, 3\pi/2\} \cup \{\sigma(u, v) \in M \mid u = \pi/2, 3\pi/2\}$. Nótese que $S_1 = (M \cap \{z = 1\}) \cup (M \cap \{z = -1\})$, y $S_2 = (M \cap \{x = 0\})$, siendo ambos conjuntos subvariedades de M . Ahora $S_1 \cup S_2$ no es subvariedad, lo cual es congruente al teorema ya que $II_p(X, W) = 0$ para cada $W \in T_p S_2$, $p \in S_2$. La razón es que un punto en S_2 es de la forma $p = \sigma(\pi/2, v)$, ó $p = \sigma(3\pi/2, v)$, lo cual implica que el campo vectorial se escribe como la siguiente combinación lineal: $X = \frac{\pm 1}{\cos v + 2} \sigma_u + 0\sigma_v$, es decir, los coeficientes son $a = \frac{\pm 1}{\cos v + 2}$, y $b = 0$. En consecuencia $II_p(X, W) = 0$.

En el ejemplo anterior, la curvatura del toro en el conjunto S_1 es cero, y los puntos donde $S\partial(M, X)$ no es variedad: $S_1 \cap S_2$ tienen curvatura cero. Sin embargo, se puede tener que la curvatura Gaussiana de una superficie sea cero y aún poder aplicar el teorema anterior para garantizar que la frontera de sombra es una curva suave encajada. Esto es lo que muestra la siguiente construcción.

Figura 3.2: Frontera de sombra singular



Ejemplo 3.3.4 Sea C el cilindro de revolución parametrizado por: $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Nótese que el eje de revolución de C es el eje z . Además, en este ejemplo elegimos a X como el campo vectorial constante $\pm\sigma_u$. Sean e, f, g como en el ejemplo anterior. Como $\sigma_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0)$, $\sigma_{uv} = (0, 0, 0)$, $\sigma_{vv} = (0, 0, 0)$, y $N = (\cos u, \sin u, 0)$ entonces

$$II_p(Y, Z) = (a \ b) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -ac,$$

donde a, b, c, d son como en el ejemplo anterior. En este caso, $S\partial(C, X) = \{(x, y, z) \in C \mid x = 0, y = 1\} \cup \{(x, y, z) \in C \mid x = 0, y = -1\}$, dos rectas paralelas al eje z . Para cada punto p en estas rectas, se tiene la relación vectorial $X = \pm\sigma_u + 0\sigma_v$. Se deduce que $II_p(X, Z) = \pm c \neq 0$, para $Z \neq 0$. Entonces se aplica el teorema anterior.

Observación 3.3.6 En el teorema anterior, la codimensión de M es k y la de $S\partial(M, X)$ también (como subvariedad de M). En particular si la subvariedad M es de codimensión uno, entonces la frontera de sombra resulta de la misma codimensión en M . Otro caso especial es cuando la variedad ambiente tiene dimensión par, y M la mitad de tal dimensión. Como consecuencia del mismo resultado, la frontera de sombra es un conjunto discreto de puntos de M .

3.4 Esferas en Curvatura Constante

En esta sección $\widetilde{M}^{n+1}(k)$ va a denotar a una variedad Riemanniana, conexa, simplemente conexa, completa, y de curvatura constante k . Sin perder generalidad es posible suponer que $k \in \{0, 1, -1\}$. Estas condiciones implican que $\widetilde{M}(k)$ es isométrica al espacio Euclidiano, a la esfera unitaria, ó a un espacio hiperbólico.

Proposición 3.4.1 *Sea M una hipersuperficie conexa, completa en $\widetilde{M}(k)$, y sea $p \in \widetilde{M}(k)$. Si cada geodésica ortogonal a M pasa por p , entonces M es una esfera redonda en $\widetilde{M}(k)$.*

Demostración.

El caso en que $\widetilde{M}(k)$ es isométrica al espacio Euclidiano ya fue considerado. Supongamos que $\widetilde{M}(k)$ es isométrica a S^{n+1} , la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+2} con la métrica inducida. Como el grupo de isometrías es transitivo, podemos asumir que $p = (0, \dots, 0, -1)$, el polo sur. Ahora aplicamos la proyección estereográfica $T : S^{n+1} \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a M desde $q = (0, \dots, 0, 1)$. Sea $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la imagen de M bajo dicha aplicación. Observemos que esta proyección preserva ángulos, manda a p al $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, y transforma las geodésicas por p en rectas por $(0, \dots, 0)$. Entonces las rectas normales a M_1 , concurren en el $(0, \dots, 0)$. Es decir, estamos ahora en el caso de \mathbb{R}^{n+1} . Por lo tanto M_1 es una esfera estandar, y con esto podemos concluir, ya que la proyección estereográfica nos da una correspondencia biunivoca entre esferas en S^{n+1} concéntricas en p , y esferas en \mathbb{R}^{n+1} con centro en $(0, \dots, 0)$. Finalmente, supongamos que $\widetilde{M}(k)$ es isométrica al modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica: $D^{n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |z| < 1\}$. Análogamente al caso anterior, podemos tomar $p = (0, \dots, 0)$. Ahora, la restricción de la transformación identidad de \mathbb{R}^{n+1} a D^{n+1} es conforme, y las geodésicas en D^{n+1} por p van a dar a los segmentos geodésicos con centro en $(0, \dots, 0)$ y de long. dos de \mathbb{R}^{n+1} . Sea $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la imagen de M . De esta forma M_2 resulta ser una hipersuperficie en tal espacio Euclidiano, tal que las geod. ortogonales a M_2 pasan por el origen. Esto prueba que M_2 es una esfera. \square

Observación 3.4.1 Esta caracterización para una esfera en espacios de curvatura constante es falsa cuando consideramos una variedad Riemanniana arbitraria. Por ejemplo el espacio proyectivo real $P = \mathbb{R}P^{n+1}$:

Consideremos la métrica en P que se obtiene usando la proyección canónica

$\pi : S^{n+1} \longrightarrow P$. Consideremos la subvariedad $M \subset P$ dada por, $M = \pi(S^n)$. La subvariedad satisface las hipótesis de la prop. 3.4.1, donde, en este caso particular, $p = \pi((0, \dots, 0, 1))$.

El espacio proyectivo es un ejemplo de lo que se podría llamar una esfera intrínseca: variedad Riemanniana localmente isométrica a una esfera redonda.

Proposición 3.4.2 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana completa, y sea $N \subset M$ una subvariedad conexa de codimensión uno. Sea $p \in M \setminus N$ tal que, las geodésicas normales a N pasan por p . Supongamos que se satisface lo siguiente:*

- $exp_p : T_p M \longrightarrow M$ es inyectiva en $(exp_p)^{-1}(N)$,
- $M \setminus N$ tiene dos componentes conexas, una de las cuales tiene volumen finito.

Entonces $G_p \cdot N = N$, donde $G = Iso(M, g)$.

Demostración.

Sea $f \in G_p$, es decir, f es una isometría tal que $f(p) = p$. Para evitar un hecho trivial, f no es la identidad. Sea $N' = f(N)$, y consideremos el punto $x \in N \cap N'$. Afirmamos que, N y N' son tangentes en x : $T_x N = T_x N'$. Denotemos por γ a la geodésica normal a N en $x = \gamma(0)$ (con $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$), la cual, por hipótesis pasa por p . Sea $\gamma' = f(\gamma)$, en consecuencia, γ' es una geodésica normal a N' que pasa por x y p . Como $x \in N$, existe λ y λ' en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x = exp_p(\lambda\dot{\gamma}(0)) = exp_p(\lambda'\dot{\gamma}'(0))$, en particular, $\lambda\dot{\gamma}(0), \lambda'\dot{\gamma}'(0) \in exp_p^{-1}(N)$. La inyectividad de exp_p en $exp_p^{-1}(N)$ implica la colinealidad de los vectores $\dot{\gamma}(0)$, y $\dot{\gamma}'(0)$. Esto prueba la igualdad $T_x N = T_x N'$. Sea M_1 la cerradura de la componente de $M \setminus N$ de volumen finito, en particular, $N = \partial M_1$ y $N' = \partial f(M_1)$. Como $f(p) = p$, de lo anterior se deduce que $M_1 \subset f(M_1)$ ó $f(M_1) \subset M_1$, lo cual puede ser sólo en el caso en que la contención sea igualdad, ya que M_1 y $f(M_1)$ tienen el mismo volumen finito. \square

Como consecuencia de esta última aplicación, vamos a dar otra demostración de la prop. 3.4.1, para el caso en que la hipersuperficie involucrada es compacta.

Corolario 3.4.1 *Sea $(\widetilde{M}(k), g)$ como antes, y sea $N \subset \widetilde{M}(k)$ una hipersuperficie compacta, conexa. Sea $p \in \widetilde{M} \setminus N$ tal que, cada geodésica ortogonal a N pasa por p . Entonces N es isométrica a una esfera redonda.*

Demostración.

El complemento de N , $\widetilde{M}(k) \setminus N$, tiene dos componentes pues N es compacta y conexa. Además una de ellas tiene volumen finito: aquella componente cuya cerradura es compacta.

Por el teorema de Hadamard, si la curvatura seccional del espacio de curvatura constante $(\widetilde{M}(k), g)$, es $k = -1$ ó $k = 0$, entonces exp_p es un difeomorfismo (en consecuencia exp_p es inyectiva en $exp_p^{-1}(N)$). Para lograr tal inyectividad en el caso de curvatura $k = 1$, es necesario que N no contenga al punto antipoda de p .

Ahora, vamos a sacar provecho a que $\widetilde{M}(k)$ tiene un grupo de isometrías grande. En particular, $SO(n+1) \subset G_p$, donde $n = \dim(N)$. Una vez reunidas las condiciones de la proposición anterior podemos aplicarla: $G_p \cdot N = N$ y entonces G_p actúa por isometrías en N . Podemos concluir de esto que N es una esfera redonda.

□

Proposición 3.4.3 *Sea $M \subset \widetilde{M}^{n+1}(k)$ una hipersuperficie suave, conexa y completa. Sea $p \in \widetilde{M}^{n+1}(k) \setminus M$. Supongamos que la intersección transversal (no trivial) de M con cada subvariedad totalmente geodésica (por p) de \widetilde{M} , es una subvariedad totalmente geodésica de M . Entonces M es una subvariedad totalmente geodésica de $\widetilde{M}^{n+1}(k)$, ó M es una esfera redonda.*

Demostración.

En el caso en que M es una subvariedad totalmente geodésica, no habría más por probar. En caso contrario, existe $x \in M$ tal que M no es una subvariedad totalmente geodésica de $\widetilde{M}^{n+1}(k)$ en x (ver la def. 2.1.2). Esta hipótesis nos conduce a lo siguiente. Existen al menos n subvariedad totalmente geodésica, denotadas por $\{H_i\}_{i=1}^n$ tal que:

- 1) Cada H_i contiene tanto a x como a p ,
- 2) Todo H_i es transversal a M .
- 3) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $M_i = M \cap H_i$ no es una subvariedad totalmente geodésica de $\widetilde{M}^{n+1}(k)$ en x (no es localmente una subvariedad totalmente geodésica de codimensión uno de M , ó dicho de otra forma, no es localmente una subvariedad totalmente geodésica de codimensión dos de $\widetilde{M}^{n+1}(k)$).

Ahora, podemos aplicar la proposición 2.1.1. En este caso $\widetilde{M}^{n+1}(k)$ es el espacio Riemanniano ambiente. Nótese que tenemos las hipótesis necesarias: M y H_i son subvariedades Riemannianas de codimensión uno, donde M no es una subvariedad totalmente geodésica del ambiente y H_i si lo es. Además, M_i es una subvariedad totalmente geodésica de M (debido a la condición 2, y a la hipótesis), y finalmente, M_i no es una subvariedad totalmente geodésica de $\widetilde{M}^{n+1}(k)$ en x (condición 3). Entonces por la prop. 2.1.1, podemos deducir que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(T_x M)^\perp = T_x H_i \cap (T_x M_i)^\perp.$$

Esto prueba que, un vector ortogonal a M en x esta en $T_x H_i$. Pero $\dim(\bigcap_{i=1}^n H_i) = 1$, por lo tanto

$$(T_x M)^\perp = \bigcap_{i=1}^n T_x H_i.$$

Así todo vector $w(x)$ ortogonal a M , en x , esta contenido en cada uno de dichas subvariedad totalmente geodésica H_i . Entonces, la geodésica ortogonal a M que pasa por x , también contiene a p . Nótese que x fue un punto arbitrario de M .

Es decir M es una subvariedad Riemanniana de $\widetilde{M}^{n+1}(k)$, tal que para cada punto $x \in M$ (en el cual M no es localmente una subvariedad totalmente geodésica). Ahora es el momento aplicar la prop. (3.4.1) para concluir que M es localmente una esfera. Pero M (una variedad C^∞) es una unión de piezas: subvariedad totalmente geodésica y esferas, lo cual sólo sería posible si $\widetilde{M}^{n+1}(k)$ es una esfera. En cualquier caso, como M es conexa y completa, es una esfera. \square

3.5 Una nota sobre subv. mínimas

Un tema que llama mucho la atención, es el de las subvariedades mínimas de una variedad Riemanniana. El estudio de esta clase especial de subvariedades se inició con el problema de Plateau. Para una introducción a este activo tópico de investigación se puede consultar el libro de Blaine Lawson, [21].

Vamos a ver bajo que condiciones una frontera de sombra puede ser una subvariedad mínima.

Lema 3.5.1 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana, y sean $N \subset M$, $M \subset \overline{M}$ subvariedades. Sea $X : N \rightarrow TM$ un campo vectorial en M a lo largo de N . Si N es mínima en M entonces $g(X, H) = 0$, donde H es el vector de curvatura media de N como subvariedad de \overline{M} .

Demostración.

Por definición $H \in (TN)^\perp$, pero cuando M es mínima se puede decir más, lo cual se enuncia a continuación. Vamos a usar el resultado N es mínima en M si y sólo si $H \in (TM)^\perp$ (prop. 1.3.2). Como X es tangente a M , es claro que $g(X, H) = 0$. \square

Un caso de interés es cuando M es una hipersuperficie, bajo esta condición extra se vale el recíproco del teorema anterior. Vamos a probar esta afirmación.

Sea H como en el lema anterior.

Teorema 3.5.1 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana, y sean $N \subset M$, $M \subset \overline{M}$ subvariedades de codimensión uno. Sea $X : N \rightarrow TM$ un campo vectorial en M a lo largo de N , el cual nunca es tangente a N . Entonces N es mínima en M si y sólo si $g(X, H) = 0$.

Demostración.

El lema anterior prueba que si N es mínima en M , entonces $g(X, H) = 0$. Para probar el recíproco haremos uso de la condición: X nunca es tangente a N . Esta propiedad garantiza la descomposición $T_p M = T_p N + \langle X(p) \rangle$, para cada $p \in N$. Finalmente, como $H \in (TN)^\perp$ y estamos asumiendo que $g(X, H) = 0$, se deduce que $H \in (TM)^\perp$. Por el resultado de Bang (prop. 1.3.2), N es mínima en M . \square

Corolario 3.5.1 Sea (\overline{M}, g) una variedad Riemanniana y M una subvariedad Riemanniana. Sea $N \subset S\partial(M, X)$ subvariedad de codimensión uno tal que $X : M \rightarrow T\overline{M}$ es transversal y paralelo con respecto a M . Sea H el vector de curvatura media de $N \subset \overline{M}$. Entonces N es mínima en M si y sólo si $g(X, H) = 0$.

Demostración. Hagamos un abuso de notación, y denotemos por X al campo $X|_N : N \rightarrow TM$, lo cual está bien escrito, ya que la condición $N \subset S\partial(M, X)$ implica que X es tangente a M a lo largo de N .

Finalmente aplique el teorema anterior. \square

El siguiente resultado nos dice que pasa cuando tenemos una superficie en \mathbb{R}^3 , la cual es hélice y mínima.

Proposición 3.5.1 *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa mínima. Si M es una hélice entonces M es un plano.*

Demostración.

Supongamos que M es hélice con respecto a la dirección $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Entonces $T_p M$ forma un ángulo constante con v , y de esto se sigue que el vector normal de M también mantiene un ángulo constante con v . Por tanto la imagen de M bajo el mapeo de Gauss esta contenida en un círculo. En consecuencia M tiene curvatura Gaussiana cero. Es bien conocido que curvatura cero y mínima implican que M es un plano (ver por ejemplo [21], pag. 116). \square

Referencias

- [1] M. Barros, “General helices and a theorem of Lancret”, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1503-1509.
- [2] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin, 1987.
- [3] R. Bishop, and R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.
- [4] R.L. Bryant, *An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry*, IAS/Park City Mathematics Series, Volume 1, 1995.
- [5] H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press, 1955.
- [6] Bang-yen Chen, *Geometry of Submanifolds*, Pure and Applied Mathematics, **Vol. 22**, 1973.
- [7] S. S. Chern, W. H. Chen and K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, Series on University Mathematics, **Vol 1**, 1999.
- [8] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Inc., 1990.
- [9] N. Ekmekci and K. Ilarslan, “Null general helices and submanifolds”, Bol. Soc. Mat. Mexicana **3** Vol. 9 (2003), 279-286.
- [10] M. Ghomi, “Shadows and convexity of surfaces”, Ann. of Math. **155** (2002) 281-293.
- [11] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [12] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1988.

- [13] R. Howard, “Mohammad Ghomi’s solution to the shadow problem”, Notas disponibles en www.math.sc.edu/~howard.
- [14] R. Howard, “The geometry of shadow boundaries on surfaces in space”, Notas disponibles en www.math.sc.edu/~howard.
- [15] W. Y. Hsiang, *Lectures on Lie Groups*, Series on University Mathematics, **Vol 2**, 2000.
- [16] Y. H. Kim, “Surfaces of a Euclidean space with helical or planar geodesics through a point”, *Ann. Mat. Pura Appl.* **164** (1993), 1-35.
- [17] D. Knill, P. Mamassian and D. Kersten, “Geometry of shadows” *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 14 n. 12 (1997), 3216-3232.
- [18] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley and Sons, 1963.
- [19] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol II, John Wiley and Sons, 1969.
- [20] D. Kriegmann and N. Belhumeur, “What shadows reveal about object structure”, *J. Opt. Soc. Am. A* Vol. 14 n.8 (2001), 1804-1813.
- [21] H. B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Publish or Perish, Inc., 1980.
- [22] A. Marchaud, “Un theoreme sur les corps convexes”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 3 serie, tome 76, n. 4 (1959), 283-304.
- [23] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1994.
- [24] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.
- [25] A. Schwenk, “Affinsphären mit ebenen schattengrenzen”, *Global differential geometry and global analysis* Berlin, 1984, 296-315. *Lecture Notes in Math.*, **1156**, Springer-Berlin, 1985.
- [26] N. Takeuchi, “A surface which contains planar geodesics”, *Geometriae Dedicata* **27** (1988), 223-225.

- [27] M. Tamura, "Surfaces which contain helical geodesics in the 3-space", *Geometriae Dedicata* **42** (1992), 311-315.
- [28] K. Tsukada, "Totally geodesic submanifolds of Riemannian manifolds and curvature invariant subspaces", *Kodai Math. Journal* (1996), 395-437.
- [29] D. J. Welsh, "On the existence of complete parallel vector fields", *Proc. Am. Math. Soc.* Vol. 97, Num. 2 (1986), 311-314.
- [30] D. J. Welsh, "Manifolds that admit parallel vector fields", *Illinois Journal of Math.* Vol. 30 Num. 1 (1986), 9-18.

Indice

- Campo vectorial
 - paralelo, 47
 - existencia, 48
 - paralelo con resp. a una subv., 34
- Campos vectorial
 - a lo largo de una subvariedad, 2, 33
- Cubriente doble como f.s., 15
- Fórmula
 - de Gauss, 2
 - de Weingarten, 3
- Frontera de sombra, 13
 - de subvariedades, 48
 - minimal, 27
 - singular, 53
 - de un producto Riemanniano, 17
 - de una vecindad tubular, 15
 - suave, 50
- Grupo de holonomía, 36
- Hélice clásica, 29
- Holonomía relativa, 36
- Intersección ortogonal de subv., 12
- Segunda forma fundamental, 3
- Subvariedad
 - hélice, 37
 - mínima, 4
 - reglada, 39
 - totalmente geodésica (stg), 10
- tg en un punto, 10
- Toro de Clifford, 6
- Toro plano, 30
- Vector de curvatura media, 4