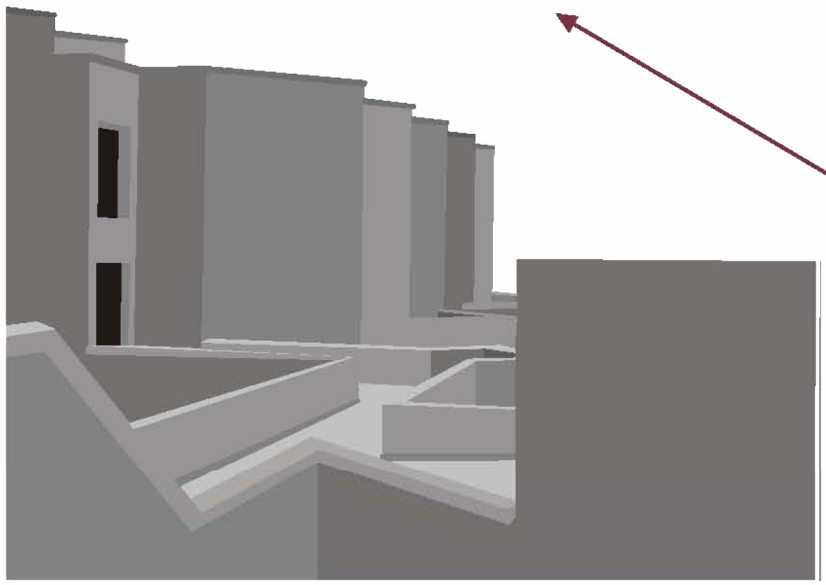

Comunicaciones del CIMAT

GEOMETRÍA DE CURVAS Y COMPUTACIÓN

Fausto Ongay

Comunicación del CIMAT No. I-13-03/19.09.2013
(MB/CIMAT)

CIMAT

Comunicaciones del CIMAT

GEOMETRÍA DE CURVAS Y COMPUTACIÓN

FAUSTO ONGAY

Resumen. La graficación de objetos, y en particular curvas, por ordenador, es un tema activo de investigación actualmente; y parte del interés de este estudio es que plantea a la vez problemas no triviales de índole teórico y problemas de índole práctico evidente.
Estas notas son tan sólo un asomo a este vasto y atractivo tema.

1. Introducción

El estudio de las curvas es un tema central dentro de la geometría clásica, cuyos orígenes se remontan al menos a la geometría griega. Así por ejemplo, las propiedades esenciales de las cónicas ya eran conocidas desde la antigüedad y están descritas en los tratados clásicos de Euclides y Apolonio.

Por otro lado, el advenimiento de los ordenadores ha cambiado considerablemente el énfasis en lo que se puede considerar útil para entender una curva en el plano o en el espacio. Por ejemplo, los programas más refinados, como Mathematica, MatLab o Maple, permiten ahora a un profesor de cálculo graficar multitud de curvas complicadas, con una precisión que los métodos clásicos difícilmente podrían igualar.

Sin embargo, para su desarrollo, pero también para poder hacer un uso eficiente y correcto de ellos, aún estos programas necesitan de una adecuada comprensión de las ideas clásicas de la geometría de curvas. Esto ha dado lugar al rápido desarrollo de un área de estudio relativamente nueva: la graficación por computadora, que interrelaciona la informática con la geometría diferencial clásica. Estas notas, diseñadas para un curso corto de cinco sesiones —e inspiradas muy fuertemente en unas notas de curso de Juan Monterde, catedrático de matemáticas de la Universidad de Valencia, y de quien he aprendido lo poco que sé sobre el tema—, son un mero atisbo a este amplio panorama.

En la primera parte recordaremos las definiciones y propiedades principales de las curvas parametrizadas, principalmente en dos —y en menor medida en tres— dimensiones. Recordaremos en particular las ideas básicas de parametrización, longitud de arco, curvatura y torsión.

Después hablaremos de los polinomios de Bernstein. Mencionaremos algunos aspectos de interés tanto teórico como práctico de este tipo de polinomios, en particular de su aplicación a la graficación de curvas mediante las llamadas curvas de Bézier.

Date: Julio, 2012.

Finalmente, hablaremos de las curvas llamadas de hodógrafo pitagórico y mencionaremos algunas de sus propiedades y aplicaciones, llegando en la última parte a algunas ideas que han sido objeto de estudio en trabajos muy recientes.

Comunicaciones del CIMAT

CIMAT

2. Geometría de las curvas en el plano y el espacio

2.1. **Conceptos básicos.** Hay dos nociones de curva que manejamos en la práctica: la primera es la de curva geométrica (e.g., cuando hablamos de 'un círculo'), la segunda es la de curva parametrizada. Como no hay ganancia en restringirse a dos o tres dimensiones en esta parte, daremos las definiciones para n dimensiones en general:

Definición 1. *Una curva parametrizada en el espacio $\mathbb{R}^n$ es una función diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. A la variable $t \in I$ se le llama el parámetro de la curva.*

La imagen de una curva parametrizada es (y decimos que 'α determina') una curva geométrica.

Decimos que $\mathbb{R}^n$ es el espacio ambiente de (o 'donde vive') la curva.

Usualmente se escoge $I = [a, b]$ como un intervalo cerrado y acotado (es decir, un conjunto *compacto y conexo*); pero a veces puede ser necesario considerar un dominio abierto, o no conexo; por ejemplo todo $\mathbb{R}$ o una unión de intervalos. Estas excepciones a la regla se indicarán explícitamente, si se requieren.

En todo caso y como se ve, hay que distinguir cuidadosamente entre las dos nociones de curva: una curva geométrica es un subconjunto del espacio ambiente $\mathbb{R}^n$, en tanto que una curva parametrizada es una función, que intuitivamente describe 'cómo se recorre' una curva geométrica.

En particular, es claro que una curva parametrizada tiene más información que una curva geométrica, ya que esta última es sólo la imagen de la función; pero por otro lado, uno de los problemas centrales en la geometría diferencial es estudiar conceptos intrínsecos del objeto geométrico, es decir, que no dependan de la parametrización, así que ambas nociones son importantes.

Recordemos además que una función $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ equivale a una colección de n funciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : I \to \mathbb{R}$, y diferenciable significará para nosotros que cada α_i es de clase al menos C^2, es decir, que tiene hasta segundas derivadas continuas (aunque en realidad procederemos como si tuviera derivadas de todos los órdenes que resulten necesarios para un argumento dado).

Finalmente y como ya dijimos, en lo que sigue usualmente tendremos $n = 2$, aunque ocasionalmente consideraremos $n = 3$ (curvas en el plano y el espacio, resp.)

Ejemplo 1. *Quizá la curva más importante sea el círculo unitario, que se denota usualmente por S^1. Como curva geométrica, y con base en su definición estándar como el conjunto de puntos a distancia 1 del origen, es claro que puede definirse por la condición*

$$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1 \}.$$

Una parametrización de esta curva es entonces —por ejemplo— $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$; pero hay una infinitud más. Todas son sin embargo de la forma $(\cos(f(t)), \sin(f(t)))$, para alguna función f, que en esencia sólo debe satisfacer que su imagen cubre un intervalo de longitud 2π.

Cambios de parámetro: Lo dicho al final del ejemplo se formaliza así:

Comunicaciones del CIMAT

Definición 2. *Dada una curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, una reparametrización de la curva es la composición con un difeomorfismo, es decir, una función biyectiva (por consiguiente invertible) y (bi-) diferenciable, $h : J \to I$.*

La reparametrización determina así una nueva curva parametrizada, $\beta(s) = \alpha(h(s))$, $s \in J$, cuya imagen sin embargo determina la misma curva geométrica.

Con nuestras suposiciones, la condición de invertibilidad corresponde a la condición $h'(s) \neq 0$, $s \in J$; para un intervalo (es decir, para un dominio conexo) esta condición puede dividirse en dos casos: $h'(s) > 0$ ó $h'(s) < 0$; el primero permite recorrer la curva en el mismo sentido, el segundo lo hace en sentido opuesto, es decir, da un cambio en la orientación. (Aquí '$\prime$' significa, como es usual, derivada con respecto al parámetro, en este caso s.)

Relación con la mecánica clásica 1: Una de las aplicaciones fundamentales de las curvas parametrizadas es en el estudio de la mecánica.

En efecto, podemos pensar que el espacio físico puede identificarse con (o modelarse por) el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, y entonces una curva parametrizada representa la trayectoria de una partícula puntual (idealizada). El parámetro se identifica entonces con el tiempo.

En virtud de esta analogía, si pensamos que la curva $\alpha(t)$ representa la trayectoria de una partícula, $\alpha'(t)$ representa su velocidad (instantánea) y $\alpha''(t)$ su aceleración. Recordamos entonces que la segunda ley de Newton dice que si F es la fuerza que se ejerce sobre una partícula, su movimiento se rige por la ecuación diferencial $F = m\alpha''$, donde m es la masa de la partícula.

Esta interpretación mecánica ayuda en ciertos casos a visualizar cómo se puede ver una curva, porque dice en particular que la segunda derivada apunta en la misma dirección que la fuerza que 'empuja' a la partícula, y que es la responsable de que cambie su velocidad, tanto en magnitud (la *rapidez*), como en dirección.

Cúspides, autointersecciones y curvas cerradas. Una curva parametrizada suave puede tener dos clases de complicaciones, importantes, pero en muchos casos no deseadas, ya que ahí no se puede definir la recta tangente en general: Puede tener *cúspides*, que son puntos $\alpha(t_0)$ en donde la recta tangente no está definida nunca, y en los que necesariamente $\alpha'(t_0) = 0$; y puede tener *autointersecciones*, que ocurren cuando hay dos valores distintos t_1, t_2 tales que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. Nótese que en las autointersecciones la recta tangente puede o no estar definida; en general sin embargo, no se puede definir de manera única.

Sin embargo, hay un tipo de autointersección que sí es muy importante en la práctica:

Definición 3. *Una curva $\alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es cerrada simple si $\alpha(a) = \alpha(b)$, pero α es inyectiva en el intervalo abierto (a, b).*

2.2. **Longitud de arco:** Si tenemos una curva diferenciable α, intuitivamente podemos pensar que representa el desplazamiento de una partícula, y entonces, para un

Comunicaciones del CIMAT

(pequeño) intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$, la cantidad $\alpha'(t_0)\Delta t$ aproxima el desplazamiento entre $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t)$; esto es $\Delta\alpha(t_0, t) \approx \alpha'(t_0)\Delta t$; esto motiva la siguiente definición

Definición 4. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, y fijemos un punto $t_0 \in I$. La longitud de arco de la curva entre los puntos $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t)$ es*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du.$$

(Por supuesto, la longitud de arco depende también del punto inicial t_0.)

La longitud de arco de una curva es invariante bajo reparametrizaciones. Más precisamente:

Proposición 1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada; si $h : J = [c, d] \to I[a, b]$ es un cambio de parámetro, entonces*

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_c^d \|\beta'(s)\|\, ds.$$

Prueba. Basta con aplicar la fórmula de cambio de variables; supongamos por simplicidad que h es creciente, entonces:

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_c^d \|\alpha'(h(u))\| h'(u)\, du = \int_c^d \|\beta'(s)\|\, ds.$$

□

Más en general, considerando subintervalos de J e I apropiados, se ve que dados dos puntos en la curva, la longitud de arco entre ellos sólo depende de los puntos dados, y es por consiguiente una propiedad intrínseca de la curva geométrica.

Curvas regulares: La clase de curvas más importante son las regulares:

Definición 5. *Una curva parametrizada es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para toda t*

Su importancia se debe especialmente al siguiente resultado:

Proposición 2. *Si $\beta : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es regular, entonces, para todo punto inicial t_0 la longitud de arco es una función creciente de $J = [s(a), s(b)]$ en $[a, b]$.*

En consecuencia, su inversa define una reparametrización de la curva, $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$, que también es regular. Más aún, α satisface $\|\alpha'\| = 1$.

La demostración de esta proposición es de nuevo directa y la omitimos; lo que es importante es que ahora podemos, de ser necesario, suponer que toda curva parametrizada lo está por longitud de arco a partir de algún punto fijo (por ejemplo uno de los extremos del intervalo dominio). Si una curva está parametrizada por longitud de arco, por brevedad diremos a veces que es una curva natural, y en este caso siempre denotaremos el parámetro por s (dejando t para designar un 'parámetro arbitrario').

Comunicaciones del CIMAT

2.3. **Curvatura de curvas planas.** La idea en general es medir qué tanto se aleja una curva de ser una recta. En el caso del plano esto se puede hacer de varias maneras, en el fondo equivalentes; pero esencialmente todo se reduce a medir cómo cambia la dirección del vector tangente, ya que una recta se caracteriza por la condición de que su vector tangente tiene dirección constante, independientemente de la parametrización.

Definición 6. *Si α es una curva natural, el marco asociado a un punto $\alpha(s)$ es el par de vectores $T(s) = \alpha'(s)$ y $N(s)$; donde $N(s)$ es el único vector tal que $T(s), N(s)$ tiene la misma orientación que la base canónica e_1, e_2.*

Proposición 3. *Dada una curva natural $\alpha : I \to \mathbb{R}$, existe una única función $\kappa : I \to \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)N(s)$. Esta función se llama la curvatura de la curva en el punto $\alpha(s)$.*

Prueba. Basta con notar que $\|\alpha'\| = 1$ implica que que $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$, de modo que α'' es normal a T y por consiguiente paralelo a N. □

Ejemplo 2. *El círculo de radio R centrado en el origen se puede parametrizar por $\beta(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Como $\|\beta'\| = R$, vemos que el parámetro de longitud de arco se puede tomar como $s = Rt$, y entonces $T(s) = (-\sin s, \cos s)$ y $N(s) = (-\cos s, -\sin s)$, y $T'(s) = (1/R)N(s)$.*

Así, la curvatura del círculo de radio R es $1/R$, lo que ilustra que la curvatura así definida efectivamente refleja nuestra intuición, ya que un círculo de radio muy grande lo vemos 'mucho menos curveado' que uno de radio muy pequeño.

Relación con la mecánica 2: Si α es una curva natural, su rapidez es constante. En términos mecánicos esto diría que las (posibles) fuerzas actuando sobre una partícula que tiene esta trayectoria sólo cambian su dirección, por lo que siempre son normales a la trayectoria.

Dicho de otro modo, siempre podemos descomponer a una fuerza, y por tanto a la aceleración, en dos componentes: una tangencial y otra normal; y vemos así que la curvatura se puede interpretar como una medida de la aceleración normal a la trayectoria. La aceleración tangencial es la medida de los cambios en la rapidez, y se puede compensar con un cambio de parámetro, que podemos interpretar como un ajuste en nuestra manera de medir el tiempo; pero la aceleración normal, que mide los cambios en la dirección, no se puede compensar.

Parámetro arbitrario: Se puede probar que la curvatura de una curva regular no depende de la parametrización, por lo que es también una propiedad intrínseca de la curva geométrica. Se tiene además la siguiente expresión explícita para la curvatura en términos de un parámetro arbitrario:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)f''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}$$

Comunicaciones del CIMAT

Círculo de curvatura: La recta tangente a una curva en un punto dado puede considerarse como la mejor aproximación lineal —o de primer grado— de una curva cerca de ese punto. Una aproximación de segundo grado —o cuadrática— se obtiene con el círculo de curvatura:

Definición 7. *Si α es una curva regular, su círculo de curvatura en el punto $P_0 = \alpha(t_0)$, es el círculo que pasa por P_0, y cuyo centro se encuentra sobre la recta normal, en la misma dirección que α'', y con radio $1/|\kappa(t_0)|$.*

(Si $\kappa(t) = 0$ el círculo de curvatura 'degenera' en una recta.)

2.4. **Curvas en el espacio.** Con las modificaciones necesarias, varias de las ideas anteriores se pueden extender a las curvas en el espacio.

El triedro de Frenet: Primero, se puede asociar un marco a cada punto de una curva regular en tres dimensiones como sigue:

Si α es una curva natural tal que $\alpha''(s) \neq 0$, entonces por el mismo argumento de antes, en cada punto $T(s) = \alpha'(s)$ y $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$ definen dos vectores ortonormales; éstos no constituyen una base de $\mathbb{R}^3$, pero obtenemos una base, además con la misma orientación que la base canónica, si agregamos al vector $B(s) = T(s) \times N(s)$. Esta base se llama el *marco o triedro de Frenet*.

Los vectores T, N y B se llaman respectivamente el vector tangente, el vector normal (principal) y el vector *bi-normal*.

Los vectores T y N guardan una relación con la mecánica parecida a la ya discutida en el caso de las curvas planas. El plano que generan se llama el plano osculador de la curva ('ósculo' significa 'beso'), y es el plano que mejor aproxima a la curva a segundo orden, ya que contiene también a su círculo de curvatura. Vemos entonces que la variación de B mide esencialmente cómo cambia el plano osculador, pues si B es constante la curva es plana.

Finalmente, los tros dos planos que se pueden construir tienen también nombres: el plano generado por T y B se llama el *plano rectificador* de la curva, y el plano generado por N y B el *plano normal*.

Las fórmulas de Frenet-Serret: La relación descrita arriba se precisa en las fórmulas de Frenet-Serret, que son el punto culminaante en la teoría clásica de las curvas en el espacio:

Proposición 4. *Sea α una curva natural tal que $\alpha''(s) \neq 0$; entonces existen dos funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ tales que la variación del triedro de Frenet satisface las relaciones*

$$\begin{array}{rcccc} T'(s) & = & & \kappa(s)N(s) & \\ N'(s) & = & -\kappa(s)T(s) & + & \tau(s)B(s) \\ B'(s) & = & & -\tau(s)N(s) & \end{array}$$

La demostración de este bello teorema, que no daremos aquí, puede hallarse en muchos textos de cálculo avanzado, y, sin ser trivial, es relativamente directa; simplemente nos limitamos a señalar lo siguiente:

Comunicaciones del CIMAT

La primera ecuación es idéntica al caso del plano; así que, como ya indicamos, la interpretación de la curvatura sigue siendo la misma: mide qué tanto se aleja la curva de ser (localmente) una recta. La tercera ecuación muestra entonces que la interpretación de la torsión es como una medida de que tanto se aleja la curva de ser una curva plana, ya que el plano osculador está determinado por el vector binormal.

En segundo lugar, la integración de estas ecuaciones diferenciales ordinarias determina el triedro de Frenet. Con ello, queda determinada la curva, salvo por las condiciones iniciales en α y α'; esto corresponde a determinar la curva salvo por una transformación rígida. Este resultado se conoce como *Teorema fundamental de la geometría de curvas*.

Finalmente, nótese que las ecuaciones son de tercer orden, ya que tanto N como B involucran hasta derivadas de segundo orden. Esto contrasta con la segunda ley de Newton, que es de *segundo* orden.

Comunicaciones del CIMAT

3. Los polinomios de Bernstein

En la práctica, especialmente al hacer uso del ordenador, debemos limitarnos a objetos que sean *computables*. La computabilidad de algo es un tema complejo, pero en una primera aproximación, podríamos considerar que esto significa que sólo podemos programar objetos que se obtengan mediante operaciones algebraicas con números y, de hecho, de números racionales (aunque por simplicidad no nos impondremos esta última limitante aquí, y trabajaremos con números reales en general).

3.1. **Polinomios.** Pero puesto así, lo que sí debe resultar claro es que una de las clases de funciones más importantes bajo esta óptica son los polinomios, y la clase asociada de curvas polinomiales.

Recordemos pues algunas de las nociones básicas relativas a esta clase de funciones:

Definición 8. *Un polinomio (con coeficientes reales) en la variable t es una expresión de la forma*

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

Los números $a_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del polinomio y, si $a_n \neq 0$, decimos que n es el grado del polinomio, que denotaremos por $\deg p$.

Como es bien sabido, los polinomios se pueden sumar entre ellos y multiplicar por números de la manera obvia, y también se pueden multiplicar entre ellos, mediante la agrupación de los términos que tienen la misma potencia de x:

$$(a_0 + \cdots + a_n t^n)(b_0 + \cdots + b_m t^m) = c_0 + \cdots + c_{m+n} t^{m+n},$$

donde los coeficientes se obtienen explícitamente mediante la fórmula

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

La primera parte dice entonces que los polinomios forman un espacio vectorial.

Observación 1. *La segunda parte también se puede expresar algebraicamente, diciendo que los polinomios forman un anillo (de hecho un álgebra); y el otro ejemplo de anillo que conviene tener en mente es, claro está, el de los enteros, $\mathbb{Z}$.*

Pero no profundizaremos más en esta parte algebraica del asunto, limitándonos a observar que, aunque aquí introdujimos a los polinomios como funciones definidas en todo $\mathbb{R}$, estas consideraciones se aplican también cuando restringimos el dominio de t a algún intervalo fijo I, lo que en las aplicaciones es indispensable.

En la práctica de hecho, casi siempre se toma $I = [0, 1]$, aunque ocasionalmente resulta conveniente considerar otros intervalos, como $J = [-1, 1]$. Pasar del espacio de los polinomios definidos en un intervalo a los definidos en otro se puede hacer con una reparametrización sencilla; por ejemplo, para pasar de I a J (como arriba), se puede usar simplemente la reparametrización afín $t \mapsto 2t - 1$.

Comunicaciones del CIMAT

Ahora bien, no es difícil ver que el grado de los polinomios satisface que

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$$

y

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

Por consiguiente, para un grado fijo n, se tiene que los polinomios *de grado* $\leq n$ forman un espacio vectorial de dimensión $n+1$. Una base evidente de ellos es la de *las potencias*, $1, t, t^2, \cdots, t^n$.

3.2. **Polinomios de Bernstein.** Los polinomios de Bernstein son una base distinta del espacio de polinomios, y fueron introducidos por Serguei Bernstein en 1912 para obtener una demostración alterna del teorema de aproximación de Weierstrass. Esta nueva base se ha revelado particularmente útil para la graficación por ordenador.

Por razones que aparecerán en breve, al trabajar con ellos resulta además conveniente restringirse al intervalo $I = [0,1]$, y en adelante, si no especificamos lo contrario, adoptaremos esta convención.

Definición 9. *Sea $n \geq 0$ fijo; el i-ésimo polinomio de Bernstein de grado n, $0 \leq i \leq n$, es el polinomio $B_i^n : I \to \mathbb{R}$ definido por:*

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Aquí $\binom{n}{i}$ denota, como es usual, al coeficiente binomial $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Es claro que para n fija, los polinomios B_i^n son todos de grado n.

Ejemplo 3. *Escribamos los polinomios de Bernstein para grados bajos: Si $n = 0$, entonces, $B_0^0(t) = 1$; si $n = 1$ entonces $B_0^1(t) = 1 - t$, $B_1^1(t) = t$; si $n = 2$ entonces $B_0^2(t) = 1 - 2t + t^2$, $B_1^2(t) = 2t - 2t^2$, $B_2^2(t) = t^2$.*

Por último, la gráfica siguiente muestra a B_3^5. Hemos extendido el dominio más allá de $[0,1]$, para tener una idea de su aspecto global, pero obsérvese que tiene ceros únicamente en 0 y 1 (¿Por qué?):

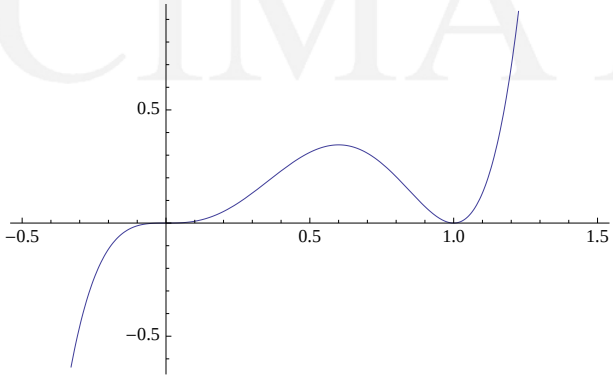

Figura 1. El polinomio de Bernstein B_3^5.

Por cuestiones prácticas, es conveniente extender la definición de los coeficientes binomiales —así como la de los polinomios de Bernstein—, declarando $\binom{n}{i} = 0$ si $i < 0$ ó $i > n$.

Comunicaciones del CIMAT

Los polinomios de Bernstein tienen muchas propiedades muy útiles para la graficación: la gráfica siguiente, que los compara con la base de las potencias (para $n = 10$), da una idea de por qué es esto, mostrando que aquellos están distribuidos de una manera mucho más homogénea que éstas:

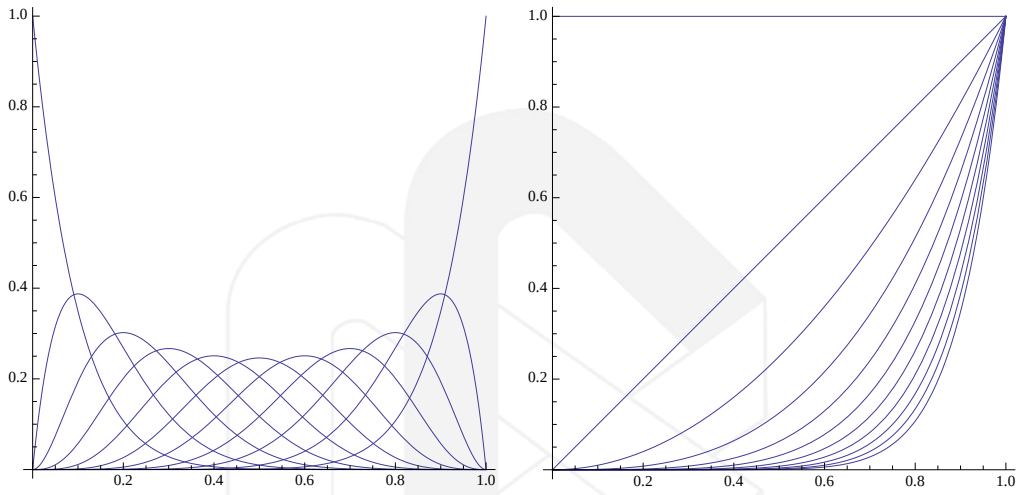

Figura 2. Los polinomios de Bernstein B_i^n y las potencias t^i $(n = 10)$

Esto se precisa en la segunda afirmación de la siguiente proposición:

Proposición 5. *Los polinomios de Bernstein son no-negativos en* $[0, 1]$*:* $B_i^n(t) \geq 0$*,* $t \in I$*, y de hecho son positivos, salvo quizá en los extremos.*

Tenen además la propiedad de ser una partición de la unidad:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$$

Prueba. La no-negatividad es inmediata, deido a que estamos restringiéndonos al intervalo I, ya que entonces t y $1 - t$ (así como el coeficiente binomial) son ≥ 0.

Pero de hecho, el mismo argumento dice que son estrictamente > 0, salvo si $t = 0$ ó $t = 1$. En tal caso se tiene que uno de los términos adopta la 'forma indeterminada' 0^0, que por convención es un 1. Esto ocurre si y sólo si $t = 0$ e $i = 0$ ó $t = 1$ e $i = n$.

Como consecuencia de esta observación, se tiene que $B_i^n(0) = 0$ si $i \neq 0$ y que $B_i^n(1) = 0$ si $i \neq n$. Esto se pude escribir de manera elegante en términos de la llamada *Delta de Kronecker*: $B_i^n(0) = \delta_i^0$, $B_i^n(1) = \delta_i^n$.

Finalmente, para ver que tienen la propiedad de partición de la unidad, basta con recordar el teorema del binomio de Newton, que afirma que

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

y aplicarlo a $a = t$ y $b = 1 - t$. $\square$

Comunicaciones del CIMAT

La derivada de un polinomio de grado n es otro polinomio, de grado $n-1$; pero con los polinomios de Bernstein podemos ser más explícitos aún, y dar la siguiente fórmula de recurrencia:

Proposición 6. *Para todo i, n se tiene que*

$$\frac{dB_i^n}{dt}(t) = n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - N_i^{n-1}(t)\right)$$

Prueba. Para $i = 1, \cdots, n-1$, la demostración es una aplicación sencilla de la definición y de la regla de Leibniz, junto con el hecho que

$$\binom{n}{i} i = n\binom{n-1}{i-1}\ ; \quad \binom{n}{i}(n-i) = n\binom{n-1}{i}.$$

Cuando $i = 0$ y cuando $i = n$, hay que usar que $B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$. □

La proposición anterior permite probar además que los polinomios tienen un máximo único en el intervalo $[0, 1]$:

Corolario 1. *El polinomio $B_i^n(t)$ tiene un máximo único en el intervalo $I = [0, 1]$ en el punto i/n*

Prueba. Es bastante directa de la proposición anterior y del hecho que los polinomios B_i^n son no-negativos en I; el único punto delicado que hay que notar es que para $i = 0$ y para $i = n$ el máximo **no** corresponde a un punto crítico del polinomio, sino que corresponde al valor de la función bajo consideración en uno de los extremos del intervalo (véase la figura 2). □

3.3. **Otras propiedades.** Veamos dos propiedades más de los polinomios de Bernstein:

Relación con la base de potencias: Se pueden obtener fórmulas explícitas que relacionan las dos bases (y que muestran que los polinomios de Bernstein son, efectivamente, una base). Conviene dividir la demostración de este hecho en dos partes:

Lema 1. *Para toda n y para $0 \leq i \leq n$*

$$B_i^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{i}\binom{n-i}{k} t^{k+i}.$$

Prueba. Basta con desarrollar $(1-t)^{n-i}$ utilizando la fórmula del binomio de Newton □

Proposición 7. *Para toda n y para $0 \leq i \leq n$*

$$t^i = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n}{i}} B_{i+k}^n(t).$$

Comunicaciones del CIMAT

Prueba. Aplicamos el lema anterior al lado derecho y tenemos:

$$\sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n}{i}} B_{i+k}^n(t) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n}{i}} \left(\sum_{l=0}^{n-i-k} (-1)^l \binom{n}{i+k} \binom{n-i-k}{l} t^{l+k+i} \right)$$

Factorizamos ahora todo lo que no depende de l en la suma interior y usamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n}{i}} B_{i+k}^n(t) = & \; t^i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}\binom{n}{i+k}}{\binom{n}{i}} t^k \sum_{l=0}^{n-i-k} (-1)^l \binom{n-i-k}{l} t^l \\ = & \; t^i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}\binom{n}{i+k}}{\binom{n}{i}} t^k (1-t)^{n-i-k}. \end{aligned}$$

Enseguida notamos que:

$$\frac{\binom{k+i}{i}\binom{n}{i+k}}{\binom{n}{i}} = \binom{n-i}{k}$$

Finalmente, usamos la propiedad de partición de la unidad:

$$\sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{k+i}{i}}{\binom{n}{i}} B_{i+k}^n(t) = \sum_{k}^{n-i} \binom{n-i}{k} t^k (1-t)^{n-i-k} = t^i$$

□

Nótese que el caso $i = 0$ es simplemente la propiedad de partición de la unidad. El caso $i = 1$ tiene también cierta importancia para las aplicaciones y se conoce como *precisión lineal*; más adelante veremos el porqué de esta terminología.

Elevación del grado: Por último, ya que un polinomio de grado $\leq n-k$ es obviamente un polinomio de grado $\leq n$, cuando $k > 0$ es útil tener la siguiente fórmula, que da los polinomios de Bernstein de un grado dado en términos de polinomios de grado mayor:

Proposición 8. *Supongamos que* $0 \leq k \leq n$ *y que* $0 \leq i \leq n-k$*; entonces*

$$B_i^{n-k}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{\binom{n-i-l}{k-l}}{\binom{i+l}{l}} \binom{n}{k} B_{i+l}^n(t).$$

Ejercicio 1. *Calcula la curvatura de la gráfica del polinomio* B_3^5.

Ejercicio 2. *Prueba la siguiente propiedad de simetría de los polinomios de Bernstein:*

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t).$$

¿Qué significa en términos de reparametrizaciones?

Comunicaciones del CIMAT

Ejercicio 3. *Prueba, utilizando la propiedad del máximo único, que para $n = 3$ los polinomios de Bernstein son linealmente independientes. Por consiguiente, son una base del espacio de polinomios de grado ≤ 3.*

¿Por qué basta con probar la independencia lineal? ¿Cómo se podría generalizar este argumento?

Comunicaciones del CIMAT

CIMAT

4. Curvas de Bézier

Curvas polinomiales Como indicamos, tal vez las curvas más importantes para la graficación son las curvas polinomiales:

Definición 10. *Una curva $\alpha(t)$ es polinomial (o polinómica, como se dice en otros países de habla hispana) si sus componentes $x(t)$, $y(t)$ son polinomios.*

El grado de una curva polinomial $\alpha(t)$ es $\max\{\deg x, \deg y\}$

Motivación. La aplicación de los polinomios de Bernstein a la graficación por ordenador se hace mediante las llamadas curvas de Bézier, que estudiaremos a continuación. Pero, ¿cómo surgieron?

Pues bien, es interesante notar que en la actualidad, cuando tenemos que efectuar una reparación en un automóvil, normalmente no pensamos en lo complejo que puede ser construir una refacción que ajuste correctamente. Sin embargo, en 1911 en una feria automotriz la firma Cadillac pregonaba, con justificado orgullo (*Standard of the World* es el lema de Cadillac), que sus vehículos estaban tan bien fabricados que las piezas de tres distintos se podían intercambiar ¡y obtener vehículos funcionales!

Figura 3. Un Cadillac de 1910

Esto se debe, entre otras cosas, a que antes de los ordenadores las curvas debían trazarse a mano, con curvígrafos, y esto evidentemente introducía una gran posibilidad de error (y nótese la elegante curva del capó del Cadillac de la figura).

Figura 4. Un curvígrafo

Comunicaciones del CIMAT

Pero esta situación cambió radicalmente en 1959, cuando un físico y matemático francés, trabajando como ingeniero en Citroën, Paul DeCasteljau, introdujo un algoritmo para trazar curvas polinomiales de manera eficiente, usando *puntos de control*.

Un tanto irónicamente, las políticas de privacía de Citroën hicieron que el trabajo de DeCasteljau fuera ignorado casi por completo, y el método se dio a conocer a través del trabajo (independiente, pero un poco posterior) de otro ingeniero, pero éste de la firma rival Renault, Pierre Bézier.

4.1. **El algoritmo de DeCasteljau.** Dados $n+1$ puntos en el plano, $P_0, \cdots, P_n$, la hoy llamada curva de Bézier definida por ellos está dada por el algoritmo recursivo siguiente:

Definición 11. *Para $r = 1, \cdots, n$ y $i = 0, \cdots, n-r$ definamos $P_i^0(t) = P_i$, y*

$$P_i^r(t) = (1-t)P_i^{r-1}(t) + tP_{i+1}^{r-1}(t)\ ;\ t \in [0,1].$$

Entonces, la curva de Bézier asociada es $\alpha(t) = P_0^n(t)$, $t \in [0,1]$. Los puntos P_i se llaman puntos o vértices de control y el polígono determinado por ellos se llama el polígono de control de la curva de Bézier

Hacemos ahora la observación de que P_i^r es una curva polinomial de grado r (los propios puntos de control se identifican, en el primer paso, con curvas de grado cero), de modo que el algoritmo de DeCasteljau va aproximando por polinomios de grado cada vez más alto, hasta llegar a producir un polinomio de grado n.

Pero para entender qué hace el algoritmo de DeCasteljau es conveniente seguir con detalle el procedimiento para unos pocos puntos; $n = 3$ es probablemente lo mejor (ejercicio), aunque $n = 2$ es suficiente para darse una idea; hagamos pues este último caso:

Ejemplo 4. *Consideremos dados los puntos de control P_0, P_1 y P_2. Calculando los polinomios intermedios tenemos entonces: $P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ y $P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$; estas son simplemente las ecuaciones de los segmentos (interpolación lineal o combinación convexa) entre los puntos P_0 y P_1 (en ese orden) y P_1 y P_2, respectivamente. El paso crítico es el siguiente.*

Aquí, por el número de puntos, llegamos ya a la curva de Bézier (y esto es lo que quizá oculta un poco la recurrencia en este grado), y tenemos una sola curva:

$$P_0^2(t) = \alpha(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2.$$

En todo caso, es claro que α es una curva de grado 2, y la segunda igualdad arriba muestra que los puntos sobre α se obtienen interpolando linealmente entre los puntos en las curvas (en este caso rectas) de la etapa anterior.

Comunicaciones del CIMAT

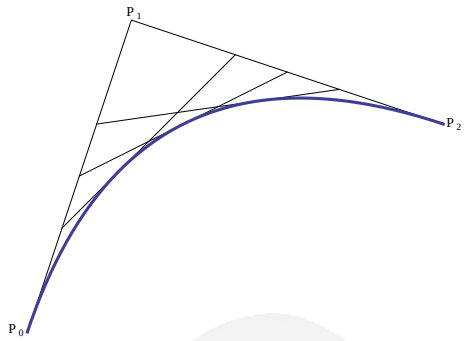

Figura 5. El algoritmo de DeCasteljau

La útlima igualdad del ejemplo muestra ahora cómo intervienen los polinomios de Bernstein en el proceso:

Proposición 9. *Las curvas intermedias en el algoritmo de DeCasteljau satisfacen*

$$P_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} B_j^r(t) P_{i+j}.$$

En particular, la curva de Bézier asociada al polígono de control $P_0, \cdots, P_n$ *está dada por*

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

Es esencial observar que la curva de Bézier **no** interpola entre los puntos del polígono de control. De hecho, en general sólo interpola entre los dos puntos extremos; es decir, se satisface que $\alpha(0) = P_0$ y $\alpha(1) = P_n$, pero en general sólo esos dos puntos caen sobre la curva. (¿Por qué?)

Ejemplo 5. *Para ilustrar las propiedades de las curvas de Bézier, consideremos en lo que sigue el siguiente ejemplo explícito de una curva de grado* 4*, con polígono de control:* $P_0 = (0,0)$*,* $P_1 = (1,4)$*,* $P_2 = (3,4)$*,* $P_3 = (6,0)$*,* $P_4 = (7,3)$*. (Todas las gráficas están programadas en Mathematica.)*

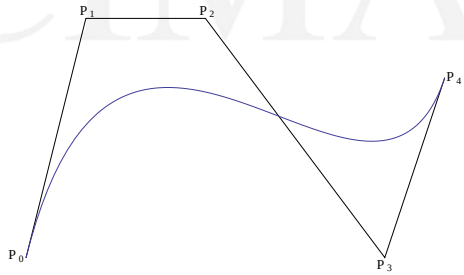

Figura 6. Una curva de Bézier y su polígono de control.

Observación 2. *Es relativamente claro que entre más puntos tenga el polígono de control más posibilidades hay para manipular las curvas de Bézier. La fórmula de elevación del grado es útil para escribir relaciones entre las curvas que se obtienen por el proceso de incluir puntos adicionales de control. Sin embargo, es igualmente claro que mientras mayor sea el grado, mayor será el coste computacional.*

Comunicaciones del CIMAT

Por otro lado, cabe observar que las curvas intermedias en el algoritmo de DeCasteljau son ellas mismas curvas de Bézier, cuyos polígonos de control consisten de algunos de los puntos (siempre consecutivos) del polígono inicial.

La moraleja de este tipo de observaciones es que en la práctica es importante escoger adecuadamente los puntos, tanto en posición como en número, pero además en ocasiones puede ser mejor subdividir las curvas de Bézier.

Como la curva de Bézier está evidentemente determinada por su polígono de control (y viceversa, si se fija el grado), a veces escribiremos $\alpha = \alpha[P_0, \cdots, P_n]$. Con esta notación se tiene evidentemente la siguiente propiedad de simetría

$$\alpha[P_0, \cdots, P_n](t) = \alpha[P_n, \cdots, P_0](1-t),$$

que corresponde a la simetría natural de los polinomios de Bernstein.

Sin embargo, cualquier otra permutación que se haga de los puntos de control, que generaría un nuevo polígono de control, en general afectará fuertemente el aspecto de la curva de Bézier. La figura siguiente ilustra lo que sucede al intercambiar los dos últimos putos del polígono de control de la curva del ejemplo 5.

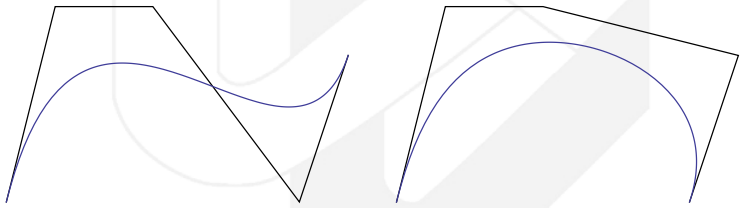

Figura 7. Curvas de Bézier con permutación de uno de los puntos del polígono de control.

En general, lo más que se puede decir es:

Proposición 10. *La (imagen de la) curva de Bézier está contenida en la envolvente convexa de los puntos de control.*

Prueba. Esto es consecuencia directa de que los puntos generados en todo el proceso del algoritmo de DeCasteljau se obtienen como combinaciones convexas de puntos del polígono de control. □

La proposición se ilustra de nuevo con la curva del ejemplo 5.

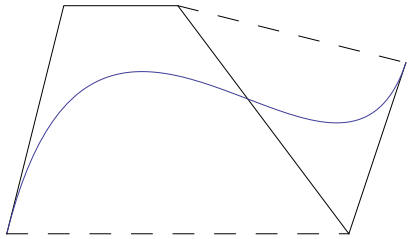

Figura 8. Envolvente convexa del polígono de control

Comunicaciones del CIMAT

Proposición 11. *La derivada de una curva de Bézier de grado n, $\alpha[P_0, \cdots, P_n]$, se puede escribir como curva de Bézier de grado $n-1$ como sigue: Sea $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$, entonces*

$$\alpha'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\, \Delta P_i.$$

Una consecuencia de esta proposición, útil en la práctica para hacer los ajustes en el trazado de las curvas manipulando sus puntos de control, es que la tangente a la curva de Bézier en los extremos es paralela a los lados inicial y final del polígono de control:

$$\alpha'(0) = n(P_1 - P_0)\ ; \quad \alpha'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

Más en general, las curvas de Bézier tienen una propiedad que se llama *control pseudo-local*. De manera más precisa, si $\alpha(t)$ y $\tilde{\alpha}(t)$ son curvas cuyos polígonos de control difieren únicamente en los i-ésimos puntos, digamos P_i y $\tilde{P}_i$, entonces las curvas difieren en $B_i^n(t)(P_i - \tilde{P}_i)$. La propiedad de máximo único dice entonces que es alrededor de $t = i/n$, esto es, cerca de P_i, donde las curvas muestran su mayor variación:

De nuevo, usando la curva de ejemplo 5, la figura ilustra que sucede al cambiar P_3 de $(6, 0)$ a $(6, -2)$:

Figura 9. Control pseudo-local de las curvas de Bézier.

La última propiedad que mencionaremos es:

Proposición 12. *(Invariancia afín) Sea α la curva de Bézier asociada al polígono de control $P_0, \cdots, P_n$. Si ϕ es una transformación afín del plano, es decir, la composición de una transformación lineal con una traslación, entonces la curva de Bézier asociada al polígono de control $\phi(P_0), \cdots, \phi(P_n)$ es precisamente $\phi(\alpha)$:*

$$\phi(\alpha[P_0, \cdots, P_n](t)) = \alpha[(\phi(P_0), \cdots, \phi(P_n)](t).$$

La proposición anterior es también esencial para la graficación, porque en la práctica significa que siempre podemos llevar nuestro diseño a una región predeterminada del espacio, por ejemplo, ¡la pantalla de nuestro ordenador!

Comunicaciones del CIMAT

Para concluir esta parte, veamos el siguiente ejemplo (desarrollado por Juan Monterde), que nos dará una mejor idea de cómo se puede aplicar lo anterior a la graficación de objetos por ordenador:

Ejemplo 6. *Primeramente, la siguiente curva fue generada utilizando tres curvas de Bézier de grado 5, cuyos puntos de control fueron definidos de manera totalmente voluntaria, con criterios meramente estéticos (de hecho, la curva que escogimos para nuestro ejemplo guía es una variante de grado 4 de la primera de estas curvas).*

La elección del grado de las curvas es arbitraria, pero obsérvese que para reducir el coste computacional se escogió un grado relativamente pequeño. Las uniones de las curvas se aprecian en las cúspides de la curva global, que ocurren en las abscisas 10 y 16.

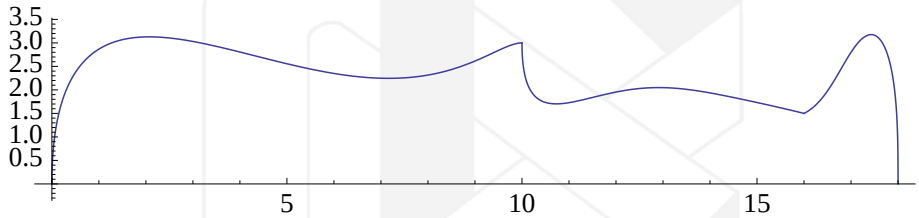

Figura 10. Un perfil generado con tres curvas de Bézier de grado 5.

Esta parte del proceso evidentemente no es matemática, y depende de los gustos y de las habilidades artísticas del usuario; pero usando esta curva para generar una superficie de revolución se puede obtener entonces el siguiente atractivo diseño para una mano de un mortero:

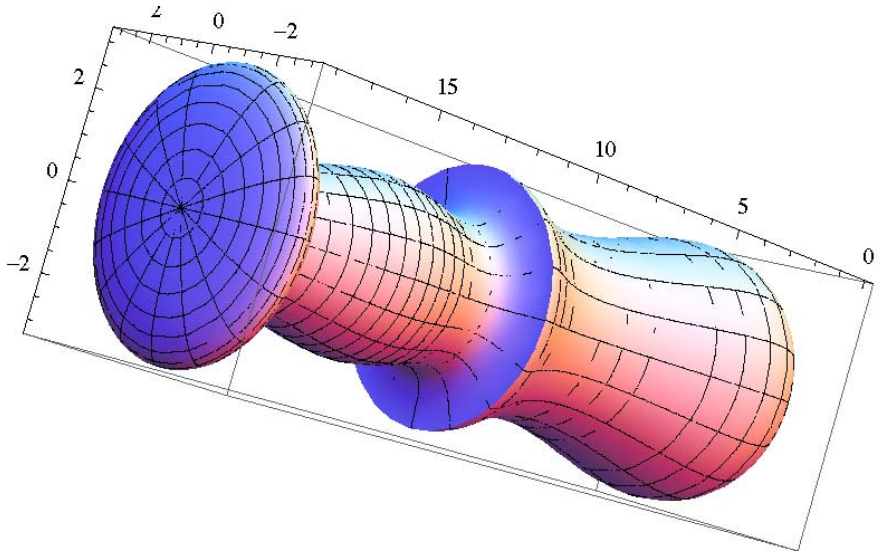

Figura 11. Mano de mortero, modelada por la superficie de revolución obtenida del perfil anterior.

Comunicaciones del CIMAT

Ejercicio 4. *Prueba la proposición:*

Proposición *Las curvas intermedias en el algoritmo de DeCasteljau satisfacen*

$$P_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} B_j^r(t) P_{i+j}.$$

En particular, la curva de Bézier asociada al polígono de control $P_0, \cdots, P_n$ *está dada por*

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

(Sugerencia: usa la fórmula de recurrencia para los polinomios de Bernstein).

Ejercicio 5. *Precisión lineal: Prueba que si* $P_0, \cdots, P_n$ *son puntos equidistribuidos en una recta (esto es, uniformemente espaciados), entonces la curva de Bézier* $\alpha[P_0, \cdots, P_n](t)$ *es exactamente la interpolación lineal entre* P_0 *y* P_n.

Comunicaciones del CIMAT

5. Curvas de Hodógrafo Pitagórico

5.1. **Curvas Paralelas ('Offset').** Debido, entre otras cosas, a que los instrumentos físicos no tiene espesor infinitesimal, uno de los problemas de interés en el diseño de formas por ordenador es el de la construcción de curvas paralelas a una curva dada, también conocidas como curvas 'offset'. Esto a su vez ha dado interés al estudio de las llamadas curvas de *hodógrafo pitagórico*, para las cuales este problema tiene una respuesta especialmente satisfactoria.

Definición 12. *Sea α una curva plana (regular) y $d \in \mathbb{R}$ Entonces una curva paralela a α a la distancia $|d|$ es la curva*

$$\beta_d(t) = \alpha(t) + d\, n(t)$$

donde n es, como de costumbre, el vector normal unitario.

Es claro que si $d = 0$ la curva offset es la curva original, y que para cada $M > 0$ hay dos curvas (que pueden ser bastante distintas en su aspecto) a esa distancia, correspondientes a $d = \pm M$.

Evidentemente, la complicación en el proceso se presenta al calcular el vector normal n, ya que para ello debemos calcular $\|\alpha'\|$, que involucra una raíz cuadrada, lo que ya no es un proceso algebraico.

Ejemplo 7. *Consideremos la parábola $y = x^2$, parametrizada como $\alpha(t) = (t, t^2)$. Su vector tangente es $\alpha'(t) = (1, 2t)$, cuya norma es $\sqrt{1+4t^2}$ y así tenemos que el vector normal es*

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,(-2t, 1)\,.$$

Luego, si por ejemplo $M = 1$, las curvas paralelas a esa distancia son como en la figura

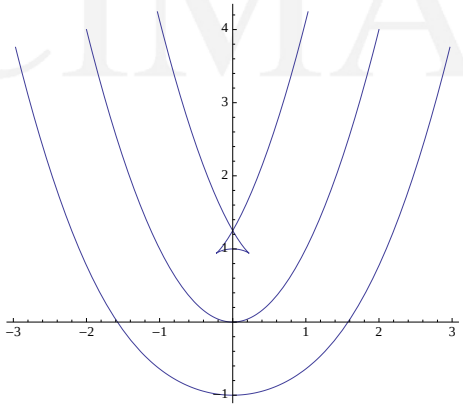

Figura 12. La parábola $y = x^2$ y dos curvas 'offset' a ella.

Como se puede ver, las curvas offset no sólo no son parábolas, sino que una de ellas tiene singularidades (dos cúspides y una autointersección).

Comunicaciones del CIMAT

5.2. **Curvas de hodógrafo pitagórico.** El 'hodógrafo' (término técnico, que desafortunadamente no existe en español) de una curva parametrizada α es simplemente su vector velocidad, α'; la terminología, que viene del vocablo griego *hodos*, que significa 'camino', fue introducida por el matemático irlandés William R. Hamilton a mediados del siglo XIX.

Definición 13. *Sea α una curva polinomial. Decimos que α es de hodógrafo pitagórico si existe un polinomio $p(t)$ tal que*

$$\|\alpha'(t)\| = p(t)$$

Aunque la definición parece restrictiva, las curvas de hodógrafo pitagórico son en realidad suficientemente abundantes, como veremos más adelante; en todo caso, es claro que una recta parametrizada como (at, bt) es de hodógrafo pitagórico, así que esta clase no es vacía.

Ejemplo 8. *La curva de Tschirnhaus $\alpha(t) = (3t^2 - 1)(1, t)$ es un ejemplo no trivial de curva de hodógrafo pitagórico, ya que un cálculo directo muestra que $\|\alpha'(t)\| = 9t^2 + 1$.*

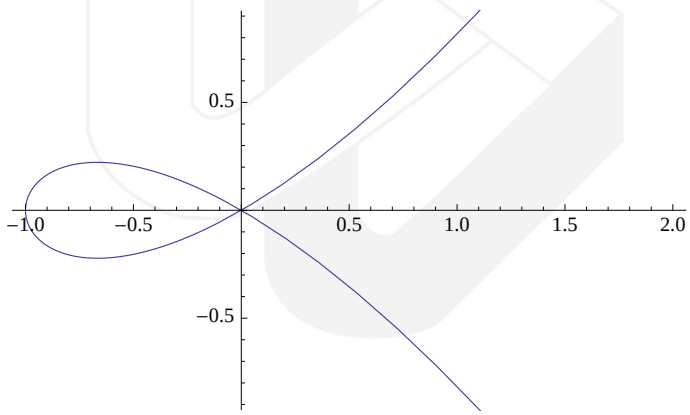

Figura 13. La cúbica de Tschirnhaus

Nótese que esta curva tiene una autointersección en el origen, correspondiente a los valores del parámetro $|t| = 1/\sqrt{3}$. Y por lo mismo, el lazo dado por su restricción a $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ es una curva cerrada simple, algo que usaremos más addelante.

De hecho, se sabe que (en cierto sentido) esta curva es la única curva polinomial de grado tres de hodógrafo pitagórico.

5.3. **Ternas pitagóricas.** El calificativo 'pitagórico' en la definición anterior proviene de la relación que hay entre este tipo de curvas y los llamados triples (o ternas) pitagóricos de enteros:

Definición 14. *Se dice que tres números enteros a, b, c forman un triple pitagórico si $a^2 + b^2 = c^2$.*

Por supuesto, pitagórico aquí proviene del teorema de Pitágoras y, por ejemplo, $(3, 4, 5)$ es un triple pitagórico, conocido incluso por los egipcios y babilonios, mucho antes del propio Pitágoras. Vemos entonces que la definición de hodógrafo pitagórico

Comunicaciones del CIMAT

es simplemente la transposición a los polinomios de esta noción en los enteros (y como dijimos, ambos conjuntos son anillos, así que esta noción es, en el fondo, bastante natural).

Ahora bien, lo interesante es que hay muchos triples pitagóricos; pero más aún, existe un método constructivo para generarlos:

Proposición 13. *los números a y b son parte de un triple pitagórico si y sólo si existen enteros u, v y r tales que $(u, v) = 1$ (esto es, son primos relativos) y*

$$a = r(u^2 - v^2)\ ;\ b = 2ruv;$$

en cuyo caso

$$c = r(u^2 + v^2).$$

Si $r = 1$ decimos que el triple es primitivo.

Prueba. Una manera elegante de probar esto es como sigue:

Supongamos que los enteros a, b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, con $c \neq 0$. Entonces el punto $(a/c, b/c) \in S^1$, de modo que el problema es construir puntos en el círculo unitario de coordenadas racionales.

Ahora bien, si consideramos la recta que pasa por $(-1, 0)$ y $(a/c, b/c)$, su intersección con la recta $x = 1$ (que es una *proyección estereográfica*) es el punto $(1, 2b/(a + c))$. Vemos entonces que $h = 2b/(a + c) \in \mathbb{Q}$.

Si calculamos ahora la intersección de la recta por $(1, h)$ con S^1 (es decir, la inversa de la proyección estereográfica), esto nos da

$$x = \frac{1 - h^2}{1 + h^2}\ ;\quad y = \frac{2h}{1 + h^2}$$

Así, si hacemos $h = u/v$, con $(u, v) = 1$, llegamos a que

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2}\right),$$

y así $a = \lambda(u^2 - v^2)$, $b = 2\lambda uv$, y $c = \lambda(u^2 + v^2)$, de modo que $\lambda = c/(u^2 + v^2) \in \mathbb{Q}$.

El siguiente argumento de divisibilidad muestra ahora que en realidad $\lambda = r \in \mathbb{Z}$:

En efecto, si $\lambda = m/n$, con $(m, n) = 1$, entonces n debe dividir a $2uv$; pero como u y v son primos relativos, sólo puede dividir a uno de ellos; por consiguiente, no podría dividir a $u^2 - v^2$, con lo que necesariamente $n = 1$ ó $n = 2$. Pero si $n = 2$ entonces alguno de u ó v es impar, de modo que $u^2 - v^2$ es impar, al igual que m, y entonces se tendría que $a \notin \mathbb{Z}$, con lo que se concluye la prueba. □

Observación 3. *El argumento usado muestra que hay una íntima relación entre el problema de las ternas pitagóricas y la geometría del círculo S^1. De manera un poco más precisa, la construcción de las ternas pitagóricas lo que muestra es que el conjunto de puntos en S^1 cuyas* **dos** *coordenadas son racionales es infinito, y de hecho, se puede probar que es denso.*

Comunicaciones del CIMAT

Esto tiene relación con las ideas de interés para estas notas, porque esencialmente dice que si graficamos 'físicamente' el círculo, usando únicamente puntos de coordenadas racionales, que como hemos mencionado son los que son 'computables', la figura que vemos de todos modos **es** *un círculo.*

Pero es notable que esta misma filosofía se puede aplicar a curvas polinomiales de grado más elevado y los resultados son muy distintos. Por ejemplo si consideramos la curva dada por $x^4 + y^4 = 1$; el célebre último teorema de Fermat (probado por A. Wiles en 1995) se puede interpretar entonces diciendo que si queremos hacer lo mismo —es decir, usar sólo puntos de coordenadas racionales—, ¡sólo veríamos cuatro puntos!: $\pm(1,0)$; $\pm(0,1)$.

Aunque no es enteramente trivial, los argumentos dados en la proposición anterior valen *mutatis mutandis* en el anillo de polinomios; en otras palabras, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 14. *Sea α una curva polinomial (o de Bézier, si se prefiere). Entonces α es de hodógrafo pitagórico si y sólo si existen polinomios, r, e, f, tales que e y f no tienen raíces comunes (en $\mathbb{C}$), $r(t) > 0$ y*

$$\alpha'(t) = r(t)\left(e^2(t) - f^2(t), 2e(t)f(t)\right).$$

Si r es idénticamente 1, decimos que la curva es primitiva.

Prueba. La demostración es muy similar a la dada para los enteros: Aunque la interpretación geométrica se pierde en el paso a polinomios, todos los pasos algebraicos tienen sentido, y el punto clave es que el argumento de divisibilidad, requerido al final, sigue siendo válido para el anillo de polinomios □

Observación 4. *Aunque no es importante para nosotros, el que esto se pueda hacer para el anillo de polinomios plantea la pregunta de cuáles son las propiedades esenciales que debe tener un anillo para que funcione la construcción anterior. En álgebra abstracta esto se expresa diciendo que los anillos son dominios de factorización única.*

5.4. **Relación con la variable compleja.** Los puntos en el plano se pueden identificar con los números complejos: $(a,b) \leftrightarrow a + bi$, donde recordamos que el número i se define por la condición $i^2 = -1$, o lo que es lo mismo $i = \sqrt{-1}$.

Si hacemos esta identificación, una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ se identifica con una función (que denotamos igual) $\alpha : I \to \mathbb{C}$. La utilidad de esta identificación es que la condición de hodógrafo pitagórico se puede escribir de manera muy sencilla:

Proposición 15. *Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es de hodógrafo pitagórico si y sólo si existen una función polinómica real positiva $r(t)$ y una función compleja $z(t)$ tal que*

$$\alpha'(t) = r(t)z^2(t).$$

Prueba. Notamos que si $w = a + ib \in \mathbb{C}$ entonces $w^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. Usando ahora el teorema anterior, simplemente debemos tomar

$$z(t) = e(t) + if(t).$$

□

Comunicaciones del CIMAT

Usemos esto para analizar a la cúbica de Tschirnhaus: Recordamos primero que $\alpha(t) = (3t^2 - 1)(1, t)$. Luego, $\alpha'(t) = (6t, 9t^2 - 1)$. Esto se identifica con la curva en el plano complejo $6t + i(9t^2 - 1)$. Esto no tiene 'obviamente' la forma del cuadrado de un número complejo, pero si multiplicamos por i obtenemos

$$\alpha'(t) = i(1 - 9t^2 - 6it) = (\sqrt{i})^2(3t - i)^2.$$

que tiene una forma más parecida. De hecho, si usamos que $\sqrt{i} = (1/\sqrt{2}(1 + i)$, desarrollando la expresión anterior podemos llegar a la sigiuente expresión polinomial para α':

$$\frac{1}{2}(1 - i + 3(1 + i)t)^2;$$

esto corrobora además que la curva de Tschirnhaus es de hodográfo pitagórico, como ya sabíamos.

5.5. **Densidad de las curvas de hodógrafo pitagórico.** Por último, señalemos cómo se pude usar lo anterior para ver que, efectivamente, cualquier curva se puede aproximar tanto como se desee por curvas de hodógrafo pitagórico.

Para ello, comenzamos por observar que, bajo esta identificación de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, para *cualquier* curva suave el hodográfo se puede escribir en la forma

$$\alpha'(t) = r(t)z^2(t);$$

simplemente es posible que ni r ni z sean polinomios.

Pero entonces podemos usar el teorema de Weierstrass para aproximar (¡uniformemente!) r y z por polinomios tanto como deseemos, digamos $\tilde{r}$ y $\tilde{z}$, con lo que aproximamos a α' tanto como se desee.

Finalmente, como la integral de un polinomio es otra vez un polinomio, para aproximar a la curva original, simplemente debemos integrar. Así, sin entrar en muchos detalles, la aproximación polinomial con curvas de hodógrafo pitagórico, se escribe entonces:

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{r}(s)\tilde{z}(s)\, ds.$$

Ejercicio 6. *Haz un cambio de parámetro adecuado para describir el lazo de la curva de Tschirnhaus como una curva en el intervalo* $[0, 1]$*, y descríbela como curva de Bézier (es decir, da su polígono de control).*

Ejercicio 7. *Escribe la ecuación de la curva paralela al lazo de la curva de Tschirnhaus, como una curva en el intervalo* $[0, 1]$*; ¿De qué grado es la curva? ¿Puedes relacionarla con la curva del ejercicio anterior?*

Comunicaciones del CIMAT

6. Un problema isoperimétrico para curvas de hodógrafo pitagórico

6.1. **El problema isoperimétrico.** El problema isoperimétrico clásico es el siguiente:

Problema 1. *Encontrar, entre todas las curvas cerradas y simples de longitud fija* $2l$*, aquella que encierre la mayor área posible.*

Los orígenes de este problema se remontan a los geómetras de la Grecia clásica, quienes lo describieron mediante la siguiente historia:

Después de la guerra de Troya, Eneas junto con un pequeño puñado de troyanos desembarcaron en las costas de lo que hoy es Túnes, en el norte de África. Eneas, que mostró ser un hábil negociante, consiguió que la reina del lugar, llamada Dido (y al problema isoperímetrico se le llama a veces 'el problema de Dido'), le diera algo de terreno para instalarse; Dido impuso, sin embargo, la condición de que dicho terreno sería sólo aquél que Eneas consiguiera encerrar usando una piel de buey.

Entonces Eneas, inteligentemente, cortó la piel en tiras delgadas y, uniéndolas, consiguió una larga cuerda con la que encerró un terreno suficientemente grande como para fundar ahí lo que según la tradición se volvió la importante ciudad de Cartago.

Ahora bien, que la solución de este problema —dentro de la clase de todas las curvas cerradas simples— es el círculo de perímetro $2l$ era conocido ya desde esos tiempos; sin embargo, la primera demostración formal sólo se dio en el siglo XIX, y se debe al matemático suizo Jakob Steiner.

La demostración de Steiner es a la vez elegante e ingeniosa, y lo que hace es aprovechar las simetrías que el problema impone en la curva (aunque en honor a la verdad, la demostración de Steiner es incompleta, pues supone algo que no es matemáticamente obvio, que es que la solución existe). La idea de su demostración es como sigue:

Primeramente, la curva debe ser *convexa*; de lo contrario, reflejando en la recta que una a dos punos tales que el segmento que los une no está encerrado, obtenemos una curva que encierra un área mayor.

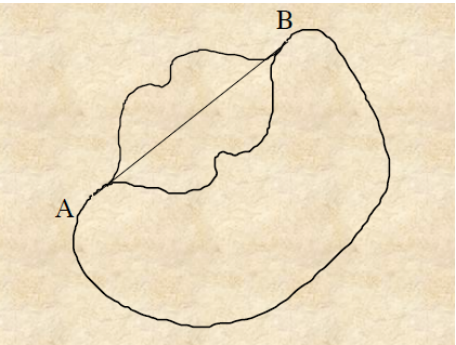

Figura 14. La curva debe ser convexa

Comunicaciones del CIMAT

Después, por un argumento similar, la curva debe ser simétrica con respecto a cualquier eje que divida su perímetro en dos partes de igual longitud:

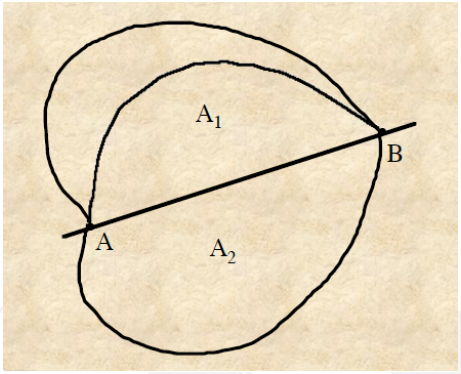

Figura 15. La curva debe ser simétrica

Así, basta con considerar la mitad de la curva.

Finalmente, el ángulo subtendido desde cualquier punto de la frontera debe ser $\pi/2$, ya que un ángulo distinto daría un área menor del sector triangular (figura siguiente); y esto es una caracterización del círculo:

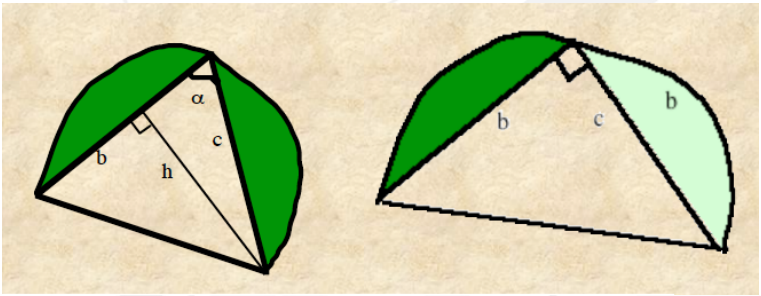

Figura 16. Todos los puntos subtienden ángulos rectos

Ahora bien, el punto es que el círculo no es *a priori* una de las curvas que hemos considerado como convenientes para la graficación por ordenador.

Observación 5. *Es importante matizar esta afirmación, ya que aunque el círculo no se puede parametrizar como una curva polinomial, pues eso implicaría que* $\cos t$ *y* $\sin t$ *son funciones polinómicas, lo que se sabe que no es cierto, en cierto modo sí es computable, ya que sí se puede parametrizar como una curva racional, pues en efecto es fácil verificar que la curva*

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

satisface que $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$*, de modo que esta curva describe un trozo del círculo unitario* S^1*. De hecho, no es difícil convencerse de que sólo falta el punto* $(-1, 0)$*, que corresponde a* $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t), y(t))$*.*

Comunicaciones del CIMAT

El estudio de las curvas racionales puede hacerse de manera similar al de las curvas polinomiales; pero esto va más allá de nuestros objetivos.

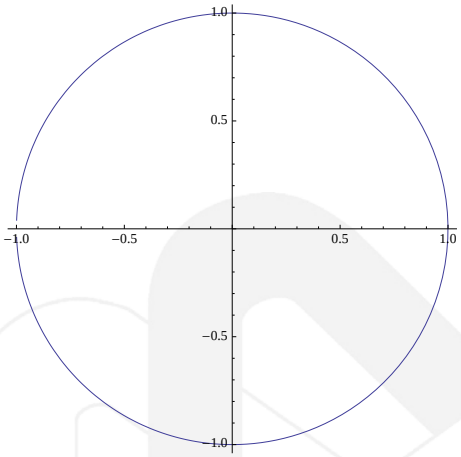

Figura 17. Parametrización racional estándar del círculo unitario

Pero en cualquier caso, lo que esto plantea es la siguiente pregunta, cuyo análisis fue hecho por Smarzewski y Rutka en 2010:

Problema 2. *¿Cuál es la curva polinómica de longitud fija* $2l$ *que encierra la mayor área posible?*

La respuesta, como es de esperarse, depende del grado de los polinomios que consideremos. En efecto, usando la serie de Taylor de las funciones trigonométricas, sabemos que podemos aproximar a las coordenadas de la parametrización natural de S^1 por polinomios de grado suficientemente grande, tanto como se quiera.

Así pues, en el límite (en un sentido que habría que precisar, pero no ahondaremos en esta cuestión) obtendríamos al círculo; es entonces natural refinar la pregunta e imponer una restricción sobre el grado (que es lo que en realidad hacen Smarzewski y Rutka):

Problema 3. *Sea* n *fija. ¿Cuál es la curva polinómica de longitud fija* $2l$ *y de grado menor o igual a* n *que encierra la mayor área posible?*

Pero entonces, y siguiendo la filosofía de que las curvas de hodógrafo pitagórico son especialmente importantes, resulta natural plantearse el problema en esta clase (Monterde y Ongay, 2012).

Problema 4. *Sea* n *fija. ¿Cuál es la curva de hodógrafo pitagórico de longitud fija* $2l$ *y de grado menor o igual a* n *que encierra la mayor área posible?*

En lo que sigue de estas notas discutiremos dos variantes de esta pregunta para $n \leq 5$: para curvas de hodógrafo pitagórico arbitrarias (a las que en lo sucesivo llamaremos 'curvas PH') y para curvas que cierren de clase C^1 en los extremos del intervalo (esto es, que su tangente esté bien definida en todos los puntos).

Para trabajar el problema, conviene suponer que las curvas están definidas en $J = [-1, 1]$ y, basados en la prueba de Steiner, supondremos desde el inicio que

Comunicaciones del CIMAT

las curvas aceptables para nuestro análisis son simétricas con respecto del eje y, y satisfacen $\alpha(0) = (0,0)$ y $\alpha(-1) = \alpha(1)$.

Se sigue que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la función $x(t)$ es impar, y la función $y(t)$ es par; esto es $x(-t) = -x(t)$ y $y(-t) = y(t)$.

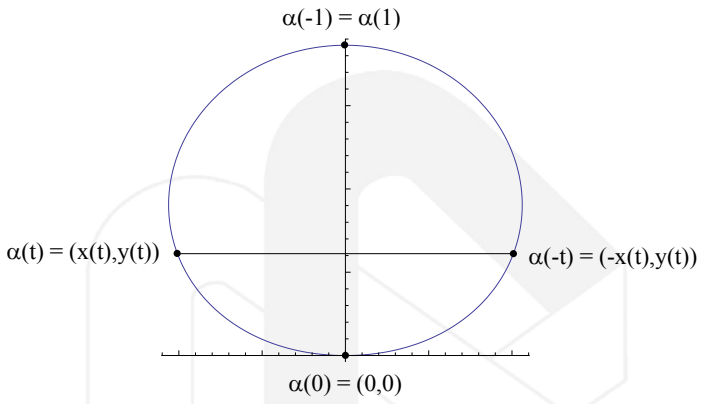

Figura 18. Simetrías de la curva

Lema 2. *Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva PH primitiva, y*

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (e^2(t) - f^2(t), 2e(t)f(t)),$$

con $x(t)$ una función impar y $y(t)$ par, entonces $e(t)$ es par y $f(t)$ es impar o viceversa.

Prueba. Las hipótesis implican que $||\alpha'||^2 = (x')^2 + (y')^2$ es par y, por consiguiente, $||\alpha'|| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ es también par.

Como $\alpha' = (e^2 - f^2, 2ef)$,

$$||\alpha'|| = e^2 + f^2.$$

de modo que

$$e^2 = \frac{x' + ||\alpha'||}{2},$$

es una función par. Pero como $e(t)$ es un polinomio, necesariamente e mismo tiene ya paridad definida; es decir, o es par o es impar.

Pero como también $f = \frac{y'}{2e}$, si e es par entonces f es impar, y viceversa. □

De hecho, se puede probar que si se agrega la condición de que la curva se recorra en dirección positiva, entonces $e(t)$ es impar y $f(t)$ par.

Lema 3. *Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in [-1, 1]$ una curva PH primitiva de longitud 2ℓ, con*

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (e^2(t) - f^2(t), 2e(t)f(t)).$$

Comunicaciones del CIMAT

Entonces, α es una curva cerrada si y sólo si

$$\int_{-1}^{1} e^2(t)dt = \ell = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt,$$

y

$$\int_{-1}^{1} e(t)f(t)dt = 0.$$

Prueba. Es directa de

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(1) - \alpha(-1) \\ &= \textstyle\int_{-1}^{1} \alpha'(t)dt \\ &= \textstyle\int_{-1}^{1} (e^2(t) - f^2(t), 2e(t)f(t))dt. \end{aligned}$$

□

En lo que sigue, supondremos por comodidad que $\ell = 1$.

Finalmente, notamos que una consecuencia sencilla del teorema de Green es que el área encerrada por una curva cerrada simple $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in [-1, 1]$ se puede calcular mediante la fórmula

$$A(\alpha) = \left| \int_{-1}^{1} x'(t)y(t)dt \right|.$$

Ejemplo 9. *Como ya dijimos, para $n = 3$, la cúbica de Tschirnhaus es la única curva cerrada simple de hodógrafo pitagórico, de modo que ésta es la solución del problema; analicémosla sin embargo con el método que acabamos de describir, suponiendo $\ell = 1$.*

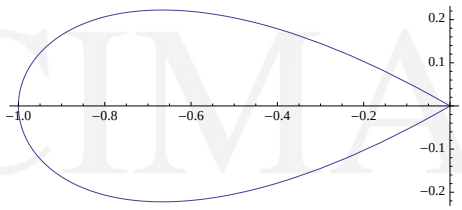

Figura 19. El lazo de la curva de Tschirnhaus

Como el grado de la curva es ≤ 3 se sigue que, x' y y' son de grado ≤ 2, y por tanto, $e(t)$ y $f(t)$ son de grado ≤ 1. Supongamos que e es impar y f par, entonces

$$\begin{aligned} e(t) &= e_1 t, \\ f(t) &= f_0. \end{aligned}$$

De $\int_{-1}^{1} e^2(t)dt = 1 = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt$, tenemos $e_1^2 = 3/2$ y $f_0^2 = 1/2$, de modo que podemos poner

$$e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Comunicaciones del CIMAT

(Otras elecciones de signos darían lugar a la misma curva, salvo por alguna simetría.) Estos valores dan la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}t\left(t^2-1\right), \frac{\sqrt{3}t^2}{2}\right).$$

que es la cúbica de Tschirnhaus, salvo por una traslación y una reflexión.

El área encerrada por esta curva está dada entonces por la fórmula del teorema de Green

$$\int_a^b x'(t)y(t)\,dt,$$

pero para comparar con S^1 nos conviene reescalar (esto es, hacer $l = \pi$), lo que simplemente equivale a multiplicar el área por el factor π^2; si hacemos esto, el área resultante es $2\pi^2/(5\sqrt{3}) \approx 2.279$, que es aproximadamente un 72.5% del área del círculo.

Es interesante observar que si suprimimos la condición de hodógrafo pitagórico, la curva polinómica solución encierra un área ([S-R]) de aproximadamente 2.94, lo que es más o menos un 93% del área del círculo. Así pues, en este grado particular la pérdida que supone la condición de hodógrafo pitagórico es considerable.

6.2. **Curvas de grado 5.** En vista de lo anterior, el problema isoperimétrico para curvas PH tiene sentido realmente sólo para $n \geq 5$, y así $n = 5$ es entonces el primer caso donde el problema es no trivial.

Ahora, para este grado x' y y' satisfacen deg ≤ 4, y por tanto $e(t)$ y $f(t)$ son de grado ≤ 2. Como antes, si $e(t)$ es impar y $f(t)$ par, tenemos

$$\begin{aligned} e(t) &= e_1 t, \\ f(t) &= f_0 + f_2 t^2. \end{aligned}$$

De la relación $\int_{-1}^1 e^2(t)dt = 1 = \int_{-1}^1 f^2(t)dt$, obtenemos

$$(*) \qquad e_1^2 = 1 = f_0^2 + 2f_0f_2 + f_2^2$$

y la segunda ecuación dice que podemos dejar todo en términos de una sola variable; escogemos f_0.

Ahora bien, para tener expresiones más manejables es conveniente escribir las funciones e y f en términos de una base distinta que la de las potencias (véanse la observación 6, al final de esta sección), así que sin entrar en detalles, señalemos simplemente que esto permite llevar estas restricciones a la forma más sencilla

$$e_1 = +1, \quad f_2 = +\sqrt{1-f_0^2},$$

y con esto la curva que se obtiene, que queda en términos de la variable libre f_0, es:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \tfrac{1}{8}\Big(&t\left(t^2-1\right)\Big(5 - 4f_0\sqrt{5}\sqrt{1-f_0^2} - 9t^2 + f_0^2\left(9t^2-1\right)\Big), \\ &\sqrt{3}t^2\Big(4f_0 + \sqrt{5}\sqrt{1-f_0^2}\left(3t^2-2\right)\Big)\Big) \end{aligned}$$

Comunicaciones del CIMAT

y el área se puede escribir también en términos de f_0:

$$\mathrm{Area}(f_0) = \frac{2}{35\sqrt{3}}\left|3f_0 - 10f_0^3 + \sqrt{5}\sqrt{1-f_0^2}(1+5f_0^2)\right|,$$

Es interesante notar que el máximo de esta función se puede de hecho calcular explícitamente, y se alcanza en el valor $f_0 = -\sqrt{\frac{2}{15}\left(3+\sqrt{14}\cos(a)\right)}$, donde $a = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{5\sqrt{335}}{51}\right)$. Numéricamente esto da $f_0 \simeq -0.931629$.

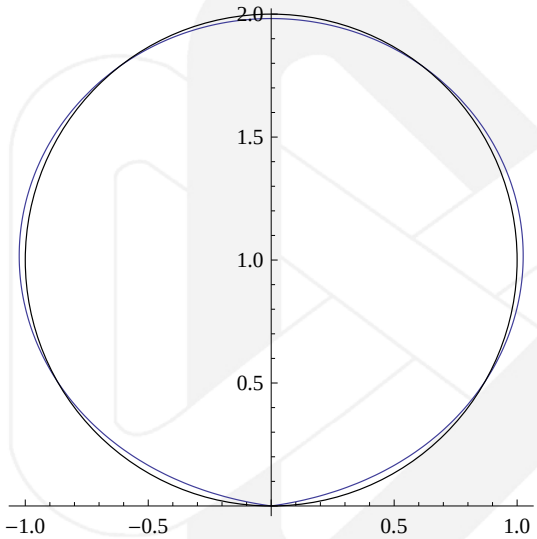

Figura 20. La solución del problema isoperimétrico para una curva PH de grado 5 comparada con S^1.

Ppodemos también reescribir esta curva como una curva de Bézier, mediante la reparametrización $\beta(t) = \alpha(2t-1)$; sus puntos de control se pueden entonces obtener explícitamente, y son

$$\begin{cases} P_0 &= (0,0) = P_5, \\ P_1 &= (x_1,y_1) = \left(\frac{2}{75}\left(-3+4\sqrt{14}\cos(a)+\sqrt{10}\sqrt{13+3\sqrt{14}\cos(a)-14\cos(2a)}\right),\right. \\ & \qquad \left.\frac{2}{25}\left(-5\sqrt{9-2\sqrt{14}\cos(a)}+\sqrt{10}\sqrt{3+\sqrt{14}\cos(a)}\right)\right) \\ P_2 &= (x_2,y_2) = \left(\frac{1}{75}\left(78-14\sqrt{14}\cos(a)+\sqrt{10}\sqrt{13+3\sqrt{14}\cos(a)-14\cos(2a)}\right),\right. \\ & \qquad \left.\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{3+\sqrt{14}\cos(a)}\right) \\ P_3 &= (-x_2,y_2), \\ P_4 &= (-x_1,y_1), \end{cases}$$

con a como antes.

Comunicaciones del CIMAT

Reescalando para que $\ell = \pi$, el área obtenida es

$$A \simeq 3.13568,$$

¡que es ya aproximadamente 99.8% del área del círculo!

Un pseudo-círculo. Finalmente, supongamos ahora que imponemos la condicón de que la curva se cierre de clase C^1; esto es que $\alpha'(-1) = -\alpha'(1)$, de modo que en todos los puntos se tenga una tangente bien definida. Notamos que esto no es posible si deg $= 3$, ya que la cúbica de Tschirnhaus no tiene esta propiedad.

La curva obtenida antes ya no es solución, pues tiene una cúspide; pero esto simplifica considerablemente las cosas, ya que implica la condición adicional $y'(-1) = y'(1) = 0$. Esto sucede porque para una curva simétrica respecto del eje y la única opción es que su tangente sea horizontal; esto se traduce entonces en la restricción adicional $f_0 + f_2 = 0$.

Combinado con las restricciones dadas en la fórmula $(*)$ esto determina completamente a los parámetros e_1, f_0 y f_2, y la curva resultante, reescalando para que tenga longitud 2π, se escribe entonces

$$\alpha(t) = \pi\left(-\frac{3}{16}t^5 + \frac{9}{8}t^3 - \frac{15}{16}t, \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{4}t^2\right)\right)$$

El área encerrada por esta esta curva, a la que llamaremos 'el pseudo-círculo', es $A \simeq 3.12104$, que es aproximadamente 99.3% del área de S^1.

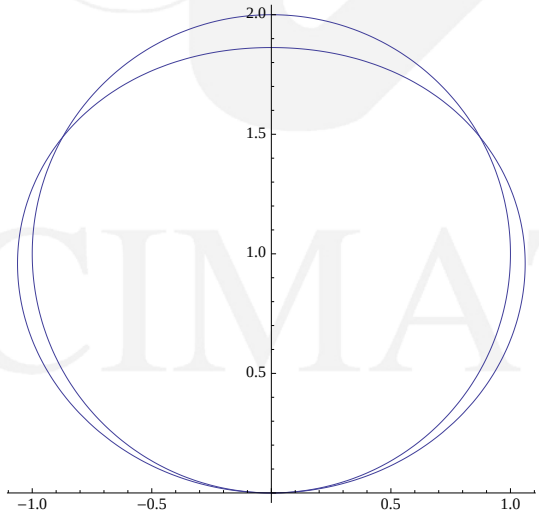

Figura 21. El pseudo-círculo, comparado con S^1.

Observación 6. *Aunque el pseudo-círculo aún está relativamente lejos de verse como el círculo, esto plantea algunas preguntas adicionales interesantes, por ejemplo:*

¿Qué sucede para curvas PH de grado mayor?, y ¿qué sucede si imponemos restricciones mayores en la suavidad de las curvas? Estos problemas fueron estudiados con detalle en el trabajo [M-O], al que referimos al lector interesado en estas preguntas.

Comunicaciones del CIMAT

Por otro lado, cabe notar que para estudiar el problema en este grado de generalidad, es conveniente introducir una base de polinomios distinta a las que hemos considerado aquí: la base de polinomios de Legendre. La razón principal es que éstos tienen la propiedad de ser una base ortogonal; este es el cambio mencionado en el análisis de la curva de grado 5.

Ejercicio 8. *Busca en algún libro de análisis vectorial el enunciado del Teorema de Green y deduce la fórmula usada para calcular el área encerrada por una curva cerrada simple.*

Calcula con ella el área encerrada por el círculo unitario S^1.

Ejercicio 9. *Calcula la curvatura del pseudo-círculo que acabamos de definir. ¿Qué tanto difiere de una constante?*

Referencias

[F] Farouki, R. T., *Pythagorean-Hodograph Curves. Algebra and Geometry inseparable*, Springer, Berlin (2008).

[M] Monterde, J. *Curvas de Bézier*, Notas de Curso, Universidad de Valencia (2012)

[M-O] Monterde, J. and Ongay, F. *An isoperimetric type problem for Pythagorean Hodograph curves*, Computer Aided Geometric Design (2012) (disponible en versión electrónica)

[S-R] Smarzewski, R. and Rutka, P. *An isoperimetric type problem for Bézier curves of degree n*, Computer Aided Geometric Design **27** 313–321 (2010).

CIMAT, Jalisco S/N, Valenciana, Gto., C.P. 36240, México

E-mail address: ongay@cimat.mx

Comunicaciones del CIMAT