CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Un subconjunto particular de la variedad de representaciones n-dimensional $R_n(\Gamma_g)$

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Patricia Eugenia Jiménez Gallegos

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Xavier Gómez-Mont Avalos

Julio del año 2006 Guanajuato, Gto. México

Índice.

INTRODUCCIÓN

Dado Γ un grupo finitamente generado, para cualquier grupo algebraico G el conjunto $R(\Gamma, G)$ de todas las representaciones (homomorfismos) $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ tiene una estructura natural de variedad algebraica, y junto con esta estructura es llamada la variedad de representaciones de Γ en G.

Si consideramos una superficie S compacta de género $g \geq 1$, Γ_g su grupo fundamental y $G = GL_n(\mathbb{C})$, denotamos $R(\Gamma_g, GL_n(\mathbb{C}))$ por $R_n(\Gamma_g)$.

$R_n(\Gamma_g)$ es llamada la variedad de representaciones $n-$dimensional de Γ_g en $GL_n(\mathbb{C})$.

$R_n(\Gamma_g)$ está encajado como un subconjunto de $GL_n(\mathbb{C})^{2g}$ formado de $2g-$uplas $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$ satisfaciendo la relación

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = Id.$$

Existen diversos trabajos sobre representaciones, cuyo estudio depende obviamente del Γ y G que se consideren.
Algunos ejemplos son:

1) William M. Goldman en [7], considera Γ como el grupo fundamental de una superficie cerrada orientable S y G un grupo de Lie. Entonces el espacio de clases de conjugación de representaciones del grupo fundamental de S en G es el espacio de clases de equivalencia de $G-$fibrados planos sobre S. En su artículo se discute la relación de la estructura local y global de éste espacio con la topología de la superficie S y la geometría del grupo de Lie G.
Da varios ejemplos de $Hom(\Gamma, G)$ y estudia detalladamente la topología de $Hom(\Gamma, PSL(2, \mathbb{R}))$.

2) Sea S superficie de Riemann, Γ el grupo fundamental de S, $GL_n(\mathbb{C})$ el grupo general lineal de matrices $n \times n$.
La representación $\rho : \Gamma \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ define un haz vectorial E_ρ.
Si en vez de $GL_n(\mathbb{C})$ consideramos $U(n)$ obtenemos una representación unitaria $\rho : \Gamma \longrightarrow U(n)$.
Esto es, preserva la forma hermitiana. Una representación se dice que es irreducible si no tiene subespacios propios invariantes.

Narasimhan y Seshadri en [14] demuestran que el haz vectorial E_ρ asociado a una representación $\rho : \Gamma \longrightarrow U(n)$ unitaria e irreducible es estable.

3) En [16] A.S. Rapinchuk, V.V. Benyash-Krivetz y V.I. Chernosov, dan una descripción de $R_n(\Gamma_g)$ cuando el campo base es de característica 0. También analizan su espacio de moduli $X_n(\Gamma_g)$, donde $X_n(\Gamma_g)$ es definido como un cociente catégorico de $R_n(\Gamma_g)$ módulo la acción de GL_n por conjugación.

Existe una construcción clásica en teoría de foliaciones que permite asociar a toda representación $\rho : \Gamma(S) \longrightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ su suspensión, que es una fibración $\Pi_\rho : M_\rho \longrightarrow S$ dotada de una foliación $\mathcal{F}_\rho$ transversa a las fibras.
La dinámica de tal foliación está esencialmente determinada por la del grupo de holonomia $\rho(\Gamma(S))$.(ver [12]).
Un ejemplo natural de lo anterior es el dado por las ecuaciones de Riccati [2], que son holomorficamente conjugadas (fuera de las hojas excepcionales) con la foliación suspensión $\mathcal{F}_\rho$ donde la base S es la esfera $\mathbb{C}P^1$ menos un conjunto finito de puntos.

El presente trabajo tiene como antecedentes ciertos estudios sobre flujos geodésicos y representaciones, algunos de ellos son:

En [2] se muestra que las hipótesis de integrabilidad de cociclos, necesarias en el Teorema de Oseledec [2], son equivalentes a la condición siguiente:

$(*)$ La holonomía de todo lazo "pequeño" γ alrededor de un "agujero" de S (superficie de Riemann compacta menos un número finito de puntos) tiene todos sus valores propios de módulo 1.

En [3] se menciona el siguiente resultado:

Teorema 1([3, Teorema 2]). *Sea S una Superficie de Riemann Hiperbólica de volumen finito.*
Sea $\rho : \Pi_1(S) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación verificando $(*)$ y tal que los exponentes de Lyapunov de la medida de Liouville para el cociclo inducido por ρ son no nulos.
Sea ν la proyección sobre M_p de la medida SRB del flujo geodésico foliado X_p.
Entonces para todo compacto $K \subset M_p$, toda sucesión $(x_n \in K)_{n\in\mathbb{N}}$, y toda sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente hacia $+\infty$, la familia de probabilidades $\nu_{r_n}(x_n)$ (obtenida al normalizar la medida de área sobre el disco $D_{r_n}(x_n)$) converge a $+\infty$ en la topología débil cuando $\nu \mapsto +\infty$.

El anterior teorema sigue siendo verdadero para las representaciones y valores en $SL(3, \mathbb{C})$ sí se le añade la hipótesis:

- No existe alguna probabilidad sobre $\mathbb{C}P^2$ invariante por la acción de todas las aplicaciones lineales $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \Pi_1(S)$.(ver [3]).

Inspirados en lo anterior, nuestro trabajo inició con el estudio de ciertas representaciones. A diferencia de los posibles tratamientos de la variedad de representaciones que mencionamos anteriormente, nuestro estudio será principalmente algebraico real.

Consideramos la variedad de representaciones $n-$dimensional $R_n(\Gamma_g)$ y formamos dos subconjuntos con propiedades específicas.
El primero de dichos subconjuntos es:

$$\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) = \{(A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}, A_g, B_g)\} \subset GL_n(\mathbb{C})^{2g}$$

con la propiedad:

a) Los valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de la matriz A_g son de norma distinta.

El segundo subconjunto es:

$$\widetilde{R}_n(\Gamma_g) = \{(A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}, A_g, B_g)\} \subset \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$$

con la siguiente propiedad:

b) La matriz B_g no tiene vectores propios en común con la matriz A_g, ni permuta un subconjunto de vectores propios entre si.

Estas propiedades son importantes ya que la propiedad del inciso a) nos permite describir las medidas de probabilidad invariantes por la matriz A_g.
Al cumplirse adicionalmente la propiedad del inciso b) obtenemos que ningún vector propio de la matriz A_g lo es de la matriz B_g, ni la matriz B_g esta permutando algún subconjunto de vectores propios de la matriz A_g. Por lo tanto las medidas A_g-invariantes ya no serán $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$-invariante.

Decimos que un subconjunto U de una variedad algebraica real V, es un abierto real de Zariski si $V - U$ es una subvariedad analítica real de V.
Tenemos los siguientes Teoremas:

Teorema 6. *Sea $g \geq 1$, entonces $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) \subset R_n(\Gamma_g)$ es un subconjunto abierto real de Zariski distinto del vacío, en el cual dado un elemento $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, la matriz A_g tiene sus valores propios de norma distinta.*

Teorema 7. *$\widetilde{R}_n(\Gamma_g) \subset \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ es un subconjunto abierto real de Zariski distinto del vacío, en el cual dado un elemento $\tilde{\rho} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$, la matriz A_g tiene sus valores propios con norma distinta y la matriz B_g no permuta algún subconjunto de vectores propios de la matriz A_g.*

Teorema 8. *Para cualquier $\tilde{\rho} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ no hay medidas de probabilidad en $\mathbb{C}P^{n-1}$ invariantes por $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$.*

Teorema 9. *La foliación de Riccati genérica no acepta medidas transversas invariantes.*

La idea de las demostraciones de los Teoremas son:

1) Para demostrar el Teorema 6, primero se estudia el conjunto N de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ que tienen dos valores propios con la misma norma, dicho estudio produce 3 Lemas (Lema 7, Lema 8 y Lema 9 del Cap. II). La conclusión es que N es una subvariedad analítica real de codimension 1.
Después construimos un subconjunto abierto de Zariski real $\widetilde{W}$ en $SL_n(\mathbb{C})$) el cual satisface (Proposición 10):
Para toda $C \in \widetilde{W}$,

$$\Phi^{-1}(C) \nsubseteq V$$

donde
$\Phi : GL_n(\mathbb{C})^2 \longrightarrow SL_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A, B) = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$, $V = (N \cap GL_n(\mathbb{C})) \times GL_n(\mathbb{C})$, donde N es el conjunto mencionado anteriormente.

Se definen las aplicaciones:
Sea

$$G = (GL_n(\mathbb{C}))^{2g-2}, \quad \phi : R_n(\Gamma_g) \longrightarrow G$$

la proyección sobre las primeras (2g-2) componentes, $\kappa : G \longrightarrow SL_n(\mathbb{C})$ la aplicación definida como:

$$\kappa(A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}) = ([A_1, B_1][A_2, B_2] \ldots [A_{g-1}, B_{g-1}])^{-1}.$$

y $\gamma = \kappa \circ \phi$.
Escogemos W_0 un subconjunto abierto en $\gamma(R_n(\Gamma_g))$, hacemos $W' = W_0 \cap \widetilde{W}$ y definimos $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ como el producto fibrado:

$$\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) := \kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega \subset R_n(\Gamma_g)$$

$$\begin{tikzcd}
\kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \Omega \arrow[d, "\Phi"] \\
\kappa^{-1}(W') \arrow[r, "\kappa"] & W'
\end{tikzcd}$$

donde $\Omega = \Phi^{-1}(W') \setminus [\Phi^{-1}(W') \cap V]$. Por construcción el conjunto $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ satisface las propiedades del Teorema 6.

2) Para demostrar el Teorema 7, construimos un subconjunto abierto de Zariski de $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ denotado por $\mathcal{U}$, en el cual se satisfacen las propiedades $a)$ y $b)$ que nos interesan (mencionadas en la pág.3). Hacemos la intersección de $\mathcal{U}$ con el conjunto abierto Ω de la construcción dada en 1)

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \Omega.$$

Al ser Φ dominante, $\Phi(\mathcal{U}_0)$ es un subconjunto constructible real en $SL_n(\mathbb{C})$ y por lo tanto contiene un subconjunto abierto real de Zariski no vacío W'' de su cerradura. Definimos $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ como el producto fibrado:

$$\widetilde{R}_n(\Gamma_g) := \kappa^{-1}(W'') \times_{W''} \Omega'$$

$$\begin{tikzcd}
\kappa^{-1}(W'') \times_{W''} \Omega' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \Omega' \arrow[d, "\Phi"] \\
\kappa^{-1}(W'') \arrow[r, "\kappa"] & W''
\end{tikzcd}$$

donde $\Omega' = \Phi^{-1}(W'') \cap \Omega$. Por construcción el conjunto $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ satisface las propiedades del Teorema 7.

3) La demostración del Teorema 8, se basa en que al cumplirse la condición del inciso a) en $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$, obtenemos que las únicas medidas de probabilidad invariantes por A_g son de la forma

$$(*) \qquad \Sigma m_j \delta_{[v_j]}$$

con $\Sigma m_j = 1$ y $\delta_{[v_j]}$ la delta de Dirac con soporte en $[v_j]$, espacio propio del valor propio λ_j de A_g.

Al cumplirse la condición del inciso b) obtenemos que B_g no está permutando algún subconjunto de vectores propios de A_g, por lo cual la medida $(*)$ ya no será $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$-invariante.

4) Para la demostración del Teorema 9, aplicaremos la construcción de la suspensión de una representación, pues dado un elemento $\tilde{\rho} = (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$

podemos construir un fibrado vectorial plano ε con fibra $\mathbb{C}^n$ cuya representación de monodromía sea $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$ (ver [12]), y $Proj(\varepsilon)$ es el fibrado plano con fibra $\mathbb{C}P^{n-1}$ inducido por ε. Las secciones planas de $Proj(\varepsilon)$ forman una foliación holomorfa $\mathcal{F}_\rho$ de $Proj(\varepsilon)$ llamada foliación de Riccati. Y la conclusión de los Teoremas 7 y 8 dan directamente el Teorema 9.

Nuestro Trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

En el Capítulo 0, damos algunos preliminares de Geometría Algebraica.

En el Capítulo 1, presentamos brevemente el Teorema 5 ([16, Teorema 1]).

En el Capítulo 2, construimos el subconjunto $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ y probamos el Teorema 6.

En el Capítulo 3, construimos el subconjunto $\widetilde{R}_n(\Gamma_g) \subset \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ y demostramos los Teoremas 7, 8.

En el Capítulo 4, mencionamos algunos conceptos básicos de foliaciones y demostramos el Teorema 9.

CAPÍTULO 0
PRELIMINARES

0.1 PRELIMINARES DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA

En esta sección recordamos los principales conceptos de Geometría Algebraica que utilizaremos, para mayor referencia ver [9],[10],[13],[17].

Sea K un campo. Definimos el $n-$espacio afín sobre K denotado por $\mathbb{A}^n_K$ ó $\mathbb{A}^n$, como el conjunto de todas las $n-$adas de elementos de K. Si $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, los a_i se llaman coordenadas de p.

$$A = K[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Se interpretan los elementos de A como funciones de $\mathbb{A}^n$ a K.

Si T es un conjunto de polinomios, entonces definimos

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n | f(p) = 0 \forall f \in T\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es el ideal en A generado por T, entonces $Z(T) = Z(\mathcal{A})$.

Definición 1. Un subconjunto Y de $\mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico si existe un subconjunto de polinomios $T \subset A$ tal que $Y = Z(T)$.

Notese que la unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. El vacío y el espacio total son conjuntos algebraicos.

Definimos la topología de Zariski sobre $\mathbb{A}^n$, definiendo los subconjuntos abiertos como los complementos de los conjuntos algebraicos.

Un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{A}^n$ es reducible si $V = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son algebraicos en $\mathbb{A}^n$, y $V_i \neq V$, $i = 1, 2$. En otro caso V es irreducible.
Dado un subconjunto S de $\mathbb{A}^n$, denotar por

$$\mathcal{I}(S) = \{f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n] | \forall x \in S, f(x) = 0\}$$

el ideal de polinomios de $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, que se anulan en S.

Definición 2. Una variedad algebraica afín es un subconjunto cerrado irreducible de $\mathbb{A}^n$ (con la topología Zariski). Un subconjunto abierto de una variedad afín es una variedad cuasi-afín.

Sea X una variedad algebraica, y V un subconjunto algebraico. Las restricciones a V de las funciones polinomiales de $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ forman una $k-$algebra, denotada por $K[V]$ y es llamada el algebra afin.

El invariante básico local de un punto x de una variedad X es el anillo local $\mathcal{O}_x$ de ese punto. Este anillo consiste de todas las funciones que son regulares en alguna vecindad de x.
Si $K(X)$ es el campo de fracciones del anillo coordenado $K[X]$ (ver [17]) vemos que $\mathcal{O}_x$ consiste de elementos de la forma f/g con $f, g \in K[X]$ y $g(x) \neq 0$.
Si X es irreducible, entonces $\mathcal{O}_x$ es un subanillo del campo $K(X)$ y consiste de todas las funciones $f \in K(X)$ que son regulares en x.
Esto puede hacerse con cualquier anillo conmutativo A y un ideal primo $\mathcal{P}$,

$$A_{\mathcal{P}} = \{(f/g) | f, g \in A, g \notin \mathcal{P}\}.$$

Se dice que $A_{\mathcal{P}}$ es el anillo local del ideal primo $\mathcal{P}$.
Si A es un anillo Noetheriano, entonces todo anillo local $A_{\mathcal{P}}$ es también Noetheriano.

Sea X y Y dos variedades irreducibles algebraicas afines. Se dice que X y Y son biracionalmente equivalentes si los campos de fracciones de $R(X)$ y $R(Y)$ son isomorfos sobre K. Esto es equivalente a la existencia de un isomorfismo biregular de un subconjunto abierto de Zariski no vacío de X sobre un subconjunto abierto de Zariski de Y.

En nuestro trabajo usaremos el concepto de subconjunto constructible, el cual se describe a continuación.
Sea X un espacio topológico de Zariski. Un subconjunto constructible de X es un subconjunto el cual pertenece a la menor familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos tales que:
1) Todo subconjunto abierto está en $\mathcal{F}$
2) Una intersección finita de elementos de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$
3) El complemento de un elemento de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$.

Un subconjunto de X es localmente cerrado si es la intersección de un subconjunto abierto con un subconjunto cerrado.

Los siguientes lemas dan propiedades importantes que satisfacen los subconjuntos constructibles, (ver[13],[17]).

Lema 1. *Un subconjunto de X es constructible si y sólo si puede ser escrito como una unión finita disjunta de subconjuntos localmente cerrados.*

Lema 2. *Sea X un espacio irreducible, un subconjunto constructible de X contiene un subconjunto abierto no vacío.*

Lema 3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua de espacios de Zariski, entonces la imagen inversa de cualquier subconjunto constructible de Y es un subconjunto constructible de X.*

EL ESPACIO TANGENTE.- Definimos el espacio tangente a un punto x de una variedad afín X como la totalidad de lineas pasando a través de x y cruzando X. Para definir que significa decir que una línea $L \subset \mathbb{A}^n$ pasa a través de la variedad $X \subset \mathbb{A}^n$ asumimos que un sistema de coordenadas en $\mathbb{A}^n$ es elegido tal que $x = (0, 0, \ldots, 0) = 0$, entonces $L = \{ta, t \in K\}$ donde a es un punto fijo aparte de 0. Para investigar la intersección de X con L asumimos que X esta dado por un sistema de ecuaciones $F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = F_m = 0$, con $\mathcal{U}_X = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$.
El conjunto $X \cap L$ está entonces determinado por las ecuaciones $F_1(ta) = F_2(ta) = \cdots = F_m(ta) = 0$. Ya que ahora estamos trabajando con polinomios en una variable t, sus raices comunes son las raices de su máximo comun divisor. Sea

$$f(t) = m.c.d(F_1(ta), F_2(ta), \ldots, F_m(ta))$$

$$f(t) = c\Pi(t - \alpha_i)^{l_i}.$$

Los valores $t = \alpha_i$ corresponden a puntos de intersección de L con X. Observar que los valores $t = \alpha_i$ tienen una multiplicidad l_i, la cual naturalmente interpretamos como multiplicidades de las intersecciones de L con X. En particular, ya que $0 \in L \cap X$, la raíz $t = 0$ aparece en la descomposición de arriba.

Definición 3. La multiplicidad de intersección en un punto 0 de una línea L y una variedad X es la multiplicidad de la raíz $t = 0$ en el polinomio

$$f(t) = m.c.d.(F_1(ta), F_2(ta), \ldots, F_m(ta)).$$

Si los polinomios $F_i(ta)$ se anulan identicamente, entonces la multiplicidad de intersección es tomada como $+\infty$.
El locus de puntos en lineas tocando X en x es llamado el espacio tangente en el punto x. Este es denotado por Θ_x, ó cuando enfatizamos la variedad X en cuestión, por $\Theta_{x,X}$.

Definición 4. Los puntos x de una variedad irreducible X para los cuales $dim\Theta_x = s = min\{dim\Theta_y\}$ son llamados puntos simples; los puntos restantes son llamados singulares.

Una variedad es llamada suave si todos sus puntos son simples. Los puntos simples forman un subconjunto abierto no vacío, y los puntos singulares un subconjunto propio cerrado de X.
Notese que (ver[10]) la dimensión del espacio tangente en un punto simple es igual a la dimensión de la variedad.

El espacio proyectivo ($\mathbb{C}P^n$) de dimensión n es el conjunto de $(n+1)$-uplas $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de números complejos, no todos cero, módulo la relación de equivalencia

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \backsim (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$$

$\lambda \in \mathbb{C} - 0$.

Definición 5. Un conjunto algebraico cerrado en $\mathbb{C}P^n$ es un subconjunto de la forma

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_N) = \{P \in \mathbb{C}P^n | f_1(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \cdots = f_N(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0\}$$

donde $f_1, f_2, \ldots, f_N$ son polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ y $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ son coordenadas homogéneas de P.

Un conjunto $V(I)$ es una variedad proyectiva si I es un ideal homogéneo primo en $\mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

La dimensión de variedades reducibles es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.
La dimensión de una variedad X se denota por $dimX$. Si Y es una subvariedad cerrada de X, entonces el número $dimX - dimY$ es llamada la codimensión de Y en X y es denotada por $codimY$ ó $codim_X Y$.
Observemos que si X es una variedad irreducible y U es un abierto de Zariski de X entonces $dimU = dimX$.
Si X e Y son variedades irreducibles, entonces $dim(X \times Y) = dimX + dimY$.
Variedades algebraicas uno-dimensional y dos-dimensional son llamadas curvas y superficies, respectivamente.

Una variedad cuasiproyectiva es un subconjunto abierto de un conjunto proyectivo cerrado. La dimensión de una variedad cuasiproyectiva X es el grado de trascendencia del campo de funciones racionales $k(X)$.

Teorema 2 ([17, Cap.I, Teorema 1]). *Si $Y \subset X$, entonces $dimY \leq dimX$. Si X es irreducible, Y es cerrado en X, y $dimY = dimX$, entonces $X = Y$.*

Si un polinomio F homogéneo en $\mathbb{P}^n$ no se anula sobre una variedad proyectiva X irreducible, entonces $dim\{x \in X | F(x) = 0\} = dimX - 1$.
Sobre una variedad proyectiva X existen subvariedades de cualquier dimensión $s < dimX$.
La dimensión del conjunto de ceros de r polinomios $F_1, F_2, \ldots, F_r$ sobre una variedad $n-$dimensional no es menor que $n - r$.

Por lo tanto tenemos un fuerte teorema de existencia: Si $r \leq n$, entonces r polinomios tienen un cero en común sobre una variedad $n-$dimensional.
Por ejemplo si $X = \mathbb{P}^n$, n ecuaciones homogeneas en $n+1$ indeterminadas tienen una solución no cero.

Definición 6. *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ de variedades algebraicas es llamada regular cuando X y Y pueden ser cubiertos con vecindades coordenadas afines U_i, V_j tal que para cada punto en X hay una vecindad U_i y una vecindad V_j de su imagen tal que $f : U_i \mapsto V_j$ puede ser descrito en terminos de las coordenadas asociadas afines, por funciones racionales con denominador no nulo.*

En particular, uno puede decir cuando dos tales variedades son isomorfas.
Este concepto de "isomorfismo "concierne a la estructura de variedad en "abstracto" como variedad algebraica, no sus encajes en el espacio proyectivo.

Al conjunto $f^{-1}(y)$ se le llama la fibra de f en el punto y.

Teorema 3 ([17, Cap.I, Teorema 7]). *($K = \bar{K}$). Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación regular de variedades irreducibles, $f(X) = Y$, $dimX = n$, $dimY = m$, entonces $m \leq n$ y*
1) $dimf^{-1}(y) \geq n - m$ para todo punto $y \in Y$.
2) en Y existe un conjunto abierto no vacío U tal que $dimf^{-1}(y) = n-m$ para $y \in U$.

Observación: Una fibra $f^{-1}(y)$ es una subvariedad cerrada. La variedad X está estratificada en las fibras disjuntas de puntos distintos $y \in f(X)$.

Los conjuntos $Y_l = \{y \in Y | dimf^{-1}(y) \geq l\}$ son cerrados en Y.

Terminamos esta sección con un resultado que utilizamos en la sección 2.1.

Teorema 4 ([17, Cap.I, Teorema 8]). *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación regular de variedades proyectivas. $f(X) = Y$, y si Y y todas las fibras $f^{-1}(y)$ son irreducibles y de la misma dimensión, entonces X es irreducible.*

0.3 PRELIMINARES DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA REAL

En esta sección recordamos (ver [1]) resultados particulares cuando $k = \mathbb{R}$.
Sea $\mathbb{R}$ el campo real.

Proposición 1([1, Prop. 2.1.3]). *Dado un subconjunto algebraico V de $\mathbb{R}^n$, existe f en $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tal que $V = Z(f)$.*

Sea $V \in \mathbb{C}^n$ un conjunto algebraico. Entonces V puede ser considerado como un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^{2n}$, separando las partes real e imaginaria en las ecuaciones de V.
Si V es un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^n$ denotamos por

$$\mathcal{P}(V) = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(V)$$

el anillo de funciones polinomiales sobre V. La dimensión de A, denotada por $dim_{\mathbb{R}}(A)$, es la dimensión del anillo $\mathcal{P}(V)$. (i.e. la longitud máxima de la cadena de ideales primos de $\mathcal{P}(A)$).

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico. Entonces

$$dim_{\mathbb{R}}(A) = dim(\overline{A}^{Zar})$$

donde $\overline{A}^{Zar} = Z(\mathcal{I}(A))$ es la cerradura Zariski de A.

Proposición 2([1, Prop. 3.1.1]). *Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto algebraico irreducible de dimensión compleja d, considerado como un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces*
1) V es conexo
2) V no esta acotado (excepto si V es un punto)
3) $dim_{\mathbb{R}}(V) = 2d$ en todo punto x de V.

Una aplicación polinomial de V a un subconjunto W de $\mathbb{R}^p$ es una aplicación cuyas funciones coordenadas son polinomios. Denotamos por $P(V, W)$ el conjunto de aplicaciones polinomiales de V a W.

Sea U un subconjunto abierto de Zariski de V. Una función regular sobre U es el cociente $f = g/h$ donde g, h estan en $\mathcal{P}(V)$ y $h^{-1}(0) \cap U = \emptyset$. Las funciones regulares sobre U forman un anillo denotado por $R(U)$. Una aplicación regular de U en un subconjunto W de $\mathbb{R}^p$ es una aplicación cuyas funciones coordenadas son regulares. Denotamos por $R(U, W)$ el conjunto de aplicaciones regulares de U a W.

El anillo $R(U)$ es por lo tanto el anillo de fracciones de $\mathcal{P}(V)$ para el conjunto multiplicativo $\{h \in \mathcal{P}(V) | h^{-1}(0) \cap U = \emptyset\}$.
Dado un subconjunto A de $\mathcal{P}(V)$ (resp.$R(U)$) denotamos por

$$Z_V(A) = \{x \in V | \forall P \in A, P(x) = 0\}$$

$$(Z_U(A) = \{x \in U | \forall f \in A, f(x) = 0\})$$

el conjunto de ceros de A.
Dado un subconjunto X de V (resp. U) denotar por

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}(V)}(X) = \{P \in \mathcal{P}(V) | \forall x \in X, P(x) = 0\}$$

$$(\mathcal{I}_{R(U)}(X) = \{f \in R(U) | \forall x \in X, f(x) = 0\})$$

el ideal de $\mathcal{P}(V)$ (resp. $R(U)$) de funciones que se anulan en X.

La definición usual de funciones regulares es de una naturaleza local. Aquí, la naturaleza local (en la topología Zariski) de la noción de función regular es compatible con la existencia de un denominador global.

Una variedad algebraica real afín (sobre $\mathbb{R}$) es un espacio topológico X equipado con la gavilla R_X de funciones regulares con valores en $\mathbb{R}$.

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico real y U un subconjunto abierto de Zariski de V. Entonces $(U, R_{V|U})$ es una variedad algebraica real afín.

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, no necesariamente irreducible, y x un punto en V. El punto x es *no singular en dimensión* d si existe una componente irreducible V' de V, con $dim_{\mathbb{R}}(V') = d$, tal que V' es la única componente irreducible de V conteniendo a x y x es un punto no singular de V'.

Sea V un conjunto algebraico de dimensión d. Denotamos por $Reg(V)$ el conjunto de puntos no singulares en dimensión d de V, y denotamos por $Sing(V)$ el conjunto $V \setminus Reg(V)$.

Proposición 3 ([1, Prop. 3.3.14]). *Si V es un conjunto algebraico, entonces $Sing(V)$ es un subconjunto algebraico de V de dimensión menor que la dimensión de V. Es más $Reg(V)$ es un subconjunto abierto de Zariski no vacío de V de la misma dimensión que V.*

Sea

$$I = (P_1, P_2, \ldots, P_k) \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

un ideal primo de dimensión d. Un punto $x \in Z(I)$ se dice que es un cero no singular de I si $rango([\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x)]) = n - d$. Si I tiene un cero no singular, entonces $I = \mathcal{I}(Z(I))$ (ver[1, Prop. 3.3.16]).

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico de dimensión d y $W \subset V$ un subconjunto algebraico tal que, para todo $x \in W$, $dim(W) = d$ y $W \subset Reg(W)$. Entonces $V \setminus W$ es un conjunto algebraico, y $Sing(V \setminus W) = Sing(V)$ excepto cuando $W = Reg(V)$ ([1, Prop. 3.3.17]).

PUNTOS NO SINGULARES.
Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, $\mathcal{I}(V) = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$, sea $z \in V$. El espacio tangente de Zariski de V en z, denotado T_z^{Zar} es el subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$T_z^{Zar}(V) = \cap_{j=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(z) x_i = 0\}.$$

El espacio tangente de Zariski T_z^{Zar} no depende de la elección de los generadores $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de $I(V)$. Si V es irreducible, entonces la dimensión de $T_z^{Zar}(V)$ es mayor ó igual que la dimensión de V.

Definición 7. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico irreducible. Un punto z en V se dice que es no singular si $dim(T_z^{Zar}) = dim(V)$.

La noción de espacio tangente de Zariski esta definida también en un punto singular. Cuando $V \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto algebraico irreducible y $z \in V$ es un punto singular, una vecindad de $z \in V$ es una subvariedad C^∞ de $\mathbb{R}^n$ y el espacio tangente de V en z (en el sentido C^∞) coincide con el espacio tangente Zariski.

Cuando no hay confusión, escribimos $T_z(V)$ en lugar de $T_z^{Zar}(V)$, si z es un punto singular de $V \in \mathbb{R}^n$, hablaremos del espacio tangente en lugar del espacio tangente de Zariski.

0.4 PRELIMINARES DE ACCIÓN DE GRUPOS Y REPRESENTACIONES

GRUPOS ALGEBRAICOS.

En esta sección veremos algunos conceptos básicos de grupos algebraicos, para mayor información ver [15],[18].

Un grupo algebraico es un grupo G junto con una estructura de variedad algebraica sobre G, tal que los morfismos:

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, g') \mapsto gg'$$

$$G \longrightarrow G$$

$$g \mapsto g^{-1}$$

son morfismos de variedades algebraicas. Un homomorfismo de grupos algebraicos es una aplicación la cual es simultáneamente un homomorfismo de grupos y un morfismo de variedades algebraicas.
Si la variedad subyacente a G es afín, entonces G es un grupo algebraico lineal. Sea G un grupo algebraico lineal, y sea $A = k[G]$(ver pág 8). La estructura de grupo de G esta definida por homomorfismos de algebras

$$\pi^* : A \longrightarrow A \underset{k}{\otimes} A$$

$$i^* : A \longrightarrow A$$

donde el elemento identidad denotado por e es un homomorfismo $A \longrightarrow k$. Sean G y G' grupos algebraicos. Un morfismo de variedades $\phi : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos algebraicos si éste es también un homomorfismo de grupo. El morfismo ϕ es un isomorfismo de grupos algebraicos si es un isomorfismo de variedades y de grupos. Automorfismos son definidos similarmente.

Podemos proveer al conjunto producto $G \times G'$ con la estructura de grupo producto directo usual, esto hace de $G \times G'$ un grupo algebraico, llamado el producto directode los grupos algebraicos G y G'.

EJEMPLOS.
1. Identifiquemos el espacio M_n de todas las matrices $n \times n$ con k^{n^2}. Si $x \in M_n$, sea $D(x)$ su determinante. El grupo general lineal GL_n es el conjunto abierto

$$\{x \in M_n | D(x) \neq 0\}$$

con la multiplicación matricial como operación de grupo.
Tenemos $k[GL_n] = k[T_{ij}, D^{-1}]_{1\leq i,j\leq n}$, $D = det(T_{ij})$

$$\pi^* T_{ij} = \sum_{h=1}^{n} T_{ih} \otimes T_{hj}$$

$i^* T_{ij}$ es la (i,j) entrada de la matriz $(T_{ij})^{-1}$. La identidad e envia T_{ij} a δ_{ij}. Ya que M_n es una variedad irreducible, GL_n es una variedad irreducible de dimensión n^2.

2. Cualquier subgrupo de GL_n el cual es cerrado en la topología de Zariski de GL_n, es un *grupo algebraico lineal.*

Por ejemplo:
a) Un subgrupo finito
b) D_n el grupo de matrices diagonales no singulares
c) Γ_n el grupo de matrices triangulares superiores, definidas por $\Gamma_n = \{x = (x_{ij}) \in GL_n | x_{ij} = 0, i > j, x_{ii} = 1\}$
d) El grupo especial lineal $SL_n = \{x \in GL_n | D(x) = 1\}$
e) El grupo ortogonal $O_n = \{x \in GL_n | xx^t = Id\}$ donde x^t denota la transpuesta de x
f) El grupo especial ortogonal $SO_n = O_n \cap SL_n$.

Proposición 4. *Sea G un grupo algebraico.*
i) Hay una única componente irreducible G° de G conteniendo al elemento identidad e; ésta es un subgrupo normal cerrado de índice finito.
ii) G° es la componente conexa de e, para la topología de Zariski.
iii) Cualquier subgrupo cerrado H de G de índice finito contiene a G°.

Se sigue de ésta proposición que para un grupo algebraico, las nociones de conexidad e irreducibilidad coinciden. Es usual hablar de un grupo algebraico conexo, y no de uno irreducible.

Observe que si G es conexo, cualquier subconjunto abierto distinto del vacío es denso.

ACCIÓN DE GRUPO Y REPRESENTACIONES.

Una acción de un grupo algebraico G sobre una variedad X es un morfismo

$$\sigma : G \times X \longrightarrow X$$

tal que para todo $g, g' \in G$, y $x \in X$

$$\sigma(g, \sigma(g', x)) = \sigma(gg', x)$$

y

$$\sigma(e, x) = x$$

donde e denota la identidad de G.
Para un punto $x \in X$, el estabilizador G_x de x es el subgrupo cerrado

$$G_x = \{g \in G | gx = x\}$$

de G, y la órbita $\mathcal{O}(x)$ de x es el subconjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{gx | g \in G\}$$

de X.

Si todas las órbitas son subconjuntos cerrados de X, decimos que la acción de G es cerrada.

Definición 8. Un punto x (subconjunto W) de X, se dice que es invariante bajo G si $gx = x$ ($gW = W$) para todo $g \in G$. (Para el caso de un subconjunto es suficiente pedir que $gW \subset W$ para todo $g \in G$).

Un ejemplo de una acción de un grupo, es el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C})$ actuando por multiplicación en $\mathbb{C}^n$:

$$GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(A, v) \mapsto Av.$$

Dado cualquier homomorfismo de grupos algebraicos $G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ obtenemos una acción de G en $\mathbb{C}^n$. Tal homomorfismo se denomina una *representación racional* de G, y la acción correspondiente una acción lineal de G en $\mathbb{C}^n$.

Definición 9. Un grupo algebraico lineal G es geométricamente reductivo (ó linealmente reductivo) si para toda acción lineal de G en $\mathbb{C}^n$ y todo punto invariante $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ existe un polinomio homogéneo invariante f de grado ≥ 1 (=1) tal que $f(v) \neq 0$.

Un grupo G es *reductivo* si su radical es isomorfo a un producto directo de copias de $\mathbb{C}^*$. Los grupos $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$ y $PGL_n(\mathbb{C})$ son todos grupos reductivos. Sobre los números complejos, son equivalentes los grupos reductivos, los geométricamente reductivos y los linealmente reductivos.

Definición 10. Una representación de un grupo finito G sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita V, es un homomorfismo

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

de G al grupo de automorfismo de V.

Decimos que tal aplicación da a V la estructura de un G-módulo.

$$\rho(g)(v) = gv = g \cdot v$$

la dimensión de V es a veces llamado el grado de ρ.
Una representación de V es llamada *irreducible* si no hay subespacios propios no cero, invariantes de V.
Sea G un grupo actuando sobre una variedad X. Un *cociente categórico* de X por G es un par (Y, Φ), donde Y es una variedad y $\Phi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo tal que:
$i)$ Φ es constante en las órbitas de la acción
$ii)$ para cualquier variedad Z y morfismos $\Psi : X \longrightarrow Z$ tal que es constante en órbitas, existe un único morfismo $\chi : Y \longrightarrow Z$ tal que $\chi \circ \Phi = \Psi$.
Si además $\Phi^{-1}(y)$ consiste de una simple órbita para todo $y \in Y$, llamamos a (Y, Φ) el espacio órbita.

Proposición 5([15, pág 39]). *Un cociente categórico esta determinado salvo isomorfismo.*

Proposición 6 ([15, pág 39]). *La pareja (K^n, Pol) donde $Pol : M_n \longrightarrow K^n$ esta dado por el polinomio característico, es un cociente categórico para la acción de GL_n en M_n por conjugación.*

La pareja (K^n, Pol) no es un espacio de órbitas, ya que las matrices con el mismo polinomio característico corresponden al mismo punto en K^n. De hecho, cuando existe el espacio de órbitas para un problema, todas las órbitas deben ser cerradas, y en el caso de K^n y Pol no es asi.
Observación: La aplicación Pol se usará en la sección 2.1.
Si tenemos que $\mathcal{O}(B)$ es la órbita de una matriz B bajo conjugación. Entonces $\overline{\mathcal{O}(B)} \cap \overline{\mathcal{O}(B')} \neq \emptyset$ si y sólo si B y B' tienen el mismo polinomio característico.(ver [14, pág. 40]).

CAPÍTULO I
UN TEOREMA DE A. S. RAPINCHUK ET AL

El presente capítulo es un estudio del Teorema 1 del artículo [16]:

Sea Γ un grupo finitamente generado. Para cualquier grupo algebraico G el conjunto $R(\Gamma, G)$ de todas las representaciones (homomorfismos) $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ tiene una estructura natural de variedad algebraica, y junto con esta estructura es llamada la variedad de representaciones de Γ en G .

Por ejemplo, dada S una superficie compacta de género g. El grupo fundamental Γ_g es finitamente generado, con $2g$ generadores, digamos:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_g, y_g$$

El grupo Γ_g admite una presentación estandar:

$$\Gamma_g = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g | x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1} = Id \rangle$$

Sea $R(\Gamma_g, G)$ el conjunto de todas las representaciones $\rho : \Gamma_g \longrightarrow G$. En el caso $G = GL_n$ denotaremos $R(\Gamma_g, G)$ por $R_n(\Gamma_g)$. Una representación $\rho \in R_n(\Gamma_g)$ está completamtente determinada por sus valores en los generadores $x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g$. Sean $\rho(x_i) = A_i$ y $\rho(y_i) = B_i$ con $A_i, B_i \in GL_n$ para $i = 1, \ldots, g$.
Entonces $R_n(\Gamma_g)$ está encajado como un subconjunto de $(GL_n)^{2g}$ formado de 2g-uplas $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$ con la relación:

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = Id$$

(i.e.)

$$[A_1, B_1][A_2, B_2] \cdots [A_g, B_g] = Id$$

Como la multiplicación matricial es una operación polinomial sobre GL_n, ésta ecuación es una ecuación polinomial en las variables $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ lo cual hace de $R_n(\Gamma_g)$ una variedad algebraica.

Una descripción de $R_n(\Gamma_g)$ para un campo base de característica 0 está dada por:

Teorema 5 ([16,Teorema 1]). *$R_n(\Gamma_g)$ es una variedad irreducible de dimensión*

$$dimR_n(\Gamma_g) = \begin{cases} (2g-1)n^2+1 & si \quad g>1 \\ n^2+n & si \quad g=1 \end{cases}$$

Para la demostración se utilizan básicamente dos proposiciones, para las cuales se define lo siguiente:
Sea $g > 1$, para $z \in SL_n$ sea $W(z) = \{(x,y) \in GL_n \times GL_n | [x,y] = z\}$, W(z) se llama la variedad conmutador. Para cualquier campo K, una matriz en SL_n siempre es un conmutador de dos matrices de $GL_n(K)$, es decir para $z \in SL_n(K)$ siempre $W(z) \neq \emptyset$ ([20]).
Se introducen los siguientes morfismos:

$$\Phi : GL_n \times GL_n \longrightarrow SL_n$$

donde

$$(x,y) \mapsto [x,y]$$

Sea $P = (GL_n)^{2g-2}$ y sea $\phi : R_n \longrightarrow P$ la proyección sobre las primeras (2g-2) componentes. Ya que cualquier elemento en SL_n es un conmutador, uno puede ver fácilmente que ϕ es suprayectiva. La demostración de la irreducibilidad de R_n descansa en el hecho que ϕ permanece dominante si se restringue a una componente arbitraria de R_n. Las proposiciones que se utilizan en la demostración son las siguientes:

Proposición 7 ([16, Proposión 4]). *Existe un conjunto abierto de Zariski $U \subset SL_n$, $\mathbb{Q}$- definido, tal que para cualquier extensión $K/\mathbb{Q}$ y cualquier punto $z \in U_k$ la variedad conmutador $W(z)$ es una variedad irreducible K-racional de dimensión n^2+1.*

Proposición 8 ([16, Proposición 7]). *Para cualquier componente irreducible $V \subset R_n$ tenemos*
$\overline{\phi(V)} = P$.

Supondremos por un momento ambas proposiciones, y veamos cómo éstas implican la irreducibilidad de R_n :

Sea $R_n = \cup_{i=1}^{d} V_i$ la descomposición en la unión de componentes irreducibles, y sea $d > 1$. Sea $\kappa : P \longrightarrow SL_n$ definida por:

$$\kappa((x_1, y_1, ..., x_{g-1}, y_{g-1})) = [x_1, y_1] \cdots [x_{g-1}, y_{g-1}].$$

Sea Φ como se definió antes, $U \subset SL_n$ un conjunto abierto de Zariski tal que la fibra $\Phi^{-1}(z)$ es irreducible para cualquier $z \in U \subset SL_n$.

Sea $U_i = V_i \setminus (\cup V_j)_{j\neq i}$ donde $i, j = 1, \ldots, d$ y $U_0 = \kappa^{-1}(U)$.
Ya que P es irreducible, la intersección $\phi(U_1) \cap \phi(U_2) \cap \{U_0\}$ es no vacía. Sea a algún punto de esta intersección. Entonces la fibra $Z = \phi^{-1}(a)$ es isomorfa a la variedad conmutador $W(\kappa(a))$ y por lo tanto es irreducible.

Entonces $Z \subset V_{i_0}$ para un adecuado $i_0 \in 1, \ldots, d$. Pero $a = \phi(u_1) = \phi(u_2)$ para algún $u_1 \in U_1 = V_1 \setminus (\cup V_j)_{j\neq 1}$ y $u_2 \in U_2 = V_2 \setminus (\cup V_j)_{j\neq 2}$ entonces $u_1, u_2 \in Z$, sin embargo cada uno de los u_i pertenecen a una sola componente irreducible de R_n implicando $V_1 = V_{i_0} = V_2$ lo cual es una contradicción, por lo tanto R_n es irreducible.
Para hacer la demostración respecto a la dimensión de la variedad R_n se hace uso del siguiente lema:

Lema 4 ([16, Lema 8]).
i) $dimV \geq (2g-1)n^2 + 1$
ii) para cualquier $z \in SL_n$ *la dimensión de cualquier componente irreducible* T *de la variedad conmutador* $W(z)$ *esta entre* (n^2+1) *y* (n^2+n)
iii) la dimensión de la variedad $Z = \{(x,y) \in GL_n \times GL_n | dim(Z(x) \cap Z(y)) > 1\}$ *es* $\leq 2n^2 - 2(n-1)$

Del lema 4 inciso *i)*, tenemos $dimR_n \geq (2g-1)n^2 + 1$, por otro lado de ([16, lema 5]) se ve que existen puntos $v \in R_n$ tal que $dimT_v(R_n) = (2g-1)n^2 + 1$ dando la igualdad $dimR_n = (2g-1)n^2 + 1$.

Para el caso $g = 1$, $\Gamma = \langle x, y | [x,y] = 1 \rangle$ se tiene que $R_n(\Gamma)$ coincide con la variedad $C(2,n)$ de pares de matrices conmutando en GL_n
(i.e.) $C(2,n) = \{(x_1, x_2) \in (GL_n)^2 | x_1x_2 = x_2x_1\}$ por lo cual $C(2,n) = R_n(\mathbb{Z}^2)$. La irreducibilidad de $C(2,n)$ fue establecida por Motzlin y Taussky.

De hecho esta afirmación es la Proposición 3 del artículo [16] y la demostración se basa en el hecho de que al tomar:

$$X = \{(x,y) \in C(2,n) | x \in U\} \subset C(2,n)$$

con $U \subset GL_n$ conjunto de elementos regulares y considerar

$$X \subset U \times \mathbb{A}^n$$

definido por un sistema de ecuaciones lineales

$$\Sigma_{j=1}^n f_{ij}(u) t_j = g_i(u)$$

para $i = 1, \ldots, m$ donde t_j son las coordenadas en $\mathbb{A}^n$ y f, g funciones regulares. Por [15, lema 3] se llega a que X es irreducible.

Cualquier componente $C' \subset C(2,n)$ intersecta a X. Entonces $X \cap C'$ es denso en C', así la componente irreducible $C_0 \subset C(2,n)$ conteniendo a X, contiene de hecho, cualquier otra componente implicando la irreducibilidad de $C(2,n)$.

Ahora solamente mencionaremos los lemas que sirven para demostrar las Proposiciones 7 y 8 que se utilizaron para la demostración del Teorema 5 (para más detalles ver[16]).

Para la demostración de la Proposición 8 se realiza lo siguiente: dada $a \in M_n$ se considera $f_a(\lambda) = det(\lambda E_n - a)$ el polinomio característico, se denotan por $\sigma_1(a), \ldots, \sigma_n(a)$ los coeficientes de dicho polinomio y se consideran las variedades:

$$T = \{(y,z) \in GL_n \times SL_n | \sigma_i(zy) = \sigma_i(y), i = 1, \ldots, n-1\}$$

$$L = \mathbb{A}^{n^2-n} \times SL_n$$

con los morfismos:

i) $\Phi : GL_n \times GL_n \longrightarrow SL_n$ donde $(x,y) \mapsto [x,y]$
ii) $\psi : GL_n \times GL_n \longrightarrow T$ donde $(x,y) \mapsto (y,[x,y])$
iii) $\pi : T \longrightarrow L$ donde $((y_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, z) \mapsto ((y_{ij})_{1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n}, z)$
y básicamente se analiza la $dim\Phi^{-1}(z)$ auxiliandose de los morfismos ψ , π y algunos conjuntos abiertos adecuados.

Para la demostración de la Proposición 9 se realiza el análisis del diferencial $d_v\Phi$, para lo cual prueban los siguientes lemas:

Lema 5 (Lema 5,[16]). *Sea $v = (x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g) \in R_n$ un punto tal que x_g y y_g son elementos regulares y $dim(Z(x_g) \cap Z(y_g)) = 1$ ((ie)$Z(x_g) \cap Z(y_g)$ consiste de matrices escalares únicamente). Entonces v es simple en R_n y el map $d_v\phi$: $T_v(R_n) \longrightarrow T_{\phi(v)}P$ es sobre.*

Lema 6 (Lema 6,[16]). *Si $x, y \in GL_n$ son matrices regulares tales que $Z(x) \cap Z(y)$ consiste de matrices escalares únicamente, entonces $\tau_{x,y}$ es suprayectiva, donde*

$$\tau_{x,y} : M_n \times M_n \longrightarrow M_n^0 = \{X \in M_n | tr(X) = 0\}$$

con $\tau_{x,y}(X,Y) = (y^{-1}Xy - X) + (Y - x^{-1}Yx)$.

Observación: Los morfismos κ, ϕ y Φ definidos aqui los utilizaremos en la construcción del conjunto $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ del capítulo II.

CAPÍTULO II
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6

Sea $G = GL_n(\mathbb{C})$, Γ_g el grupo fundamental de una superficie compacta de género $g > 1$ y $R_n(\Gamma_g)$ la variedad de representaciones $n-$dimensional de Γ_g.

Una matriz se dice regular si satisface que todos sus valores propios son distintos, las denotaremos por $GL_n(\mathbb{C})^{reg}$. De [16] se obtiene que el subconjunto:

$$R = \{(A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}, A_g, B_g) \in R_n(\Gamma_g) | A_g \in GL_n(\mathbb{C})^{reg}\}$$

es no vacío.

Consideremos el subconjunto

$$\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) = \{(A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}, A_g, B_g)\} \subset R_n(\Gamma_g)$$

con la propiedad:

a) Los valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de la matriz A_g son de norma distinta.

En el presente capítulo se demuestra:

Teorema 6. *Sea $g \geq 1$, entonces $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) \subset R_n(\Gamma_g)$ es un subconjunto abierto real de Zariski distinto del vacío, en el cual dado un elemento $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, la matriz A_g tiene sus valores propios de norma distinta.*

Es decir, la propiedad de que dado un elemento $\tilde{\tilde{\rho}} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, la matriz A_g tiene sus valores propio de norma distinta es génerica.

El Capítulo se desarrolla de la siguiente manera:
En la sección 2.1 se estudia el conjunto N de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ que tienen dos valores propios con la misma norma. En la sección 2.2 se demuestra el Teorema 6.

2.1 EL CONJUNTO N DE MATRICES EN $Mn, n(\mathbb{C})$ QUE TIENEN DOS VALORES PROPIOS CON LA MISMA NORMA

2.1.1 LA APLICACIÓN *Pol* POLINOMIO CARACTERÍSTICO.

Supondremos $n \geq 2$ y empecemos con los siguientes lemas:

Lema 7. *La aplicación $Pol : M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que le asocia a cada matriz A los n coeficientes de su polinomio característico, satisface que $Pol^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una variedad algebraica irreducible y*

$$dim_{\mathbb{C}} Pol^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = n^2 - n.$$

Demostración. Por definición si $A \in M_{n,n}$

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

es el polinomio característico de A y $Pol(A) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Las fibras $Pol^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ corresponden a matrices que tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto también tienen los mismos valores propios.
Existe una hipersuperficie $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ llamada discriminante que parametriza polinomios $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ que tienen al menos una raíz doble (ver [8]). Si tenemos dos matrices A y B con $Pol(A) = Pol(B) \notin \Delta$ esto nos dice que sus espacios propios son de dimensión 1. Así existe $g \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $g^{-1}Ag = B$. Es decir B esta en la órbita de A bajo la acción de $GL_n(\mathbb{C})$ por conjugación. Por lo tanto, en $\mathbb{C}^n - \Delta$, la fibra de Pol es una órbita de la acción de $GL_n(\mathbb{C})$:

$$GL_n(\mathbb{C}) \times M_{n,n}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$$
$$(g, A) \mapsto g^{-1}Ag.$$

La dimensión de la GL_n-órbita $\mathcal{O}(A)$ en el caso de que el polinomio característico tenga raices distintas, se obtiene al considerar la dimensión del cociente $GL_n(\mathbb{C})/Est(A)$, donde $Est(A)$ es el estabilizador de A. Una matriz A es regular si tiene todos sus valores propios distintos. Bajo un cambio de coordenadas esta será diagonal y $Est(A)$ consta de todas las matrices diagonales. Por lo cual ya que $GL_n(\mathbb{C})$ es un grupo irreducible, el cociente $GL_n(\mathbb{C})/Est(A)$ es irreducible y

$$dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(A) = dim Pol^{-1}(Pol(A)) = n^2 - n.$$

En caso de que A no sea matriz regular, la Teoría de la Forma Normal de Jordan nos dice que en cada una de las fibras $Pol^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Delta$ hay una órbita especial, que se obtiene del caso de tener sólo un bloque de Jordan del tamaño de la multiplicidad de cada valor propio.

En este caso podemos considerar

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_m \end{pmatrix}$$

con

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_i \end{pmatrix}$$

donde cada J_i es una matriz de $l_i \times l_i$ y $\sum l_i = n$. Ya que $Est(J_i)$ esta formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l_i} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{12} \\ 0 & 0 & \dots & b_{11} \end{pmatrix}$$

entonces $dimEst(J_i) = l_i$ y por lo tanto $dimEst(A) = n$.
Por lo tanto $dim_{\mathbb{C}} GL_n(\mathbb{C}) \cdot A = n^2 - n$, que es la misma dimensión que la que tiene la órbita de una clase con polinomio característico con raices distintas. Así esta órbita es distinguida y la única con esta propiedad de tener la misma dimensión que la fibra genérica. En su cerradura están las órbitas de las formas normales que se pueden obtener al descomponer su bloque de Jordan en subbloques de Jordan. Esto se deduce del hecho que dado un bloque de Jordan máximo de tamaño m,

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

existe $g \in GL_n(\mathbb{C})$ de manera que al conjugar J con ella podemos reemplazar un 1 por un $\epsilon \geq 0$, es decir que

$$g^{-1}Jg = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

de manera que cuando $\epsilon \longrightarrow 0$

$$g^{-1}Jg \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

dividiendo el bloque máximo en dos subloques, en este caso uno de tamaño 2 y el otro de tamaño $m-2$, la órbita de ésta pertenece a la cerradura de la órbita de J.

Para los demás casos se obtienen matrices semejantes, con lo que se garantiza que las órbitas de los subbloques de Jordan de un bloque máximo estarán en su cerradura. Por lo cual obtenemos que

$$dim_{\mathbb{C}} Pol^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = n^2 - n$$

para todo $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. ■

2.1.2 EL SUBCONJUNTO DE $\mathbb{C}^n$ CON DOS COORDENADAS CON LA MISMA NORMA.

En el próximo lema se usará la siguiente noción de dimensión:

Definición 11. Una variedad algebraica real $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ es de dimensión l si el conjunto de puntos lisos (en el sentido del Cálculo avanzado) en A es denso y para cada punto liso la dimensión real de una vecindad considerada como variedad diferenciable es l ([21]).

El subconjunto $V \subset \mathbb{C}^n$ es un conjunto algebraico real, si como subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, puede ser definido por los ceros de un conjunto de polinomios en las variables reales e imaginarias de $\mathbb{C}^n$.
Si $V \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad algebraica compleja, entonces $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ es una variedad algebraica real al tomar las partes real e imaginaria en las ecuaciones de V ([1]).

Lema 8. *Si $n > 1$, la aplicación algebraica real $\widetilde{f} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mapsto \prod_{l<k} (\|\lambda_l\|^2 - \|\lambda_k\|^2)$$

satisface que $dim_{\mathbb{R}} \widetilde{f}^{-1}(0) = 2n - 1$.

Demostración. Para $l = 1, \ldots, n-1$ y $k = l+1, \ldots, n$ definimos $f_{lk} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_{lk}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \|\lambda_l\|^2 - \|\lambda_k\|^2 = (x_l^2 + y_l^2) - (x_k^2 + y_k^2)$$

donde $\lambda_j = x_j + iy_j$ y f_{lk} es un polinomio real homogéneo de grado 2.
Si consideramos el conjunto de ceros de f_{lk} obtenemos una variedad algebraica real

$$Y_{l,k} := Z(f_{lk}) = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | (x_l^2 + y_l^2) - (x_k^2 + y_k^2) = 0\}$$

que podemos considerar de la siguiente forma:

$$Y_{l,k} \simeq V \times \mathbb{C}^{n-2}$$

con $V = Z(f) \subset \mathbb{C}^2$ y $f = x_l^2 + y_l^2 - x_k^2 - y_k^2$.
A la variedad V la podemos parametrizar de la siguiente manera:

$$V = \{(rCos\theta, rSen\theta, rCos\alpha, rSen\alpha) \in \mathbb{R}^4 : r = \|z_l\|\}.$$

Ya que el gradiente de f es $\nabla f = (2x_l, 2y_l, -2x_k, -2y_k)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla f(rCos\theta, rSen\theta, rCos\alpha, rSen\alpha) &= (2rCos\theta, 2rSen\theta, -2rCos\alpha, -2rSen\alpha)\\ &= 2r(Cos\theta, Sen\theta, -Cos\alpha, -Sen\alpha).\end{aligned}$$

Por lo tanto si $r \neq 0$ tenemos que $\nabla f(rCos\theta, rSen\theta, rCos\alpha, rSen\alpha) \neq 0$. Así por el Teorema de la Función Implícita ([21]) $V - \{(0,0,0,0)\}$ consta de puntos lisos y tiene dimensión real 3.
Obtenemos así por la definición 1 que $dim_{\mathbb{R}} V = 3$, luego $(V - \{(0,0,0,0)\}) \times \mathbb{C}^{n-2}$ consta de puntos lisos y

$$dim_{\mathbb{R}}((V - \{(0,0,0,0)\}) \times \mathbb{C}^{n-2}) = 3 + (2n-4) = 2n-1.$$

Por lo tanto

$$dim_{\mathbb{R}} Y_{l,k} = 2n - 1.$$

Observemos que $Sing(Y_{l,k}) = \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^{n-2}$ dado que este conjunto está definido donde las derivadas parciales de f son 0(por el Teorema de la Función Implicita).

Así cada $Y_{l,k}$ es una variedad algebraica real irreducible de dimensión real $2n-1$. Debido a que si $\{l,k\} \neq \{i,j\}$, $Y_{l,k} \cap Y_{i,j}$ se intersectan en una variedad de dimensión menor o igual que $2n-2$ tendremos que

$$Y_{l,k} \cup Y_{i,j} - ((Y_{l,k} \cap Y_{i,j}) \cup Sing(Y_{l,k}) \cup Sing(Y_{i,j}))$$

son puntos lisos densos en $Y_{l,k} \cup Y_{i,j}$ y

$$dim_{\mathbb{R}}(Y_{l,k} \cup Y_{i,j} - ((Y_{l,k} \cap Y_{i,j}) \cup Sing(Y_{l,k}) \cup Sing(Y_{i,j}))) = 2n - 1.$$

De donde al considerar

$$\underset{l,k}{\cup} Y_{l,k} - (\underset{(l,k)\neq(i,j)}{\cup}(Y_{l,k} \cap Y_{i,j})) - (\underset{(l,k)}{\cup} Sing(Y_{l,k}))$$

también tendrá dimensión real $2n-1$, dado que en sus puntos lisos la dimensión de $Y_{l,k}$ es $2n-1$.

Como

$$Z(\widetilde{f}) = \underset{l,k}{\cup} Y_{l,k} = \underset{l,k}{\cup} Z(f_{lk}) = Z(\underset{l<k}{\Pi} f_{lk})$$

tenemos entonces que $Z(\widetilde{f})$ es una variedad algebraica real de dimensión real $2n-1$. Ya que $\widetilde{f}^{-1}(0) = Z(\widetilde{f})$ entonces $dim_{\mathbb{R}}\widetilde{f}^{-1}(0) = 2n-1$. ■

2.1.3 LA FUNCIÓN DEFINIDA POR LOS POLINOMIOS SIMÉTRICOS ELEMENTALES.

Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ elementos independientes en $\mathbb{C}$. Sea x una variable sobre $\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$. Formamos el polinomio

$$F(x) = (x - t_1)(x - t_2)\cdots(x - t_n) = x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$$

donde cada $s_i = s_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un polinomio homogéneo de grado i en $t_1, t_2, \ldots, t_n$ variables. Por ejemplo $s_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ y $s_n = t_1 t_2 \cdots t_n$. Los polinomios s_i son llamados los polinomios simétricos elementales de $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

El grupo simétrico S_n en n-letras actua en $\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ al permutar $(t_1, \ldots, t_n)$. Es decir $f(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$ con $\sigma \in S_n$. El Teorema Fundamental de los polinomios simétricos (ver [11]) nos dice que su campo invariante $\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, t_n]^{S_n}$ es el campo generado por los polinomios simétricos elementales:

$$\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, t_n]^{S_n} = \mathbb{C}[s_1, s_2, \ldots, s_n].$$

Sea

$$\widetilde{\Delta} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n | \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0\} \subset \mathbb{C}^n,$$

con $i = 1, \ldots, n-1$, la $\mathbb{C}$-hipersuperficie formada por las diagonales.

Afirmación 1. *$\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/S_n$ es cubriente no ramificado en $\mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta}$.*

Demostración. Denotaremos por $\mathcal{O}_{S_n}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a la órbita de $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ bajo la acción de S_n.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta}$ y U_λ una vecindad analítica pequeña de λ tal que $U_\lambda \subset (\widetilde{\Delta})^c$, asi que

$$(*) \qquad \sigma U_\lambda \cap U_\lambda = \emptyset$$

para todo $\sigma \in S_n$ distinto de la identidad.
De hecho $\mathcal{O}_{S_n}(U_\lambda)$ es la unión de imagenes disjuntas y $\pi(\mathcal{O}_{S_n}(U_\lambda)) \simeq U_\lambda$.
Sea $y = \pi(\lambda)$, entonces $V = \pi(U_\lambda$ es una vecindad de y, por $(*)$ tenemos que

$$\pi^{-1}(V_y) = \cup \sigma U_\lambda$$

y

$$\sigma_1 U_\lambda \cap \sigma_2 U_\lambda = \emptyset$$

para $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces $\pi : \sigma U_\lambda \longrightarrow V_y$ es un homeomorfismo, asi $\pi : \mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n/S_n$ es un cubriente no ramificado, por lo tanto obtenemos nuestra afirmación. ■

Lema 9. *Sea $\Psi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida por*

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto (s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \ldots, s_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

Si $\widetilde{V} = \widetilde{f}^{-1}(0)$ con $\widetilde{f}$ la aplicación real del Lema 8, entonces

$$dim_{\mathbb{R}} \Psi(\widetilde{V}) = 2n - 1.$$

Demostración. Notemos que $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \Psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ si y sólo si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ estan en la misma órbita bajo la acción de S_n en $\mathbb{C}^n$. Por lo que Ψ es constante en las órbitas de la acción de S_n. Como $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son generadores del anillo de polinomios S_n-invariantes y al ser $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/S_n$ un cociente categórico (ver[15]) tenemos que Ψ se factoriza a través de π, por lo cual

existe un morfismo $\widetilde{\Psi}$ tal que $\widetilde{\Psi} \circ \pi = \Psi$.

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{C}^n \\ & \mathbb{C}^n/S_n \arrow[u, "\widetilde{\Psi}"'] \end{tikzcd}$$

Como $\widetilde{\Psi}$ de hecho es un isomorfismo algebraico sobre $\mathbb{C}$, preserva la dimensión de las subvariedades algebraicas reales.
Así al considerar $\lambda \in \mathbb{C}^n$ y U_λ una vecindad abierta de λ, tenemos que

$$dim_{\mathbb{R}} \widetilde{\Psi}(\pi(U_\lambda)) = dim_{\mathbb{R}} \Psi(U_\lambda).$$

1) Sea $\lambda \in \mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta}$, por la afirmación 1, π preserva la dimensión de U_λ y por lo tanto

(**) $$dim_{\mathbb{R}} \Psi(U_\lambda \cap \widetilde{V}) = dim_{\mathbb{R}} \pi(U_\lambda \cap \widetilde{V}).$$

Si $\lambda \in \widetilde{V}$, entonces al menos para un $l \neq k$, $\| \lambda_l \| = \| \lambda_k \|$.
Sea $\lambda_l = re^{i\alpha}$ y $\lambda_k = re^{i\beta}$, tenemos las siguientes posibilidades:
a) $\alpha \neq \beta$
b) $\alpha = \beta$

Como por hipótesis $\lambda \in \mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta}$, entonces todos los λ_j son diferentes, por lo tanto la condición *b*) no puede darse.
Si se satisface *a*) el vector λ tiene al menos dos coordenadas con la misma norma pero $\lambda \notin \widetilde{\Delta}$ y por el argumento $(**)$ tenemos que $\widetilde{V} \cap U_\lambda$ tiene dimensión real $2n-1$ para todo $\lambda \in [\widetilde{V} - (\widetilde{V} \cap \widetilde{\Delta})]$.

2) Si $\lambda \in \widetilde{\Delta}$, ya que $\widetilde{\Delta} \subset \widetilde{V}$ de hecho, $\widetilde{\Delta} = \cup \widetilde{Y_{ij}}$ con $\widetilde{Y_{ij}} = Z(\widetilde{f_{ij}})$ donde

$$\widetilde{f_{ij}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i - \lambda_j$$

es un polinomio complejo homogéneo de grado uno. Así cada $\widetilde{Y_{ij}}$ es una componente irreducible de $\widetilde{\Delta}$.

Ahora dado $\lambda \in \widetilde{\Delta}$, tomamos una vecindad analítica pequeña U_λ de él; dicha vecindad intersecta a alguna componente $\widetilde{Y_{ij}}$, más aún intersecta a alguna componente Y_{ij} de $\widetilde{V}$, por lo cual usando el hecho de que en cada Y_{ij} tenemos puntos lisos cuyas vecindades tienen dimensión real $2n-1$, obtenemos por definición 1.

$$dim_{\mathbb{R}} \Psi(U_\lambda) = 2n - 1. \quad \blacksquare$$

2.1.4 LA DIMENSIÓN DEL CONJUNTO N.

Sea N el conjunto definido por

$N = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | A$ tiene al menos dos valores propios con $\|\lambda_j\| = \|\lambda_k\|$ $j \neq k\}$

Consideremos el diagrama:

$$M_{n,n} \xrightarrow{Pol} \mathbb{C}^n \xleftarrow{\Psi} \mathbb{C}^n \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathbb{R} \tag{2}$$

con Pol,Ψ y $\widetilde{f}$ las aplicaciones definidas anteriormente.

Tenemos que
1) $\widetilde{f}^{-1}(0) = Z(\widetilde{f})$ representa las n-úplas $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tales que la norma de una de las coordenadas se repite.

2) $\Psi(\widetilde{f}^{-1}(0))$ nos da los coeficientes de todos los polinomios tales que al menos dos raices de él tienen la misma norma.

3) $Pol^{-1}(\Psi(\widetilde{f}^{-1}(0)))$ determina las matrices para las cuales existen dos valores propios con la misma norma.

Por lo tanto

$$N = (Pol^{-1} \circ \Psi \circ \widetilde{f}^{-1})(0)$$

Proposición 9. $dim_{\mathbb{R}} N = 2n^2 - 1$.

Demostración. Por el lema 8, $\widetilde{f}^{-1}(0)$ es analítico real y

$$dim_{\mathbb{R}} \widetilde{f}^{-1}(0) = 2n - 1.$$

Por lema 9, tenemos que $\Psi(\widetilde{f}^{-1}(0))$ tiene

$$dim_{\mathbb{R}} \Psi(\widetilde{f}^{-1}(0)) = 2n - 1.$$

Como en cada punto de $\Psi(\widetilde{f}^{-1}(0))$ la fibra de Pol es irreducible y tiene dimensión real $2n^2 - 2n$, entonces $dim_{\mathbb{R}} N = (2n^2 - 2n) + (2n - 1) = 2n^2 - 1$. ■

2.1.5 EXISTENCIA DEL SUBCONJUNTO $\widetilde{W}$ ABIERTO REAL DE ZARISKI EN $SL_n(\mathbb{C})$ CON LA PROPIEDAD DE REGULARIDAD.

Consideremos el morfismo:

$$\Phi : GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow SL_n(\mathbb{C}) \tag{3}$$

donde

$$(A, B) \mapsto [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Sea

$$V = (N \cap GL_n(\mathbb{C})) \times GL_n(\mathbb{C})$$

donde N es el conjunto definido anteriormente.

Proposición 10. *Existe $\widetilde{W} \subset SL_n(\mathbb{C})$ abierto real de Zariski no vacío, tal que para toda $C \in \widetilde{W}$,*

$$\Phi^{-1}(C) \nsubseteq V.$$

Observemos que el conjunto $\widetilde{W}$ nos determina las matrices en $SL_n(\mathbb{C})$, tales que en su fibra $\Phi^{-1}(C) = \{(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2 | [A, B] = C\}$ hay parejas (A,B) con A matriz regular y sus valores propios de norma distinta, por ello diremos que el conjunto $\widetilde{W}$ tiene la propiedad de regularidad. De hecho en [20] se demuestra que cualquier componente irreducible de $\Phi^{-1}(C)$ contiene un elemento (A, B) tal que A es matriz regular, pero nosotros además anexamos la condición de que tenga sus valores propios de norma distinta.

Para la demostración de la proposición 10, utilizaremos los siguientes lemas.

Lema 10. *Sean X e Y dos variedades algebraicas irreducibles y $\Phi : X \longrightarrow Y$ una aplicación regular dominante. Sí X_0 es el conjunto de puntos donde Φ es suave y $Z = Sing\Phi = X - X_0$. Entonces $\overline{\Phi(Z)} \nsubseteq Y$.*

Demostración. Supongamos que $\overline{\Phi(Z)} = Y$, entonces Z tiene una componente Z_1 tal que $\Phi|_{Z_1} : Z_1 \longrightarrow Y$ es una aplicación regular dominante.
Por lema de Sard para variedades([13, pág 41]) hay puntos suaves z en el conjunto abierto de Zariski $Z \cap Z_1$ de Z_1 tal que Φ es suave en z.
Entonces $d\Phi|_{z,Z_1} : T_zZ_1 \longrightarrow T_{\Phi(z)}Y$ es sobre, de aqui que $d\Phi$ también envia al espacio vectorial T_zX sobre $T_{\Phi(z)}Y$.
Ya que z y $\Phi(z)$ son suaves, tenemos que Φ es suave en z, luego $z \notin Z$, obteniendo una contradicción, por lo tanto

$$\overline{\Phi(Z)} \nsubseteq Y. \qquad \blacksquare$$

Lema 11. *Sea $g : GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación analítica real, entonces el subconjunto $\mathcal{A} \subset SL_n(\mathbb{C})$ formado por los puntos C tal que*

$$g|_{\Phi^{-1}(C)} \equiv 0$$

es una variedad analítica real de $SL_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Consideraremos coordenadas complejo analíticas $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n^2}$ en $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ y coordenadas complejo analíticas $t_1, t_2, \ldots, t_{n^2-1}$ en $SL_n(\mathbb{C})$. Dada la matriz $C \in SL_n(\mathbb{C})$, sean $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_m$ las componentes irreducibles de $\Phi^{-1}(C)$ y $(A_j, B_j) \in \mathcal{W}_j$ los elementos tales que A_j es matriz regular, para $j = 1, \ldots, m$ (ver [16]).

Como $d\Phi|_{(A_j,B_j)}$ tiene rango máximo $n^2 - 1$, entonces por el teorema "de planchado" ([21]) existen abiertos U_j y V_j de $\mathbb{C}^{2n^2}$ y $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ respectivamente, con $(A_j, B_j) \in V_j$ y funciones $h_j : U_j \longrightarrow V_j$ analíticas reales, con inversas $h_j^{-1} : V_j \longrightarrow U_j$ analíticas reales tal que

$$\Phi(h_j(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n^2})) = (w_{n^2+2}, \ldots, \omega_{2n^2}).$$

para cada j.
Es decir

$$h_j(w_1^j, w_2^j, \ldots, w_{n^2+1}^j, t_1^j, t_2,^j, \ldots, t_{n^2-1}^j) = (A_j, B_j).$$

tal que $(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{n^2-1}^j)$ corresponden a $C \in \tilde{U}$.
Ya que g es una aplicación analítica real, tomamos su expansión en serie de Taylor en la vecindad U_j, digamos

$$g = \Sigma a_{I_j}(t_1, \ldots, t_{n^2-1})(\bar{\omega} - \bar{\omega_0})^I$$

$\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n^2+1})$ por lo cual

$$g|_{(A_j,B_j)} \equiv 0 \Longleftrightarrow g = \Sigma a_{I_j}(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{n^2-1}^j)(\bar{\omega} - \bar{\omega_0})^I \equiv 0$$

como g es una aplicación no identicamente cero, existen sumandos distintos de cero cuya suma también es distinta de cero, así

$$\Sigma a_{I_j}(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{n^2-1}^j)(\bar{\omega} - \bar{\omega_0})^I \equiv 0 \Longleftrightarrow a_{I_j}(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{n^2-1}^j) = 0$$

para todo I_j.
Obtenemos entonces una colección de ecuaciones $\{a_{I_k}(\bar{t})\}_{k=1}^m$, y formamos el ideal

$$\mathcal{I} = \langle \{a_{I_1}(t)\}, \{a_{I_2}(t)\}, \ldots, \{a_{I_m}(t)\} \rangle$$

dicho ideal es finitamente generado, digamos por $J_1, J_2, \ldots, J_r$ y consideramos su conjunto de ceros

$$Z(\cup_{l=1}^{r} J_l) = \cap_l Z(J_l) = Z(\mathcal{I}).$$

Sea $\mathcal{A} = Z(\mathcal{I}) \subset SL_n(\mathbb{C})$, entonces

$$g|_{\Phi^{-1}(C)} \equiv 0 \Longleftrightarrow C \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ es la variedad analítica real que buscamos, por lo cual queda probado el lema. ■

Demostración de la proposición 10. Sean $X = GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ e $Y = SL_n(\mathbb{C})$ y $\Phi : X \longrightarrow Y$ la aplicación definida en (3), usando el lema 10, si $\tilde{U}$ es el conjunto $SL_n(\mathbb{C}) - \overline{\Phi(Z)}$ entonces $\tilde{U}$ es un conjunto abierto de Zariski distinto del vacío en $SL_n(\mathbb{C})$. Observemos que $Id \notin \tilde{U}$, ya que Id es un punto en $SL_n(\mathbb{C})$ cuya fibra no tiene la dimensión esperada $n^2 + 1$, pues

$$dim_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(Id) = (n^2 + n^2) - (n - 1) = 2n^2 - n + 1.$$

Consideremos la aplicación.

$$\Psi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

definida como

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mapsto (s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \ldots, s_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)).$$

Del Lema 9 y la Afirmación 1, tenemos que Ψ es cubriente (no ramificado) en $\mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta}$ donde $\widetilde{\Delta} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n | \Pi_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j) = 0\}_{i=1,\ldots,n-1}$.

Si $W = \Psi(\tilde{\Delta})$ entonces $\Psi' : \mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n - W$ tiene inversos locales holomorfos.

Sea $M' = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | A$ tiene valores propios repetidos $\}$, tomando en cuenta el diagrama:

$$H : M_{n,n} - M' \xrightarrow{Pol} \mathbb{C}^n - W \xleftarrow{\Psi'} \mathbb{C}^n - \widetilde{\Delta} \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathbb{R}$$

definimos $H : M_{n,n} - M' \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$H := \widetilde{f} \circ \Psi\prime^{-1} \circ Pol.$$

La aplicación H es analítica real no identicamente cero y multivaluada por las distintas ramas de $\Psi\prime^{-1}$ ya que, $\Psi\prime^{-1}(z_1, \ldots, z_n)$ tiene $n!$ posibles valores. Sin embargo salvo permutación de las posiciones, dicho valor es $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y como $\widetilde{f}$ realiza el producto de la diferencia de las normas al cuadrado de los λ_j, tenemos que $H(A)$ no depende del valor elegido.

Ahora sea

$$g : [(GL_n(\mathbb{C}) - M') \times GL_n(\mathbb{C})] - \overline{\Phi^{-1}(\tilde{U})} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con

$$g(A, B) = H(A).$$

La aplicación g es analítica real, la cual no es identicamente cero.

Considerar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} [(GL_n(\mathbb{C}) - M') \times GL_n(\mathbb{C})] - \overline{\Phi^{-1}(\widetilde{U})} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Phi"] & \mathbb{R} \\ \tilde{U} & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Aplicando el lema 11 a la función analítica real g, obtenemos que toda la fibra $\Phi^{-1}(C)$ está en V si y sólo si

$$g|_{\Phi^{-1}(C)} \equiv 0 \Longleftrightarrow C \in \mathcal{A}$$

pues $g|_{\Phi^{-1}(C)} \equiv 0$ implica que

$$g|_{\Phi^{-1}(C)} := \Phi^{-1}(C) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \mapsto H(A)$$

es identicamente cero, es decir $H(A) = 0$ lo cual indica por la definición de H que la matriz A esta en el conjunto N de la proposición 9 y por consecuencia la pareja (A, B) esta en $V = (N \cap GL_n(\mathbb{C})) \times GL_n(\mathbb{C})$.

Si $\widetilde{W} := \tilde{U} - \mathcal{A}$ entonces $\widetilde{W}$ es un subconjunto abierto real de Zariski, ya que es un abierto menos un subconjunto cerrado parametrizado por ecuaciones reales.
Para todo $C \in \widetilde{W}$ tenemos que $\Phi^{-1}(C) \nsubseteq V$, por lo tanto $\widetilde{W}$ es el subconjunto abierto real de Zariski con la propiedad de regularidad buscado. ■

Observación: El subconjunto abierto real de Zariski $\widetilde{W}$, será utilizado en la demostración del Teorema 6. Es importante pues nos determina las matrices C cuyas fibras tienen elementos (A, B) donde la matriz A satisface la condición de ser regular con todos sus valores propios de norma distinta.

2.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6

En esta sección demostramos que la variedad de representaciones $n-$dimensional $R_n(\Gamma_g)$ definida en el Cap. I, la podemos obtener como un producto fibrado.

Sean $G = (GL_n)^{2g-2}$, $\phi : R_n(\Gamma_g) \longrightarrow G$ la proyección sobre las primeras (2g-2) componentes y $\kappa : G \longrightarrow SL_n(\mathbb{C})$ la aplicación definida como:

$$(A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}) \mapsto ([A_1, B_1][A_2, B_2] \ldots [A_{g-1}, B_{g-1}])^{-1}.$$

Al ser Φ suprayectiva ([20]), $\Phi^{-1}(C) \neq \emptyset$ para cualquier $C \in SL_n(\mathbb{C})$, además $\Phi^{-1}(C)$ tiene en cada componente irreducible un elemento (A, B) con A una matriz regular (ver [16, Prop. 1]). Esto es el conjunto

$$R = \{(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in R_n(\Gamma_g) | A_g \in GL_n(\mathbb{C})^{Reg}\}$$

es no vacío.

Consideremos el diagrama:

(5)
$$\begin{tikzcd} & GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \arrow[d, "\Phi"] \\ G \arrow[r, "\kappa"] & SL_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Lema 12. *La variedad $R_n(\Gamma_g)$ es isomorfa al producto fibrado $G \times_{SL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})^2$.*

Demostración. Utilizando la definición de κ y Φ tenemos que al producto fibrado lo podemos escribir como

$$G \times_{SL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})^2 = \{((A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}), (A, B)) \in G \times GL_n(\mathbb{C})^2 | \\ ([A_1, B_1] \cdots [A_{g-1}, B_{g-1}])^{-1} = [A, B]\}.$$

Al multiplicar $([A_1, B_1] \cdots [A_{g-1}, B_{g-1}])^{-1} = [A, B]$ por $[A_1, B_1] \cdots [A_{g-1}, B_{g-1}]$, obtenemos

$$G \times_{SL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})^2 = \{((A_1, B_1, \ldots, A_{g-1}, B_{g-1}), (A, B)) \in G \times GL_n(\mathbb{C})^2 | \\ Id = [A_1, B_1] \cdots [A_{g-1}, B_{g-1}][A, B]\}$$

esto es, los elementos de $G \times_{SL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})^2$ satisfacen la relación dada en $R_n(\Gamma_g)$ e inversamente los elementos de $R_n(\Gamma_g)$ satisfacen la relación de $G \times_{SL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})^2$ por lo tanto $G \times_{SL_n(\mathbb{C})} GL_n(\mathbb{C})^2 \simeq R_n(\Gamma_g)$. ■

Consideremos ahora el siguiente diagrama:

(6)
$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"] & GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \arrow[d, "\Phi"] \\ G \arrow[r, "\kappa"] & SL_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

donde R es el conjunto definido antes y $\gamma = \kappa \circ \phi$.
Sean $\widetilde{W}$ el subconjunto abierto real de Zariski de $SL_n(\mathbb{C})$ definido en la Proposición 10. Ya que $\gamma(R)$ es un subconjunto constructible denso, contiene un subconjunto abierto de Zariski en $SL_n(\mathbb{C})$(ver[13]), el cual denotaremos por W_0. Definamos

$$W' = \widetilde{W} \cap W_0.$$

Por lo cual W' es un abierto real de Zariski no vacío contenido en $\gamma(R)$. El abierto W' satisface que para toda C, $\Phi^{-1}(C) \nsubseteq V$, con V el conjunto definido en la pág 37.

Consideremos entonces $\Phi^{-1}(W') \subset GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ y sea

$$\Omega = \Phi^{-1}(W') \setminus [\Phi^{-1}(W') \cap V].$$

Por construcción $\Phi(\Omega) = W'$ por lo tanto $\Omega \neq \emptyset$.
Ahora hagamos el siguiente producto fibrado sobre W':

(7)
$$\begin{tikzcd} \kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \Omega \arrow[d, "\Phi"] \\ \kappa^{-1}(W') \arrow[r, "\kappa"] & W' \end{tikzcd}$$

Por la definición de producto fibrado:

$$\kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega = \{((A_1, \ldots, B_{g-1}), (A_g, B_g)) \in \kappa^{-1}(W') \times \Omega | \\ \kappa(A_1, \ldots, B_{g-1}) = \Phi(A_g, B_g)\}$$

Usando la definición de κ y Φ obtenemos al igual que en la demostración del lema 12, que los elementos de $\kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega$ satisfacen la relación que define a $R_n(\Gamma_g)$, por lo tanto $\kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega$ es un subconjunto de $R_n(\Gamma_g)$.

Sea

$$\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) := \kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega$$

Entonces $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) \hookrightarrow R_n(\Gamma_g)$, de hecho ya que tanto Ω como $\kappa^{-1}(W')$ son conjuntos analíticos reales, tenemos que $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ es un abierto real de Zariski en $R_n(\Gamma_g)$. Concluimos entonces:

Teorema 6. *Sea $g \geq 1$, entonces $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) \subset R_n(\Gamma_g)$ es un subconjunto abierto real de Zariski distinto del vacío, en el cual dado un elemento $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, la matriz A_g tiene sus valores propios de norma distinta.*

CAPÍTULO III
DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 7 Y 8

3.1 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7

Ahora deseamos garantizar que en un subconjunto abierto real de Zariski de $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ se satisface la propiedad:

Dada $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, la matriz B_g no tiene vectores propios en común con la matriz A_g, ni esta permutando vectores propios de A_g entre si.

Sea $X = GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$. En $X \times \mathbb{C}P^{n-1}$ formamos los siguientes subconjuntos

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \{(A, B, v) | Av \wedge v = 0 \;\; y \;\; Bv \wedge v = 0\} \subset X \times \mathbb{C}P^{n-1} \\
Z_2 &= \{(A, B, v) | Av \wedge v = 0 \;\; y \;\; B^2 v \wedge v = 0\} \subset X \times \mathbb{C}P^{n-1} \\
Z_3 &= \{(A, B, v) | Av \wedge v = 0 \;\; y \;\; B^3 v \wedge v = 0\} \subset X \times \mathbb{C}P^{n-1} \\
&\vdots \\
Z_n &= \{(A, B, v) | Av \wedge v = 0 \;\; y \;\; B^n v \wedge v = 0\} \subset X \times \mathbb{C}P^{n-1}.
\end{aligned}$$

Consideremos el siguiente cerrado $Z = \cup_{j=1}^{n} Z_j \subset X \times \mathbb{C}P^{n-1}$
Si $P_1 : X \times \mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow X$ es la proyección al primer factor entonces
$P_1(Z) = \{(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2 | A$ y B^j tienen un vector propio en común, para $j = 1, \ldots, n\}$
es un subconjunto cerrado de Zariski de $GL_n(\mathbb{C})^2$ (ver [9, Teorema 3.12]).

Denotemos por $\mathcal{U}$ el abierto $P_1(Z)^c \subset GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$. Por la definición de $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g) := \kappa^{-1}(W') \times_{W'} \Omega \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\Phi"] \\
\kappa^{-1}(W') \arrow[r, "\kappa"] & W'
\end{tikzcd}$$

Ya que Ω es un subconjunto abierto real de Zariski de $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$, tenemos que

$$\mathcal{U}_0 := \mathcal{U} \cap \Omega$$

es un subconjunto abierto real de Zariski no vacío de $GL_n(\mathbb{C})^2$.

Por ser Φ un morfismo dominante, $\Phi(\mathcal{U}_0)$ es un subconjunto constructible real y por lo tanto contiene un subconjunto abierto real de Zariski W'' de su cerradura, tal que satisface la condición de la proposición 10.

Consideremos el diagrama:

(8)
$$\begin{tikzcd} & \Omega' \arrow[d, "\Phi"] \\ \kappa^{-1}(W'') \arrow[r, "\kappa"] & W'' \end{tikzcd}$$

donde $\Omega' := \Phi^{-1}(W'') \cap \Omega$ y tomemos el producto fibrado $\kappa^{-1}(W'') \times_{W''} \Omega'$.

Por la definición de producto fibrado:

$$\kappa^{-1}(W'') \times_{W''} \Omega' = \{((A_1, \ldots, B_{g-1}), (A_g, B_g)) \in \kappa^{-1}(W'') \times \Omega' | \\ \kappa(A_1, \ldots, B_{g-1}) = \Phi(A_g, B_g)\}$$

usando la definición de κ y Φ obtenemos al igual que en la demostración del Teorema 6 que los elementos de $\kappa^{-1}(W'') \times_{W''} \Omega'$ satisfacen la relación que define a $R_n(\Gamma_g)$, además en éste subconjunto se tiene que dado un elemento $\widetilde{\rho} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$ la matriz A_g tiene sus valores propios con norma distinta y la matriz B_g no tiene vectores propios en común con A_g ni permuta vectores propios entre si, ya que por construcción la pareja (A_g, B_g) pertenece a Ω' que determina estas propiedades. Así estamos garantizando que las condiciones $a)$ y $b)$ que mencionamos en la introducción se cumplen en dicho subconjunto.

Definamos
$$\widetilde{R}_n(\Gamma_g) := \kappa^{-1}(W'') \times_{W''} \Omega'$$
por construcción al ser $\kappa^{-1}(W'')$ y Ω' subconjuntos abiertos reales, $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ es subconjunto abierto real de Zariski no vacío de $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$.

Con todo lo anterior hemos demostrado:

Teorema 7. *$\widetilde{R}_n(\Gamma_g) \subset \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ es un subconjunto abierto real de Zariski distinto del vacío, en el cual dado un elemento $\tilde{\rho} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$, la matriz A_g tiene sus valores propios con norma distinta y la matriz B_g no permuta algún subconjunto de vectores propios de la matriz A_g.*

Sea μ una medida de probabilidad sobre los conjuntos Borelianos de $\mathbb{C}P^{n-1}$, entonces $\mu : \mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface:
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2)$\mu(A) \geq 0$ para todo conjunto $A \subset \mathbb{C}P^{n-1}$
3) $\mu(\mathbb{C}P^{n-1}) = 1$
4) Si $A_1, A_2, A_3, \cdots \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ y son mutuamente exclusivos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$) entonces

$$\mu(\cup_1^\infty A_i) = \sum_1^\infty \mu(A_i).$$

Sea $T : \mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ una tranformación lineal invertible. Decimos que T preserva μ ó que μ es T-invariante si para todo Boreliano $C \subset \mathbb{C}P^{n-1}$, tenemos que $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$.
Sea Υ un subconjunto de transformaciones lineales invertibles, decimos que una medida μ es $\Upsilon-$invariante, si es invariante por todo elemento de Υ y de hecho es invariante por cualquier elemento del grupo generado por los elementos de Υ.

Teorema 8. *Para cualquier $\tilde{\rho} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ no hay medidas de probabilidad en $\mathbb{C}P^{n-1}$ invariantes por $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$.*

Demostración. Sea $\tilde{\rho} = (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$, entonces la matriz A_g es regular y tiene sus valores propios de norma distinta, realizemos el cambio de coordenadas que envía a los vectores canónicos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de $\mathbb{C}^n$ a los vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_n$. En estas coordenadas la matriz A_g toma la expresión

$$A_g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\| \lambda_1 \| > \| \lambda_2 \| > \cdots > \| \lambda_n \|$. Sea $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ y k un entero entre 1 y n tal que $v_1 = v_2 = \cdots = v_{k-1} = 0$ y $v_k \neq 0$.

El iterado de v por A_g^m es

$$A_g^m v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_k^m v_k \\ \vdots \\ \lambda_n^m v_n \end{pmatrix}$$

tenemos que la linea generada por $A_g^m v$ se está aproximando al espacio propio de $\mathbb{C}e_k$ de λ_k dado que la componente $k-$ésima crece como $\lambda_k^m v_k$, que tiene mayor orden de crecimiento que los otros. Es decir que conforme vamos realizando las iteraciones de $A_g v$, el vector es atraido al espacio propio de λ_k.

Sea

$$\Lambda_k = \{p \in \mathbb{C}P^{n-1} | \lim_{n\to\infty} A_g^m(p) = [e_k] \in \mathbb{C}P^{n-1}\}$$

$$\Lambda_k = \underbrace{0 \times 0 \times \cdots \times}_{n-1 \quad veces} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-k}$$

la variedad atraída por el punto $[e_k]$.

$$\mathbb{C}P^{n-1} = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \cdots \sqcup \Lambda_n$$

Sea μ una medida invariante bajo $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$ y sea $\mu(\Lambda_k) > 0$.
Sea $[e_k] \in \mathbb{C}P^{n-1}$, tomando coordenadas homogeneas $(0 : 0 : \cdots : 1 : x_{k+1} : x_{k+2} : \cdots : x_n)$ alrededor del punto tenemos la expresión

$$A_g^m(0 : 0 : \cdots : 1 : x_{k+1} : x_{k+2} : \cdots : x_n) = (0 : \cdots : 0 : \lambda_k^m : \lambda_{k+1}^m x_{k+1} : \cdots : \lambda_n^m x_n)$$

$$A_g^m([e_k]) = (0 : \cdots : 0 : 1 : (\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k})^m x_{k+1} : (\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_k})^m x_{k=2} : \cdots : (\frac{\lambda_n}{\lambda_k})^m x_n).$$

Si $\mu(\Lambda_k - \{(0 : 0 : \cdots : 1 : x_{k+1} : x_{k+2} : \cdots : x_n\})$ fuese positivo, entonces $\mu(\Lambda_k \cap reg) > 0$ donde reg es una región fundamental en la acción de A_g en $\{(0, \ldots, 0)\} \times \mathbb{C}^{n-k}$.

Los $\{A_g^m(reg)\}$ son una infinidad de conjuntos con la misma medida positiva y disjuntos, contradiciendo el hecho que la medida es finita. Por consiguiente

$$\mu(\Lambda_k - \{(0 : 0 : \cdots : 1 : x_{k+1} : x_{k+2} : \cdots : x_n\}) = 0$$

que quiere decir que μ es una medida atómica soportada en los vectores propios de A_g. De esto se deduce que las únicas medidas invariantes por A_g son de la forma:

$$(*) \qquad \mu = \sum m_j \delta_{[e_j]}$$

con $\sum m_j = 1$ y $\delta_{[e_j]}$ la delta de Dirac con soporte en $[e_j]$ donde $[e_j]$ denota el espacio propio en $\mathbb{C}P^{n-1}$ del valor propio λ_j de la matriz A_g

Supongamos que existe alguna medida μ invariante por la representación

$$\tilde{\rho} := (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$$

dicha medida en particular debe ser A_g-invariante y por lo visto anteriormente será de la forma $\mu = \sum m_j \delta_{[e_j]}$.
Ahora

$$(**) \qquad B_g^* \mu = \sum m_j \delta_{[B_g e_j]}$$

Si μ fuese B_g-invariante, tomamos $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $m_j \neq 0$. Entonces $B_g(e_j)$ tendría que aparecer en $(**)$ y tendriamos $B_g(e_j) = e_k$ y $m_k = m_j$. Iterando esto obtendriamos un subconjunto de los valores propios de A_g invariantes bajo B_g, que es una contradicción.

Por lo tanto no hay medidas de probabilidad en $\mathbb{C}P^{n-1}$ invariantes por la representación $\tilde{\rho} = (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$. ■

CAPÍTULO IV
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9

4.1 ECUACIONES Y FOLIACIONES RICCATI

Iniciaremos esta sección recordando algunos conceptos básicos de foliaciones y luego describiremos las ecuaciones de Riccati, para mayor información ver [4], [12].

Definición 12. *Si M es una variedad de dimension m y clase C^r. Una foliación de clase C^r, $0 \leq r \leq k$ y de dimension p (o codimension $q = m - p$) es una descomposición de M en subconjuntos conexos disjuntos $\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, llamados las hojas de la foliación, tal que cada punto de M tiene una vecindad U y un sistema de coordenadas C^r $(x, y) : U \longrightarrow R^p \times R^q$ tal que para cada hoja $\mathcal{L}_\alpha$, las componentes de $U \cap \mathcal{L}_\alpha$ son descritas por las ecuaciones*

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \\ y_2 &= C_2 \\ &\vdots \\ y_q &= C_q \end{aligned}$$

con C_j constantes.

La foliación se denota por $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Sea $\pi : E \longrightarrow B$ la proyección de un haz fibrado con fibra F. Decimos que una foliación $\mathcal{F}$ de E es *transversa a las fibras de E* cuando satisface las siguientes propiedades:
1) Para todo $p \in E$ la hoja $\mathcal{L}_p$ de $\mathcal{F}$ la cual pasa a través de p es transversa a la fibra $F_{\pi(p)}$ y $dim\mathcal{F} + dimF = dimE$

2) Para toda hoja $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}$, $\pi|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow B$ es un morfismo cubriente.

Se sigue de esto que para todo $p \in E$ tenemos

$$T_pE = T_p(\mathcal{L}_p) + T_p(F_{\pi(p)}).$$

Cuando la fibra F es compacta, la condición 1) implica la condición 2).

Otro hecho importante es que cuando $\mathcal{F}$ es una foliación C^r $(r \geq 1)$ transversa a las fibras de E, hay una representación

$$\phi : \Gamma(B, b) \longrightarrow Diff^r(F) \simeq Diff^r(\Gamma^{-1}(b))$$

del grupo fundamental $\Gamma(B, b)$ en el grupo de difeomorfismos C^r de F llamada la *holonomia* de $\mathcal{F}$.

La noción de holonomia de una hoja de la foliación es esencialemnte de carácter local. Esta definida por un grupo de germenes de difeomorfismos de una sección transversa a la hoja con un punto fijo. En ciertas circunstancias (cuando la foliación es transversa), sin embargo, es posible asociar a la foliación un grupo de difeomorfismos de una sección transversa global, conteniendo en cierto sentido la holonomia de cada hoja.

Así en el caso de foliaciones cuyas hojas intersectan transversalmente todas las fibras de un haz fibrado E, tenemos que quedan caracterizadas por su holonomia (ver [12]), dada por una representación $\phi : \Gamma(B) \longrightarrow Diff(F)$ del grupo fundamental de la base de E al grupo de difeomorfismos de la fibra F de E. De esta manera propiedades de ϕ se trasladan a propiedades de la foliación.

Decimos que dos representaciones $\phi : \Gamma(S, z_0) \longrightarrow Diff^r(F)$ y
$\phi' : \Gamma(S, z_0) \longrightarrow Diff^r(F')$ son C^s-conjugadas si hay un C^s-difeomorfismos (si $s > 0$) ó homeomorfismo (si $s = 0$) $h : F \longrightarrow F'$ tal que para todo $[\alpha] \in \Gamma(S, z_0)$ tenemos $\phi([\alpha]) = h^{-1} \circ \phi'([\alpha]) \circ h$.

Sean ϕ y ϕ' representaciones C^s-conjugadas. Existe un difeomorfismo $H : E_\phi \longrightarrow E_{\phi'}$ (homeomorfismo si s=0) tal que

a) $\pi' \circ H = \pi$ y consecuentemente H envia fibras de E_ϕ a fibras de $E_{\phi'}$

b) H envia hojas de la foliación $\mathcal{F}_\phi$ a hojas de la foliación $\mathcal{F}_{\phi'}$ (ver [4, pág. 98]).

ECUACIONES RICCATI. Las ecuaciones Riccati son proyectivisaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales sobre una superfice de Riemann hiperbolica S (i.e. compacta menos un número finito de puntos y con cubriente universal el semiplano superior).
La clásica ecuación diferencial ordinaria es

$$\frac{dw}{dz} = A(z)w, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C}^n \tag{9}$$

donde $A(z)$ es una matriz de funciones racionales.
La propiedad fundamental de esta ecuación es que localmente en z podemos encontrar una base de soluciones independientes de (9) las cuales aceptan continuación analítica al espacio cubriente universal de $S := \widetilde{\mathbb{C}}-$polos de A, como funciones holomorfas vectorialmente valuadas w satisfaciendo la relación de monodromía:

$$w(T_\gamma(z)) = \widetilde{\rho}(\gamma)(w(z)) \qquad \gamma \in \Gamma(S, z_0)$$

donde T_γ es la transformación cubriente correspondiente al lazo cerrado γ y

$$\widetilde{\rho} : \Gamma(S, z_0) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \tag{10}$$

es la representación monodromía de la ecuación.
El automorfismo lineal $\widetilde{\rho} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ contiene la información de como las condiciones iniciales son transformadas a condiciones finales resolviendo (9) a lo largo del lazo cerrado γ basado en z_0.

Otra construcción clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales es la *suspensión de una representación* ([12]). Dada una superficie de Riemann hiperbolica S y una representación $\widetilde{\rho} : \Gamma(S, z_0) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ se contruye un fibrado vectorial $E_{\widetilde{\rho}}$ sobre S y una ecuación del tipo (9). Sea $\mathbb{H}^+$ el semiplano superior, considerado como el espacio cubriente universal de S, con transformaciones de cubierta

$$\rho_0 : \Gamma(S, z_0) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{C})$$

dando origen a la representación canonica $\tilde{\rho}_0$ del grupo fundamental de S.
Considere el fibrado trivial

$$\begin{array}{c} \tilde{E} := \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}^n \\ \Big\downarrow \\ \mathbb{H}^+ \end{array}$$

sobre el semiplano superior $\mathbb{H}^+$, y la $\Gamma(S, z_0)-$acción sobre $\widetilde{E}$

$$(z,w) \mapsto (\tilde{\rho}_0(\gamma)z, \tilde{\rho}(\gamma)(w)) \qquad \gamma \in \Gamma(S, z_0) \tag{11}$$

El cociente de $\widetilde{E}$ por ésta acción $\widetilde{E}/\Gamma(S, z_0)$ da lugar a un fibrado vectorial $E_{\tilde{\rho}}$ sobre S.

$$\begin{array}{c} E_{\tilde{\rho}} \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

Sobre $\widetilde{E}$ podemos considerar la ecuación dada por

$$\widetilde{A} = 0 \qquad (i.e. \quad \frac{dw}{dz} = 0).$$

Las soluciones son las funciones constantes. Ya que la ecuación $\widetilde{A} = 0$ es invariante bajo la acción en (11), ésta desciende (al cociente) a una ecuación diferencial ordinaria lineal sobre $E_{\tilde{\rho}}$ la cual es holomorfa sobre S. La construcción da directamente que la transformación monodromía de esta ecuación es la representación $\tilde{\rho}$ dada en (10). La gráfica de las soluciones locales a (9) forman una foliación holomorfa $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$.

La ecuación Riccati se obtiene de una ecuación diferencial ordinaria como (9) al proyectivizar las variables lineales de el fibrado vectorial $E_{\tilde{\rho}}$ sobre la superficie de S. Denotando $\zeta_{ij} := \frac{w_j}{w_1}$ con $j = 2, \ldots, n$, la ecuación Riccati asociada a (9) en coordenadas afines tiene la forma de un polinomio cuadratico en $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ con coeficientes racionales en z:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\zeta_2}{dz} \\ \vdots \\ \frac{d\zeta_n}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{22} - a_{11} & a_{23} & \cdots \\ a_{32} & a_{33} - a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & a_{nn} - a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

$$-(a_{12}\zeta_2 + \cdots + a_{1n}\zeta_n) \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de funciones racionales en (9).

Similarmente, dada una representacion $\tilde{\rho}$ como (10) podemos también construir de la representación proyectivizada $\rho : \Gamma(S, z_0) \longrightarrow PGL_n(\mathbb{C})$ su suspensión $M_\rho = Proj(E_{\tilde{\rho}})$ lo cual da una variedad que es un $\mathbb{C}P^{n-1}$ fibrado sobre S con una conexion plana.

$$\begin{array}{c} M_\rho := Proj(E_{\widetilde{\rho}}) \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

La gráfica de las secciones planas locales de éste fibrado son las soluciones a la ecuación diferencial lineal definida por la monodromía (10), y el conjunto de secciones planas forman una foliación $\mathcal{F}_\rho$ de M_ρ la cual es la proyectivización de la foliación $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$. Ambas foliaciones son transversas a las fibras de $E_{\widetilde{\rho}} \longrightarrow S$ y $M_\rho \longrightarrow S$ respectivamente, por lo tanto la dinamica de la foliación está esencialmente determinada por la del grupo de holonomia $\widetilde{\rho}(\Gamma(S, z_0))$ y $\rho(\Gamma(S, z_0))$.
Las foliaciones asi contruidas, se llamarán foliaciones Riccati.

4.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9

Para la demostración del Teorema, utilizaremos el proceso de suspensión de una representación descrito en la sección anterior y los teoremas 7 y 8 obtenidos en el capítulo anterior.

Teorema 9. *La foliación de Riccati genérica no acepta medidas transversas invariantes.*

Demostración. Del teorema 7, sabemos que el conjunto $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ es un subconjunto abierto real de Zariski no vacío.

Dado un elemento $\tilde{\rho} = (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ contruimos por medio de la suspensión el fibrado vectorial plano ε con fibra $\mathbb{C}^n$ cuya representación de monodromía sea $\tilde{\rho}$, y $Proj(\varepsilon)$ el fibrado plano con fibra $\mathbb{C}P^{n-1}$ inducido por ε (ver [4],[12]).

Las secciones planas de $Proj(\varepsilon)$ forman una foliación $\mathcal{F}_\rho$ de $Proj(\varepsilon)$ llamada foliación de Riccati, la cual es transversa a las fibras y cuyas hojas $\mathcal{L}$ se proyectan como un cubriente a la superficie base S.

Al ser $\mathcal{F}_\rho$ transversa a las fibras de $Proj(\varepsilon) \longrightarrow S$, tenemos que la dinamica de la foliación está esencialmente determinada por la del grupo de holonomia $\rho(\Gamma(S, z_0))$.

Ya que lo anterior se satisface para cualquier representación $\tilde{\rho}$ del subconjunto abierto real de Zariski $\widetilde{R}_n(\Gamma_g)$ la foliación es una foliación de Riccati génerica y del teorema 8 tenemos que no hay medidas de propabilidad en $\mathbb{C}P^{n-1}$ invariantes por $\tilde{\rho}$, para toda $\tilde{\rho} \in \widetilde{R}_n(\Gamma_g)$, lo cual implica que la foliación no acepta medidas transversas invariantes. ■

ANEXO A

ESTUDIO DE LAS MATRICES CON VECTORES PROPIOS EN COMÚN.

En el presente Anexo, deseamos incluir un estudio de las matrices conmutables, el cual fué previo y sirvio para determinar como realizar la demostración del Teorema 7.

Nuestro interés era dada $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, que la matriz B_g no tenga vectores propios en común con A_g. Lo primero que debian satisfacer las matrices A_g y B_g era que no debian conmutar por lo cual realizamos el siguiente análisis:
Ya que nuestra matriz A_g es regular, mediante un cambio de coordenadas la podemos ver como:

$$A_g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

para que B conmute con ella, necesitamos que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 & b_{12}\lambda_2 & \cdots & b_{1n}\lambda_n \\ b_{21}\lambda_1 & b_{22}\lambda_2 & \cdots & b_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}\lambda_1 & b_{n2}\lambda_2 & \cdots & b_{nn}\lambda_n \end{pmatrix}$$

Observemos que para $i \neq j$ debe cumplirse $\lambda_i b_{ij} = b_{ij}\lambda_j$, como $\lambda_i \neq \lambda_j$ entonces $b_{ij} = 0 \ \forall i, j$ por lo cual

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Así suponer que A_g y B_g conmutan, implica que $A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = [A_g, B_g] = Id$.

Lema 13. *Sea* $(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in \widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$ *entonces* $[A_g, B_g] \neq Id$.

Demostración. Por la contrucción de $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\Gamma_g)$, sabemos que $(A_g, B_g) \in \Omega$, pero como $Id \notin W'$ y $\Omega = \Phi^{-1}(W') \setminus [\Phi^{-1}(W') \cap V]$ tenemos que $[A_g, B_g] \neq Id$.

Lema 14. *Si A es matriz regular entonces $\mathcal{B}_A = \{B \in GL_n(\mathbb{C}) |$ A y B no tienen vectores propios en comun $\}$ es un subconjunto abierto de Zariski no vacío.*

Demostración. Ya que A es regular, y la afirmación no depende de las coordenadas que se usan, podemos considerar un cambio de coordenadas φ tal que los vectores propios de A sean los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$ (denotados por e_j), en dicha base A es:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ya que

$Be_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es decir, cuando realizamos el producto de la matriz B por el vector

e_j se obtiene la j-ésima columna de la matriz B, así para que e_j sea vector propio de B, debe cumplirse la igualdad

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica que $b_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$, y $b_{jj} = t$. Esto nos está dando una condición cerrada sobre las columnas de la matriz B. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{B}$ es un abierto de Zariski no vacío en $GL_n(\mathbb{C})$.■

Corolario 1. *Dada A_g matriz regular diagonal y si la $j-$ésima columna de B_g no es un multiplo de e_j para $j = 1, \ldots, n$ entonces A_g y B_g no tienen vectores propios en común.*

Demostración. Supongamos que A_g y B_g tienen un vector propio en común, por la demostración del lema 14, podemos suponer que dicho vector es el vector canónico e_j, entonces $B_g e_j = \mu e_j$, es decir

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff b_{ij} = 0 \text{ para todo } i \neq j \text{ y } b_{jj} = \mu$$

esto implica que la $j-$ésima columna de B_g es un multiplo de e_j, lo cual contradice las hipótesis.

Por lo tantoA_g y B_g no tienen vectores propios en común. ■

Del Lema 14 y el Corolario 6, tenemos que el conjunto:

$\beta = \{B \in GL_n(\mathbb{C}) |$ la $j-$ésima columna de B no es multiplo del vector $e_j\}$
es un subconjunto abierto de Zariski de $GL_n(\mathbb{C})$ distinto del vacío.

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de matrices diagonales de $GL_n(\mathbb{C})$. El subconjunto de $\mathcal{D}$, definido por

$$\Delta' = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \mid \|d_i\| \neq \|d_j\| \forall i, j \right\}$$

es un subconjunto abierto de Zariski de $GL_n(\mathbb{C})$.

Lema 15. *El conjunto $\Delta' \times \beta$ es un subconjunto abierto de Zariski no vacío de $\Delta \times GL_n(\mathbb{C})$*

Demostración. Como Δ' es un subconjunto abierto de Δ es de la forma

$$\Delta' = \Delta - Z_1$$

con Z_1 subconjunto cerrado.
De manera análoga

$$\beta = GL_n(\mathbb{C}) - Z_2$$

con Z_2 subconjunto cerrado. Entonces:

$$\Delta' \times \beta = (\Delta - Z_1) \times (GL_n(\mathbb{C}) - Z_2)$$

$$\Delta' \times \beta = \Delta \times GL_n(\mathbb{C}) - (Z_1 \times GL_n(\mathbb{C})) - (\Delta \times Z_2)$$

$$\Delta' \times \beta = \Delta \times GL_n(\mathbb{C}) - \{(Z_1 \times GL_n(\mathbb{C})) \cup (\Delta \times Z_2)\}$$

Por lo tanto $\Delta' \times GL_n(\mathbb{C})$ es un subconjunto
abierto de Zariski no vacío de $\Delta \times GL_n(\mathbb{C})$. ■

ANEXO B

ESTUDIO DE LA FUNCION $\widetilde{f}^2$.

En el presente Anexo, deseamos incluir un estudio de la función $\widetilde{f}^2$, el cual en un principio se pensaba usar en la prueba de la Proposición 10 de la tésis, pero después realizamos la demostración de otra manera y ya no fué necesario.
Sin embargo débido a que se presenta un fénomeno no esperado e interesante en dicho estudio, decidimos anexarlo.

Regresando a la aplicación $\widetilde{f}$ del Lema 8, si consideramos $\lambda_j = x_j + iy_j$ con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}$

$$\widetilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \prod_{i<j} [(x_i^2 + y_i^2) - (x_j^2 + y_j^2)]$$

luego $\widetilde{f} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Además $\widetilde{f}^2$ es invariante bajo la acción de S_n en $\mathbb{C}^n$.

EL OPERADOR DE REYNOLDS $*$ EN $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$.
Un operador $* : K[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow K[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ se dice que es operador de Reynolds si satisface las siguientes propiedades:
a) El operador $*$ es $K-$lineal.
b) El operador $*$ es la identidad sobre el anillo invariante $K[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$.
c) El operador $*$ es un homomorfismo de $K[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}-$módulos.

Definimos el operador $*$ como:

$$* : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \longrightarrow \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{S_n}$$

$$f \mapsto f^* = \frac{1}{|S_n|} \Sigma_{\sigma \in S_n} \sigma(f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n))$$

$$f^* = \frac{1}{|S_n|} \Sigma_{\sigma \in S_n} (f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}))$$

y demostraremos que es operador de Reynolds.

a) $*$ es $\mathbb{R}$-lineal.
Sea $\lambda f + \mu g$ con $f, g \in R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
*(\lambda f + \mu g) &= \frac{1}{n!}\Sigma_{\sigma \in S_n}[\lambda f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) \\
&+ \mu g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}] \\
&= \frac{1}{n!}\Sigma_{\sigma \in S_n}\lambda f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) \\
&+ \frac{1}{n!}\Sigma_{\sigma \in S_n}\mu g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) \\
&= \lambda\frac{1}{n!}\Sigma_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) \\
&+ \mu\frac{1}{n!}\Sigma_{\sigma \in S_n} g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) \\
&= \lambda f^* + \mu g^*
\end{aligned}$$

b) Sea f un polinomio homogéneo invariante, (i.e.) $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{S_n}$. Entonces:

$$f^* = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)})$$

Por lo tanto el operador * es la identidad sobre el anillo invariante.

c) $*$ es un homomorfismo de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{S_n}$−modulos.
Sea $f \in R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ e $I \in R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{S_n}$, tenemos:

$$(fI)^* = f^* I.$$

Por lo tanto $*$ es un operador de Reynolds en $R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{S_n}$.

Proposición 11. *Todo ideal en el anillo polinomial $R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ es finitamente generado.*

Demostración. (Usaremos la idea de la prueba del Teorema de finitud de Hilbert sobre generación finita [19]). Basta probar que todo ideal monomial $\mathcal{M}$ en el anillo $R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ es finitamente generado.
Procederemos por indución sobre n.
Un ideal monomial $\mathcal{M}$ en $R[x_1, y_1]$ esta generado por $\{x_1^j y_1^l | j \in J, l \in L\}$ donde los conjuntos J y L son subconjuntos de los enteros no negativos. Los conjuntos J y L tienen un elemento minimal j_0, l_0 y $\mathcal{M}$ esta generado por el elemento $\{x_1^{j_0} y_1^{l_0}\}$ esto prueba la afirmación para $n = 1$.

Supongamos que la proposición es verdadera para $n-1$, (Sea $\mathcal{M}$ ideal monomial en el anillo $R[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ generado por$\{x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_{n-1}^{j_{n-1}}y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_{n-1}^{l_{n-1}}\}$).
Para cualesquiera enteros no negativos p, $q\in\mathbb{N}$, consideramos el ideal monomial $\mathcal{M}_{p,q}$ el cual es generado por todos los monomios $m\in R[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ tales que $mx_n^py_n^q\in\mathcal{M}$.

$$\mathcal{M}_{p,q}=\{m\in R[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]|mx_n^py_n^q\in\mathcal{M}\}$$

por la hipótesis de inducción $\mathcal{M}_{p,q}$ esta generado por un conjunto finito $S_{p,q}$ de monomios.

Enseguida observemos las inclusiones
$\mathcal{M}_{0,0}\subseteq\mathcal{M}_{p,q}\subseteq\mathcal{M}_{p+1,q+1}\subseteq\cdots$ para todo $p,q\in\mathbb{N}$, nuevamente por la hipótesis de inducción, también el ideal monomial $\bigcup_{p.q}\mathcal{M}_{p,q}$ es finitamente generado. Esto implica la existencia de enteros r, s tales que $\mathcal{M}_{r,s}=\mathcal{M}_{r+1,s+1}=\mathcal{M}_{r+2,s+2}=\cdots$.
Se sigue de aquí que un monomio $x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_n^{l_n}$ está contenido en $\mathcal{M}$ si y sólo si el monomio $x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_{n-1}^{j_{n-1}}y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_{n-1}^{l_{n-1}}$ está contenido en $\mathcal{M}_{t_1,t_2}$ donde $t_1=min\{r,j_n\}$ y $t_2=min\{s,l_n\}$.
Por lo cual el conjunto finito

$$\bigcup_{\substack{i=0,\ldots,r.\\ j=0,\ldots,s.}} S_{i,j}x_n^iy_n^j$$

genera $\mathcal{M}$. ■

Proposición 12. $\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n]^{S_n}$ *es un anillo finitamente generado por polinomios simétricos invariantes.*

Demostración. La demostración se sigue de la demostración del teorema de finitud de Hilbert (ver [19, pág 26]). Sea $I_{S_n}:=\langle\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n]_+^{S_n}\rangle$ el ideal en
$\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n]$ el cual es generado por todos los polinomios invariantes homogéneos de grado positivo.
Como el operador de Reynolds $*$ es $\mathbb{R}-$lineal, todo invariante f es una combinación $\mathbb{R}-$lineal de monomios simetrizados, $(x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n}y_1^{d_1}y_2^{d_2}\cdots y_n^{d_n})^*$.
Estos invariantes homogéneos son las imagenes de monomios bajo el operador de Reynolds.
Esto implica que el ideal I_{S_n} esta generado por los polinomios

$$(x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n}y_1^{d_1}y_2^{d_2}\cdots y_n^{d_n})^*$$

donde $g=(e_1,e_2,\ldots,e_n,d_1,d_2,\ldots,d_n)$ corre sobre todos los vectores no cero de enteros no negativos.

Por la proposición 11, todo ideal en el anillo polinomial $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]$ es finitamente generado. De aquí se deduce que hay finitos invariantes homogéneos $f_1, f_2, \ldots, f_N$ tales que $I_{S_n} = \langle f_1, f_2, \ldots, f_N \rangle$.
Ahora debemos probar que todo polinomio homogéneo invariante

$$f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]^{S_n}$$

puede escribirse como una función polinomial en $f_1, f_2, \ldots, f_N$.
Supongamos lo contrario, y sea f un elemento homogéneo de mínimo grado en $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]^{S_n} \setminus \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots, f_N]$. Ya que $f \in I_{S_n}$, tenemos que

$$f = \Sigma_{j=1}^{s} g_j f_j$$

para algunos polinomios homogéneos $g_j \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]$ de grado menor que $deg(f)$.
Aplicando el operador de Reynolds en ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$f = f^* = \Sigma_{j=1}^{s} g_j^* f_j$$

los nuevos coeficientes g_j^* son invariantes homogéneos cuyo grado es menor que $deg(f)$.
De la suposición de minimalidad en f obtenemos que

$$g_j^* \in \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots, f_N]$$

y por lo tanto $f \in \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots, f_N]$ lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis.
Por lo tanto $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]^{S_n}$ es finitamente generado. ■

Sabiendo que $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]^{S_n} \simeq \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots, f_N]$, es importante saber sí la expresión de un polinomio invariante es única en términos de los f_j con $j = 1, \ldots, N$. Notemos que si g_1 y g_2 son polinomios en $\mathbb{R}[z_1, z_2, \ldots, z_N]$, entonces $g_1(f_1, f_2, \ldots, f_N) = g_2(f_1, f_2, \ldots, f_N) \Longleftrightarrow h(f_1, f_2, \ldots, f_N) = 0$ donde $h = g_1 - g_2$.
Se sigue entonces que la unicidad de f en términos de los f_j falla si y sólo si hay un polinomio no cero $h \in \mathbb{R}[z_1, z_2, \ldots, z_N]$ tal que $h(f_1, f_2, \ldots, f_N) = 0$.

Por lo tanto la expresión es única si y sólo si no existe una relación algebraica no trivial entre los f_j.

El proceso para saber la expresión de un polinomio invariante f en términos de los f_j(ver[5, prop.7]), es calcular su residuo en la base de Groebner del ideal

$$J_F = \langle f_1 - z_1, f_2 - z_2, \ldots, f_N - z_N \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_N]$$

sea g el residuo de f en la base de groebner G del ideal J_F, $g := \widetilde{f}^G$ donde g será un polinomio en $\mathbb{R}[z_1, z_2, \ldots, z_N]$, entonces la expresión de f es

$$f = g(f_1, f_2, \ldots, f_N).$$

Para saber si existe alguna relación algebraica entre los f_j (ver [5, pág.333]), realizamos lo siguiente:
i) Formar el ideal

$$J_F = \langle f_1 - z_1, f_2 - z_2, \ldots, f_N - z_N \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_N]$$

ii) Calcular

$$I_F = J_F \cap \mathbb{R}[z_1, z_2, \ldots, z_N]$$

entonces sí $I_F = \{0\}$ No hay relación algebraica no trivial entre los f_j.

Sí $I_F \neq \{0\}$ y consideramos $F := (f_1, f_2, \ldots, f_N) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, la cerradura Zariski de la imagen de F, es el conjunto de ceros del ideal I_F, que forma una variedad afín $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^N$. El ideal I_F es el ideal de relaciones de los f_j, y se conoce como: El Ideal de Syzygies de los f_j.

De hecho, $F := (f_1, f_2, \ldots, f_N) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathcal{T}$ tal que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, y_n), f_2(x_1, \ldots, y_n), \ldots, f_N(x_1, \ldots, y_n))$$

es suryectivo puesto que $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{S_n} \simeq \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots, f_N]$.

Geométricamente esto significa que la parametrización

$$z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

cubre todo $\mathcal{T}$.
La aplicación ϕ enviando la órbita de un punto $S_n \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathcal{T}$ induce una correspondencia $1-1$, por lo tanto

$$\mathbb{R}^{2n}/S_n \simeq \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^N.$$

Los f_j dan un encaje de $\mathbb{R}^{2n}/S_n$ como una subvariedad algebraica en el espacio afín $\mathbb{R}^N$.

A continuación veremos un caso particular de la proposición anterior, consideraremos $n = 2$.

Proposición 13. $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]^{S_2} \simeq \mathbb{R}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$.
Donde $f_1 = Res_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = Ims_1 = y_1 + y_2$, $f_3 = Res_2 = x_1x_2 - y_1y_2$, $f_4 = Ims_2 = x_1y_2 + x_2y_1$ *y* $f_5 = y_2y_1$. *Con* s_i *los polinomios simétricos elementales en* $\mathbb{C}[z_1, z_2]$, *además los* f_j *satisfacen la relación:*

$$f_1^2 f_5 - f_1 f_2 f_4 + f_2^2 f_3 + f_2^2 f_5 - 4 f_3 f_5 + f_4^2 - 4 f_5^2 = 0$$

Demostración. Sea f un polinomio homogéneo simétrico, (i.e.) $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]^{S_2}$. En el anillo $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ consideramos el orden lexicográfico $x_1 > x_2 > y_1 > y_2$. Sea $LT(f) = a_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} y_1^{\alpha_3} y_2^{\alpha_4}$, ya que f es invariante, el termino $a_1 x_2^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} y_2^{\alpha_3} y_1^{\alpha_4}$ debe aparecer en la expresión de f, y como $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) > (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3)$ tenemos que $(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_3)$ debe tener su primer termino (distinto de cero) positivo. Por lo tanto tenemos los siguientes casos:
CASO I. $\alpha_1 > \alpha_2$
CASO II. $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 > \alpha_4$
CASO III. $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 = \alpha_4$.
En cada caso propondremos un polinomio $g = f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} f_4^{n_4} f_5^{n_5}$, observando que

$$\begin{aligned} LT(g) &= LT(f_1)^{n_1} LT(f_2)^{n_2} LT(f_3)^{n_3} LT(f_4)^{n_4} LT(f_5)^{n_5} \\ &= (x_1)^{n_1} (y_1)^{n_2} (x_1 x_2)^{n_3} (x_1 y_2)^{n_4} (y_1 y_2)^{n_5} \end{aligned}$$

así $LT(g) = x_1^{n_1+n_3+n_4} x_2^{n_3} y_1^{n_2+n_5} y_2^{n_4+n_5}$.
De manera que
(*) $n_1 + n_3 + n_4 = \alpha_1$, $n_3 = \alpha_2$, $n_2 + n_5 = \alpha_3$ y $n_4 + n_5 = \alpha_4$
con estas igualdades garantizamos que f y $h = a_1 g$ tienen el mismo termino principal. Realizando los calculos en cada caso, obtenemos:

CASO I. $\alpha_1 > \alpha_2$
a) $\alpha_4 - \alpha_3 \leq 0$ y $\alpha_4 < \alpha_1 - \alpha_2$, entonces $g = f_1^{\alpha_1 - \alpha_2} f_2^{\alpha_3 - \alpha_4} f_3^{\alpha_2} f_5^{\alpha_4}$.

b) $\alpha_4 - \alpha_3 > 0$ y $\alpha_4 < \alpha_1 - \alpha_2$, entonces $g = f_1^{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4} f_2^{\alpha_3} f_3^{\alpha_2} f_4^{\alpha_4}$.

c) $\alpha_4 - \alpha_3 > 0$ y $\alpha_1 - \alpha_2 < \alpha_4$, entonces $g = f_2^{\alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_1 - \alpha_2} f_3^{\alpha_2} f_4^{\alpha_1 - \alpha_2} f_5^{\alpha_4 - (\alpha_1 - \alpha_2)}$.

CASO II. $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 > \alpha_4$, entonces $g = f_2^{\alpha_3 - \alpha_4} f_3^{\alpha_1} f_5^{\alpha_4}$.

CASO III. $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 = \alpha_4$, entonces $g = f_3^{\alpha_1} f_5^{\alpha_3}$.

Por lo tanto $LT(f) = a_1 LT(g_1)$ con el g_1 adecuado. Es decir f y $h = a_1 g_1$ tienen el mismo termino principal, por lo cual

$$multideg(f - a_1 g_1) < multideg(f).$$

Sea $h_1 = f - a_1 g_1$, h_1 es simétrico ya que f y $a_1 g_1$ lo son. De aquí si $h_1 \neq 0$, podemos repetir el proceso anterior y formar $h_2 = h_1 - a_2 g_2$, donde a_2 es la constante que aparece en el $LT(h_1)$ y g_2 es un producto de f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 a varias potencias.
Sabemos que $LT(h_2) < LT(h_1)$ cuando $h_2 \neq 0$.
Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de polinomios $h_1, h_2, h_3, \ldots$ con:

$$multideg(f) > multideg(h_1) > multideg(h_2) > \dots$$

como el orden lexicográfico es un buen orden, la sucesión deberá ser finita, lo cual sucede cuando $h_{t+1} = 0$ para algún t.
Así

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + \cdots + a_t g_t$$

por lo cual f es un polinomio en f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5.
Por lo tanto

$$f \in \mathbb{R}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5].$$

Ahora bien cuando se hizo el análisis de las ecuaciones (*) para determinar la expresión del polinomio g, obtuvimos que el valor de n_4 puede variar en ciertos rangos,(nosotros elegimos en cada caso a) $n_4 = 0$, b)$n_4 = \alpha_4$, c)$n_4 = \alpha_1 - \alpha_2$) por lo cual la expresión de un polinomio f en términos de f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 no es única. La expresión dependera del valor que elijamos para n_4.

La afirmación de no unicidad anterior, se justifica también con el hecho de que f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 satisfacen una relación no trivial.(ver comentario despues de la Proposición 12).

Para conocer dicha relación hacemos lo siguiente:
1. Consideramos el ideal

$$J_F = \langle f_1 - z_1, f_2 - z_2, f_3 - z_3, f_4 - z_4, f_5 - z_5 \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5].$$

2. Hacemos $I_F = J_F \cap \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]$.

En nuestro caso como

$$I_F = J_F \cap \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] =< z_1^2 z_5 - z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_3 + z_2^2 z_5 - 4 z_3 z_5 + z_4^2 - 4 z_5^2 >$$

la relación no trivial es:

$$f_1^2 f_5 - f_1 f_2 f_4 + f_2^2 f_3 + f_2^2 f_5 - 4 f_3 f_5 + f_4^2 - 4 f_5^2 = 0$$

por lo tanto la expresión de f no es única en términos de los f_j.
Sea $\mathcal{T}$ la variedad afín dada por el conjunto de ceros del ideal I_F, (ie)

$$\mathcal{T} = Z(I_F) = Z(< z_1^2 z_5 - z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_3 + z_2^2 z_5 - 4 z_3 z_5 + z_4^2 - 4 z_5^2 >)$$

entonces tenemos $\mathbb{R}^4/S_2 \simeq \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^5$. Lo cual nos da una estructura analítica real, distinta en $\mathbb{C}^2/S_2$. ■

En la siguiente afirmación, calculamos la expresión en términos de polinomios simétricos de $\widetilde{f}^2$, usando la proposición anterior.

Afirmación 2. *Sea* $n = 2$ *y* $\widetilde{f}^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]^{S_2}$ *entonces*

$$\widetilde{f}^2 \in \mathbb{R}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5].$$

y

$$\widetilde{f}^2 = f_1^4 + 2f_1^2 f_2^2 - 4f_1^2 f_3 - 8f_1 f_2 f_4 + f_2^4 + 4f_2^2 f_3 - 16f_3 f_5 + 4f_4^2 - 16f_5^2$$

Donde f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 son como en la proposición 13.

Demostración. Para la prueba usaremos la proposición 7 de [5, pág. 329]. Sean $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$.
Fijar un orden monomial en $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_5]$ donde cualquier monomio involucrando x_1, x_2, y_1, y_2 es mayor que todos los monomios en $\mathbb{R}[z_1, \ldots, z_5]$.
Formar el ideal

$$I = \langle f_1 - z_1, f_2 - z_2, f_3 - z_3, f_4 - z_4, f_5 - z_5 \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_5].$$

Sea G la base de Groebner del ideal I. Dado $\widetilde{f}^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, sea $g = \overline{\widetilde{f}^2}^G$ el residuo de $\widetilde{f}$ en la division por G. Realizando el algoritmo en el Singular, obtenemos que

$$g = z_1^4 + 2z_1^2 z_2^2 - 4z_1^2 z_3 - 8z_1 z_2 z_4 + z_2^4 + 4z_2^2 z_3 - 16z_3 z_5 + 4z_4^2 - 16z_5^2$$

es decir que $g \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]$, y por la proposición 7 de [5] concluimos que

$$\widetilde{f}^2 \in \mathbb{R}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$$

y

$$\widetilde{f}^2 = f_1^4 + 2f_1^2 f_2^2 - 4f_1^2 f_3 - 8f_1 f_2 f_4 + f_2^4 + 4f_2^2 f_3 - 16f_3 f_5 + 4f_4^2 - 16f_5^2$$

■

Algoritmo usado para determinar la relación entre los f_j de la proposición 13 del anexo B.

```
SINGULAR
ring r=0, (x,y,s,t,z(1..5)), dp;
poly f1=x+s;
poly f2=y+t;
poly f3=x*s-y*t;
poly f4=x*t+s*y;
poly f5=y*t;
ideal i=f1-z(1),f2-z(2),f3-z(3),f4-z(4),f5-z(5);
ideal g=groebner(i);
g;
g[1]=y+t-z(2)
g[2]=x+s-z(1)
g[3]=t^2-t*z(2)+z(5)
g[4]=2*s*t-t*z(1)-s*z(2)+z(4)
g[5]=s^2-s*z(1)+z(3)+z(5)
g[6]=z(2)^2*z(3)-z(1)*z(2)*z(4)+z(1)^2*z(5)+z(2)^2*z(5)+z(4)^2-4*z(3)*z(5)-4*z(5)^2
g[7]=2*t*z(2)*z(3)-z(2)^2*z(3)-t*z(1)*z(4)-s*z(2)*z(4)+z(1)*z(2)*z(4)+2*s*z(1)*z(5)-
z(1)^2*z(5)+2*t*z(2)*z(5)-z(2)^2*z(5)
g[8]=t*z(1)*z(2)-s*z(2)^2-2*t*z(4)+z(2)*z(4)+4*s*z(5)-2*z(1)*z(5)
g[9]=t*z(1)^2-s*z(1)*z(2)-4*t*z(3)+2*z(2)*z(3)+2*s*z(4)-z(1)*z(4)-4*t*z(5)+2*z(2)*z(5)
ideal j=eliminate (i, xyst);
j;
j[1]=z(2)^2*z(3)-z(1)*z(2)*z(4)+z(1)^2*z(5)+z(2)^2*z(5)+z(4)^2-4*z(3)*z(5)-4*z(5)^2
ideal k=eliminate (g, xyst);
k;
k[1]=z(2)^2*z(3)-z(1)*z(2)*z(4)+z(1)^2*z(5)+z(2)^2*z(5)+z(4)^2-4*z(3)*z(5)-4*z(5)^2
```

Algoritmo usado para determinar la relación entre las partes real e imaginaria de los f_j de la proposición 13 del anexo B.

```
SINGULAR
ring r=0, (x,y,s,t,z(1..5)), lp;
poly k1=x+y;
poly k2=y^2;
poly k3=y*t;
poly k4=s+t;
poly k5=t^2;
ideal i= k1-z(1),k2-z(2),k3-z(3),k4-z(4),k5-z(5);
ideal j=eliminate (i,xyst);
j;
j[1]=z(2)*z(5)-z(3)^2
ideal g=groebner(i);
g;
g[1]=z(2)*z(5)-z(3)^2
g[2]=t^2-z(5)
g[3]=s+t-z(4)
g[4]=y*z(5)-t*z(3)
g[5]=y*z(3)-t*z(2)
g[6]=y*t-z(3)
g[7]=y^2-z(2)
g[8]=x+y-z(1)
ideal m=eliminate (g,xyst);
m;
m[1]=z(2)*z(5)-z(3)^2
```

Algoritmo usado para determinar la expresión de $\tilde{f}^2$ en la afirmación 2 del anexo B.

```
SINGULAR
ring r=0, (x(1),x(2),y(1),y(2),z(1..5)),lp;
poly f1=x(1)+x(2);
poly f2=y(1)+y(2);
poly f3=x(1)*x(2)-y(1)*y(2);
poly f4=x(1)*y(2)+x(2)*y(1);
poly f5=y(1)*y(2);
poly f=x(1)^4+y(1)^4+x(2)^4+y(2)^4 -2*x(1)^2*x(2)^2 -2*y(1)^2*y(2)^2
+2*x(1)^2*y(1)^2-2*x(1)^2*y(2)^2 -2*x(2)^2*y(1)^2+2*x(2)^2*y(2)^2;
ideal i=f1-z(1),f2-z(2),f3-z(3),f4-z(4),f5-z(5);
ideal g=groebner(i);
g;
g[1]=z(1)^2*z(5)-z(1)*z(2)*z(4)+z(2)^2*z(3)+z(2)^2*z(5)-4*z(3)*z(5)+z(4)^2-4*z(5)^2
g[2]=y(2)^2-y(2)*z(2)+z(5)
g[3]=y(1)+y(2)-z(2)
g[4]=x(2)*z(2)^2-4*x(2)*z(5)-2*y(2)^2*z(1)+y(2)*z(1)*z(2)+2*y(2)*z(4)-z(2)*z(4)
g[5]=2*x(2)*z(1)*z(5)-x(2)*z(2)*z(4) +2*y(1)*y(2)^2*z(2) -y(1)*y(2)*z(2)^2
+y(2)^2*z(1)^2 -y(2)*z(1)^2*z(2)-y(2)*z(1)*z(4)+2*y(2)*z(2)*z(3) +z(1)*z(2)*z(4)-
z(2)^2*z(3)
g[6]=x(2)*z(1)*z(2)-2*x(2)*z(4) +4*y(1)*y(2)^2-2*y(1)*y(2)*z(2) -y(2)*z(1)^2
+4*y(2)*z(3)+z(1)*z(4)-2*z(2)*z(3)
g[7]=2*x(2)*y(2)-x(2)*z(2)-y(2)*z(1)+z(4)
g[8]=x(2)^2-x(2)*z(1)+y(1)*y(2)+z(3) g[9]=x(1)+x(2)-z(1)
reduce(f,g);
z(1)^4+2*z(1)^2*z(2)^2 -4*z(1)^2*z(3)-8*z(1)*z(2)*z(4)+z(2)^4 +4*z(2)^2*z(3)
-16*z(3)*z(5)+4*z(4)^2-16*z(5)^2
ring r=0, (x,y,s,t,z(1..5)),lp;
// ** redefining r **
poly f1=x+s;
poly f2=y+t;
poly f3=x*s-y*t;
poly f4=x*t+s*y;
poly f5=y*t;
ideal i=f1-z(1),f2-z(2),f3-z(3),f4-z(4),f5-z(5);
ideal h=eliminate (i, xyst);
h;
h[1]=z(1)^2*z(5)-z(1)*z(2)*z(4)+z(2)^2*z(3)+z(2)^2*z(5)-4*z(3)*z(5)+z(4)^2-4*z(5)^2
```

.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bochnak, M.Coste y Marie-Francoise Roy, *Real Algebraic Geometry*, A Series of Modern Surveys in Mathematics Vol. 36, 1998.

[2] C. Bonatti, X. Gómez-Mont y R. Vila-Freyer, *The Foliated Geodesic Flow on Riccati Equations*, Prepublication No. 254 Laboratorie de Topologie U. de Bourgogne 2001.

[3] C. Bonatti y X. Gómez-Mont, *Sur le Comportement Statisque des Feuilles de Certains Feuilletages Holomorphes*, Monographic de L'Enseignement Mathematique 38, 2001.

[4] C. Camacho, *Geometric Theory of Foliations*, Birkhauser 1985.

[5] D. Cox, J. Little, D. O'shea, *Ideals, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Under Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1992.

[6] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company. New York, N.Y. 1977.

[7] Goldman, William M, *Representations of Fundamental Groups of Surfaces*, Lectures Notes in Math, 1167. Springer, Berlin 1985.

[8] X. Gómez-Mont, *Unas palabras sobre la Teoría Geométrica de Invariantes*, Topicos de Geometría Algebraica. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones; 31, 75-110 Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[9] J. Harris, *Algebraic Geometry a first course*, Graduate Text in Mathematics, 133. Springer 1992.

[10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics 52, Springer 1977.

[11] S. Lang, *Algebra*, Addison - Wesley Publishing Company 1993.

[12] Lawson, H. Blaine Jr, *The Quantitative Theory of Foliations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 27. American Mathematical Society 1977.

[13] D. Mumford, *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 221. 1976.

[14] Narasimhan, M.S., Seshadri, C.S., *Stable and Unitary Vector Bundles on a Compact Riemann Surface*, Ann. of Math. 82 (1965), 540-567.

[15] P.E. Newstead, *Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute on Fundamental Research,Bombay 1978.

[16] A.S. Rapinchuk, V.V. Benyash-Krivetz and V.I. Chernosov, *Representation Varieties of The Fundamental Groups of Compact Orientable Surfaces*, Israel Journal of Mathematics 93 (l996), 29-71.

[17] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldartellungen Band 213. 1974.

[18] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhauser 1981.

[19] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag 1993.

[20] R.G. Thompson, *Commutators in the Special and General Linear Groups*, Transactions of The American Mathematical Society 101(1961), 16-33.

[21] H. Whitney, *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley Series in Mathematics 1972.