

# **Planes Optimos para Pruebas de Vida Acelerada con Esfuerzos Escalonados**

JOSÉ DEL CARMEN JIMÉNEZ HERNÁNDEZ

Julio de 2004



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Diferentes tipos de aceleración . . . . .	3
1.3. Tipos de respuestas . . . . .	3
1.4. Métodos de aceleración . . . . .	4
1.5. Tipos de esfuerzos . . . . .	5
1.5.1. Esfuerzo constante . . . . .	5
1.5.2. Esfuerzo escalonado . . . . .	6
1.5.3. Esfuerzo progresivo . . . . .	7
1.6. Pruebas de vida acelerada con esfuerzo escalonado . . . . .	8
1.7. Descripción del trabajo . . . . .	10
<b>2. Modelo Bajo Esfuerzo Escalonado</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Relación vida-esfuerzo . . . . .	14
2.2.1. Relación de Arrhenius . . . . .	14
2.2.2. Relación potencia inversa . . . . .	15
2.3. Modelo de daño acumulado . . . . .	16

2.3.1.	Supuestos . . . . .	17
2.3.2.	Formulación matemática . . . . .	18
2.4.	Daño acumulado para la relación de potencia inversa . . . . .	20
2.4.1.	Modelo de daño acumulado potencia-Weibull . . . . .	21
2.5.	Daño acumulado para la relación de Arrhenius . . . . .	22
<b>3.</b>	<b>Planes Optimos, Modelo Log-lineal Exponencial</b>	<b>25</b>
3.1.	Preliminares . . . . .	26
3.2.	Plan óptimo sin censura . . . . .	29
3.2.1.	Prueba óptima simple con tiempo escalonado . . . . .	29
3.2.2.	Prueba óptima simple con fallas escalonadas . . . . .	41
3.3.	Plan óptimo con censura . . . . .	47
3.3.1.	Prueba óptima simple con tiempo escalonado . . . . .	47
3.3.2.	Prueba óptima simple con fallas escalonadas . . . . .	53
3.4.	Ejemplos . . . . .	56
<b>4.</b>	<b>Planes Optimos, Modelo Log-lineal Weibull</b>	<b>61</b>
4.1.	Plan óptimo sin censura . . . . .	61
4.2.	Plan óptimo con censura . . . . .	62
4.3.	Ejemplo de determinación de un plan óptimo . . . . .	72
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Hoy en día los fabricantes enfrentan una presión fuerte para desarrollar nuevos productos con alta tecnología en un tiempo específico, mejorando la productividad, la confiabilidad del producto y sobre todo la calidad. Esto ha motivado al desarrollo de métodos en el área de la ingeniería y el uso más extenso de diseños de experimentos para el producto y mejorar el proceso. Estos requerimientos de alta confiabilidad han aumentado la necesidad de adelantar la prueba de materiales, componentes y sistemas. Esto está en línea con la filosofía de la calidad moderna para producir productos de alta confiabilidad: lograr alta confiabilidad mejorando el diseño y el proceso de fabricación. Estimar la distribución del tiempo a la falla o la duración a largo plazo de productos con *alta confiabilidad*, es particularmente difícil. Los productos más modernos son diseñados para operar sin fallas por años, décadas o mucho más. Así pocas unidades fallarán o se degradarán en una prueba en un tiempo adecuado a condiciones normales de uso. Por ejemplo, el diseño y construcción de un satélite de comunicación

sólo puede permitir pocos meses para probar sus componentes que se espera estén en servicio por 10 o 15 años. Para tales aplicaciones, Pruebas Aceleradas son muy usadas en la industria, para obtener oportunamente información sobre la confiabilidad de componentes y materiales. Existe dificultad práctica y problemas estadísticos involucrados en la aceleración de la vida de un producto complicado que puede fallar de diferentes maneras. Generalmente, la información de la prueba a niveles altos de una o más variables de aceleración (por ejemplo, temperatura, voltaje o carga) es extrapolada a través de un modelo estadístico físicamente razonable, para obtener la vida estimada o la duración a largo plazo, a nivel de diseño o normal de operación, de la(s) variable(s) de aceleración. En algunos casos, el esfuerzo se aumenta de nivel o en otros crece continuamente durante el desarrollo de la prueba, por ejemplo, una prueba acelerada bajo *esfuerzo escalonado* o bajo esfuerzo progresivo. Las pruebas aceleradas son usadas en el proceso del diseño de la confiabilidad para evaluar o demostrar la confiabilidad de componentes y sistemas, para certificar componentes, para detectar modos de falla de tal manera que puedan ser corregidos, para comparar diferentes productos entre otros. Las pruebas aceleradas se han vuelto cada vez más importantes debido a cambios rápidos en la tecnología y a la competencia creciente de los productores de bienes, originada por la globalización de los mercados. El desarrollo de la tecnología ha propiciado la fabricación de productos cada vez más complejos, con más componentes, lo cual para la confiabilidad significa un reto creciente, debido a que el número de componentes que requieren estudio de confiabilidad es cada vez mayor. La fuerte competencia que enfrentan los productores, los obliga a mantener en forma permanente programas de crecimiento de la confiabilidad de más productos en periodos de tiempo muy cortos, con el fin de atraer clientes y además mantener su lealtad. Lo anterior explica la necesidad creciente en la industria, de realizar estudios

de confiabilidad en número creciente y en tiempos sistemáticamente reducidos.

## 1.2. Diferentes tipos de aceleración

El término *aceleración* tiene diferentes significados dentro del campo de la confiabilidad, pero el término generalmente implica ir más rápidamente en el tiempo (se usa cualquier escala para medir la vida del componente o dispositivo), de tal manera que la información de la confiabilidad pueda ser obtenida más tempranamente. Diferentes tipos de pruebas de confiabilidad son usadas en las diferentes fases del diseño del producto y del proceso de producción [5, pág. 467].

## 1.3. Tipos de respuestas

Es útil distinguir entre pruebas aceleradas sobre la base de lo que se observa.

- **Pruebas de Vida Acelerada (PVA)**. En estas pruebas, observamos el tiempo de vida para componentes que fallan durante el estudio o cotas inferiores del tiempo de vida para los componentes que no fallan durante el periodo de observación.
- **Pruebas de Degradación Acelerada (PDA)**. En éste caso, observamos el cambio en alguna característica que se degrada a través del tiempo y que está relacionada con el proceso de falla de la unidad en observación.

Algunos de los fundamentos físicos supuestos del modelo y conceptos son los mismos para PVA y PDA. En algunos casos, se usa un análisis de datos de degradación para definir tiempos a la falla, volviéndose los datos de una PDA en datos de una

PVA. Existe una relación cercana entre modelos para PVA y PDA. Debido a los diferentes tipos de respuesta, el ajuste de los modelos a los datos y los métodos de análisis difieren.

El objetivo final en ambos estudios es conocer la confiabilidad del producto estudiado.

## 1.4. Métodos de aceleración

Existen por lo menos tres métodos diferentes de aceleración en una prueba de confiabilidad.

- Incrementar la tasa de uso del producto.
- Incrementar la tasa de envejecimiento del producto. Por ejemplo, incrementando el nivel de las variables experimentales como temperatura o humedad que puedan acelerar el proceso químico de ciertos mecanismos de falla, tal como degradación química de cierto producto, etc.
- Incrementar el nivel de variables ambientales en operación esfuerzo (temperatura, voltaje o carga) bajo el cual opera la unidad en prueba. Una unidad fallará cuando su resistencia caiga por debajo del esfuerzo aplicado. Así una unidad trabajando a un esfuerzo alto generalmente fallará más rápido que a un esfuerzo bajo.

Combinaciones de éstos métodos de aceleración también son empleados. Las variables como la temperatura y el voltaje ambos pueden incrementar la velocidad de una reacción mecánica incrementando el esfuerzo a su resistencia. En tales aplicaciones, cuando el efecto de las variables de aceleración es complicado, no es suficiente

un conocimiento físico para dar un modelo adecuado para una buena extrapolación. Por tal razón, los modelos empíricos pueden ser usados para extrapolar a condiciones normales de uso. La interpretación de los datos en una prueba acelerada requiere de modelos que relacionen las variables de aceleración tal como temperatura, voltaje o carga con el tiempo a la falla. Para pruebas sobre un rango de las variables de aceleración, uno puede ajustar un modelo a los datos para describir el efecto que las variables tienen sobre el proceso que causa las fallas. La idea general es desarrollar la prueba a niveles altos de la(s) variable(s) de aceleración para acelerar el proceso de fallas y entonces extrapolar a niveles bajos de la(s) variable(s) de aceleración. Para algunas aplicaciones un modelo estadístico puede permitir tal extrapolación.

## 1.5. Tipos de esfuerzos

La condición para seguir una estrategia de aplicación del esfuerzo es que sea posible relacionar estadísticamente los tiempos de fallas observados en la prueba con el tiempo de vida de las unidades en condiciones de diseño o normal de operación. A continuación se describen las formas más comunes de aplicación de los esfuerzos.

### 1.5.1. Esfuerzo constante

En una PVA bajo esfuerzo constante, cada unidad se somete a un nivel de esfuerzo constante durante el estudio. La Figura 1.1 representa una prueba bajo esfuerzo constante con tres niveles denotados por S1, S2 y S3 (bajo, medio y alto). La historia de una unidad expresa cómo se mueve a lo largo de la línea horizontal hasta que falla a un cierto tiempo mostrado por una  $\times$ , una unidad que no falla tiene su edad mostrada por una flecha ( $\rightarrow$ ). Al nivel alto, todas las unidades en prueba fallan. Al nivel medio,

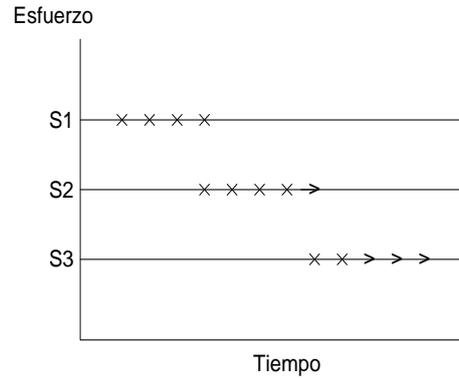


Figura 1.1: Esfuerzo constante ( $\times$  falla,  $\rightarrow$  no falla).

cuatro unidades fallan y solamente una unidad no falla. En contraste, al nivel bajo solo dos unidades fallan y tres permanecen en la prueba sin fallar. En condiciones normales de uso, algunos productos trabajan bajo esfuerzo constante, y en tal caso, los resultados de una PVA bajo esfuerzo constante se extrapolan adecuadamente a las condiciones normales de operación. Algunas ventajas de este tipo de pruebas son las siguientes.

1. En algunas pruebas es fácil mantener un nivel de esfuerzo constante.
2. Los modelos para pruebas aceleradas bajo esfuerzo constante, han sido desarrollados mejor y verificados empíricamente para algunos materiales y productos.
3. El análisis de datos para estimar la confiabilidad esta bien desarrollado y existe una gran variedad de programas computacionales que ayudan a tal tarea.

### 1.5.2. Esfuerzo escalonado

En una prueba con esfuerzo escalonado, una unidad se somete sucesivamente a esfuerzos de nivel creciente. Primero una unidad se somete a un nivel de esfuerzo

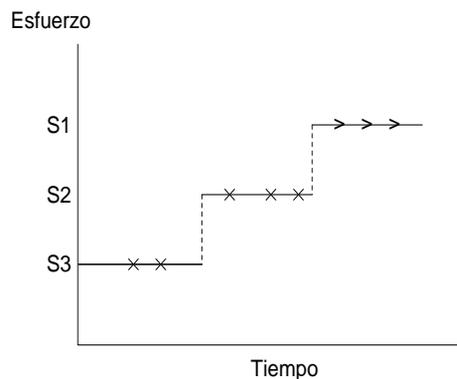


Figura 1.2: Esfuerzo escalonado ( $\times$  falla,  $\rightarrow$  no falla).

constante por una duración de tiempo especificada, si no falla, se somete a otro nivel de esfuerzo más alto por otra duración de tiempo especificada y así sucesivamente. De esta forma, el esfuerzo sobre una unidad incrementa paso a paso hasta que falla. Usualmente todas las unidades siguen el mismo patrón de niveles de esfuerzo y tiempos de prueba especificados, la Figura 1.2 muestra tal patrón.

### 1.5.3. Esfuerzo progresivo

En una prueba bajo esfuerzo progresivo, una unidad experimenta un nivel de esfuerzo que se incrementa continuamente. Diferentes grupos de unidades pueden experimentar diferentes patrones de esfuerzo progresivo. La Figura 1.3 muestra 3 patrones, es decir, tres tendencias crecientes de esfuerzos denotados por S1, S2 y S3 (bajo, medio y alto), en donde el esfuerzo crece linealmente, observe que para la tendencia menor, las unidades tienden a durar más en la prueba, que en el caso de tendencias mayores de esfuerzos, además algunas unidades pueden no fallar. En tal prueba puede ser difícil controlar exactamente el esfuerzo progresivo, por tal razón,

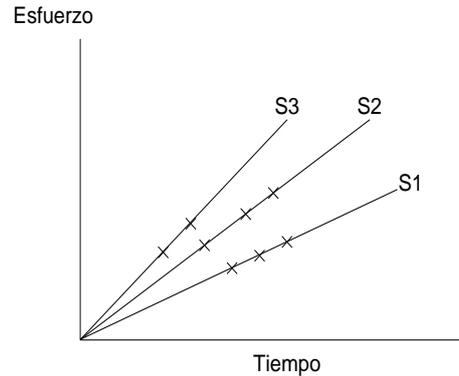


Figura 1.3: Esfuerzo progresivo ( $\times$  falla,  $\rightarrow$  no falla).

pruebas bajo esfuerzo constante o escalonado son recomendadas sobre pruebas bajo esfuerzo progresivo para estimar la confiabilidad.

Algunos otros esquemas de aceleración que también se emplean son, esfuerzo cíclico y esfuerzo aleatorio. A continuación se enfatizará en una PVA bajo esfuerzo escalonado.

## 1.6. Pruebas de vida acelerada con esfuerzo escalonado

En la sección (1.5.2) se mencionó el esquema de tal prueba, a continuación mencionaremos las principales ventajas y desventajas que se presentan al desarrollar una prueba bajo este tipo de aceleración.

**Ventajas.** La principal ventaja en una prueba con esfuerzo escalonado es que las fallas se presentan rápidamente, esto se debe a que los niveles de esfuerzo se incrementan sucesivamente. Desde el punto de vista estadístico, esto es satisfactorio,

ya que se pueden dar estimaciones del modelo y de la vida del producto, en contraste con los ingenieros ya que si no se presentan fallas les hace pensar que el producto es altamente confiable. El que se presenten rápido las fallas, no garantiza más precisión en las estimaciones, usualmente en una prueba bajo esfuerzo constante con un número pequeño de fallas, se tiene mejor precisión que en una prueba bajo esfuerzo escalonado, donde todas las unidades pueden fallar. Nelson (1990) comenta “ el tiempo total en prueba, (sumado sobre todas las unidades), determina la precisión - no el número de fallas. ”

**Desventajas.** Algunas desventajas de una prueba bajo esfuerzo escalonado son las siguientes. Algunos productos trabajan bajo esfuerzo constante no bajo esfuerzo escalonado, así, el modelo puede dar apropiadamente el efecto acumulado de exposición a esfuerzo sucesivo, sin embargo, el modelo también puede dar una estimación de la vida del producto bajo esfuerzo constante, éste es llamado el **modelo de daño acumulado**, ver [9, Cap. 10]. Aunque en la literatura, aparecen algunos modelos, pocos de ellos han sido ajustados a datos y por tanto pocos garantizan la precisión del ajuste, otra posible desventaja es que el ajustar datos al modelo requiere de un sofisticado programa de computo. Por lo anterior, generalmente una prueba bajo esfuerzo constante se recomienda sobre una bajo esfuerzo escalonado, finalmente otra desventaja de éste tipo de prueba es que los modos de falla ocurren a niveles altos de esfuerzo, después de varios escalones, los cuales pueden diferir de las condiciones de uso.

## 1.7. Descripción del trabajo

La motivación del presente trabajo proviene del interés que existe en el laboratorio de confiabilidad del Centro de Tecnología y Desarrollo del consorcio MABE, por realizar PVA en tiempos reducidos para un gran número de componentes diferentes y con la restricción de equipos y cámaras de prueba que se tienen.

El problema que presenta el esquema de pruebas aceleradas con esfuerzos constantes, es que en una de estas pruebas se ponen 3 o 4 lotes de unidades, trabajando a diferentes esfuerzos constantes durante todo el proceso y para éste se requiere una cámara de prueba por cada lote o si se usa una sólo cámara habría que probar secuencialmente los diferentes lotes de unidades, con el consecuente consumo de tiempo que significa.

Una alternativa que se considera, consiste en realizar las PVA, aplicando esfuerzos en forma escalonada, ya que en este caso se puede trabajar con una sólo cámara de prueba, en la que trabajan todas las unidades en prueba y el esfuerzo se va aplicando en forma escalonada.

El objetivo del presente trabajo, principalmente es obtener planes óptimos para éste tipo de prueba, bajo los siguientes supuestos: 1) los tiempos de falla de unidades expuestas a esfuerzos constantes siguen una distribución Weibull, 2) existe una relación log-lineal entre el parámetro de escala y el esfuerzo, (posiblemente transformado), 3) el parámetro de forma es desconocido y 4) el modelo de daño acumulado es válido.

El **Capítulo 2** expone las principales relaciones entre la vida y el esfuerzo y la descripción matemática del modelo de daño acumulado. Esta relación es fundamental en la modelación de las PVA con esfuerzos escalonados.

En el **Capítulo 3** se desarrollan los resultados de los planes óptimos simples cuando la distribución es exponencial sin y con censura obtenidos por Miller y Nelson

(1983) y por Bai, Kim y Lee (1989), respectivamente.

En el **Capítulo 4** se presenta el plan óptimo cuando la distribución es Weibull, en primer instancia cuando el parámetro de forma es conocido y después cuando éste es desconocido, siguiendo la teoría para planes óptimos desarrollada por Nelson y Meeker (1978).

Finalmente el **Capítulo 5**, expone las conclusiones, sugerencias y trabajos subsiguientes para las PVA con esfuerzos escalonados.



# Capítulo 2

## Modelo Bajo Esfuerzo Escalonado

En éste capítulo se presenta el modelo de daño acumulado para una PVA bajo esfuerzos escalonados. La sección 2.1 presenta las componentes de un modelo para una PVA, en la sección 2.2 se muestran las principales relaciones que existen entre la vida y el esfuerzo y la sección 2.3 describe la formulación de tal modelo finalizando con un ejemplo, las secciones 2.4 y 2.5 describen el daño acumulado para la relación potencia inversa y la relación de Arrhenius, respectivamente, específicamente para el modelo potencia-Weibull y Arrhenius-Weibull.

### 2.1. Introducción

Generalmente un modelo estadístico para una PVA tiene las siguientes dos componentes.

1. Una distribución paramétrica para la vida de una población de unidades a niveles especificados de una o más variables de esfuerzo. Es posible evitar ésta suposición para algunas aplicaciones, pero algunos modelos paramétricos (como

por ejemplo el modelo Weibull o el Lognormal) proporcionan ventajas prácticas para muchas aplicaciones.

2. Una relación entre uno o más parámetros de la distribución y las variables de aceleración u otras variables experimentales, (o simplemente relación vida-esfuerzo [9, Cap. 2]), usualmente un cuantil de la distribución se expresa como función de dichas variables, tal modelo relaciona el efecto que las variables como temperatura o voltaje tendrán sobre la distribución de los tiempos a la falla.

## 2.2. Relación vida-esfuerzo

Las relaciones que a continuación se presentan son sólo para PVA bajo esfuerzo constante y son las más usadas, algunas otras son generalizaciones de estas ([9, Cap. 2],[5, Cap. 18]).

### 2.2.1. Relación de Arrhenius

La relación de Arrhenius es un modelo de uso frecuente en la descripción del efecto que la temperatura tiene sobre el tiempo de vida de componentes. Esta relación se puede escribir como

$$\tau(T) = A \exp \left[ \frac{E_a}{k_B T} \right]$$

donde  $\tau(T)$  es un cuantil de la distribución de los tiempos de falla cuando las unidades en prueba trabajan a una temperatura  $T$ . En esta expresión,  $T$  es la temperatura absoluta en grados Kelvin,  $T = ^\circ C + 273.15$ ,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $k_B = 8.6171 \times 10^{-5} = 1/11605$  electrón-volts (eV) por  $^\circ C$ ,  $E_a$  es la energía de activación en eV, los parámetros  $A$  y  $E_a$  son característicos del producto, del método de

prueba y otros factores. Dada ésta relación, se puede definir el factor de aceleración de Arrhenius, el cual nos dice que tanto se acelera la prueba entre dos niveles de esfuerzo dados [5, Cap. 18, pág. 472]. Si se combina una distribución Weibull con ésta relación, el modelo recibe el nombre de **modelo Arrhenius-Weibull**, similarmente si se combina ésta relación con una distribución lognormal o exponencial (**modelo Arrhenius-lognormal** o **modelo Arrhenius-exponencial**) [9, págs. 79-84].

### 2.2.2. Relación potencia inversa

Una relación vida-esfuerzo que se usa ampliamente es la *relación de potencia inversa* que se aplica cuando las componentes en prueba se aceleran por medio de voltaje en componentes eléctricos o electrónicos o de carga en el caso de componentes mecánicos. Supóngase que la variable de aceleración  $V$  es positiva, la ley de potencia inversa entre la vida nominal  $\tau$  de un producto y  $V$  es

$$\tau(V) = \left( \frac{V_0}{V} \right)^p \quad (2.1)$$

donde  $V_0$  y  $p$  son los parámetros característicos del producto, método de prueba, etc. Algunas formas equivalentes son

$$\tau(V) = \left( \frac{A}{V^p} \right),$$

y

$$\tau(V) = \frac{\exp(\alpha)}{V^p}.$$

Si se combina ésta relación con una distribución Weibull, lognormal o exponencial, al modelo se le llama **modelo potencia-Weibull**, **potencia-lognormal** o **potencia-exponencial** [9, págs. 88-92].

Los modelos anteriores, describen la vida de una unidad como función del esfuerzo constante. Un supuesto que se hace en la versión simple en estos modelos de vida acelerada, es que el parámetro de forma de la distribución del tiempo a la falla no cambia con el esfuerzo.

**Ejemplo.** Supóngase que la vida de cierto material se describe con una distribución Weibull cuya vida característica es una función potencia del esfuerzo, es decir, se tiene un modelo potencia-Weibull, cuyas suposiciones con las siguientes,

1. Para cualquier esfuerzo  $V$  (el cual debe ser positivo), la vida del producto tiene una distribución Weibull.
2. El parámetro de forma  $\beta$  es constante e independiente del esfuerzo  $V$ .
3. El parámetro de escala  $\eta$  es una función potencia inversa de  $V$ , es decir,

$$\eta(V) = \left(\frac{V_0}{V}\right)^p, \quad (2.2)$$

donde los parámetros  $V_0$ ,  $p$  y  $\beta$  son característicos del producto y del método de prueba. Lo anterior implican que la fracción de unidades que fallan al tiempo  $t$  bajo esfuerzo constante  $V$  es

$$F(t, V) = 1 - \exp \left[ - \left\{ \frac{t}{\eta(V)} \right\}^\beta \right] = 1 - \exp \left[ - \left\{ t \left( \frac{V}{V_0} \right)^p \right\}^\beta \right], \quad t > 0, \quad (2.3)$$

y el cuantil  $p$  al nivel de esfuerzo  $V$  es

$$t_p(V) = \eta(V) [-\ln(1-p)]^{1/\beta}. \quad (2.4)$$

### 2.3. Modelo de daño acumulado

Para cada esfuerzo escalonado, hay una distribución  $F_0(t)$  al tiempo  $t$  de fallas en la prueba. Usualmente uno quiere la distribución del tiempo a la falla bajo esfuerzo

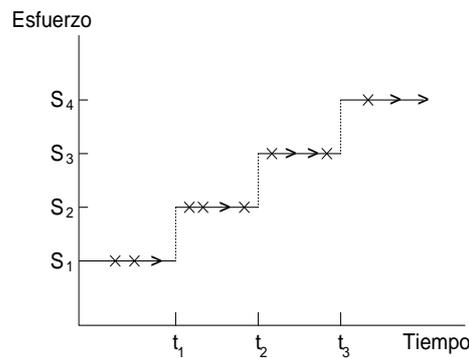


Figura 2.1: Esfuerzo Escalonado ( $\times$  falla,  $\rightarrow$  no falla).

constante de la unidad la cual esta en uso. Así, uno necesita un modelo de daño acumulado para un modo de falla que relacione la distribución bajo esfuerzo escalonado y la distribución bajo esfuerzo constante. A continuación se describe tal modelo.

### 2.3.1. Supuestos

El modelo para el modo de falla supone que la vida restante de las unidades sólo depende de la fracción de fallas que se han acumulado hasta ese momento y del esfuerzo actual (la propiedad de Markov). Sin embargo, al esfuerzo actual, las unidades que no han fallado lo harán de acuerdo a la distribución acumulada para el esfuerzo, pero empezando en la fracción de fallas acumulada previamente. También, el cambio en el esfuerzo no tiene efecto sobre la vida, solo el nivel de esfuerzo.

Las Figuras 2.1-2.3 presentan el modelo de daño acumulado para un modo de falla. La Figura 2.1 muestra un patrón escalonado con cuatro escalones, fallas y tiempo de censura de las unidades. La Figura 2.2, las cuatro distribuciones para los esfuerzos constantes  $V_1, V_2, V_3$  y  $V_4$ , lo que representa que las unidades siguen la distribución

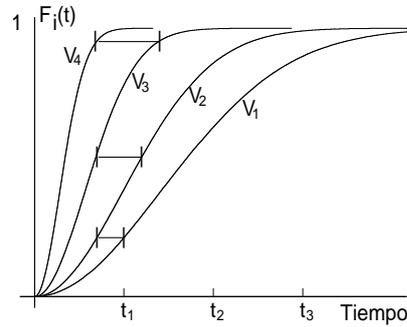


Figura 2.2: Función de distribución para cada uno de los esfuerzos constantes ( $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$ ).

acumulada dada por  $V_1$  hasta el tiempo  $t_1$ , cuando el esfuerzo se incrementa de  $V_1$  a  $V_2$ , las unidades que no han fallado siguen la distribución de  $V_2$  empezando en la fracción de fallas acumulada, lo mismo pasa cuando se incrementa el esfuerzo de  $V_2$  a  $V_3$ , etc., las unidades que no han fallado siguen la función de distribución acumulada siguiente empezando en la fracción de fallas acumulada. Finalmente la función de distribución acumulada bajo esfuerzo escalonado se muestra en la Figura 2.3, la cual consiste de segmentos de distribuciones para esfuerzos constantes. En resumidas cuentas, este modelo va tomando la información previa acumulada de cada unidad.

### 2.3.2. Formulación matemática

El modelo de daño acumulado para un modo de falla se describe matemáticamente como sigue. Supóngase que para un patrón en particular, el escalón  $i$  corre al esfuerzo  $V_i$ , empezando al tiempo  $t_{i-1}$  hasta el tiempo  $t_i$  ( $t_0 = 0$ ). La función de distribución acumulada para unidades a esfuerzo constante  $V_i$  es  $F_i(t)$ . Para el ejemplo con el

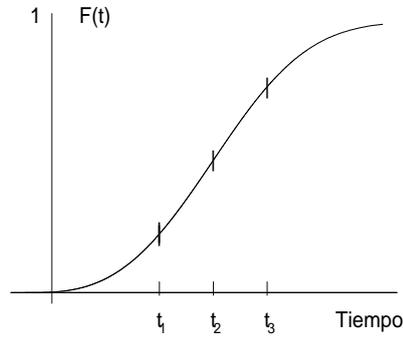


Figura 2.3: Función de distribución acumulada.

modelo potencia inversa Weibull, usando la relación (2.1) es,

$$F_i(t) = 1 - \exp \left[ - \left\{ t \left( \frac{V_i}{V_0} \right)^p \right\}^\beta \right].$$

**Paso 1.** La fracción acumulada de unidades que fallan en el paso 1 es

$$F(t) = F_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

**Paso 2.** El paso 2 empieza a un tiempo equivalente  $s_1$  el cual podría producir la misma fracción de fallas acumuladas de la población. Así,  $s_1$  es la solución de

$$F_2(s_1) = F_1(t_1).$$

La fracción de fallas acumuladas en el paso 2 al tiempo total  $t$  es

$$F(t) = F_2[(t - t_1) + s_1], \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

**Paso 3.** Similarmente, el paso 3 empieza al tiempo  $s_2$  dado por

$$F_3(s_2) = F_2(t_2 - t_1 + s_1).$$

Entonces

$$F(t) = F_3[(t - t_2 + s_2)], \quad t_2 \leq t \leq t_3.$$

**Paso  $i$ .** En general, el paso  $i$  empieza al tiempo  $s_{i-1}$  dado por

$$F_i(s_{i-1}) = F_{i-1}(t_{i-1} - t_{i-2} + s_{i-2}).$$

Entonces

$$F(t) = F_i[(t - t_{i-1} + s_{i-1})], \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Así  $F(t)$  para un esfuerzo escalonado consiste de segmentos de las distribuciones acumuladas  $F_1()$ ,  $F_2()$ , etc., como se muestra en la Figura 2.3.

## 2.4. Daño acumulado para la relación de potencia inversa

El modelo de daño acumulado descrito arriba puede ser expresado en una forma simple y equivalente para dar  $F(t)$  para un modo de falla. Para el modelo, la fracción de fallas después de cualquier esfuerzo escalonado es independiente del orden de los escalones como sigue. Supóngase que el escalón  $i$  está al nivel de esfuerzo  $V_i$  con la correspondiente vida característica  $\eta_i = (V_0/V_i)^p$  para el tiempo  $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ . Entonces se puede demostrar que la fracción de fallas al tiempo  $t_I = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_I$  después del paso  $I$  es

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \{ \varepsilon(t) \}^\delta \right]; \quad (2.5)$$

aquí el *daño acumulado*  $\varepsilon(t)$  para el modo de falla es

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta_1}{\eta_1} + \frac{\Delta_2}{\eta_2} + \dots + \frac{\Delta_{I-1}}{\eta_{I-1}} + \frac{t - t_{I-1}}{\eta_I}, \quad t_{I-1} \leq t \leq t_I. \quad (2.6)$$

$\Delta_I$  puede ser sólo una fracción del tiempo planeado al paso  $I$ . Sin embargo, los valores de  $F(t)$  y  $\varepsilon(t)$  son los mismos a pesar del orden del paso  $I$ , cada uno con su correspondiente tiempo  $\Delta_i$  al nivel de esfuerzo  $V_i$ . (2.5) es una forma simple y equivalente del modelo de daño acumulado. De cualquier forma, para algunos modos de fallas, productos y materiales, el comportamiento de las fallas depende del orden del escalón, llamado el *efecto secuencial*, (2.6) no tiene tal efecto.

### 2.4.1. Modelo de daño acumulado potencia-Weibull

Los resultados (2.5) y (2.6) se extienden a cualquier modelo donde la distribución  $F(t; V)$  para un modo de falla depende de un esfuerzo constante  $V$  a través de un parámetro de escala  $\theta(V)$ , es decir

$$F(t; V) = G \left[ \frac{t}{\theta(V)} \right];$$

aquí  $G[ ]$  es la función de distribución acumulada que se supone con el parámetro de escala igual a 1. Los modelos lineal-lognormal, lineal-Weibull y lineal-exponencial tienen ésta propiedad. Entonces  $F(t) = G(\varepsilon)$  donde  $\varepsilon = [\Delta_1/\theta(V_1)] + [\Delta_1/\theta(V_2)] + \dots + [\Delta_I/\theta(V_I)]$ . Por ejemplo para el modelo potencia Weibull descrito antes,

$$\varepsilon(t) = \frac{t_1 - 0}{\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^p} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^p} + \dots + \frac{t - t_{I-1}}{\left(\frac{V_0}{V_I}\right)^p}, \quad t_{I-1} \leq t \leq t_I.$$

**Ejemplo.** Nelson [7, 9], muestra datos de un aislante en una PVA bajo esfuerzo escalonado con cuatro patrones, la prueba fue hecha para estimar la distribución de vida del aislante a un esfuerzo de diseño constante de 400 volts/mil, donde el esfuerzo sobre una unidad es el voltaje dividido por su grosor. Supone la distribución Weibull, la relación que existe entre el parámetro de escala de la distribución y el esfuerzo, dada en (2.2), el parámetro de forma  $\beta$  constante y el modelo de daño acumulado

descrito antes. Los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de los parámetros del modelo son,  $\widehat{V}_0 = 1616.24323$ ,  $\widehat{p} = 19.94282$  y  $\widehat{\beta} = 0.75569$  los cuales fueron obtenidos numéricamente usando un algoritmo en S-PLUS con los datos originales proporcionados por el autor, ya que los mostrados en [7, 9] son incorrectos. También la variabilidad del modelo es verificada transformando la gráfica de los residuales en un papel de probabilidad Weibull. Recientemente Nelson (2002) realiza un análisis completo de los residuales para este ejemplo.

## 2.5. Daño acumulado para la relación de Arrhenius

El modelo de daño acumulado para la relación de Arrhenius se puede expresar en una forma simple y equivalente para dar  $F(t)$  para un modo de falla, para éste modelo, la fracción de fallas después de cualquier esfuerzo escalonado es independiente de el orden de los escalones como sigue. Supóngase que el escalón  $i$  está al nivel de esfuerzo  $T_i$  con la correspondiente vida característica  $\eta_i(T_i) = A \exp \left[ \frac{E_a}{k_B T_i} \right]$  para el tiempo  $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ . Entonces se puede demostrar que la fracción de fallas al tiempo  $t$ ,  $t_{I-1} \leq t \leq t_I$  después del paso  $I$  es

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \{ \varepsilon(t) \}^\delta \right]; \quad (2.7)$$

aquí el *daño acumulado*  $\varepsilon(t)$  para el modo de falla es

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\Delta_1}{\eta_1} + \frac{\Delta_2}{\eta_2} + \dots + \frac{\Delta_{I-1}}{\eta_{I-1}} + \frac{t - t_{I-1}}{\eta_I} \\ &= \frac{t_1 - 0}{A \exp \left[ \frac{E_a}{k_B T_1} \right]} + \frac{t_2 - t_1}{A \exp \left[ \frac{E_a}{k_B T_2} \right]} + \dots + \frac{t_{I-1} - t_{I-2}}{A \exp \left[ \frac{E_a}{k_B T_{I-1}} \right]} + \frac{t - t_{I-1}}{A \exp \left[ \frac{E_a}{k_B T_I} \right]}, t_{I-1} \leq t \leq t_I. \end{aligned}$$

$\Delta_I$  puede ser sólo una fracción del tiempo planeado al paso  $I$ . Sin embargo, los valores de  $F(t)$  y  $\varepsilon(t)$  son los mismos a pesar del orden del paso  $I$ , cada uno con su correspondiente tiempo  $\Delta_i$  al nivel de esfuerzo  $T_i$ .



## Capítulo 3

# Planes Optimos, Modelo Log-lineal Exponencial

En este capítulo se consideran pruebas de vida acelerada con esfuerzo escalonado (PVAEE) usando sólo dos esfuerzos. El capítulo se divide en tres secciones, en la sección 3.1 se dan los preliminares para obtener las pruebas óptimas en las secciones subsecuentes, las secciones 3.2 y 3.3, presentan una prueba óptima simple bajo el modelo log-lineal exponencial sin censura y con censura en el segundo nivel de esfuerzo, respectivamente, finalmente la sección 3.4 muestra ejemplos relacionados con las secciones 3.2 y 3.3. El término *simple* es porque solo se usan dos niveles de esfuerzo.

### Notación

- $n$  — Tamaño total de la muestra
- $n_j$  — número de unidades que fallarán al esfuerzo  $x_j, j = 1, 2$

- $n_c$  – número de unidades censuradas
- $x_0, x_1, x_2$  – Esfuerzos transformados, de diseño, bajo y alto respectivamente
- $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  – vida media a los esfuerzos de diseño, bajo y alto
- $\beta_0, \beta_1$  – Parámetros de la función loglineal entre el esfuerzo y la vida media  $\theta$
- $\xi$  – Factor de extrapolación de  $x_1$  a  $x_0$  como un múltiplo del rango de prueba  
 $(x_2 - x_1)$ ,  $\xi = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} > 0$
- $\tau$  – Logitud del tiempo al esfuerzo bajo para una prueba con tiempo escalonado
- $\tau_1^*, \tau_2^*$  – Tiempos de prueba óptimos a los niveles  $x_1, x_2$  en una prueba con tiempo escalonado sin censura cuando se inicia con  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente
- $\tau^*$  – Tiempo de prueba óptimo en un prueba con tiempo escalonado con censura
- $T$  – Tiempo de censura
- $p_j$  – Proporción de unidades en cada uno de los esfuerzos  $j = 1, 2$
- $p_c$  – Proporción de unidades censuradas
- $p_1^*, p_2^*$  – Fracción óptima de unidades en prueba que fallarán al nivel de esfuerzo *bajo* para una prueba con fallas escalonadas, cuando se inicia con  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente

### 3.1. Preliminares

Para analizar datos de una PVAEE, uno necesita un modelo que relacione la distribución del tiempo de vida bajo esfuerzo escalonado a una bajo esfuerzo constante. Tal modelo es el modelo de daño acumulado, que se describió en la sección (2.3) del

capítulo 2. En este caso sólo se tienen dos esfuerzos, por lo que se emplearan dos pasos del modelo de daño acumulado, es decir, dos intervalos y en cada intervalo se supone que la prueba corre bajo esfuerzo constante, con la distribución del tiempo a la falla exponencial, donde la media  $\theta$  (o la vida característica) es una función log-lineal de un esfuerzo  $x$  (posiblemente transformado), esto es,

$$\ln[\theta(x)] = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \theta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x). \quad (3.1)$$

Donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son parámetros desconocidos que dependen de la naturaleza del producto y del método de prueba. Si  $x$  es el logaritmo del voltaje, entonces (3.1) es la ley de potencia inversa. Si  $x$  es el recíproco de la temperatura absoluta, entonces (3.1) es la relación de Arrhenius.

Por lo que la fracción de unidades que fallan al tiempo  $t$  bajo esfuerzo constante  $x$  es:

$$F(t, x) = 1 - \exp\left[\frac{-t}{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}\right], \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

El cuantil  $p$  de la distribución a un valor del esfuerzo  $x$  es

$$t_p = -\theta(x) \ln(1 - p).$$

De acuerdo con el modelo de daño acumulado, supóngase que al paso 1, el esfuerzo tiene el nivel  $x_1$  hasta el tiempo  $\tau$ , sea  $F(t)$  la función de distribución acumulada del tiempo a la falla al tiempo  $t$  por unidades a esfuerzo constante  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ . Entonces, la fracción acumulada de unidades que fallan en el paso 1 es

$$F(t) = F_1(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (3.3)$$

Por (3.2), para el paso 1, (3.3) es:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

### 28CAPÍTULO 3. PLANES OPTIMOS, MODELO LOG-LINEAL EXPONENCIAL

donde  $\theta_1 = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1)$ .

El paso 2, la función de distribución acumulada  $F_2(t)$  empieza a operar a un tiempo equivalente  $s$ , el cual podría producir la misma fracción de fallas acumuladas de la población que la función de distribución  $F_1(t)$  al tiempo  $\tau$ . Así,  $s$  es la solución de

$$F_2(s) = F_1(\tau). \quad (3.4)$$

La fracción de fallas acumuladas en el paso 2 al tiempo  $t$  es

$$F(t) = F_2(t - \tau + s), \quad t > \tau. \quad (3.5)$$

El tiempo equivalente  $s$  al nivel de esfuerzo  $x_2$  que produce una fracción de fallas  $F_1(\tau)$  al nivel  $x_1$ , esta dado por (3.4) como  $s = \tau(\theta_2/\theta_1)$ . De esta forma, para el paso 2, (3.5) resulta,

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \frac{\left[ t - \tau + \tau \left( \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \right]}{\theta_2} \right\} \quad t > \tau.$$

**Suposiciones básicas.** Para los planes óptimos que se describiran en este capítulo, se harán los siguientes supuestos

1. Una prueba solo usa dos niveles de esfuerzo,  $x_1$  y  $x_2$ . Tal prueba se llama *simple*.

Las unidades que no fallan al primer esfuerzo  $x_1$  fallarán al esfuerzo  $x_2$ .

2. Se pueden usar dos esfuerzos en prueba en el rango de prueba permitido del nivel bajo  $x_1$  al nivel alto  $x_2$ . Los niveles  $x_1$  y  $x_2$  están dados.

3. El esfuerzo de diseño especificado  $x_0$  esta por debajo de  $x_1$ .

Usualmente  $x_1$  se elige tan bajo como sea práctico y que la prueba finalice en el tiempo deseado, y  $x_2$  se elige tan alto como sea posible sujeto a la relación (3.1) aplazando el rango de  $x_2$  a  $x_0$ .

**Criterio de optimización.** Un plan óptimo proporciona una “mejor” estimación de cierta cantidad de interés. En este caso, minimiza la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud (EMV) de la vida media a un nivel de esfuerzo de diseño especificado.

## 3.2. Plan óptimo sin censura

### 3.2.1. Prueba óptima simple con tiempo escalonado

La prueba óptima simple con tiempo escalonado usa los esfuerzos extremos ( $x_1$  y  $x_2$ ) del rango de prueba permitido. Estos minimizan la varianza del EMV de la vida media al nivel de diseño. En la práctica,  $x_2$  no debe causar modos de falla diferentes al nivel de diseño, así el modelo será válido sobre el rango de la prueba y el nivel de diseño.  $x_2$  ( $x_1$ ) se elige tan alto (bajo) como sea posible para minimizar la varianza de la estimación de la vida media al nivel de diseño.

Para esta prueba se consideran dos casos, el primer caso es usando el nivel de esfuerzo bajo al inicio, como se hace tradicionalmente, y el segundo caso es usando al inicio de la prueba el nivel de esfuerzo alto, en ambos casos usando la distribución exponencial y el modelo de daño acumulado descrito antes.

**Primer caso**

*Planteamiento de la prueba.* Supóngase que se tienen  $n$  unidades al inicio de la prueba, es decir, al nivel  $x_1$  y trabajan hasta un tiempo  $\tau$ , también se supone que de 0 a  $\tau$  ocurren  $n_1$  fallas, por lo que  $n_2 = n - n_1$  pasan al nivel  $x_2$  y continúan en prueba hasta que todas fallan. Denotemos por  $t_i$ , los tiempos de falla que ocurren en la prueba.

Así, bajo el modelo de daño acumulado y las suposiciones dadas antes, la función de distribución acumulada del  $i$ -ésimo tiempo a la falla en una prueba bajo esfuerzo escalonado es,

$$F(t_i) = \begin{cases} F_1(t_i) = 1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\theta_1}\right), & 0 \leq t_i \leq \tau \\ F_2(t_i + s - \tau) = 1 - \exp\left[\frac{-(t_i + s - \tau)}{\theta_2}\right], & t_i > \tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

Donde  $s = \tau \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)$ , de esta forma

$$\begin{aligned} F_2(t_i + s - \tau) &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\theta_2} + \frac{s}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_2}\right)\right] \\ &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\theta_2} + \frac{\tau\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_2}\right)\right] \\ &= 1 - \exp\left[\frac{(t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}\right], \quad t_i > \tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

En consecuencia, la función de densidad es,

$$f(t_i) = \begin{cases} f_1(t_i) = \frac{1}{\theta_1} \exp\left(-\frac{t_i}{\theta_1}\right), & 0 \leq t_i \leq \tau \\ f_2(t_i) = \frac{1}{\theta_2} \exp\left[-\frac{(t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}\right], & t_i > \tau. \end{cases} \quad (3.8)$$

La función de log-verosimilitud para  $t_i$  es,

$$l_i(\theta_1, \theta_2) = \ln f(t_i) = \begin{cases} -\ln(\theta_1) - \frac{t_i}{\theta_1}, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ -\ln(\theta_2) - \frac{(t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}, & t_i > \tau. \end{cases} \quad (3.9)$$

La log-verosimilitud total es

$$l(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n l_i(\theta_1, \theta_2),$$

la cual es función del tiempo a la falla  $t_i$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\tau$ . Dado que ocurren  $n_1$  fallas en el nivel  $x_1$  y  $n_2$  fallas en el nivel  $x_2$ , entonces  $l(\theta_1, \theta_2)$  se escribe como,

$$\begin{aligned} l(\theta_1, \theta_2) &= -n_1 \ln(\theta_1) - \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_i}{\theta_1} - n_2 \ln(\theta_2) - \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \tau}{\theta_1} \\ &= -n_1 \ln(\theta_1) - \frac{1}{\theta_1} \left( \sum_{i=1}^{n_1} t_i + n_2 \tau \right) - n_2 \ln(\theta_2) - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n_2} (t_i - \tau) \\ &= -n_1 \ln(\theta_1) - \theta_1^{-1} U_1 - n_2 \ln(\theta_2) - \theta_2^{-1} U_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_i + n_2 \tau \quad (3.11)$$

y

$$U_2 = \sum_{i=1}^{n_2} (t_i - \tau). \quad (3.12)$$

$U_j$  es el tiempo total de prueba al esfuerzo  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Los EMV de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_j} = 0 \quad j = 1, 2,$$

con respecto a  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , los cuales estan dados por,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{U_1}{n_1} \quad (3.13)$$

y

$$\hat{\theta}_2 = \frac{U_2}{n_2}. \quad (3.14)$$

Las segundas derivadas parciales de (3.9) con respecto a cada uno de los parámetros, respectivamente son,

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1^2} - \frac{2t_i}{\theta_1^3}, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ -\frac{2\tau}{\theta_1^3}, & t_i > \tau, \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ \frac{1}{\theta_2^2} - \frac{2(t_i - \tau)}{\theta_2^3}, & t_i > \tau. \end{cases}$$

Mientras que la segunda derivada parcial mixta es,

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0.$$

Las esperanzas negativas de estas derivadas se calculan como sigue.

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] &= \int_0^\infty \left( -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right) f(t_i) dt_i \\ &= \int_0^\tau \left( \frac{2t_i}{\theta_1^3} - \frac{1}{\theta_1^2} \right) f(t_i) dt_i + \int_\tau^\infty \frac{2\tau}{\theta_1^3} f(t_i) dt_i \\ &= \frac{1}{\theta_1^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] &= \int_0^\infty \left( -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right) f(t_i) dt_i \\ &= \int_0^\tau 0 \cdot f(t_i) dt_i + \int_\tau^\infty \left( \frac{2(t_i - \tau)}{\theta_2^3} - \frac{1}{\theta_2^2} \right) f(t_i) dt_i \\ &= \frac{1}{\theta_2^2} \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \end{aligned}$$

y

$$E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0.$$

Estas esperanzas sumadas sobre las  $n$  unidades son los elementos de la matriz de información de Fisher, es decir,

$$F_{11} = \sum_{i=1}^n E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] = \frac{n}{\theta_1^2} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\tau}{\theta_1} \right) \right], \quad (3.15)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^n E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] = \frac{n}{\theta_2^2} \exp \left( - \frac{\tau}{\theta_1} \right) \quad (3.16)$$

y

$$F_{12} = F_{21} = \sum_{i=1}^n E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0. \quad (3.17)$$

La matriz de varianzas y covarianzas asintótica de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es la inversa de la matriz de información de Fisher, es decir,

$$V = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\theta}_1) & \text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \\ \text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \text{Var}(\hat{\theta}_2) \end{pmatrix} = F^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.15), (3.16) y (3.17) en (3.18) se tiene que

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{n \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\tau}{\theta_1} \right) \right]}, \quad (3.19)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{n \exp \left( - \frac{\tau}{\theta_1} \right)} \quad (3.20)$$

y

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0.$$

De acuerdo con (3.1), los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$  se pueden expresar en términos de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  como

$$\beta_0 = \frac{x_2 \ln \theta_1 - x_1 \ln \theta_2}{x_2 - x_1}$$

y

$$\beta_1 = \frac{\ln \theta_2 - \ln \theta_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo que a nivel de diseño,  $\ln \theta_0(x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$  toma la forma

$$\begin{aligned} \ln \theta_0(x_0) &= \left( \frac{x_2 \ln \theta_1 - x_1 \ln \theta_2}{x_2 - x_1} \right) + \left( \frac{\ln \theta_2 - \ln \theta_1}{x_2 - x_1} \right) x_0 \\ &= \left( \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \right) \ln \theta_1 + \left( \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \right) \ln \theta_2, \end{aligned}$$

y en términos del factor de extrapolación  $\xi$ ,

$$\ln \theta_0(x_0) = (\xi + 1) \ln \theta_1 - \xi \ln \theta_2.$$

Recordemos que el EMV de cualquier función  $g = g(\theta_1, \theta_2)$  de los parámetros es

$$\hat{g} = g(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

Usando el método delta, la varianza asintótica de  $\hat{g}$  es

$$\text{Var}(\hat{g}) = \left( \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \right)^2 \text{Var}(\hat{\theta}_1) + \left( \frac{\partial g}{\partial \theta_2} \right)^2 \text{Var}(\hat{\theta}_2) + 2 \left( \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial \theta_2} \right) \text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2), \quad (3.21)$$

aquí se supone que las derivadas parciales existen y son evaluadas en los verdaderos valores de los parámetros. Por ejemplo si  $g_k = \ln(\theta_k)$ , entonces  $\hat{g}_k = \ln(\hat{\theta}_k)$ , y por (3.21)

$$\text{Var}[\ln(\hat{\theta}_k)] = \left( \frac{1}{\theta_k} \right)^2 \text{Var}(\hat{\theta}_k).$$

Por lo anterior, el EMV de  $\ln \theta_0(x_0)$ , es:

$$\ln \hat{\theta}_0(x_0) = (\xi + 1) \ln \hat{\theta}_1 - \xi \ln \hat{\theta}_2 \quad (3.22)$$

o equivalentemente,

$$\hat{\theta}_0 = \frac{\hat{\theta}_1^{\xi+1}}{\hat{\theta}_2^\xi}. \quad (3.23)$$

Por (3.21) la varianza asintótica de (3.22) sustituyendo (3.19) y (3.20) es,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] &= \left[ (\xi + 1) \left( \frac{1}{\theta_1} \right) \right]^2 \left\{ \frac{\theta_1^2}{n \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \right]} \right\} \\ &+ \left[ -\xi \left( \frac{1}{\theta_2} \right) \right]^2 \left[ \frac{\theta_2^2}{n \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right)} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

haciendo algunas simplificaciones resulta

$$\begin{aligned} \text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] &= \frac{(\xi + 1)^2}{n \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \right]} + \frac{\xi^2}{n \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right)} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(\xi + 1)^2}{\left[ 1 - A(\tau) \right]} + \frac{\xi^2}{A(\tau)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $A(\tau) = \exp(-\tau/\theta_1)$ ,  $A(\tau)$  es la probabilidad de que una unidad falle mientras trabaja en el nivel de esfuerzo  $x_2$ , por lo tanto,  $1 - A(\tau)$  es la probabilidad de que una unidad falle mientras trabaja en el nivel de esfuerzo  $x_1$ .

Recordemos que para la prueba óptima con tiempo escalonado lo que se quiere es encontrar el  $\tau$  óptimo tal que  $\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]$  sea mínima, para ello derivando (3.25) con respecto a  $\tau$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]}{d\tau} &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{-(\xi + 1)^2 A(\tau)}{\theta_1 [1 - A(\tau)]^2} + \frac{\xi^2 A(\tau)}{\theta_1 A(\tau)^2} \right\} \\ &= \frac{A(\tau)}{n\theta_1} \left\{ \frac{-(\xi + 1)^2}{[1 - A(\tau)]^2} + \frac{\xi^2}{A(\tau)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

así,

$$\frac{d\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{-(\xi + 1)^2}{[1 - A(\tau)]^2} + \frac{\xi^2}{A(\tau)^2} \right] = 0,$$

o equivalentemente,

$$\xi^2 [1 - A(\tau)]^2 - (\xi + 1)^2 A(\tau)^2 = 0,$$

36CAPÍTULO 3. PLANES OPTIMOS, MODELO LOG-LINEAL EXPONENCIAL

y después de algunas simplificaciones se tiene

$$-(2\xi + 1)A(\tau)^2 - 2\xi^2 A(\tau) + \xi^2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en  $A(\tau)$ , se tienen las dos soluciones siguientes

$$A_1(\tau) = -\xi \quad \text{y} \quad A_2(\tau) = \frac{\xi}{1 + 2\xi},$$

como  $\xi > 0$ ,  $A_1(\tau)$  no tiene sentido, por lo que la solución a la ecuación cuadrática es  $A_2(\tau)$ , por lo tanto,

$$A(\tau) = \frac{\xi}{1 + 2\xi}$$

sustituyendo  $A(\tau)$  se tiene

$$\exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) = \frac{\xi}{1 + 2\xi},$$

de donde

$$\tau_1^* = -\theta_1 \ln\left(\frac{\xi}{1 + 2\xi}\right)$$

o equivalentemente

$$\tau_1^* = \theta_1 \ln\left(\frac{1 + 2\xi}{\xi}\right). \quad (3.27)$$

Así, la varianza óptima al nivel de diseño ( $\text{Var}^*[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]$ ) se obtiene sustituyendo (3.27) en (3.25), de esta forma,

$$\begin{aligned} \text{Var}^*(\ln \hat{\theta}_0(x_0)) &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(\xi + 1)^2}{[1 - A(\tau_1^*)]} + \frac{\xi^2}{A(\tau_1^*)} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(\xi + 1)^2}{\frac{1+\xi}{1+2\xi}} + \frac{\xi^2}{\frac{1+\xi}{1+2\xi}} \right\}. \end{aligned}$$

y simplificando se tiene

$$\text{Var}^*[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{1 + 2\xi}{n}. \quad (3.28)$$

**Segundo caso**

*Planteamiento de la prueba.* El planteamiento de la prueba es similar al primer caso, solo distinguiendo que al inicio de la prueba se somete el esfuerzo alto, supóngase que se tienen  $n$  unidades en prueba al inicio, es decir, al nivel  $x_2$ , y corren hasta un tiempo  $\tau$ , además supóngase que de 0 a  $\tau$  ocurren  $n_1$  fallas, por lo que  $n_2 = n - n_1$  pasan al nivel  $x_1$  y continúan en prueba hasta que todas fallan. Denotemos por  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  los tiempos de falla que ocurren en la prueba.

De esta forma, de acuerdo al modelo de daño acumulado, las expresiones (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) y (3.10), son equivalentes sustituyendo  $\theta_1$  por  $\theta_2$  y viceversa, lo mismo para los EMV de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dados en (3.13), (3.14), es decir, en este caso,

$$\hat{\theta}_2 = \frac{U_1}{n_1} \quad (3.29)$$

y

$$\hat{\theta}_1 = \frac{U_2}{n_2} \quad (3.30)$$

donde  $U_1$  y  $U_2$  están dados en (3.11), (3.12).

Las segundas derivadas parciales en este caso son

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2^2} - \frac{t_i}{\theta_2^3}, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ -\frac{\tau}{\theta_2^3}, & t_i > \tau \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ \frac{1}{\theta_1^2} - \frac{2(t_i - \tau)}{\theta_1^3}, & t_i > \tau \end{cases}$$

mientras que

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0.$$

38CAPÍTULO 3. PLANES OPTIMOS, MODELO LOG-LINEAL EXPONENCIAL

Las esperanzas negativas de estas derivadas son,

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] &= \int_0^\infty \left( -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right) f(t_i) dt_i \\ &= \frac{1}{\theta_2^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] &= \int_0^\infty \left( -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right) f(t_i) dt_i \\ &= \frac{1}{\theta_1^2} \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_2} \right) \end{aligned}$$

y

$$E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0. \quad (3.31)$$

Por lo que sumadas sobre las  $n$  unidades forman los elementos de la matriz de información de Fisher, es decir,

$$F_{11} = \sum_{i=1}^n E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] = \frac{n}{\theta_2^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_2} \right) \right], \quad (3.32)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^n E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] = \frac{n}{\theta_1^2} \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_2} \right) \quad (3.33)$$

y

$$F_{12} = F_{21} = \sum_{i=1}^n E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0. \quad (3.34)$$

Con (3.32), (3.33) y (3.34) uno puede escribir la matriz de información de Fisher, y al invertirla obtener la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$ , así, después de algunas simplificaciones se tiene que,

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{n \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_2} \right) \right]}, \quad (3.35)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{n \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_2} \right)} \quad (3.36)$$

y

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0.$$

El factor de extrapolación  $\xi$  se define para el caso en el que  $x_1 < x_2$  que es el caso de la prueba, como en éste caso  $x_2$  se aplica primero, definamos

$$\Psi = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_2}$$

donde  $\Psi = -(\xi + 1)$ . Al igual que en el primer caso, el EMV de  $\ln \theta_0(x_0)$  empezando la prueba con el nivel alto ( $x_2$ ), está dado en términos de  $\xi$  por (3.22). En términos de  $\Psi$  se tiene

$$\ln \hat{\theta}_0(x_0) = (\Psi + 1) \ln \hat{\theta}_2 - \Psi \ln \hat{\theta}_1. \quad (3.37)$$

Nuevamente, por el método delta la varianza asintótica de (3.37), usando (3.35) y (3.36) después de algunas simplificaciones es,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] &= \frac{(\Psi + 1)^2}{n \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_2}\right) \right]} + \frac{\Psi^2}{n \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(\Psi + 1)^2}{[1 - B(\tau)]} + \frac{\Psi^2}{B(\tau)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde  $B(\tau) = \exp(-\tau/\theta_2)$ .

Si se deriva (3.38) con respecto a  $\tau$  y se iguala a cero para obtener el tiempo óptimo en el cual la prueba estará en el primer nivel de esfuerzo, comenzando con  $x_2$ , después de algunas simplificaciones se tiene que resolver la siguiente ecuación cuadrática

$$-(2\Psi + 1)B(\tau)^2 - 2\Psi^2 B(\tau) + \Psi^2 = 0$$

en  $B(\tau)$ . Resolviendo, se tienen las siguientes soluciones

$$B_1(\tau) = -\Psi \quad \text{y} \quad B_2(\tau) = \frac{\Psi}{1 + 2\Psi}$$

tomando como solución  $B_2(\tau)$ , se tiene

$$B(\tau) = \frac{\Psi}{1 + 2\Psi},$$

sustituyendo  $B(\tau)$  resulta

$$\tau_2^* = -\theta_2 \ln \left( \frac{\Psi}{1 + 2\Psi} \right)$$

o equivalentemente

$$\tau_2^* = \theta_2 \ln \left( \frac{1 + 2\Psi}{\Psi} \right). \quad (3.39)$$

Como  $\Psi = -(1 + \xi)$ ,  $\tau_2^*$  en términos de  $\xi$  se escribe como

$$\tau_2^* = \theta_2 \ln \left( \frac{1 + 2\xi}{1 + \xi} \right) \quad (3.40)$$

Así la varianza óptima al nivel de diseño ( $\text{Var}^*[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]$ ) se obtiene sustituyendo (3.40) en (3.38), y después de algunas simplificaciones resulta

$$\text{Var}^*[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{(1 + 2\xi)}{n} \quad (3.41)$$

Nótese que (3.41) coincide con (3.28), lo que implica que en la prueba sin importar si se inicia con el nivel alto o bajo de esfuerzo, la varianza mínima al nivel de diseño es la misma.

### Propiedades de los tiempos óptimos

Los tiempos óptimos para los dos casos, cuando se inicia la prueba con el nivel de esfuerzo bajo y alto dados por (3.27) y (3.40) respectivamente, tiene las siguientes propiedades [7].

1. Si  $\xi \rightarrow 0$ , es decir, no hay extrapolación,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\tau_1^*}{\theta_1} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \ln \left( \frac{2\xi + 1}{\xi} \right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( 2 + \frac{1}{\xi} \right) = \infty,$$

y

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\tau_2^*}{\theta_2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \ln \left( \frac{2\xi + 1}{\xi + 1} \right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \ln(2\xi + 1) - \lim_{\xi \rightarrow 0} \ln(\xi + 1) = 0.$$

En particular cuando el nivel de esfuerzo bajo es igual al nivel de diseño, las unidades solo estan en prueba en el nivel de esfuerzo bajo.

2. Si  $\xi \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\tau_1^*}{\theta_1} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{2\xi + 1}{\xi} \right) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (2) - \lim_{\xi \rightarrow \infty} (1/\xi) = \ln 2,$$

y

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\tau_2^*}{\theta_2} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{2\xi + 1}{\xi + 1} \right) = \ln 2.$$

Un  $\xi$  grande corresponde a un plan con una extrapolación grande comparada con el rango de prueba, entonces la mitad de las unidades fallarán en cada uno de los esfuerzos.

Los tiempos óptimos  $\tau_1^*$  y  $\tau_2^*$  estan dados en términos de los parámetros desconocidos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , ésto es típico de los planes óptimos, tales planes son llamados localmente óptimos.

La Figura 3.1 muestra  $X = \frac{\tau_1^*}{\theta_1}$  y  $Y = \frac{\tau_2^*}{\theta_2}$  como función de  $\xi$ .

### 3.2.2. Prueba óptima simple con fallas escalonadas

En este tipo de prueba se consideran dos casos, el primero es usar el nivel de esfuerzo bajo al inicio de la prueba y el segundo es usar al inicio de la prueba el nivel de esfuerzo alto.

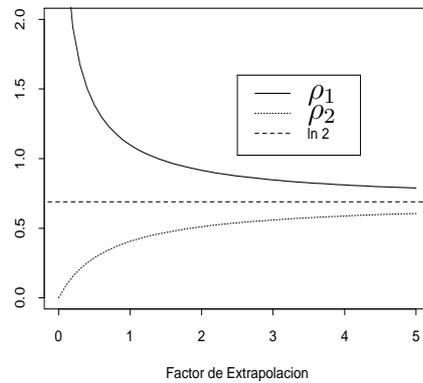


Figura 3.1: Tiempos óptimos versus factor de extrapolación.

### Primer caso

*Planteamiento de la prueba.* Supóngase que se tiene  $n$  unidades al inicio de la prueba, es decir, al nivel  $x_1$  pero el esfuerzo se cambia al tiempo  $\tau$  cuando exactamente  $n_1$  fallas se observan mientras la prueba esta en éste nivel de esfuerzo, y el proceso de la prueba continúa hasta que las  $n_2 = n - n_1$  unidades fallan, entonces  $\tau$  es una variable aleatoria. Sean  $p_j = n_j/n$ ,  $j = 1, 2$ , las proporciones de unidades en cada uno de los niveles de esfuerzo,  $p_1 + p_2 = 1$ , La prueba óptima para fallas escalonadas en éste caso, determina la proporción de unidades  $p_1^*$  que fallarán al nivel  $x_1$  antes de cambiar al nivel  $x_2$ , tal que se minimice la varianza del EMV de la vida media a nivel de diseño. Denotemos por  $t_i$ , los tiempos de falla que ocurren en la prueba.

La función de log-verosimilitud de las observaciones  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , es la misma que la dada en la sección (3.2.1) ecuación (3.9), pero como aquí se considera a  $\tau$  como variable aleatoria, sea éste denotado por  $t_{1n_1}$ .

Después de algunos cálculos similares a la sección (3.2.1), las componentes de la

matriz de información de Fisher son,

$$F_{11} = \sum_{i=1}^{n_1} E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] = \frac{n_1}{\theta_1^2}, \quad (3.42)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^{n_2} E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] = \frac{n_2}{\theta_2^2} \quad (3.43)$$

y

$$F_{12} = F_{21} = E \left[ - \frac{\partial^2 l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0. \quad (3.44)$$

Por tanto, en términos de  $p_j = n_j/n$ ,  $j = 1, 2$ , la matriz de información de Fisher es,

$$F = n \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{p_2}{\theta_2^2} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1-p_1}{\theta_2^2} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  es,

$$V = F^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\theta_1^2}{p_1} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2^2}{1-p_1} \end{pmatrix}.$$

De aquí,

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{np_1}, \quad (3.45)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{n(1-p_1)} \quad (3.46)$$

y

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0.$$

Al igual que en la prueba óptima simple con tiempo escalonado sección (3.2.1), primer caso, el EMV de  $\ln \theta_0(x_0)$ , esta dada en términos del factor de extrapolación  $\xi$ , por

$$\ln \hat{\theta}_0(x_0) = (\xi + 1) \ln \hat{\theta}_1 - \xi \ln \hat{\theta}_2 \quad (3.47)$$

Usando el método delta, (3.45) y (3.46), después de algunas simplificaciones la varianza asintótica de (3.47) es,

$$\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{1}{n} \left[ \frac{(\xi + 1)^2}{p_1} + \frac{\xi^2}{1 - p_1} \right]. \quad (3.48)$$

Para este plan se necesita determinar  $p_1$ , tal que (3.48) sea mínima, así, derivando con respecto a  $p_1$

$$\frac{d\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]}{dp_1} = \frac{1}{n} \left[ \frac{-(\xi + 1)^2}{p_1^2} + \frac{\xi^2}{(1 - p_1)^2} \right], \quad (3.49)$$

igualando a cero implica resolver

$$\xi^2 p_1^2 - (\xi + 1)^2 (1 - p_1)^2 = 0,$$

y después de algunas simplificaciones

$$-(1 + 2\xi)p_1^2 + 2(\xi + 1)^2 p_1 - (\xi + 1)^2 = 0,$$

de donde se tiene las siguientes dos soluciones

$$p_{11} = \frac{\xi + 1}{2\xi + 1}$$

y

$$p_{12} = \xi + 1,$$

por lo que se toma la primera solución, ya que  $\xi > 0$  y  $0 < p_1 < 1$ , por lo tanto,  $\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]$  se minimiza en,

$$p_1^* = \frac{\xi + 1}{2\xi + 1}. \quad (3.50)$$

La varianza mínima para esta prueba se obtiene sustituyendo (3.50) en (3.48) así,

$$\text{Var}^*[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{(2\xi + 1)^2}{n}. \quad (3.51)$$

**Segundo caso**

En éste caso empezando con el segundo nivel de esfuerzo, la prueba óptima para fallas escalonadas especifica la fracción de unidades  $p_2^*$  que deben fallar al nivel  $x_2$  antes de cambiar al nivel  $x_1$ .

Al igual que en el primer caso, la prueba consiste en poner  $n$  unidades al nivel  $x_2$  (que en este caso es con el que se inicia la prueba), hasta obtener exactamente  $n_1$  fallas y después probar las  $n_2 = n - n_1$  unidades que no han fallado al nivel  $x_1$ . También en este caso, lo que se quiere es determinar el  $p_2$  óptimo tal que se minimice la varianza del EMV de la vida media a nivel de diseño.

Empezando con el segundo nivel, el planteamiento de la prueba es similar al primer caso y se tiene exactamente las mismas expresiones, sustituyendo  $\theta_1$  por  $\theta_2$  y  $p_1$  por  $p_2$ , en este caso,

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{np_2}, \quad (3.52)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{n(1-p_2)} \quad (3.53)$$

y

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0.$$

Como en éste caso se inicia la prueba con el segundo nivel de esfuerzo definamos el factor de extrapolación como sigue,

$$\Psi = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_2}$$

donde  $\Psi = -(\xi + 1)$ . Al igual que el primer caso, el EMV de  $\ln \theta_0(x_0)$  esta dado en términos de  $\xi$  por (3.47) y en términos de  $\Psi$  por

$$\ln \hat{\theta}_0(x_0) = (\Psi + 1) \ln \hat{\theta}_2 - \Psi \ln \hat{\theta}_1. \quad (3.54)$$

Nuevamente, usando el método delta, (3.52) y (3.53), la varianza asintótica de (3.54) después de algunas simplificaciones es

$$\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{1}{n} \left[ \frac{(\Psi + 1)^2}{p_2} + \frac{\Psi^2}{1 - p_2} \right]. \quad (3.55)$$

La cual se minimiza en

$$p_2^{**} = \frac{\Psi + 1}{2\Psi + 1}.$$

Por lo tanto, la prueba óptima simple con fallas escalonadas iniciando con  $x_2$  y cambiando de éste a  $x_1$  cuando la fracción restante de la muestra fallará al nivel bajo de esfuerzo, es

$$p_2^* = 1 - p_2^{**} = 1 - \frac{\Psi + 1}{2\Psi + 1},$$

sustituyendo  $\Psi = -(\xi + 1)$  para tener  $p_2^*$  en términos de  $\xi$  se tiene que,

$$p_2^* = 1 - \frac{(-(\xi + 1)) + 1}{2(-(\xi + 1)) + 1} = \frac{-2\xi - 1 + \xi}{-2\xi - 1} = \frac{-\xi - 1}{-2\xi - 1}.$$

Por lo tanto

$$p_2^* = \frac{\xi + 1}{2\xi + 1}. \quad (3.56)$$

Las ecuaciones (3.50) y (3.56), muestran que  $p_1^* = p_2^*$ , esto es, la fracción de fallas al nivel de esfuerzo bajo es la misma si la prueba se inicia con el nivel bajo o alto de esfuerzo. Denotemos por  $p = p_1^* = p_2^*$ , así  $p$ , la proporción óptima de fallas especificada al nivel bajo de esfuerzo tiene las siguientes propiedades [7],

1. Si  $\xi \rightarrow 0$ , es decir, no hay extrapolación,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} p = 1,$$

esto es, cuando el nivel bajo de esfuerzo es igual al nivel de diseño, ( $\xi = 0$ ), todas las unidades solo son probadas al nivel de esfuerzo bajo.

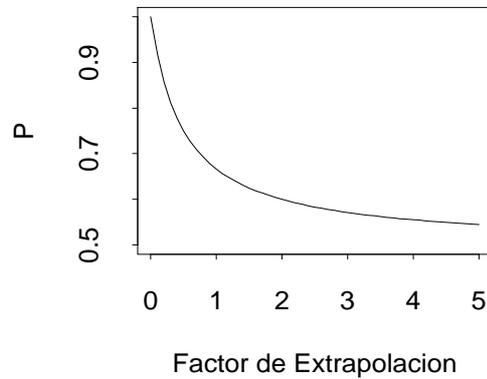


Figura 3.2: Proporción óptima al nivel de esfuerzo bajo versus factor de extrapolación.

2. Si  $\xi \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} p = \frac{1}{2},$$

esto es, la mitad de las unidades fallaran en cada nivel de esfuerzo cuando el nivel de diseño esta lejos del rango de prueba.

La Figura 3.2 muestra  $p = p_1^* = p_2^*$  como función del factor de extrapolación.

### 3.3. Plan óptimo con censura

#### 3.3.1. Prueba óptima simple con tiempo escalonado

Es esta sección se considera una PVAEE simple, pero con un tiempo de censura en el segundo nivel de esfuerzo, la distribución exponencial y el modelo de daño acumulado.

Las suposiciones para ésta prueba son las dadas en la sección (3.1) y el criterio de optimización es el mismo.

### 48CAPÍTULO 3. PLANES OPTIMOS, MODELO LOG-LINEAL EXPONENCIAL

En esta prueba sólo se considera el caso en el que al inicio de la prueba se usa el nivel de esfuerzo bajo.

*Planteamiento de la prueba.* Al igual que antes, supóngase que se tiene  $n$  unidades al inicio de la prueba, es decir, al nivel  $x_1$  y trabajan hasta un tiempo  $\tau$ , también se supone que de 0 a  $\tau$  ocurren  $n_1$  fallas, por lo que  $n_2$  pasan al nivel  $x_2$  y la prueba continúa hasta que todas las unidades fallan o hasta un tiempo de censura  $T$  fijo, suponiendo que  $n_c$  unidades son censuradas. Denotemos por  $t_i$ , los tiempos de falla que ocurren en la prueba.

De las suposiciones del modelo de daño acumulado y la distribución exponencial, la función de distribución acumulada del  $i$ -ésimo tiempo a la falla en una prueba bajo esfuerzo escalonado es,

$$F(t_i) = \begin{cases} F_1(t_i) = 1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\theta_1}\right), & 0 \leq t_i \leq \tau \\ F_2(t_i + s - \tau) = 1 - \exp\left[-\frac{(t_i + s - \tau)}{\theta_2}\right], & \tau < t_i \leq T. \end{cases} \quad (3.57)$$

Donde  $s = \tau(\theta_2/\theta_1)$ , así,

$$F_2(t_i + s - \tau) = 1 - \exp\left[-\frac{(t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}\right], \quad \tau < t_i \leq T. \quad (3.58)$$

De aquí, la función de densidad es,

$$f(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} \exp\left(-\frac{t_i}{\theta_1}\right), & 0 \leq t_i \leq \tau \\ \frac{1}{\theta_2} \exp\left[-\frac{(t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}\right], & \tau < t_i \leq T. \end{cases} \quad (3.59)$$

La función de log-verosimilitud para  $t_i$  se escribe considerando que ésta puede fallar en cualquiera de los dos niveles de esfuerzo o estar censurada al tiempo  $T$ , así,

ésta es,

$$l_i(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} -\ln(\theta_1) - \frac{t_i}{\theta_1}, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ -\ln(\theta_2) - \frac{(t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}, & \tau < t_i \leq T \\ -\frac{(T - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}, & n_c > T. \end{cases} \quad (3.60)$$

La log-verosimilitud total es

$$l(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n l_i(\theta_1, \theta_2),$$

la cual es función del tiempo a la falla  $t_i$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\tau$ , donde  $n = n_1 + n_2 + n_c$ .

Dado que ocurren  $n_1$  fallas en el nivel  $x_1$ ,  $n_2$  fallas en el nivel  $x_2$  y  $n_c$  unidades censuradas, entonces  $l(\theta_1, \theta_2)$  después de algunas simplificaciones es,

$$\begin{aligned} l(\theta_1, \theta_2) &= -n_1 \ln(\theta_1) - \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_i}{\theta_1} - n_2 \ln(\theta_2) - \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (t_i - \tau)}{\theta_2} - \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \tau}{\theta_1} \\ &\quad - \frac{\sum_{i=1}^{n_c} \tau}{\theta_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n_c} (T - \tau)}{\theta_2} \\ &= -n_1 \ln(\theta_1) - n_2 \ln(\theta_2) - \theta_1^{-1} U_1 - \theta_2^{-1} U_2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_i + (n_2 + n_c)\tau \quad (3.62)$$

y

$$U_2 = \sum_{i=1}^{n_2} (t_i - \tau) + n_c(T - \tau). \quad (3.63)$$

$U_j$  es el tiempo total de prueba al esfuerzo  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_j} = 0 \quad j = 1, 2,$$

con respecto a  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , se tiene que

$$\hat{\theta}_1 = \frac{U_1}{n_1} \quad (3.64)$$

y

$$\hat{\theta}_2 = \frac{U_2}{n_2}, \quad (3.65)$$

son los EMV para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente.

Ahora las segundas derivadas de (3.60) con respecto a cada uno de los parámetros, respectivamente son,

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1^2} - \frac{2t_i}{\theta_1^3}, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ -\frac{2\tau}{\theta_1^3}, & \tau < t_i \leq T \\ -\frac{2\tau}{\theta_1^3}, & n_c > T, \end{cases} \quad (3.66)$$

y

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t_i \leq \tau \\ \frac{1}{\theta_2^2} - \frac{2(t_i - \tau)}{\theta_2^3}, & \tau < t_i \leq T \\ -\frac{2(T - \tau)}{\theta_2^3}, & n_c > T. \end{cases} \quad (3.67)$$

Mientras que la segunda derivada parcial mixta es

$$\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0.$$

Las esperanzas negativas de estas derivadas son,

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] &= \int_0^\infty \left( -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right) f(t_i) dt_i \\ &= \int_0^\tau \left( \frac{2t_i}{\theta_1^3} - \frac{1}{\theta_1^2} \right) f(t_i) dt_i + \int_\tau^T \frac{2\tau}{\theta_1^3} f(t_i) dt_i \\ &\quad + \int_T^\infty \frac{2\tau}{\theta_1^3} f(t_i) dt_i \\ &= \frac{1}{\theta_1^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] &= \int_0^\infty \left( -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right) f(t_i) dt_i \\
&= \int_0^\tau 0 \cdot f(t_i) dt_i + \int_\tau^T \left( \frac{2(t_i - \tau)}{\theta_2^3} - \frac{1}{\theta_2^2} \right) f(t_i) dt_i \\
&\quad + \int_T^\infty \left( \frac{2(T - \tau)}{\theta_2^3} \right) f(t_i) dt_i \\
&= \frac{1}{\theta_2^2} \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) + \frac{1}{\theta_2^2} \exp \left[ -\frac{(T - \tau)}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1} \right] \\
&= \frac{1}{\theta_2^2} \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{(T - \tau)}{\theta_2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

y

$$E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0.$$

Las cuales sumadas sobre las  $n$  unidades son los elementos de la matriz de información de Fisher, es decir,

$$F_{11} = \sum_{i=1}^n E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] = \frac{n}{\theta_1^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \right], \quad (3.68)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^n E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] = \frac{n}{\theta_2^2} \exp \left( -\frac{\tau}{\theta_1} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{(T - \tau)}{\theta_2} \right] \right\} \quad (3.69)$$

y

$$F_{12} = F_{21} = \sum_{i=1}^n E \left[ -\frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0. \quad (3.70)$$

Con (3.68), (3.69) y (3.70), uno puede escribir la matriz de información de Fisher, que al invertirla se obtiene la matriz de varianzas y covarianzas de  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$ , resultando que,

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{nE_1(\tau)}, \quad (3.71)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{nE_2(\tau)} \quad (3.72)$$

y

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0,$$

donde

$$E_1(\tau) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) \quad (3.73)$$

y

$$E_2(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(T-\tau)}{\theta_2}\right] \right\}. \quad (3.74)$$

$E_j(\tau)$  es la probabilidad que una unidad falle mientras esta en prueba al esfuerzo  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ .

El EMV de  $\ln \theta_0(x_0)$  es el dado en (3.22), usando el método delta, (3.71) y (3.72), la varianza asintótica de (3.22) para este caso, después de algunas simplificaciones es,

$$\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{(\xi + 1)^2}{nE_1(\tau)} + \frac{\xi^2}{nE_2(\tau)}. \quad (3.75)$$

Así, derivando con respecto de  $\tau$  se tiene,

$$\frac{d\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]}{d\tau} = -\frac{(1 + \xi)^2 E_1'(\tau)}{E_1^2(\tau)} - \frac{\xi^2 E_2'(\tau)}{E_2^2(\tau)},$$

donde

$$E_1'(\tau) = \frac{dE_1(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\theta_1}[1 - E_1(\tau)],$$

$$E_2'(\tau) = \frac{dE_2(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\theta_2}[1 - E_1(\tau) - E_2(\tau)] - \frac{1}{\theta_1}E_2(\tau),$$

sustituyendo igualando a cero, después de algunas simplificaciones se tiene,

$$\left[\frac{E_1(\tau)}{E_2(\tau)}\right]^2 \frac{E_2(\tau) + \frac{\theta_1}{\theta_2}(1 - E_1(\tau) - E_2(\tau))}{1 - E_1(\tau)} = \left(\frac{1 + \xi}{\xi}\right)^2. \quad (3.76)$$

De donde se tiene que el tiempo de prueba óptimo ( $\tau^*$ ) para éste tipo de prueba es la única solución de (3.76) (ver [3]).  $\tau^*$  tiene las siguientes propiedades,

1.  $\tau^*$  crece en  $\theta_1$  dados  $\theta_2$ ,  $\xi$  y  $T$ .
2.  $\tau^*$  crece en  $T$  dados  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\xi$ .
3.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \tau^* = \theta_1 \ln \left( \frac{1+2\xi}{\xi} \right)$ , el cual coincide con el resultado de Miller y Nelson (1983).

### 3.3.2. Prueba óptima simple con fallas escalonadas

*Planteamiento de la prueba.*

Supóngase que las unidades son probadas exactamente como se describió en la sección (3.3.1), pero el esfuerzo se cambia al tiempo  $\tau$  cuando exactamente  $n_1$  fallas se observan mientras la prueba esta al esfuerzo  $x_1$ , también supóngase que el proceso de la prueba termina al tiempo  $T$  cuando exactamente  $n_2$  fallas se observan al esfuerzo  $x_2$  y las unidades restantes  $n_c = n - n_1 - n_2$  son censuradas, entonces  $\tau$  y  $T$  son variables aleatorias. Sean  $p_j = n_j/n$ ,  $j = 1, 2$ , las proporciones de unidades en cada uno de los niveles de esfuerzo y  $p_c = n_c/n$  la proporción de unidades censuradas, en este caso,  $p_c$  se especifica y se considera el problema de determinar  $p_1$ , la proporción de unidades que fallarán al esfuerzo  $x_1$ , tal que se minimize la varianza del EMV de la vida media a nivel de diseño. Sean  $t_i$  los tiempos a la falla observados en la prueba.

La función de log-verosimilitud de las observaciones  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , es la misma que la dada en la sección (3.3.1) ecuación (3.60), pero como aquí se consideran a  $\tau$  y  $T$  como variables aleatorias, sean éstos denotados por  $t_{1n_1}$  y  $t_{2n_2}$ , respectivamente.

Después de algunos calculos similares a la sección (3.3.1), las componentes de la matriz de información de Fisher son,

$$F_{11} = \sum_{i=1}^{n_1} E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \right] = \frac{n_1}{\theta_1^2}, \quad (3.77)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^{n_2} E \left[ - \frac{\partial^2 l_i(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] = \frac{n_2}{\theta_2^2} \quad (3.78)$$

y

$$F_{12} = F_{21} = E \left[ - \frac{\partial^2 l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = 0. \quad (3.79)$$

Aquí, el problema es determinar el  $p_1 = n_1/n$  óptimo dado que  $p_c = n_c/n$  se especifica, donde  $n_c = n - n_1 - n_2$  o equivalentemente  $n_2 = n - n_1 - n_c$ , por tanto dividiendo por  $n$  se tiene que  $p_2 = 1 - p_c - p_1$ . De esta forma la matriz de información de Fisher es,

$$F = \begin{pmatrix} \frac{np_1}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{np_2}{\theta_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{n(1 - p_c - p_1)}{\theta_2^2} \end{pmatrix}.$$

Tomando la inversa a la matriz anterior, se obtiene la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$ , teniendo que,

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{np_1}, \quad (3.80)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{n(1 - p_c - p_1)} \quad (3.81)$$

y

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0.$$

Nuevamente, el EMV de  $\ln \theta_0(x_0)$  es el dado en (3.22), por lo tanto usando el método delta, (3.80) y (3.81) la varianza asintótica de (3.22) para este caso, después de algunas simplificaciones esta dada por,

$$\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)] = \frac{(\xi + 1)^2}{np_1} + \frac{\xi^2}{n(1 - p_c - p_1)}. \quad (3.82)$$

De donde

$$\frac{d\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]}{dp_1} = 0$$

implica resolver

$$p_1^2 \xi^2 - (1 - p_c - p_1)^2 (\xi + 1)^2 = 0,$$

y después de algunas simplificaciones se tiene la siguiente ecuación cuadrática en ' $p_1$

$$-(2\xi + 1)p_1^2 + 2(\xi + 1)^2(1 - p_c)p_1 - (\xi + 1)^2(1 - p_c)^2 = 0,$$

resolviendola se tiene las siguientes dos soluciones,

$$p_{11} = (1 - p_c)(\xi + 1)$$

y

$$p_{12} = \frac{(1 - p_c)(\xi + 1)}{2\xi + 1},$$

de donde se toma la segunda solución ya que  $\xi > 0$  y  $0 < P_1 < 1 - p_c$ , por lo tanto,  $\text{Var}[\ln \hat{\theta}_0(x_0)]$  se minimiza en,

$$p_1^* = \frac{(1 - p_c)(\xi + 1)}{2\xi + 1}. \quad (3.83)$$

La ecuación (3.83) tiene las siguientes propiedades [3].

1. Si  $\xi \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} p_1^* = 1 - p_c,$$

2. Si  $\xi$  está dado, (3.83) representa la ecuación de una recta con pendiente negativa, por tanto,  $p_1^*$  decrece en  $p_c$  para  $\xi$  dado.

3. Si  $\xi \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} p_1^* = \frac{1 - p_c}{2},$$

esto es, especificando  $p_c$ , la mitad de las unides restantes fallaran en cada nivel de esfuerzo cuando el nivel de diseño esta lejos del rango de prueba.

4. Si no existe censura, es decir,  $p_c = 0$ ,

$$p_1^* = \frac{\xi + 1}{2\xi + 1},$$

el cual coincide con el resultado de Miller y Nelson (1983).

### 3.4. Ejemplos

**Ejemplo 1.** Nelson (1990) reporta una prueba de vida acelerada con 76 unidades para el desgaste de cierto aislante a esfuerzo constante, acelerando la falla con voltaje. Los esfuerzos usados fueron  $V_1 = 26$  kV y  $V_2 = 38$  kV, bajo y alto respectivamente, siendo el esfuerzo de diseño de  $V_0 = 20$  kV.

El modelo de vida acelerada ajustado fue el potencia-exponencial y los EMV de los parámetros fueron

$$\hat{\beta}_0 = 64.92, \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_1 = -17.70$$

Por lo que los EMV de la vida media al nivel de esfuerzo alto y bajo son, respectivamente,

$$\hat{\theta}_2 = 1.67 \text{ min} \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_1 = 1380 \text{ min.}$$

Al nivel de diseño es,

$$\hat{\theta}_0 = 144000 \text{ min}$$

Los esfuerzos transformados estan dados por

$$x_j = \ln(V_j), \quad j = 0, 1, 2.$$

Por lo que,

$$x_0 = 2.99, \quad x_1 = 3.25 \quad \text{y} \quad x_2 = 3.63.$$

De aquí se obtiene el factor de extrapolación dado por

$$\xi = 0.6914.$$

Con esta información, la prueba óptima simple empezando con el esfuerzo bajo al inicio de la prueba, el tiempo óptimo a ese esfuerzo de acuerdo con (3.27) es,

$$\tau_1^* = 1707 \text{ min.}$$

Y empezando con el nivel de esfuerzo alto, el tiempo óptimo a ese esfuerzo de acuerdo con (3.40) es,

$$\tau_2^* = 0.57 \text{ min.}$$

**Ejemplo 2.** Siguiendo con el ejemplo 1, para determinar la prueba óptima simple con fallas escalonadas, empezando la prueba con el nivel de esfuerzo bajo de acuerdo con (3.50) es,

$$p_1^* = 0.710 \text{ fallas,}$$

si hay 76 unidades en prueba, entonces,  $0.710 * 76 \approx 54$  unidades deben fallar al nivel de esfuerzo bajo.

Empezando con el nivel de esfuerzo alto, la proporción de fallas a este nivel de esfuerzo es la misma si se empieza con el nivel de esfuerzo bajo, ecuaciones (3.50) y (3.56), como lo muestra la Figura 3.2, así, aproximadamente 54 unidades deben fallar a este nivel de esfuerzo.

La varianza mínima es la misma para la prueba óptima simple con tiempo escalonado y fallas escalonadas, ecuaciones (3.28), (3.41) y (3.51). Así, por ejemplo empezando la prueba con el nivel de esfuerzo bajo y usando 76 unidades, la varianza mínima es,

$$\text{Var}^* \ln \hat{\theta}_0(x_0) = 0.075.$$

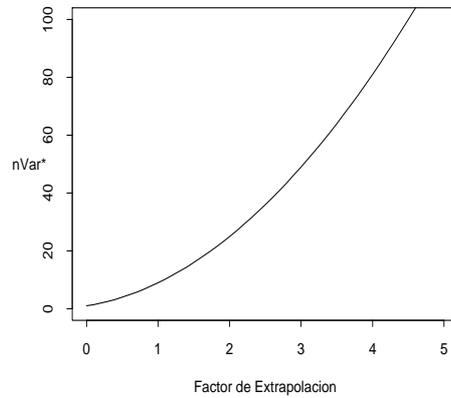


Figura 3.3: Varianza óptima,  $Var^* \ln \hat{\theta}_0(x_0)$  versus factor de extrapolación.

La Figura 3.3 muestra la varianza óptima versus factor de extrapolación.

**Ejemplo 3.** Continuando con el ejemplo 1, supóngase que se tiene un tiempo de censura de 2000 min. Así, con la información previa, el tiempo óptimo al nivel de esfuerzo bajo, de acuerdo con (3.76) es,

$$\tau^* = 1708.667 \text{ min,}$$

y la varianza óptima es  $Var^* \ln \hat{\theta}_0(x_0) = 0.0745$

La Figura 3.4 muestra el efecto de la varianza para este ejemplo, mostrando que el tiempo óptimo al nivel de esfuerzo bajo es aproximadamente 1708 min y la varianza óptima es aproximadamente 0.075.

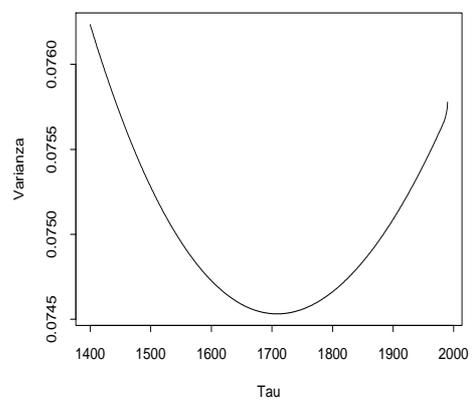


Figura 3.4: Efecto de la varianza



# Capítulo 4

## Planes Optimos, Modelo Log-lineal Weibull

Es este capítulo se consideran PVAEE usando sólo dos esfuerzos, la distribución Weibull y el modelo de daño acumulado. La sección 4.1 presenta el caso sin censura en el segundo nivel de esfuerzo y con el parámetro de forma conocido. En la sección 4.2 se desarrolla el plan óptimo con un tiempo de censura en el segundo nivel de esfuerzo, finalizando el capítulo con la sección 4.3, en la que se ejemplifica el plan obtenido.

### 4.1. Plan óptimo sin censura

En esta sección sólo se presenta la prueba óptima simple con tiempo escalonado, sin censura en el segundo nivel de esfuerzo y con el parámetro de forma conocido ( $\delta \neq 1$ ).

Dado que  $\delta \neq 1$  es conocido, usaremos la relación que existe entre la distribución exponencial y Weibull, la cual es como sigue, si  $T_i$  es una observación aleatoria de una

distribución Weibull con parámetro  $\eta_j$  al nivel de esfuerzo  $x_j$  y  $\delta$  conocido, entonces  $Y = T_i^\delta$  es una observación aleatoria de una distribución exponencial con media  $\theta_j = \eta_j^\delta$ . De esta forma se usará este hecho para reparametrizar el modelo Weibull, así, se tiene que,  $T_i^\delta \sim \exp(\theta_j = \eta_j^\delta)$ , por lo tanto, con esto y los resultados del capítulo 3 sección 3.2.1 se tiene que el tiempo óptimo de permanencia en el primer nivel de esfuerzo es

$$\tau^* = \left[ \theta_1 \ln \left( \frac{1 + 2\xi}{\xi} \right) \right]^{1/\delta}, \quad (4.1)$$

con  $\delta$  conocido y  $\delta \neq 1$ .

Nótese que si  $\delta = 1$ , (4.1) coincide con (3.27).  $\tau^{*\delta}/\theta_1$ , cumple con las propiedades estudiadas en el capítulo 3 página 40.

## 4.2. Plan óptimo con censura

En esta sección se desarrolla el plan óptimo para el modelo log-lineal Weibull con tiempo escalonado, con un tiempo de censura en el segundo nivel de esfuerzo y parámetro de forma desconocido.

### Notación

- $n$  – Tamaño total de la muestra  
 $x_0, x_1, x_2$  – Esfuerzos transformados, de diseño, bajo y alto respectivamente  
 $\beta_0, \beta_1$  – Parámetros de la función loglineal entre el esfuerzo y la vida característica  $\eta$   
 $\gamma_0, \gamma_1$  – Parámetros del modelo reparametrizado  
 $\xi$  – Factor de extrapolación  
 $\tau$  – Longitud de tiempo al esfuerzo bajo  
 $\tau^*$  – Tiempo de prueba óptimo al nivel  $x_1$   
 $T$  – Tiempo de Censura

#### Suposiciones básicas.

1. Sólo se usan dos niveles de esfuerzo  $x_1$  y  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), los cuales están dados.
2. Para cualquier nivel de esfuerzo, la distribución del tiempo a la falla es Weibull con parámetro de escala  $\eta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$  y parámetro de forma  $\beta$  constante y es independiente del esfuerzo, es decir, los log-tiempos a la falla siguen una distribución de valores extremos (VE) para mínimos con parámetro de localización  $\mu(x) = \ln \eta(x) = \beta_0 + \beta_1 x$  y parámetro de escala  $\sigma = 1/\beta$
3. El modelo de daño acumulado es válido.

**Criterio de optimización.** El criterio de optimización usado aquí es minimizar la varianza asintótica del EMV del cuantil  $P$  de la distribución a un nivel de diseño especificado.

#### Planteamiento de la prueba.

Supóngase que se tiene  $n$  unidades al inicio de la prueba y trabajan hasta un tiempo  $\tau$  si la unidad no ha fallado, se cambia al esfuerzo  $x_2$  y la prueba continua hasta que todas las unidades fallan o hasta un tiempo de censura especificado.

### **Modelo reparametrizado.**

Es conveniente reparametrizar el modelo, definamos el factor de extrapolación como,

$$\xi_j = \frac{x_j - x_2}{x_0 - x_2}, \quad j = 0, 1, 2,$$

donde  $x_0$  y  $x_2$  son los niveles de esfuerzo de diseño y alto, respectivamente. Nótese que para el nivel de esfuerzo alto  $x = x_2$ ,  $\xi_2 = 0$ ; y para el nivel de diseño  $x = x_0$ ,  $\xi_0 = 1$ . Entonces, el parámetro de localización  $\mu(x)$  de la distribución de VE puede escribirse en términos de  $\xi$  como

$$\mu(\xi_j) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_j, \quad j = 0, 1, 2. \quad (4.2)$$

donde los nuevos parámetros  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  se relacionan con  $\beta_0$  y  $\beta_1$  por

$$\gamma_0 = \beta_0 + \beta_1 x_2$$

y

$$\gamma_1 = \beta_1(x_0 - x_2) = \mu(x_0) - \mu(x_2).$$

El EMV del cuantil  $P$  de la distribución es

$$\hat{y}_P = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \xi + u_P \hat{\sigma},$$

por lo que a nivel de diseño  $x_0$ , es decir, cuando  $\xi_0 = 1$ , es

$$\hat{y}_P = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 + u_P \hat{\sigma},$$

donde  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  son los EMV y  $u_P = \ln[-\ln(1-P)]$  es el cuantil  $P$  de la distribución de VE estándar. La varianza asintótica de éste estimador es el valor de la forma cuadrática

$$\text{Var}(\hat{y}_P) = [1, 1, u_P]\Sigma[1, 1, u_P]', \quad (4.3)$$

donde la  $'$  denota el vector transpuesto y  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\sigma$ , por lo que se necesita dicha matriz para minimizar la función objetivo.

Ahora procedamos a escribir la función de verosimilitud para este problema. Así, por el supuesto 2, (4.2) y las suposiciones del modelo de daño acumulado, la función de distribución acumulada de una unidad en prueba bajo esfuerzo escalonado es,

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( \frac{\ln t - \mu(\xi_1)}{\sigma} \right) \right\}, & -\infty < \ln t \leq \ln \tau \\ F_2(t+s-\tau) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( \frac{\ln(t+s-\tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} \right) \right\}, & \ln \tau < \ln t \leq \ln T. \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $s$  es la solución de  $F_2(s) = F_1(\tau)$ , es decir,

$$s = \tau \exp[-\mu(\xi_1)] \exp[\mu(\xi_2)] = \tau \exp[\beta_1(\xi_2 - \xi_1)],$$

así,

$$F_2(t+s-\tau) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( \frac{\ln(t + \tau \exp[\beta_1(\xi_2 - \xi_1)] - \tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} \right) \right\}, \ln \tau < \ln t \leq \ln T.$$

En consecuencia, la función de densidad es,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = \frac{1}{\sigma t} \exp \left[ \frac{\ln t - \mu(\xi_1)}{\sigma} - \exp \left( \frac{\ln t - \mu(\xi_1)}{\sigma} \right) \right] \\ \quad = \frac{1}{\sigma t} \phi_{VE}(z_1(t)), & -\infty \leq \ln t \leq \ln \tau \\ f_2(t) = \frac{1}{\sigma(t+s-\tau)} \exp \left[ \frac{\ln(t+s-\tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} - \exp \left( \frac{\ln(t+s-\tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} \right) \right] \\ \quad = \frac{1}{\sigma(t+s-\tau)} \phi_{VE}(z_2(t)), & \ln \tau < \ln t \leq \ln T, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde  $z_1(t) = [\ln t - \mu(\xi_1)]/\sigma$  y  $z_2(t) = [\ln(t + s - \tau) - \mu(\xi_2)]/\sigma$ .

Sean

$$I_1 = I_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{si } t \notin [0, \tau]. \end{cases}$$

$$I_2 = I_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in (\tau, T] \\ 0, & \text{si } t \notin (\tau, T] \end{cases}$$

$$I_3 = I_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > T \\ 0, & \text{si o.c.} \end{cases}$$

Con esto la función de log-verosimilitud para una observación es

$$l = l(\alpha_1, \beta_1, \sigma) = I_1 \ln \left[ \frac{1}{\sigma t} \phi_{VE}(z_1(t)) \right] + I_2 \ln \left[ \frac{1}{\sigma(t + s - \tau)} \phi_{VE}(z_2(t)) \right] + I_3 \ln [1 - \Phi_{VE}(z_2(T))] \quad (4.6)$$

donde,  $\Phi_{VE}(\cdot)$  es la función de distribución acumulada de valores extremos estándar y  $z_2(T) = [\ln(T + s - \tau) - \mu(\xi_2)]/\sigma$ .

Sustituyendo las cantidades de interés, después de algunas simplificaciones se tiene

$$l = l(\alpha_1, \beta_1, \sigma) = I_1 [-\ln \sigma - \ln t + z_1(t) - e^{z_1(t)}] + I_2 [-\ln \sigma - \ln(t + s - \tau) + z_2(t) - e^{z_2(t)}] + I_3 [-e^{z_2(T)}]. \quad (4.7)$$

Supóngase que a la  $i$ -ésima observación  $t_i$  le corresponde el valor  $\xi_{ji}$ ,  $j = 1, 2$  y la correspondiente función de log-verosimilitud es  $l_i$ . Entonces la log-verosimilitud  $l_0$  para las  $n$  observaciones independientes es

$$l_0 = \sum_{i=1}^n l_i$$

la cual es función de  $t_i$ ,  $T$ ,  $\xi_{ji}$  y de los parámetros  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$ .

Antes de calcular las primeras derivadas de (4.7) con respecto a cada uno de los parámetros del modelo, notemos lo siguiente,

$$\frac{\partial z_1(t)}{\partial \gamma_0} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\partial z_1(t)}{\partial \gamma_1} = -\frac{\xi_1}{\sigma}, \quad \frac{\partial z_1(t)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} z_1(t),$$

$$\frac{\partial z_2(t)}{\partial \gamma_0} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\partial z_2(t)}{\partial \gamma_1} = \frac{g(t)}{\sigma} - \frac{\xi_2}{\sigma}, \quad \frac{\partial z_2(t)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} z_2(t),$$

$$\frac{\partial z_2(T)}{\partial \gamma_0} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\partial z_2(T)}{\partial \gamma_1} = \frac{g(T)}{\sigma} - \frac{\xi_2}{\sigma}, \quad \frac{\partial z_2(T)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} z_2(T),$$

donde

$$g(y) = \frac{\tau(\xi_2 - \xi_1) \exp[\beta_1(\xi_2 - \xi_1)]}{y + s - \tau}.$$

Por tanto, para una sola observación, las primeras tres derivadas de la función log-verosimilitud para cada uno de los parámetros, después de algunas simplificaciones son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \gamma_0} &= \frac{1}{\sigma} [I_1(e^{z_1(t)} - 1) + I_2(e^{z_2(t)} - 1) + I_3 e^{z_2(T)}], \\ \frac{\partial l}{\partial \gamma_1} &= \frac{1}{\sigma} [I_1 \xi_1 (e^{z_1(t)} - 1) + I_2 [-\sigma g(t) + (g(t) - \xi_2)(1 - e^{z_2(t)})] - I_3 e^{z_2(T)} (g(T) - \xi_2)], \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma} [I_1 \{z_1(t)(e^{z_1(t)} - 1) - 1\} + I_2 \{z_2(t)(e^{z_2(t)} - 1) - 1\} + I_3 z_2(T) e^{z_2(T)}]. \end{aligned}$$

Estas tres expresiones, cuando se suman sobre todas las unidades en prueba, se igualan a cero, se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen los EMV de los parámetros.

Y las seis segundas derivadas parciales son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^2 I_i e^{z_i(t)} + I_3 e^{z_2(T)} \right], \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \{ I_1 \xi_1^2 e^{z_1(t)} + I_2 [g'(t) \{ \sigma^2 - \sigma(1 - e^{z_2(t)}) \} + (g(t) - \xi_2)^2 e^{z_2(t)}] \} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \{ I_3 e^{z_2(T)} [\sigma g'(T) + (g(T) - \xi_2)^2] \} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \sigma} - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^2 \{ I_i (z_i^2(t) e^{z_i(t)} + z_i(t) (e^{z_i(t)} - 1)) \} + I_3 \{ z_2^2(T) e^{z_2(T)} + z_2(T) e^{z_2(T)} \} \right] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \gamma_1} &= -\frac{1}{\sigma^2} [ I_1 \xi_1 e^{z_1(t)} + I_2 e^{z_2(t)} (\xi_2 - g(t)) + I_3 e^{z_2(T)} (\xi_2 - g(T)) ] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^2 I_i z_i(t) e^{z_i(t)} + I_3 z_2(T) e^{z_2(T)} \right] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1 \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} - \frac{1}{\sigma^2} [ I_1 \xi_1 z_1(t) e^{z_1(t)} + I_2 \{ \sigma g(t) + (\xi_2 - g(t)) z_2(t) e^{z_2(t)} \} ] + \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} I_3 z_2(T) e^{z_2(T)} (\xi_2 - g(T)) \end{aligned}$$

donde

$$g'(t) = \frac{dg(t)}{d\gamma_1}$$

Estas seis expresiones estan dadas en términos de las siguientes cantidades aleatorias

$$I_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$I_1 \xi_1^2 e^{z_1(t)},$$

$$I_1 \xi_1 z_1(t) e^{z_1(t)},$$

$$I_k z_k^m(t) e^{nz_k(t)}, \quad k = 1, 2, \quad m = 0, 1, 2, \quad n = 0, 1,$$

$$I_2 g'(t) e^{nz_2(t)}, \quad n = 0, 1,$$

$$I_2 (\xi_2 - g(t)) z_2(t) e^{z_2(t)},$$

$$I_2(\xi_2 - g(t))^2 e^{z_2(t)},$$

e

$$I_2 g(t).$$

Sean

$$c_1 = \frac{\ln \tau - \mu(\xi_1)}{\sigma}$$

$$c_2 = \frac{\ln(T + s - \tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma}$$

$$a = \tau(\xi_2 - \xi_1)^2 e^{-\mu(\xi_1) + \mu(\xi_2)}$$

$$b = \tau(\xi_2 - \xi_1)^2 e^{-\mu(\xi_1)}$$

$$a_1 = \tau(\xi_2 - \xi_1) e^{-\mu(\xi_1) + \mu(\xi_2)}$$

$$b_1 = \tau(\xi_2 - \xi_1) e^{-\mu(\xi_1)}$$

y

$$w_k = e^{z_k(t)}, \quad k = 1, 2.$$

Los elementos de la matriz de información de Fisher para una observación a  $\xi_{ji}$  se obtienen tomando las esperanzas negativas a las segundas derivadas de la función de log-verosimilitud, que después de algunos cálculos son,

$$\begin{aligned}
F_{11} &= E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{22} &= E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \xi_1^2 \int_0^{e^{c_1}} w_1 e^{-w_1} dw_1 + \int_{e^{c_1}}^{e^{c_2}} f_1(w_2) dw_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} e^{z_2(T)} [\sigma g'(T) + (g(T) - \xi_2)^2] \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{33} &= E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{e^{c_1}} f_2(w_1) dw_2 + \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} f_2(w_2) dw_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} z_2(T) e^{z_2(T)} (z_2(T) + 1) \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{12} &= E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \gamma_1}\right) = \frac{\xi_1}{\sigma^2} \int_0^{e^{c_1}} w_1 e^{-w_1} dw_1 + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} (\xi_2 w_2 + b_1 w_2^{-\sigma+1}) e^{w_2} dw_2 + e^{z_2(T)} (\xi_2 - g(T)) \Phi_{VE}(z_2(T)) \right\} \\
F_{13} &= E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{e^{c_1}} w_1 \ln w_1 e^{-w_1} dw_1 + \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} w_2 \ln w_2 e^{-w_2} dw_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} z_2(T) e^{z_2(T)} \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{23} &= E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1 \sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{e^{c_1}} w_1 \ln w_1 e^{-w_1} dw_1 + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} (b_1 w_2^{-\sigma} + \xi_2 w_2 \ln w_2 - b_1 \ln w_2 w_2^{-\sigma+1}) e^{-w_2} dw_2 + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} (\xi_2 - g(T)) z_2(T) e^{z_2(T)} \Phi_{VE}(z_2(T)),
\end{aligned}$$

donde

$$f_1(w_2) = [(\sigma^2 - \sigma) b w_2^{-\sigma} + \sigma b w_2^{-\sigma+1} + b^2 w_2^{-2\sigma+1} - 2\xi_1 b_1 w_2^{-\sigma+1} + \xi_2^2 w_2] e^{-w_2},$$

$$f_2(w_k) = (w_k \ln w_k + w_k + 1) \ln w_k e^{-w_k}, \quad k = 1, 2.$$

Aquí,  $F_{11}$  se calcula notando que

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \gamma_0} - \frac{1}{\sigma^2} (I_1 + I_2).$$

Y los demás elementos se calculan con cambios de variables adecuados y con la ayuda de que

$$E\left(\frac{\partial l}{\partial \gamma_0}\right) = 0, \quad E\left(\frac{\partial l}{\partial \gamma_1}\right) = 0, \quad E\left(\frac{\partial l}{\partial \sigma}\right) = 0,$$

$$E(I_1) = \Phi_{VE}(z_2(\tau)), \quad E(I_2) = \Phi_{VE}(z_2(T)) - \Phi_{VE}(z_2(\tau)), \quad E(I_3) = 1 - \bar{\Phi}_{VE}(z_2(T)),$$

donde  $\bar{\Phi}_{VE}(\cdot)$  es la función de confiabilidad de la distribución de VE estándar.

Con lo anterior, la matriz de información de Fisher para cualquier plan óptimo con una muestra de  $n$  observaciones independientes es

$$F = n \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

en donde  $F_{13} = F_{31}$ ,  $F_{12} = F_{21}$  y  $F_{23} = F_{32}$ , la cual es función de  $\tau$ ,  $T$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$ .

Por lo que la matriz de varianzas y covarianzas asintótica  $\Sigma$  de los EMV  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  es la inversa de la correspondiente matriz de información de Fisher, esto es,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\gamma}_0) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) \\ \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & \text{Var}(\hat{\gamma}_1) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) \\ \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) & \text{Var}(\hat{\sigma}) \end{pmatrix} = F^{-1}.$$

Por lo que la varianza asintótica del EMV del cuantil  $P$  de la distribución a nivel de diseño dada en (4.3) toma la forma,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{y}_P) &= \text{Var}(\hat{\gamma}_0) + \text{Var}(\hat{\gamma}_1) + u_P^2 \text{Var}(\hat{\sigma}) + 2\text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) + \\ &+ 2u_P \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) + 2u_P \text{Cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

la cual sigue siendo función de  $\tau$ ,  $T$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$ .

Nótese que la varianza mínima para una muestra de tamaño  $n$  tiene la forma

$$\text{Var}^*\hat{y}_P = \frac{\text{Var}(\hat{y}_P)}{n}$$

Para el plan óptimo considerado aquí, se quiere el  $\tau$  óptimo que minimiza (4.8) del cuantil  $\hat{y}_P$  estimado en condición de diseño, dados los valores de  $x_0, x_1, x_2, \gamma_0, \gamma_1, \sigma, T$  y  $P$ . La probabilidad  $P$  corresponde al cuantil  $y_P$  de interés, como sabemos, los valores de los parámetros del modelo de vida acelerada  $\gamma_0, \gamma_1$  y  $\sigma$  se suponen conocidos y los niveles de esfuerzo de diseño  $x_0$  y los de prueba  $x_1$  y  $x_2$  se fijan previamente, al igual que el tiempo de duración de la prueba.

Una vez que encontramos el valor de  $\tau$  que minimiza (4.8), hemos determinado el plan óptimo para el modelo log-lineal Weibull.

El código de las funciones programadas en S-plus determinan la varianza asintótica de (4.8), es decir, la varianza asintótica del cuantil  $\hat{y}_P$  en condición de diseño. La función se minimiza con respecto a  $\tau$  utilizando la función `nlmin` de S-plus.

En la siguiente sección, se presenta la determinación de un plan óptimo para una prueba acelerada con esfuerzos escalonados, utilizando la información generada por un estudio piloto de la confiabilidad de interruptores, en el laboratotio de confiabilidad del Centro de Tecnología y Desarrollo del consorcio MABE.

### 4.3. Ejemplo de determinación de un plan óptimo

Con el interés de obtener la información necesaria para determinar un plan óptimo para una PVA con esfuerzos escalonados, para un tipo de interruptores, se llevo a cabo una prueba piloto acelerando la falla con temperatura, iniciando con  $120^\circ C$  y terminando con  $200^\circ C$ , ya que el ingeniero de confiabilidad que realizó la prueba,

comentó que con esfuerzo mayor se podrían generar otros modos de falla diferentes al de diseño.

El esfuerzo de prueba se fué elevando en forma escalonado cada 10 Kciclos y posteriormente cada 5 Kciclos, la prueba terminó a los 125 Kciclos.

El modelo de vida acelerada ajustado fue el Arrhenius-Weibull, los parámetros estimados fueron,

$$\hat{\beta}_0 = 0.99, \quad \hat{\beta}_1 = 0.13 \quad \text{y} \quad \hat{\sigma} = 0.22.$$

De acuerdo a la experiencia del estudio piloto, elegimos los siguientes valores de las temperaturas para la determinación del plan óptimo,

$$T_0 = 80^\circ C, \quad T_1 = 145^\circ C \quad \text{y} \quad T_2 = 200^\circ C,$$

$T_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  son las temperaturas de diseño, primer y segundo nivel de esfuerzo, y una duración de la prueba de 200 Kciclos, es decir, el tiempo de censura es  $T = 200$ .

En el modelo de vida acelerada log-lineal requerimos el esfuerzo transformado dado por,

$$x_j = \frac{11605}{276.15 + T_j^\circ C}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Así, se tiene

$$x_0 = 32.86, \quad x_1 = 27.75 \quad \text{y} \quad x_2 = 24.53.$$

De  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  se obtienen los factores de extrapolación y los nuevos parámetros, dados por,

$$\xi_1 = 0.39 \quad \text{y} \quad \xi_2 = 0,$$

y

$$\hat{\gamma}_0 = 4.23 \quad \text{y} \quad \hat{\gamma}_1 = 1.12.$$

Esta información se introduce en la función Splus que nos dá la varianza del cuantil  $\hat{y}_P$  como función de  $\tau$ . Se minimiza  $\text{Var}(\hat{y}_P)$  para diferentes valores de  $P$ . En el Cuadro

Cuadro 4.1: Tiempos de Permanencia Optimos

$P$	$\tau^*$	$\text{Var}(\hat{y}_P)$	$p_1^*$	$p_2^*$	$p_c^*$
0.005	92.00	0.071	0.31	0.68	0.001
0.010	95.79	0.068	0.37	0.56	0.70
0.050	106.70	0.061	0.54	0.24	0.22
0.100	113.65	0.058	0.64	0.11	0.25
0.200	125.70	0.054	0.80	0.016	0.18

4.1 se exhibe el valor de  $\tau^*$  de  $\tau$  que minimiza la varianza y también exhibe  $\text{Var}(\hat{y}_P)$ , para diferentes valores de  $P$ .

Los resultados anteriores nos indican que por ejemplo, si se esta interesado en el cuantil 0.1, dada la información previa, las unidades en prueba estarían en el primer nivel de esfuerzo hasta aproximadamente 122 Kciclos para después cambiar al segundo nivel de esfuerzo y continuar la prueba hasta el tiempo de censura, es decir, hasta  $T = 200$ .

En el Cuadro 4.1 observamos que al aumentar el valor de  $P$ , el tiempo óptimo de permanencia de las unidades en prueba en el nivel de esfuerzo bajo aumenta, mientras que con la varianza del cuantil estimado ocurre lo contrario, vá disminuyendo.

En las Figura 4.1, se muestra la relación entre el tiempo de permanencia de las unidades en el nivel de esfuerzo bajo y la varianza del cuantil estimado. En todos los casos tenemos una función convexa donde el mínimo de va desplazando a la izquierda a menudo que crece la probabilidad  $P$  del cuantil  $\hat{y}_P$ .

En las Figuras 4.2 y 4.3 se exhibe la relación entre los valores de  $P$  y de  $\tau^*$  y entre  $P$  y la varianza mínima.

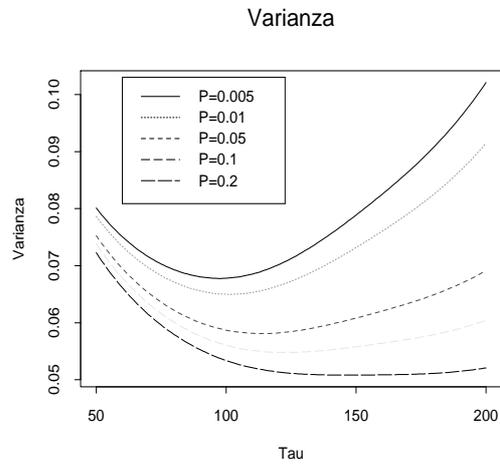


Figura 4.1: Efecto de la varianza para el diferentes valores de  $P$

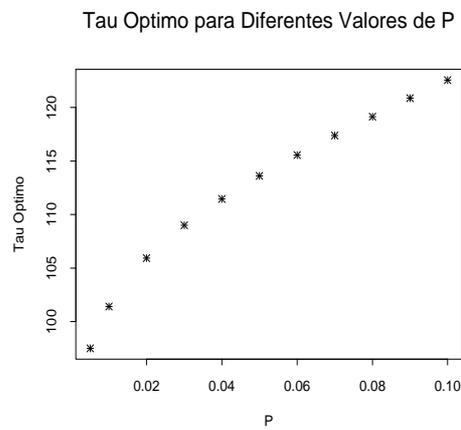


Figura 4.2:  $\tau^*$  para valores de  $P = 0.005, 0.01, \dots, 0.9, 0.1, 0.2$

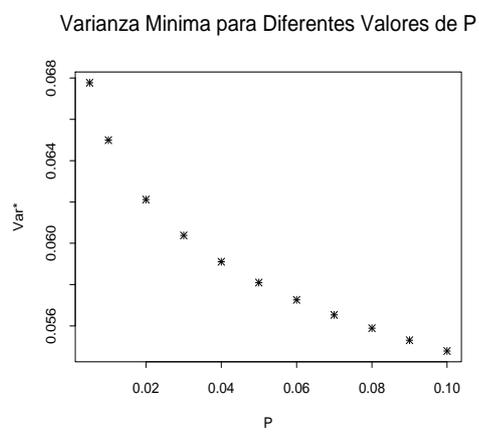


Figura 4.3:  $\text{Var}(\hat{y}_P)$ ,  $P = 0.005, 0.01, \dots, 0.9, 0.1, 0.2$

# Capítulo 5

## Conclusiones

Los planes óptimos aquí estudiados son adecuados en la medida en que se tenga una buena aproximación de los verdaderos valores de los parámetros del modelo, los cuales se pueden obtener a partir de información previa o de un estudio anterior, tal como se hizo en el ejemplo.

Se hace una revisión de los modelos de vida acelerada y de daño acumulado que son necesarios para modelar el tiempo de vida de unidades que se someten a una prueba acelerada con esfuerzos escalonados.

Se estudian planes óptimos para el modelo log-lineal exponencial con diferentes consideraciones. Inicialmente se supone que la prueba termina hasta que fallan todas las unidades y después se considera el caso en el que la prueba tiene una duración predeterminada.

Se desarrolla un plan óptimo para una prueba acelerada con esfuerzos escalonados, para el modelo log-lineal Weibull. En este caso se obtiene el tiempo óptimo de apli-

cación del esfuerzo bajo de prueba, para el caso en que la prueba tiene una duración  $T$ , predeterminada.

Apartir de una prueba piloto de vida acelerada con esfuerzos escalonados, se obtuvo la información necesaria para determinar el plan óptimo para una prueba acelerada con dos esfuerzos escalonados, siguiendo el procedimiento desarrollado en este trabajo.

Como consecuencia de este trabajo podemos plantear a futuro algunos estudios como son:

1. Determinar el efecto que tiene la incertidumbre de los valores de los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y  $\sigma$  del modelo de vida acelerada.
2. Determinar además del valor óptimo de  $\tau$ , también el valor óptimo del nivel  $x_1$  de esfuerzo bajo para la prueba.
3. Desarrollar planes óptimos para más de dos niveles de esfuerzos, para el modelo log-lineal Weibull y log-lineal lognormal.

# Bibliografía

- [1] Abdulla A. Alhadeed and Shei-Shein Yang. (2002), Optimum Simple Step-Stress Plan for Khamis-Higgins Model, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-51**, 212-215.
- [2] Bai D. S., Cha M. S., and Chung S. W. (1992), Optimum Simple Ramp-Test for Weibull Distribution and Type-I Censoring, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-41**, 407-412.
- [3] Bai D. S., Kim M. S., and Lee S. H. (1989), Optimum Simple Step-Stress Accelerated Life Test with Censoring, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-38**, 528-532.
- [4] Meeker, W. Q. (1984), A Comparison of Accelerated life Test Plans for Weibull and Lognormal Distribution and Type I Censoring, *Technometrics*, **Vol. 26**, 157-172.
- [5] Meeker, W. Q., and Escobar L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6] Meeker, W. Q., and Hahn G. J. (1985), *How to Plan an Accelerated Life Test - Some Practical Guidelines*, Vol 10 of the ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques.

- [7] Miller R., and Nelson, W. B. (1983), Optimum Simple Step-Stress Plans for Accelerated Life Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-29**, 103-108.
- [8] Nelson, W. B. and Kielpinski, T. (1980), Accelerated Life Testing - Step Stress Model and Data Analyses, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-29**, 103-108.
- [9] Nelson, W. B. (1990), *Accelerated Testing: Statistical Models Test Plans, and Data Analyses*, New York: John Wiley & Sons.
- [10] Nelson, W. B. (2002), Residuals and Their Analyses for Accelerated Life Test with Step and Varying Stress. Disponible por el autor, e-mail wnconsult@aol.com.
- [11] Nelson, W. B., and Meeker, W. (1978), Theory for Optimum Accelerated Censored Life Test for Weibull and Extreme Value Distributions, *Technometrics*, **20**, 171-177.