Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Variación de Espacios Moduli

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Edgar Iván Castañeda González

Directora de tesis:

Dra. Gloria Leticia Brambila Paz

Guanajuato, Gto., Julio 2017

Dedicatoria

Por ellos y para ellos, a mis padres:
Victoria González Gómez y José Joel Castañeda Andrade.

Con amor y cariño...

Agradecimientos

Durante la elaboración de este trabajo tuve la dicha de conocer a muchas personas que me ayudaron con sus comentarios y observaciones, me señalaron mis errores y que además de proporcionarme excelentes sugerencias, fueron pacientes e invirtieron de su valioso tiempo a este trabajo.

Quiero agradecer de manera especial a mi directora la **Dra. Gloria Leticia Brambila Paz** por aceptarme para realizar esta tesis de maestría bajo su dirección. El tiempo, la paciencia y las sugerencias que me brindó, no sólo durante todo el desarrollo de esta tesis, sino que también durante mis estudios de maestría fueron vitales para la culminación de este trabajo.

Quiero agradecer a mi sinodal el **Dr. Claudio Meneses Torres**, por el tiempo que dedicó en la revisión de este trabajo, por sus comentarios y observaciones tan acertadas que hicieron mejorar este trabajo.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi sinodal el **Dr. Hugo Torres López** excelente persona y gran amigo. Gracias por el tiempo que me brindó y por darse el espacio para atender todas mis dudas. Sus excelentes observaciones, comentarios y sugerencias fueron fundamentales para este trabajo. Gracias por los grandes consejos, que desde mis primeros semestres de maestría y hasta hoy, me has dado no sólo en matemáticas sino también en la vida.

Con cariño y eterno agradecimiento a mi familia y amigos por el apoyo que me brindan día a día, ellos son el pilar de cada uno de mis logros.

Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por brindarme un lugar cómodo para trabajar, los recursos como libros, computadora y apoyos económicos, los cuales me permitieron la realización de este trabajo.

A CONACyT por la beca otorgada la cual me permitió sustentar mis necesidades económicas durante mi estancia en el programa de maestría.

Índice general

Introducción

En matemáticas, uno de los problemas más importantes es el relacionado con la clasificación de objetos de cierta índole (geométrico, algebraico, topológico, etc.). El concepto de **Espacio Moduli** surge cuando se desea resolver problemas de clasificación de objetos geométrico-algebraicos, como son: polinomios, curvas algebraicas, superficies complejas, variedades, haces vectoriales, etc. módulo alguna relación de equivalencia. En 1857, Riemann introduce el concepto de espacio moduli [19, Sección 12], en su trabajo sobre superficies de Riemann de género g, donde demostró, que las clases de isomorfismos de superficies de Riemann de género g dependen de $3g - 3$ parámetros. En general un espacio moduli es una solución geométrica a estos problemas de clasificación. A lo largo de este trabajo $\mathbb{K}$ denota un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

Dados un conjunto de objetos geométrico-algebraicos y una relación de equivalencia entre estos objetos, se busca dar una estructura de variedad al conjunto de clases de equivalencia de los objetos, que además refleje la estructura y como varían los objetos que se consideran. La teoría de Espacios Moduli, tiene como objetivo solucionar este problema. Para ello se introducen los espacios moduli finos y los espacios moduli gruesos: ambos pueden ser considerados como una solución geométrica para un problema de clasificación de objetos geométrico-algebraicos, pero con distintas propiedades. Durante la construcción de los espacios moduli se pueden presentar ciertos problemas, que están relacionados directamente con los objetos que se desea clasificar, que ocasionan que no exista un espacio moduli, dentro de estos problemas se encuentran, el problema de automorfismos no triviales y el fenómeno del salto.

Una manera de construir espacios moduli es a través del uso de la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT por sus siglas en inglés), supongamos que los elementos del conjunto de objetos, denotado por $\mathcal{A}$, que deseamos clasificar están en correspondencia con los puntos de una variedad X, que podemos considerar como el espacio de parámetros para nuestros objetos, y que las clases de equivalencia de los objetos están determinadas por la acción de algún grupo G actuando en X. En esta situación, podemos estudiar el conjunto de órbitas de la acción, X/G, para solucionar el problema de clasificación. La teoría de invariantes geométricos tiene como objetivo encontrar condiciones en las que se pueda asegurar que el conjunto de órbitas X/G tiene estructura de variedad. En el caso en el que X es una variedad afín, si G es un grupo actuando en $X \subset \mathbb{A}^n$, dicha acción induce una acción de G en el anillo coordenado de X, denotado por $A[X]$, y mediante esta acción se introduce la $\mathbb{K}$-álgebra de invariantes de la acción, denotada por $A(X)^G$, la cual está formada por los polinomios $f \in A[X]$ que son invariantes bajo la acción del grupo, es decir, $f(x) = f(gx)$ para todo $g \in G$. Debido a la relación que existe entre variedad afines y las $\mathbb{K}$-álgebras, una de las primeras preguntas que surgen en la teoría de invariantes geométricos es, si $X/G = Spec(A(X)^G)$, ¿cuándo es $Spec(A(X)^G)$ una variedad afín?. El Teorema de Nagata (ver Teorema 2.4.5) nos dice que, si R es una álgebra finitamente generada y G es un grupo algebraico reductivo (como por ejemplo $G = GL(n, \mathbb{K})$, el grupo de matrices $n \times n$ invertibles) que actúa en R, entonces la álgebra de invariantes de esta acción es finitamente generada y en este caso se sigue que $X/G = Spec(A(X)^G)$, por lo que podemos dar una estructura de variedad a nuestro conjunto de clases de equivalencia.

Cuando $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva, no siempre es posible darle una estructura de variedad proyectiva al conjunto de clases de equivalencia de objetos, tal como en el caso afín. D. Mumford demuestra (ver Teorema 2.5.3) que, luego de descartar algunos puntos específicos de X (llamados puntos inestables), para el conjunto resultante, denotado por X^{ss} y llamado conjunto de puntos semiestables, el cociente X^{ss}/G posee estructura de variedad proyectiva. Encontrar los puntos semiestables es, en general, un problema complicado. Uno de los más grandes aportes dentro de la teoría de invariantes geométricos es el criterio de Hilbert-Mumford (ver Teorema 2.6.5) el cual permite determinar los puntos semiestables mediante los homomorfismos de grupos no triviales entre $\mathbb{K}^*$ y G (llamados subgrupos a un parámetro de G).

El considerar a X encajado de distintas formas dentro de un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ puede ocasionar que la estructura del cociente X/G cambie. Una manera de realizar distintos encajes es a través de las secciones globales de un haz lineal sobre X, en ocasiones es posible levantar la acción de G a dichos haces lineales, esta nueva acción es llamada linealización de la acción de G, y en estos casos podemos definir la semiestabilidad de un punto de X en base a las secciones globales invariantes de esta linealización.

M. Thaddeus es el primero en realizar un estudio del cambio en la estructura del cociente al considerar distintos haces lineales, en los que es posible levantar la acción, dichos haces son denominados haces G-linealizables. Esta nueva área de estudio se conoce como Teoría de Variación de GIT-cocientes (abreviada, por sus siglas en inglés, VGIT) y tiene como objetivo el describir el cambio en las estructuras de los GIT-cocientes. Los principales resultados en VGIT se deben a M. Thaddeus que, en su artículo *Geometric invariant theory and flips [21]*, construye el espacio de parámetros para este tipo de haces lineales, introduce la GIT-equivalencia en este espacio y describe como es el cambio de los GIT-cocientes al variar el haz lineal. Más sobre esta teoría puede encontrarse en el articulo de I. Dolgachev y Yi Hu, *Variation of geometric invariant theory quotients [3]*.

En los primeros dos capítulos de este trabajo presentamos los resultados más importantes de la Teoría de Espacios Moduli y de la Teoría de Invariantes Geométricos. En el tercer capítulo mencionamos los principales resultados en VGIT. Uno de los primeros teoremas nos dice que el número de GIT-clases de equivalencia es finito (ver Teorema 3.2.3), por lo que es posible dar una estratificación finita del espacio de parámetros. En este capítulo también presentamos los principales resultados referentes al estudio de esta estratificación y la descripción del cambio que se presenta en los GIT-cocientes, cuando pasamos de un estrado a otro, que son de los principales objetivos VGIT.

En el cuarto capítulo plantemos el problema moduli de parejas (H_1, H_2) donde H_i es una hipersuperficie de grado d_i en $\mathbb{P}^n$, a las que llamaremos parejas de la forma (d_1, d_2, n). Para este problema, el espacio de parámetros es una variedad proyectiva X, en la cual podemos hacer actuar al grupo especial lineal $G = SL(n+1, \mathbb{C})$. La finitud de GIT-clases de equivalencia (ver Teorema 3.2.3) se traduce a la existencia de un número finito de puntos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r$ donde $t_i \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$, para los cuales se tiene que: los GIT-cocientes, en este caso denotados por $M^{ss}(t, d_1, d_2, n)$, no cambian para todo $t \in (t_i, t_{i+1}),\ i = 0, .., r-1$. Mediante el uso del criterio de Hilbert-Mumford y la teoría de variación de GIT-cocientes, demostramos los siguientes resultados relacionados con los puntos $t = 0$ y $t = \infty$ (ver Teoremas 4.2.3 y 4.2.4):

Teorema 0.0.1. *Una pareja (H_1, H_2) de la forma (d_1, d_2, n) es 0-estable (resp. 0-semiestable) si y sólo si H_1 es estable (resp. semiestable).*

Teorema 0.0.2. *Una pareja (H_1, H_2) de la forma (d_1, d_2, n) es ∞-estable si y sólo si H_2 es estable.*

Se demostró el isomorfismo $M^{ss}(t, d_1, d_2, n) \cong M^{ss}(\frac{1}{t}, d_2, d_1, n)$ (ver Teoremas 4.2.5 y 4.2.6).

Teorema 0.0.3. *Una pareja (H_1, H_2) de la forma (d_1, d_2, n) es t-estable (resp. t-semiestable) si y sólo si (H_2, H_1) es $\frac{1}{t}$-estable (resp. $\frac{1}{t}$-semiestable).*

Teorema 0.0.4. *Se tiene que $M^{ss}(t, d_1, d_2, n) \cong M^{ss}(\frac{1}{t}, d_2, d_1, n)$.*

Se probaron los siguientes resultados relacionados con la inestabilidad, semiestabilidad y estabilidad de estas parejas (ver Teoremas 4.2.10, 4.2.11):

Teorema 0.0.5. *Sea (H_1, H_2) una pareja de la forma (d_1, d_2, n). Supongamos que H_1 es estable.*

a. Si H_2 es semiestable, entonces (H_1, H_2) es t-estable para $t \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$.

b. Si H_2 es inestable, existe $M > 0$ tal que (H_1, H_2) es t-inestable siempre que $t > M$.

Teorema 0.0.6. *Supongamos que H_1 es inestable y que H_2 es estable. Existe $M > 0$ tal que (H_1, H_2) es t-inestable siempre que $t < M$.*

Para el caso particular de parejas (H_1, H_2) de la forma $(d, 1, n)$ probamos los siguientes resultados (ver Proposición 4.2.14, Teorema 4.2.13, Corolario 4.2.2):

Teorema 0.0.7. *Si $t > \frac{d}{n}$, entonces la pareja (H_1, H_2) de la forma $(d, 1, n)$ es t-inestable.*

Proposición 0.0.8. *Toda pareja (H_1, H_2) de la forma $(1, 1, n)$ con $n > 1$ es t-inestable para todo $t \leq \frac{1}{n}$.*

Corolario 0.0.1. *No existe espacio moduli para las parejas (H_1, H_2) de la forma $(1, 1, n)$ con $n > 1$.*

CAPÍTULO 1

Espacios Moduli

Sin duda muchos de los problemas más relevantes en matemáticas están relacionados con la clasificación de objetos de cierto tipo (geométrico, algebraico, topológico, etc.). El concepto de espacio moduli se puede pensar como una solución geométrica para problemas de clasificación de objetos de índole geométrico-algebraico, como son: polinomios, curvas algebraicas, hipersuperficies, variedades algebraicas, haces vectoriales, etc.

En la sección 1.1 introducimos el concepto de problema moduli, así como algunos ejemplos de los mismos. En las secciones 1.2 y 1.3 definiremos un espacio moduli fino y un espacio moduli grueso, respectivamente, los cuales son solución a un problema moduli, pero con distintas características. La existencia de tales espacio depende de varios factores, por lo que no siempre es posible encontrarlos. En la sección 1.4 presentamos algunos de los inconvenientes que suelen aparecer en un problema moduli y que tienen como consecuencia la no existencia de un espacio moduli.

1.1. Problema Moduli

Supongamos que tenemos una colección de objetos de cierto tipo y una noción de cuándo dos objetos son equivalentes, nuestro objetivo es describir el conjunto de clases de equivalencia de estos objetos. Además de esta descripción, nos interesará saber cómo es que tales objetos varían, es decir, tener alguna noción de la geometría o cercanía entre los objetos. Para lograr esto se introduce el concepto de familia, el cual nos permitirá obtener este tipo de información.

Los principales ingredientes de un problema moduli son:

1. Objetos: $\mathcal{A}$, colección de objetos algebraicos-geométricos que nos gustaría clasificar.

2. Relación de equivalencia entre objetos: $\sim$, noción de cuándo dos objetos de $\mathcal{A}$ se consideran equivalentes.

3. Concepto de Familia: $\mathcal{F}$, cómo nuestros objetos se deforman o varían.

4. Noción de equivalencia entre familias: $\approx$, cuándo dos familias se consideran equivalentes.

Tanto la relación de equivalencia entre objetos como la de familias dependen directamente de los objetos que se desea clasificar, así como también de qué información se tiene de ellos y de la finalidad que estamos buscando con tal clasificación. Por ende, dichas relaciones de equivalencia deben ser tales que el problema no sea bastante complicado, pero a la vez no se trivialice. Para lograr lo antes mencionado, se consideran los objetos con ciertos invariantes (dimensión, grado, rango, clases características, etc.) Al considerar tales invariantes, podemos considerar al conjunto de objetos como la unión de subconjuntos de la forma $\mathcal{A}_{(\alpha_1,..,\alpha_r)}$ donde α_i representa los invariantes considerados. Luego el conjunto de clases de equivalencias de los objetos puede ser entendido mediante el estudio de cada $\mathcal{A}_{(\alpha_1,..\alpha_r)}/\sim$. Con esto en mente y para simplificar notación solo escribiremos $\mathcal{A}/\sim$.

Definición 1.1.1. Una **familia $\mathcal{F}$ parametrizada por una variedad** S es una colección de objetos $\mathcal{F}_s$, uno por cada $s \in S$.

Definición 1.1.2. Un **problema moduli** es una cuarteta $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$, donde:

i. $\mathcal{A}$ es una colección de objetos algebraicos-geométricos.

ii. $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$.

iii. $\mathcal{F}$ un concepto de familia de objetos de $\mathcal{A}$ parametrizada por una variedad S.

iv. $\approx$ es una relación de equivalencia entre familias.

de tal manera que la dupla $(\mathcal{F}, \approx)$ satisface las siguientes propiedades:

a. Una familia parametrizada por un punto, $S = \{pt\}$, es un objeto de $\mathcal{A}$ y en este caso, la relación de equivalencia entre familias debe de coincidir con la relación de equivalencia de $\mathcal{A}$, esto suele ser denotado por $\approx_{pt}=\sim$.

b. Para cada morfismo $\phi\colon S' \to S$ y familia $\mathcal{F}$ parametrizada por S, se tiene una familia $\phi^*\mathcal{F}$ parametrizada por S', que satisface:

$$\begin{aligned} (\phi \circ \phi')^*(\mathcal{F}) &= \phi'^* \circ \phi^*(\mathcal{F}). \\ Id_s^*(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}. \\ \mathcal{F} \approx \mathcal{F}' &\Rightarrow \phi^*\mathcal{F} \approx \phi^*\mathcal{F}'. \end{aligned}$$

Denotamos por $\mathcal{F}(S)$ al conjunto de clases de equivalencia de familias de objetos de $\mathcal{A}$ parametrizadas por S.

Las propiedades descritas en (b) de la definición anterior nos dicen que la familia $\phi^*\mathcal{F}$ cumple propiedades funtoriales y preserva la relación de equivalencia entre familias

$\approx$, a esta familia se le llama **familia inducida por el morfismo** ϕ. Además a partir de estas propiedades tenemos un funtor contravariante

$$Fam\colon Var \to Set,$$

de la categoría de variedades, denotada por Var, a la categoría de conjuntos, denotada por Set, que está definido, para cada variedad S, como $Fam(S) = \mathcal{F}(S)$ y a cada morfismo $\phi\colon S' \to S$ le asocia el morfismo

$$\begin{aligned} Fam(\phi)\colon Fam(S) &\to Fam(S') \\ \mathcal{F} &\mapsto \phi^*\mathcal{F}. \end{aligned}$$

El funtor Fam es llamado **funtor moduli**.

Ejemplo 1.1.3. Problema moduli de Hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$.

Dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$, homogéneo y de grado positivo d, una hipersuperficie de grado d es el conjunto:

$$H = V(f) := \{p \in \mathbb{P}^n | f(p) = 0\}.$$

i. $\mathcal{A} =$ colección de hipersuperficies H de grado d en $\mathbb{P}^n$.

ii. Si $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$, diremos que $H_1 \sim H_2$ si y sólo si existe un automorfismo $A \in Aut(\mathbb{P}^n)$ tal que $A(H_1) = H_2$.

iii. Dada una variedad S, una familia $\mathcal{F}$ parametrizada por S es un subconjunto cerrado F de $S \times \mathbb{P}^n$ tal que para cada $s \in S$:

$$F_s = F \cap (\{s\} \times \mathbb{P}^n),$$

es una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^n$.

iv. $F \approx F'$ si y sólo si existe un isomorfismo $h\colon F \to F'$.

1.2. Espacio Moduli Fino

Dado un problema moduli como en la definición 1.1.2 la solución al problema es dar una estructura de variedad al conjunto de clases de equivalencias $\mathcal{A}/\sim$ que refleje cómo varían los objetos.

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que es indispensable que la solución a nuestro problema debe reflejar cómo varían los objetos.

Ejemplo 1.2.1. Problema moduli de rectas en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen.

i. $\mathcal{A}$, colección de rectas, $l \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que pasan por el origen.

ii. Si $l_1, l_2 \in \mathcal{A}$, diremos que $l_1 \sim l_2$ si y sólo si $l_1 = l_2$.

iii. Sea S una variedad, una familia parametrizada por S es un subhaz lineal sobre S del haz lineal trivial $p\colon S\times\mathbb{R}^{n+1}\to S$.

iv. $\mathcal{F}\approx\mathcal{F}'$ si y sólo si $\mathcal{F}=\mathcal{F}'$.

En este caso, las condiciones requeridas en (b) de la definición 1.1.2, se siguen de las propiedades de haces vectoriales.

Consideremos el problema moduli para $n=1$.(ver [1, Página 1]).

Dada una recta L en el plano que pase por el origen podemos calcular el ángulo de ésta y el eje horizontal, al cual denotaremos por $\theta(L)$, observamos que los posibles valores de tal ángulo están dentro del intervalo $[0,\pi)$ y que para cada valor en este intervalo existe una única recta L que tiene como ángulo tal valor, es decir, la función $\phi\colon\mathcal{A}\to[0,\pi)$ definida como $\phi(L)=\theta(L)$ es una biyección. Por tanto, como conjuntos, tenemos solución a nuestro problema de clasificación: $\mathcal{A}/\sim$ está en correspondencia biunívoca con el intervalo $[0,\pi)$.

Como se han considerado rectas en el plano, es posible decir cuando una recta está cerca de otra, tal noción de cercanía debería de reflejarse en nuestra solución, sin embargo esto no sucede en el caso de considerar líneas cuyos ángulos sean cercanos a π, es decir, casi horizontales y por tanto cercanas al eje horizontal ($\theta=0$) y líneas cuyos ángulos sean casi 0, pues se tiene que las rectas son cercanas, pero los puntos en $[0,\pi)$ no. Una manera de solucionar este detalle es considerar el intervalo cerrado $[0,\pi]$ e identificar los puntos 0 y π, pues de tal manera, valores cercanos a π también son cercanos a 0, topológicamente se tiene que nuestra solución no es más que la línea real proyectiva $\mathbb{P}^1$.

Antes de dar la definición de espacio moduli fino mencionamos el Lema de Yoneda.

Definición 1.2.2. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $\mathcal{F},\mathcal{G}\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ dos funtores covariantes. Una **transformación natural** $\eta\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ asocia a cada elemento C de $\mathcal{C}$ un morfismo $\eta_C\colon\mathcal{F}(C)\to\mathcal{G}(C)$, y para cada morfismo $f\colon C\to C'$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\eta_C"] & \mathcal{F}(C') \arrow[d, "\eta_{C'}"] \\
\mathcal{G}(C) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"] & \mathcal{G}(C')
\end{tikzcd}$$

El conjunto de transformaciones naturales entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ será denotado por $\mathcal{TN}(\mathcal{F},\mathcal{G})$

Sean $\mathcal{C}$ una categoría, C un objeto de $\mathcal{C}$ y Set la categoría de conjuntos. El **funtor de puntos de** C, está definido por

$$\begin{aligned} h_C\colon \mathcal{C} &\to Set\\ S &\mapsto Hom(S,C),\end{aligned}$$

y para cualquier morfismo $f\colon S\to S'$ en $\mathcal{C}$ definimos el morfismo

$$\begin{aligned} h_C(f)\colon Hom(S',C) &\to Hom(S,C)\\ g &\mapsto g\circ f.\end{aligned}$$

Consideremos un funtor $\mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to Set$ y C un elemento en $\mathcal{C}$. Si $\tau\colon h_C \to \mathcal{G}$ es una transformación natural, entonces al objeto C le corresponde el morfismo

$$\tau_C\colon h_C(C) \to \mathcal{G}(C),$$

pero $h_C(C) = Hom(C, C)$ y en este conjunto podemos considerar el morfismo identidad id_C, definimos

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{TN}(h_C, \mathcal{G}) &\to \mathcal{G}(C) \\ \tau &\mapsto \tau_C(id_C). \end{aligned}$$

Lema 1.2.3 (Yoneda)**.** *[6, Lema 2.12]. La función ϕ es una biyección.*

El lema de Yoneda nos dice que entender la geometría de C es equivalente a entender el funtor de puntos h_C. En particular, estudiar la geometría de una variedad C es equivalente a estudiar los morfismos de S a C para toda variedad S.

La solución a un problema moduli se basa en encontrar una variedad M que este en correspondencia uno a uno con el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{A}/\sim$ y que además nos de información sobre las familias de objetos parametrizadas por una variedad.

La propuesta de Grothendieck para solucionar un problema moduli fue funtorial. Relaciona la geometría que refleja las familias parametrizadas por un variedad S con los morfismos de S a una variedad M. Esta propuesta es: dado un problema moduli $(A, \sim, \mathcal{F} \approx)$, supongamos que existe una variedad M que esta en correspondencia biyectiva con $\mathcal{A}/\sim$. Cada familia $\mathcal{F}$ parametrizada por una variedad S define una función

$$\nu_{\mathcal{F}}\colon S \to M,$$

dada por $\nu_{\mathcal{F}}(s) = [\mathcal{F}_s]$, donde $[\mathcal{F}_s]$ denota la clase de equivalencia del objeto $\mathcal{F}_s$. El concepto de familia se introduce para estudiar la geometría de las clases de objetos, y por otro lado estudiar la geometría de la variedad M, por el Lema de Yoneda 1.2.3, es equivalente a estudiar los morfismos de S a M para toda variedad S. Nos gustaría que estas dos descripciones de la geometría coincidieran, esto es, para toda variedad

$$\begin{aligned} \Phi(S)\colon Fam(S) &\to h_M(S) \\ \mathcal{F} &\mapsto \nu_{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

fuera un isomorfismo.

En base a la propuesta de Grothendieck tenemos la siguiente definición de espacio moduli fino.

Definición 1.2.4. Un **espacio moduli fino** para el problema moduli $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$ es un pareja (M, Φ), donde M es una variedad y $\Phi\colon Fam \to h_M$ es una transformación natural que representa al funtor Fam.

Si la pareja (M, Φ) es un espacio moduli, como el funtor Fam es representable por (M, Φ), se tiene que, dada cualquier variedad S,

$$\Phi(S)\colon Fam(S) \to h_M(S),$$

es una biyección, por lo que tenemos una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de familias parametrizadas por S y los morfismos de S a M.

Observación 1.2.5.

i. Como una familia parametrizada por un punto pt es un objeto de $\mathcal{A}$ y $Fam(pt)$ son las clases de equivalencia de familias parametrizadas por pt, tenemos que $Fam(pt) = \mathcal{A}/\sim$. Por otro lado, $Hom(pt, M)$ es precisamente M y dado que $Fam(pt) \cong Hom(pt, M)$ obtenemos que $M = \mathcal{A}/\sim$, es decir, los puntos de M están en relación biunívoca con las clases de equivalencia de los objetos de $\mathcal{A}$.

ii. Si $S = M$ tenemos que $Fam(M) \cong Hom(M, M)$. En $Hom(M, M)$ podemos considerar el morfismo identidad id_M, al cual le corresponde una única familia (clase de equivalencia) $\mathcal{U}$ parametrizada por M. Consideremos una familia $\mathcal{F}$ parametrizada por S y el morfismo $\nu_{\mathcal{F}}\colon S \to M$ inducido por $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{F}' = \nu^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$, la familia inducida por el morfismo $\nu_{\mathcal{F}}$. Supongamos que $\nu_{\mathcal{F}}(s) = m$, entonces

$$\nu_{\mathcal{F}'}(s) = \nu_{\nu^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})}(s) = [\nu^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})_s] = [\mathcal{U}_{\nu_{\mathcal{F}}(s)}] = [\mathcal{U}_m] = m = \nu_{\mathcal{F}}(s),$$

por lo que las familias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ corresponden al mismo morfismo.

Proposición 1.2.6. *Supongamos que existen una variedad M y una familia $\mathcal{U}$ parametrizada por M con la siguiente propiedad:*

> *Para cada familia $\mathcal{F}$ parametrizada por S, existe un único morfismo $\phi\colon S \to M$ tal que $\phi^*(\mathcal{U}) \approx \mathcal{F}$.*

Entonces (M, Φ) es un espacio moduli fino.

Demostración. Basta demostrar que, para toda variedad S,

$$\begin{aligned} \Phi(S)\colon Fam(S) &\to h_M(S) \\ \mathcal{F} &\to \nu_{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

es un isomorfismo, es decir, existe un isomorfismo entre clases de equivalencia de familias parametrizadas por S y morfismos de S a M.
Dado un morfismo $\phi\colon S \to M$, consideramos la familia $\mathcal{F} = \phi^*(\mathcal{U})$, supongamos que $\phi(s) = m$, entonces

$$\nu_F(s) = [\mathcal{F}_s] = [\phi^*(\mathcal{U})_s] = [\mathcal{U}_{\phi(s)}] = [\mathcal{U}_m] = m = \phi(s).$$

Por lo tanto Φ es sobreyectivo.
Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ dos familias parametrizadas por S tales que $\nu_F = \nu_{F'}$, entonces

$$\mathcal{F} \approx \nu^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) = \nu^*_{\mathcal{F}'}(\mathcal{U}) \approx \mathcal{F}.$$

Por lo que $\mathcal{F} \approx \mathcal{F}'$ y con ello Φ es inyectiva.

□

En base a la Proposición 1.2.6, tenemos una definición equivalente para espacio moduli fino:

Definición 1.2.7. Dado un problema moduli $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$, un **espacio moduli fino** para el problema consiste de una pareja $(M, \mathcal{U})$, donde M es una variedad y $\mathcal{U}$ es una familia parametrizada por M, llamada **familia universal**, con la siguiente propiedad:

Para cada familia $\mathcal{F}$ parametrizada por S, existe un único morfismo $\phi\colon S \to M$ tal que $\phi^*(\mathcal{U}) \approx \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.2.8. Para el problema moduli de las rectas que pasan por el origen, en base al Ejemplo 1.2.1 podemos observar que:

i. El conjunto de clases de equivalencia está en biyección con el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n$.

ii. La familia universal está determinada por el haz lineal $p\colon \mathcal{H} \to \mathbb{P}^n$, donde $\mathcal{H} = \{([L], x) | x \in L\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ y p es la proyección en el primer factor.

Por la Proposición 1.2.6 se tiene que $(\mathbb{P}^n, \mathcal{H})$ es un espacio moduli fino.

En general, la existencia de espacios moduli finos no se puede asegurar, inclusive en ciertos casos $\mathcal{A}/\sim$ tiene la estructura deseada, pero no existe familia universal y por tanto no hay espacio moduli fino. Existen otros tipos de inconvenientes, entre ellos el problema de **automorfismo no triviales** y lo que se conoce como **fenómeno del salto**, que no permiten la existencia de un espacio moduli fino. Estos serán tratados en la sección 1.4.

1.3. Espacio Moduli Grueso

Como ya se ha mencionado no siempre es posible obtener un espacio moduli fino (ver Ejemplo 1.4.1), sin embargo podemos considerar otro tipo de espacio que también nos proporcionará información sobre nuestro problema, este nuevo espacio es llamado espacio moduli grueso.

Definición 1.3.1. Un **espacio moduli grueso**, para un problema moduli dado, es una variedad M junto con una transformación natural

$$\Phi\colon Fam \to h_M,$$

tal que:

i. $\Phi(pt)$ es una biyección.

ii. Para cualquier variedad N y transformación natural $\psi\colon Fam \to h_N$), existe una única transformación natural

$$\Omega\colon h_M \to h_N,$$

tal que $\psi = \Omega \circ \Phi$.

Observación 1.3.2. Sea (M, Φ) un espacio moduli grueso, entonces:

i. Como $\Phi(pt)$ es una biyección, tenemos que: $\mathcal{A}/\sim = M$.

ii. Si $\mathcal{F}$ es una familia parametrizada por S, entonces: $\Phi(\mathcal{F}) = \Phi(pt) \circ \nu_{\mathcal{F}}$.

iii. Cada transformación natural $\psi\colon Fam \to h_N$ induce un morfismo:

$$\mu = \psi(pt) \circ \Phi(pt)^{-1}\colon M \to N,$$

y se tiene que $\Omega(S)(\phi) = \mu(\phi)$ para cada $\phi \in Hom(S, M)$. Recíprocamente, si μ es un morfismo, entonces podemos usar la última igualdad para definir Ω.

En base a lo anterior, tenemos una definición alternativa de espacio moduli grueso:

Definición 1.3.3. Un **espacio moduli grueso** consiste de una variedad M y una biyección $\alpha\colon \mathcal{A}/\sim \to M$ tal que:

i. Para cada familia $\mathcal{F}$ parametrizada por una variedad S, $\alpha \circ \nu_{\mathcal{F}}$ es un morfismo.

ii. Para cualquier variedad N y transformación natural $\psi\colon Fam \to h_N$, la función

$$\mu = \psi(pt) \circ \alpha^{-1} \colon M \to N,$$

es un morfismo.

La siguiente proposición nos dice que un espacio moduli grueso es único salvo isomorfismo.

Proposición 1.3.4. *Si (M_1, α_1) y (M_2, α_2) son espacios moduli gruesos para un problema moduli dado, entonces existe un isomorfismo $\mu\colon M_1 \to M_2$ tal que $\mu \circ \alpha_1 = \alpha_2$.*

Demostración. Se tiene que α_1 y α_2 son biyecciones, por lo que $\mu := \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ está bien definido y es una biyección con inversa $\mu^{-1} = \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$. Tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}/\sim \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & M_1 \arrow[d, bend right, "\mu"'] \\ & M_2 \arrow[u, bend right, "\mu^{-1}"'] \end{tikzcd}.$$

El hecho de que μ y μ^{-1} sean morfismos se sigue de la propiedad (ii) de la definición 1.3.3, por lo tanto μ es un isomorfismo. □

Para finalizar esta sección tenemos la siguiente proposición, que responde a la pregunta ¿cuándo un espacio moduli grueso es fino?

Proposición 1.3.5. *Un espacio moduli grueso (M, Φ) es un espacio moduli fino si y sólo si:*

1. *Existe una familia $\mathcal{U}$ parametrizada por M tal que, para todo $m \in M$, $\mathcal{U}_m$ pertenece a la clase de equivalencia $\Phi(pt)^{-1}(m)$.*

2. *Para cualesquiera dos familias, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$, parametrizadas por una variedad S,*

$$\nu_{\mathcal{F}} = \nu_{\mathcal{F}'} \Leftrightarrow \mathcal{F} \approx \mathcal{F}'.$$

Demostración. Observemos que la propiedad (1) equivale a pedir que Φ sea suprayectiva, mientras que la propiedad (2) es equivalente a que Φ sea inyectiva. Por lo que (1) y (2) se satisfacen si y sólo si el funtor moduli, Fam, es representable por (M, Φ). □

1.4. Problemas para la existencia de espacios moduli

Dado un problema moduli, el hecho de que no exista un espacio moduli puede deberse a distintos factores, pues como se ha visto cada problema depende en gran parte del concepto de relación de equivalencia, tanto entre objetos como entre familias. Además de estas consideraciones se pueden presentar los siguientes dos problemas.

1.4.1. Automorfismos no triviales

Consideremos el siguiente problema moduli:

Ejemplo 1.4.1. *[17, Página 23].* Endomorfismos de espacios vectoriales.

Consideremos el siguiente problema moduli:

i. $\mathcal{A}$, colección de parejas (V,T), donde V es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ y $T\colon V \to V$ es un endomorfismo.

ii. Si $(V,T),(V',T') \in \mathcal{A}$, diremos que $(V,T) \sim (V',T')$ si y sólo si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $h\colon V \to V'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & V' \\ \downarrow T & & \downarrow T' \\ V & \xrightarrow{h} & V' \end{array} .$$

iii. Una familia de endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión n parametrizados por una variedad S es una pareja (E,T), donde E es un haz vectorial de rango n sobre S y T es un endomorfismo de E.

iv. $(E,T) \approx (E',T')$ si y sólo si existe un isomorfismo de haces vectoriales $h\colon E \to E'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ \downarrow T & & \downarrow T' \\ E & \xrightarrow{h} & E' \end{array} .$$

A este problema moduli lo denotaremos por (End_n).

Observación 1.4.2. El problema moduli (End_n) se basa en el problema de la clasificación de parejas (V,T) salvo isomorfismo, como todo isomorfismo de espacios vectoriales de dimensión finita tiene asociado una matriz invertible, (End_n) es equivalente a la clasificación de matrices cuadradas $n \times n$ salvo similaridad de matrices.

Proposición 1.4.3. *No existe espacio moduli fino para* (End_n).

Demostración. Supongamos que $(M,\mathcal{U})$ es un espacio moduli fino para (End_n). Sea $S = \mathbb{P}^1$ y consideremos los siguientes haces vectoriales sobre S:

1. el haz trivial de dimensión n: $\mathbb{I}_n = (\mathbb{C}^n \times S, \pi, S)$, donde π es la proyección en la segunda coordenada.

2. el haz lineal: $\mathcal{O}(-1) = (L,\pi,S)$ donde $L = \{(x,l)|x \in l\} \subset \mathbb{C}^2 \times S$ y π es la proyección en la segunda coordenada.

Se tienen las familias $\mathcal{F} = (\mathbb{I}_n, Id)$ y $\mathcal{F}' = (\mathbb{I}_n \otimes \mathcal{O}(-1), Id \otimes Id)$, dado que los grados de los haces vectoriales de estas familias son distintos, las familias no son isomorfas. Por otro lado $\nu_{\mathcal{F}}(p) = [(\mathbb{C}^n, Id)]$, $\forall\, p \in S$ y $\nu_{\mathcal{F}'}(p) = [(\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}, Id \otimes Id)]$ $\forall\, p \in S$. Entonces $\nu_{\mathcal{F}} = \nu_{\mathcal{F}'}$, pero $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ no son equivalentes, los cual es una contradicción a que $(M,\mathcal{U})$ sea espacio moduli fino. Por lo tanto no existe espacio moduli fino para (End_n). $\square$

La Proposición 1.4.3 muestra que no siempre es posible encontrar un espacio moduli fino para un problema moduli. La razón de la no existencia de un espacio moduli fino en este caso se debe a la presencia de automorfismos no triviales entre los objetos, pues en tal situación es posible encontrar familias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ no isomorfas tales que $\nu_{\mathcal{F}} = \nu_{\mathcal{F}'}$, lo que implica que no puede existir espacio moduli fino.

Una manera de resolver este tipo de problemas es considerar a los objetos junto con sus automorfismos y no sólo al objeto en si, esto nos lleva al estudio de los **Stacks**, el lector interesado en esta teoría puede consultar [5] y [7].

1.4.2. Fenómeno del salto

Proposición 1.4.4. *Sea $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$ un problema moduli. Supongamos que existen una familia $\mathcal{F}$ parametrizada por una variedad conexa S y $s_0 \in S$ tales que, para cualesquiera $s, s' \in S$ distintos de s_0 se satisfacen:*

i. $\mathcal{F}_s \sim \mathcal{F}_{s'}$.

ii. $\mathcal{F}_s \nsim \mathcal{F}_{s_0}$.

Entonces no existe espacio moduli grueso.

Demostración. Supongamos que (M, Φ) es un espacio moduli grueso. Entonces, se tiene el morfismo asociado a la familia $\mathcal{F}$

$$\nu_{\mathcal{F}} \colon S \to M.$$

Como S es conexa y $\nu_{\mathcal{F}}$ es continua, $\nu_{\mathcal{F}}(S)$ es conexa, pero de las hipótesis tenemos que $\nu_{\mathcal{F}}(S)$ consta únicamente de dos puntos, a saber $[F_s]$ y $[F_{s_0}]$, que es disconexa y con ello $\nu_{\mathcal{F}}$ no es un morfismo, lo cual contradice el hecho de que Φ sea transformación natural. Por lo tanto, no existe espacio moduli grueso. $\square$

El fenómeno presentado en la Proposición 1.4.4 se conoce como el fenómeno del salto.

Proposición 1.4.5. *No existe espacio moduli grueso para el problema moduli (End_n) $n > 1$.*

Demostración. Sea $S = \mathbb{C}$ y consideremos la familia de endomorfismos en (End_n), $F = (E, T)$, donde E es el haz trivial de rango n sobre $\mathbb{C}$ y $T \colon E \to E$ es el endomorfismo definido como:

$$((z_1, .., z_n), s) \mapsto \left(\begin{bmatrix} 1 & s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},\ s \right).$$

Para cada punto $s \in S$, el objeto en la familia F parametrizado por s está dado por $(\mathbb{C}^n, T_s \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$, donde T_s está definido por

$$\begin{bmatrix} 1 & s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que, si $t \neq 0$ entonces T_s es similar al endomorfismo T_1, pero T_0 no es similar a T_1. Como $\mathbb{C}$ es conexo, entonces F es una familia que tiene el problema del fenómeno del salto, por la Proposición 1.4.4, no existe espacio moduli grueso para (End_n). $\square$

CAPÍTULO 2

Teoría de Invariantes Geométricos

Existe una gran relación entre la teoría de espacios moduli y teoría de invariantes geométricos (abreviada comúnmente por sus siglas en inglés GIT). El principal objeto de estudio de esta última es la acción de un grupo algebraico G sobre una variedad X y su objetivo es dar condiciones sobre esta acción y el grupo, de tal manera que el espacio cociente de X por G tenga estructura de variedad algebraica (proyectiva). Dado un problema moduli, en ocasiones es posible ver las clases de equivalencia como las órbitas de la acción de un grupo G en una variedad X por lo que se puede dar solución al problema moduli utilizando la teoría de invariantes geométricos.

La teoría de invariantes geométricos tiene como objetivo encontrar condiciones en las que se pueda asegurar que el conjunto de órbitas X/G tiene estructura de variedad. En el caso en el que X es una variedad afín, si G es un grupo actuando en $X \subset \mathbb{A}^n$, dicha acción induce una acción de G en el anillo coordenado de X, denotado por $A[X]$, y mediante esta acción se introduce la $\mathbb{K}$-álgebra de invariantes de la acción, denotada por $A(X)^G$, la cual está formada por los polinomios $f \in A[X]$ que son invariantes bajo la acción del grupo, es decir, $f(x) = f(gx)$ para todo $g \in G$. Debido a la relación que existe entre variedad afines y las $\mathbb{K}$-álgebras, una de las primeras preguntas que surgen en la teoría de invariantes geométricos es, si $X/G = Spec(A(X)^G)$, ¿cuándo $Spec(A(X)^G)$ es una variedad afín?. El Teorema de Nagata (ver Teorema 2.4.5) nos dice que, si R es una álgebra finitamente generada y G es un grupo algebraico reductivo (como por ejemplo $G = GL(n, \mathbb{K})$, el grupo de matrices $n \times n$ invertibles) que actúa en R, entonces la álgebra de invariantes de esta acción es finitamente generado y en este caso se sigue que $X/G = Spec(A(X)^G)$, por lo que podemos dar una estructura de variedad a nuestro conjunto de clases de equivalencia. El caso afín se presenta en la sección 2.4.

Cuando $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva, no siempre es posible darle una estructura de variedad proyectiva al conjunto de clases de equivalencia de objetos, tal como en el caso afín. D. Mumford demuestra (ver Teorema 2.5.3) que, luego de descartar algunos puntos específicos de X (llamados puntos inestables), para el conjunto resultante, denotado por X^{ss} y llamado conjunto de puntos semiestables, el cociente X^{ss}/G posee estructura de variedad proyectiva. Este caso se presenta en la sección 2.5. Encontrar los puntos semiestable es, en general, un problema complicado. Uno de los más grandes aportes dentro de la teoría de invariantes geométricos es el criterio de Hilbert-Mumford (ver Teorema 2.6.5) el cual permite determinar los puntos semiestables mediante los homomorfismos de grupos no triviales entre $\mathbb{K}^*$ y G (llamados subgrupos a un parámetro de G). Dicho criterio se menciona en la sección 2.6.

El considerar a X encajado de distintas formas dentro de un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ puede ocasionar que la estructura del cociente X/G cambie. Una manera de realizar distintos encajes es a través de las secciones globales de un haz lineal sobre X, en ocasiones es posible levantar la acción de G a dichos haces lineales, esta nueva acción es llamada linealización de la acción de G, y en estos casos podemos definir la semiestabilidad de un punto de X en base a las secciones globales invariantes de esta linealización. Estos conceptos se presentan en la sección 2.7.

Finalmente, en la sección 2.8 mostraremos como se puede usar la teoría de invariantes geométricos para construir un espacio moduli.

2.1. Grupos algebraicos y acción lineal

En esta sección introduciremos los principales objetos de estudio de la teoría de invariantes geométricos; los grupos algebraicos y el concepto de acción lineal de un grupo algebraico.

Definición 2.1.1. Un **grupo algebraico** es un grupo G con estructura de variedad algebraica tal que las operaciones

$$G \times G \to G;\ (g,h) \mapsto gh.$$

$$G \to G;\ g \mapsto g^{-1}.$$

son morfismos de variedades algebraicas. Un grupo algebraico isomorfo a un subgrupo cerrado del grupo de matrices invertibles, $GL(n,\mathbb{K})$, es llamado **grupo algebraico lineal**.

Ejemplo 2.1.2. Los grupos $GL(n,\mathbb{K})$, el grupo especial lineal $SL(n,\mathbb{K})$, es decir, el grupo de matrices con determinante igual a 1 y la proyectivización del grupo de matrices invertibles $PGL(n,\mathbb{K})$ son ejemplos de grupos algebraicos lineales.

Definición 2.1.3. Si G y H son grupos algebraicos, un **homomorfismo de grupos algebraicos** es un homomorfismo de grupos $\phi\colon G \to H$, que es un morfismo de variedades algebraicas.

Definición 2.1.4. Una **acción de un grupo algebraico** G en un variedad X es un morfismo

$$\sigma\colon G \times X \to X,$$

tal que para todo $g, h \in G, x \in X$

i. $\sigma(g, \sigma(h, x)) = \sigma(gh, x)$,

ii. $\sigma(e, x) = x$,

donde e es elemento identidad de G.

Por simplicidad escribiremos gx en lugar de $\sigma(g, x)$.

Definición 2.1.5. Dada una acción de un grupo algebraico G en X y $x \in X$, definimos el **estabilizador de x** G_x y la **órbita de x** $O(x)$ como:

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\},$$

$$O(x) = \{gx \in X \mid g \in G\}.$$

El conjunto de órbitas lo denotaremos por

$$X/G = \{O(x) \mid x \in X\}.$$

Diremos que un subconjunto $W \subset X$ es G**-invariante** o **invariante por la acción de** G si $gW = \{gw \mid w \in W\} \subset W$ para todo $g \in G$.

Si $\phi \colon X \to Y$ es un morfismo de variedades, diremos que ϕ **es invariante o** G**-invariante** si para todo $x \in X$, $g \in G$ se tiene que

$$\phi(gx) = \phi(x).$$

Ejemplo 2.1.6. La aplicación

$$GL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n,$$

que consiste en aplicar una matriz g al punto $(x_1, ..., x_n)$ es una acción que consta sólo de dos órbitas $\mathbb{A}^n - \{0\}$ y $\{0\}$.

Observación 2.1.7. Supongamos que G es un grupo algebraico actuando en una variedad X, dicha acción induce una acción en el anillo coordenado de X, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G \times A[X] &\to A[X] \\ (g, f) &\mapsto f^g, \end{aligned}$$

donde $f^g \colon X \to \mathbb{K}$ está definida como $x \mapsto f(g^{-1}x)$.

Definición 2.1.8. Un elemento $f \in A[X]$ es **invariante por la acción de G**, si $f^g = f$ para toda $g \in G$. Si W es un subconjunto abierto e invariante de X, definimos el conjunto

$$A(W)^G := \{f \in A[W] \mid f^g = f \ \forall g \in G\}.$$

Definimos la $\mathbb{K}$**-álgebra de invariantes de la acción** como $A(X)^G$.

Ejemplo 2.1.9. Sea $R = \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes complejos y S_n el grupo de permutaciones de $\{1, .., n\}$. Tenemos la siguiente acción

$$\begin{aligned} S_n \times R &\to R \\ (\sigma, f(x_1, ..., x_n)) &\mapsto f(x_{\sigma^{-1}(1)}, ..., x_{\sigma^{-1}(n)}). \end{aligned}$$

Denotamos por $\subset R^{S_n}$ a la $\mathbb{C}$-álgebra generada por los polinomios S_n-invariantes. Observemos que las funciones:

$$f_1(x_1, ..., x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

$$f_2(x_1, ..., x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdots x_n,$$

son S_n-invariantes. Sea A el espacio generado por $\{f_1, ..., f_n\}$, entonces $A \subset R^{S_n}$. Además, cada elemento de R^{S_n} puede escribirse de manera única como una combinación lineal en los polinomios $f_i \in A$. Así que R^{S_n} es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada. En este caso R^{S_n} es llamado **el anillo de funciones simétricas.**

Definición 2.1.10. Sea $\sigma\colon G \times X \to X$ una acción de un grupo algebraico lineal en una variedad algebraica X en $\mathbb{K}^{n+1}$ (o proyectiva en $\mathbb{P}^n$), diremos que G **actúa linealmente sobre** X o que la **acción es lineal** si existe un homomorfismo de grupos

$$\rho\colon G \to GL(n+1, \mathbb{K}),$$

tal que $gx = \rho(g)x$.

Ejemplo 2.1.11. Sea $X = \mathbb{P}^2$ y $G = \mathbb{C}^*$, el grupo multiplicativo de $\mathbb{C}$. Entonces

$$\sigma : G \times X \to X$$

$$(t, (x : y : z)) \mapsto (tx : ty : t^{-1}z),$$

es una acción lineal:
Dados $r, t \in G$ y $(x : y : z) \in X$ se tiene que:

i. $r(t(x : y : z)) = r(tx : ty : t^{-1}z) = (rtx : rty : r^{-1}t^{-1}z) = (rt)(x : y : z).$

ii. $1(x : y : z) = (x : y : z),$

por lo que σ es una acción. Además

$$\varphi : G \to GL(n, \mathbb{C}); \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

es morfismo de grupos algebraicos y se tiene que $t(x : y : z) = \varphi(t)(x : y : z)$. Por lo tanto σ es una acción lineal.

El siguiente lema nos dice que todo subespacio W, de dimensión finita, de $A[X]$ está contenido en un subespacio invariante y de dimensión finita y la restricción de la acción a este subespacio es lineal.

Lema 2.1.12. *[17, Lema 3.1]. Sea G un grupo algebraico actuando en una variedad X y W un subespacio de dimensión finita de $A[X]$. Entonces*

i) Si W es invariante, la acción de G sobre W es lineal.

ii) W está contenido en un subespacio de $A[X]$, invariante y de dimensión finita.

2.2. Grupos Reductivos

Los resultados más importantes en la teoría de invariantes geométricos de D. Mumford (ver [12]) se basan en el hecho de que el grupo en consideración sea reductivo (geométricamente reductivo).

Definición 2.2.1. Un grupo algebraico lineal G se dice **geométricamente reductivo (resp. linealmente reductivo)** si, para cada acción lineal de G en $\mathbb{A}^n$, y cada punto $v \in \mathbb{A}^n$ no cero e invariante por la acción de G, existe $f \in \mathbb{K}[x_1, ...x_n]$, homogéneo, invariante, de grado ≥ 1 (resp. igual a uno) tal que $f(v) \neq 0$.

En el siguiente ejemplo se presenta un grupo que no es geométricamente reductivo.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{G}_+ := (\mathbb{K}, +)$, es decir, el grupo cuyos elementos elementos del campo con la suma.
Podemos identificar este grupo como un subgrupo de $GL(2, \mathbb{K})$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{G}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{K}) : a \in \mathbb{K} \right\},$$

consideremos la acción lineal

$$\mathbb{G}_+ \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \right) \mapsto (x_1 + ax_2, x_2),$$

el punto $(1, 0)$ es invariante por $\mathbb{G}_+$. Supongamos que existe un polinomio $f(x_1, x_2) \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_2^r + a_1 x_1 x_2^{r-1} + \cdots + x_1^r,$$

homogéneo, invariante y de grado $r \geq 1$ tal que $f(0, 1) \neq 0$, entonces $f(x_1, x_2) = f(x_1 + ax_2, x_2)$ para toda $a \in \mathbb{K}$, en particular tenemos que $f(0, 1) = f(a, 1)$ para toda $a \in \mathbb{K}$, así que

$$a_0 = a_0 + a_1 a + \cdot + a_{r-1} a^{r-1} + a^r,$$

por lo lo que

$$a_1 a + \cdot + a_{r-1} a^{r-1} + a^r = 0, \text{ para toda } a \in \mathbb{K},$$

lo cual no es posible ya que cualquier polinomio no cero tiene un número finito de raíces, pues $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado. Por lo que $\mathbb{G}_+$ no es geométricamente reductivo.

Sean W_1 y W_2 subconjuntos de X, cerrados y disjuntos. Entonces existe $f \in A[X]$ tal que $f(W_1) = 0,\ f(W_2) = 1$, el siguiente lema nos dice que, si además los subconjuntos W_1 y W_2 son invariantes, el polinomio f puede elegirse invariante. En otras palabras $A[X]^G$ separa subconjunto cerrados e invariantes.

Lema 2.2.3. *[17, Lema 3.3]. Sea G un grupo geométricamente reductivo actuando en una variedad X y sean W_1, W_2 subconjuntos de X, invariantes, cerrados y disjuntos. Entonces existe $f \in A[X]^G$ tal que*

$$f(W_1) = 0,\ f(W_2) = 1.$$

Definición 2.2.4. Sea G un grupo algebraico lineal, un elemento $u \in G$ se dice **unipotente** si existe un entero r tal que $(u - id)^r = 0$. El grupo G se llama **unipotente** si todos sus elementos son unipotentes.

A continuación damos la definición de grupo reductivo.

Definición 2.2.5. Sea G un grupo algebraico lineal, denotaremos por G_u el subgrupo maximal, normal, unipotente de G. El **radical unipotente de** G denotado por $R_u(G)$ es la componente conexa de la identidad en G_u. Se dice que G es **reductivo** si $R_u(G) = e$, donde e es el elemento identidad.

Ejemplo 2.2.6. El toro algebraico de dimensión n, $T := \mathbb{K}^{*n}$, es reductivo.

Podemos considerar a T como un subgrupo de las matrices diagonales invertibles. Si $u = (u_1, ..., u_n) \in T$ es unipotente se tiene que $(u - id)^r = 0$ para algún entero r, por lo que $u_j = 1$ para toda $j \in \{1, ..., n\}$, por lo que $R_u(T) = \{(1, ..., 1)\}$ y por tanto T es reductivo.

Ejemplo 2.2.7. $G = GL(n, \mathbb{K})$ es reductivo.

Para $n = 1$ tenemos que $G = \mathbb{K}^*$, que por el Ejemplo 2.2.6 es reductivo. Supongamos $n > 1$ y denotemos por $R = R_u(G)$al radical unipotente. Sea $x \in R$, entonces existe un entero r tal que $(x - id)^r = 0$. Supongamos, para obtener una contradicción, que $x \neq id$ y consideremos su forma de Jordan

$$x_J = \begin{pmatrix} x_{j_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{j_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_{j_k} \end{pmatrix}, \text{ donde } x_{j_k} \text{ son sus bloques de Jordan.}$$

Como $x_J \neq Id$ tenemos que x_{j_1} es una matriz $m_1 \times m_1$, con $m_1 > 1$, de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como R es un subgrupo normal, se sigue que $x_J \in R$, además $x_J = g x_J^t g^{-1}$ para algún $g \in G$, por lo que $x_J^t \in R$. Luego el producto $y = x_J(x_J^t) \in R$. Entonces

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & y_k \end{pmatrix}; \text{ donde } y_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq k.$$

Sin embargo, y no es unipotente, pues:

$$y - id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, (y - id)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$(y - id)^r \neq id, r \in \mathbb{N}$.

Pero esto es una contradicción ya que $y \in R$, así que $R = \{id\}$ y por tanto G es reductivo.

Ejemplo 2.2.8. $SL(n, \mathbb{K})$ es un grupo reductivo.

Recordemos que todo subgrupo normal de $SL(n, \mathbb{K})$ es un subgrupo normal de $GL(n, \mathbb{K})$. Además, todo conjugado en $GL(n, \mathbb{K})$ es conjugado en $SL(n, \mathbb{K})$.
Si $x, y \in SL(n, \mathbb{K})$ son conjugados en $GL(n, \mathbb{K})$, entonces $x = gyg^{-1}$ para algún $g \in GL(n, \mathbb{K})$. Definimos

$$h := g / \sqrt[n]{\det(g)}.$$

Entonces $h \in SL(n, \mathbb{K})$ y tenemos que $x = hyh^{-1}$. Sea $H \subset SL(n, \mathbb{K})$ un subgrupo normal conexo y unipotente en $SL(n, \mathbb{K})$, entonces H es normal conexo y unipotente en $GL(n, \mathbb{K})$ (H tiene la topología de subespacio). Por el Ejemplo 2.2.7 sabemos que $GL(n, \mathbb{K})$ es reductivo, así que $H \subset R_u(GL(n, \mathbb{K})) = \{Id\}$ lo que implica que $H = \{Id\}$. Por tanto $SL(n, \mathbb{K})$ es reductivo.

En 1939 el matemático alemán Hermann Weyl prueba, que en campos de característica cero, todo grupo reductivo es linealmente reductivo (ver [10]). En 1964 se establece la **Conjetura de Mumford**, la cual decía que todo grupo reductivo es geométricamente reductivo, tal conjetura fue demostrada, diez años después, por William Haboush (ver [23]). Con lo que se obtuvo el siguiente teorema:

Teorema 2.2.9. *Sea G un grupo algebraico lineal sobre un campo $\mathbb{K}$. Entonces, G es reductivo si y sólo si G es geométricamente reductivo.*

2.3. Cociente Categórico y Cociente Bueno

Si G es un grupo algebraico actuando en una variedad X, el objetivo esencial de la teoría de invariantes geométricos es dar condiciones sobre G y la acción de tal manera que el cociente X/G tenga estructura de variedad. En esta sección introduciremos los conceptos de cociente bueno, cociente categórico y cociente geométrico.

Definición 2.3.1. Sea G un grupo actuando en la variedad X. Un **cociente categórico de X por G** es un par (Y, ϕ), donde Y es una variedad y $\phi : X \to Y$ es un morfismo sobreyectivo tal que:

(i) ϕ es G-invariante.

(ii) Para cualquier variedad Z y morfismo $\psi : X \to Z$ G-invariante, existe un único morfismo $\chi : Y \to Z$ tal que $\chi \circ \phi = \psi$.

Si además $\phi^{-1}(y)$ consiste de una sola órbita para todo $y \in Y$, decimos que (Y, ϕ) es un **espacio órbitas**.

Como veremos en la sección 2.8 un espacio de órbitas está estrechamente relacionado con el concepto de espacio moduli fino, mostrando la gran relevancia del uso de la teoría de invariantes geométricos al trabajar con problemas moduli.

Definición 2.3.2. Un **cociente bueno** de X por G es una pareja (Y, ϕ), donde Y es una variedad y $\phi\colon X \to Y$ es un morfismo afín que satisface las siguientes condiciones:

i. ϕ es G-invariante.

ii. ϕ es sobreyectivo.

iii. Si U es un abierto de Y, entonces

$$\phi^*\colon A[U] \to A[\phi^{-1}(U)]$$

es un isomorfismo de $A[U]$ sobre $A[\phi^{-1}(U)]^G$

iv. Si W es un subconjunto invariante y cerrado de X, entonces $\phi(W)$ es cerrado.

v. Si W_1, W_2 son subconjuntos de X, cerrados, invariantes y disjuntos, entonces

$$\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset.$$

Un cociente bueno (Y, ϕ) se llama **cociente geométrico** si para todo $y \in Y$, la fibra $\phi^{-1}(y)$ consiste de una única órbita.

Observación 2.3.3. Si (Y, ϕ) es un cociente bueno de X por G, entonces:

1. la función

$$\begin{aligned} \bar{\phi}\colon X/G &\to Y \\ O(x) &\mapsto \phi(x), \end{aligned}$$

está bien definida, pues por (i) ϕ es invariante y es suprayectiva, pues por (ii) ϕ es suprayectiva,

2. por continuidad, $\bar{\phi}(\overline{O(x)}) = \{\phi(x)\}$ y por tanto, si todas las órbitas son cerradas, (v) implica que $\bar{\phi}$ es inyectiva y con ello $\bar{\phi}$ es una biyección,

3. de (ii) y (iii), se tiene que $A[Y] \cong A[X]^G$, por lo que

$$Spec(A[X]^G) = Spec(A[Y]) = Y.$$

Lema 2.3.4. *Si (Y,ϕ) es un cociente bueno, entonces para $x_1, x_2 \in X$ se tiene que $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ si y sólo si $\overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $x \in \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)}$, por continuidad, se tiene que

$$\phi(x_1) = \phi(x) = \phi(x_2).$$

Como $\overline{O(x_1)}$ y $\overline{O(x_2)}$ son subconjuntos cerrados e invariantes, si $\overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} = \emptyset$, entonces $\phi(\overline{O(x_1)}) \cap \phi(\overline{O(x_2)}) = \emptyset$, por lo que $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. $\square$

Proposición 2.3.5. *Todo cociente bueno es un cociente categórico.*

Demostración. Sea (Y,ϕ) un cociente bueno de X por G. En particular $\phi\colon X \to Y$ es sobreyectivo e invariante, por lo que solo resta verificar la propiedad (ii) de cociente categórico. Consideremos Z una variedad y $\psi\colon X \to Z$ un morfismo constante en las órbitas. Dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$, pues ϕ es sobre. Definimos

$$\begin{aligned} \chi\colon Y &\to Z \\ y &\mapsto \psi(x). \end{aligned}$$

Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, por el Lema 2.3.4, existe $w \in X$ tal que

$$w \in \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)},$$

dado que ϕ es constante en las órbitas, por continuidad se tiene que

$$\chi(x_1) = \chi(w) = \chi(x_2).$$

Así que χ está bien definida y por construcción tenemos que $\psi = \chi \circ \phi$. Si $\rho\colon Y \to Z$ es otro morfismo con las mismas propiedades que χ se sigue que

$$\chi \circ \phi = \psi = \rho \circ \phi,$$

como ϕ es sobre concluimos que $\chi = \rho$ y con ello se obtiene la unicidad de χ.

Resta ver que χ es un morfismo. Dado $U \subset Z$ abierto, se tiene que $\psi^{-1}(U) = \phi^{-1}(\chi^{-1}(U))$ es abierto en X, por lo que $C = X - \psi^{-1}(U)$ es cerrado. Se tiene que C es invariante, pues si existen $c \in C$ y $g \in G$ tales que $gc \notin C$, entonces $gc \in \psi^{-1}(U)$ y como ψ es invariante se tendría que $c \in \psi^{-1}(U)$ lo cual no es posible. Como (Y,ϕ) es un cociente bueno, $\phi(C)$ es cerrado, notemos que

$$\phi(C) = Y - \phi(\psi^{-1}(U)) = Y - \chi^{-1}(U),$$

por lo que $\chi^{-1}(U)$ es abierto y así χ es continua. Además, para cada $U \subset Z$ abierto afín, dado que (Y,ϕ) es un cociente bueno, se tiene un homomorfismo

$$A[\chi^{-1}(U)] \to A[\phi^{-1}(\chi^{-1}(U))] = A[\psi^{-1}(U)],$$

y con ello tenemos un homomorfismo $A[\chi^{-1}(U)] \to A[U]$ el cual induce un morfismo $\Gamma_U\colon U \to \chi^{-1}(U)$ tal que $\psi_{|U} = \Gamma_U \circ \phi$. De la unicidad de χ se sigue que $\Gamma_U = \chi_{|U}$ para todo U afín, por lo que χ es un morfismo algebraico. Por lo tanto (Y,ϕ) es un cociente categórico. $\square$

De la Proposición 2.3.5 concluimos que todo cociente geométrico es un espacio de órbitas. Además todo cociente bueno, y por tanto todo cociente categórico, satisface las siguientes propiedades locales respecto a Y:

Proposición 2.3.6. *Sea X una variedad afín y G un grupo algebraico lineal actuando en X, entonces*

1. *si (Y, φ) es un cociente bueno (resp. cociente categórico) de X por G y $U \subset Y$ es abierto, entonces $(U, \varphi|_{\varphi^{-1}(U)})$ es un cociente bueno (resp. cociente categórico) de $\varphi^{-1}(U)$ por G,*

2. *si $\varphi\colon X \to Y$ y $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de Y tal que $(U_i, \varphi|_{\varphi^{-1}(U_i)})$ es un cociente bueno (resp. cociente categórico) de $\varphi^{-1}(U_i)$ por G para todo i, entonces (Y, φ) es un cociente bueno (resp. cociente categórico) de X por G.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.5 resta verificar (1) y (2) para cocientes buenos.

1. Sea (Y, φ) un cociente bueno de X por G y $U \subset Y$ abierto.

   - Como φ es invariante y sobreyectivo, $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}$ es invariante y sobreyectivo.
   - Si $V \subset U$ es un abierto, entonces $A(V) \cong A(\varphi^{-1}(V))^G$, pues esta es una propiedad local de φ y U es abierto.
   - Sean $W_1, W_2 \subset \varphi^{-1}(U)$ cerrados disjuntos y G-invariantes en $\varphi^{-1}(U)$. Supongamos, para obtener una contradicción, que

     $$\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) \neq \emptyset.$$

     Podemos tomar $y \in \varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) \subset U$. Sean $\overline{W_1}, \overline{W_2}$ la cerradura de W_1 y W_2 en X respectivamente. Entonces $\varphi^{-1}(y) \cap \overline{W_1}$ y $\overline{W_2}$ son cerrados G-invariantes en X tales que

     $$y \in \varphi(\varphi^{-1}(y) \cap \overline{W_1}) \cap \varphi(\overline{W_2}),$$

     como (Y, φ) es cociente bueno, existe

     $$x \in (\varphi^{-1}(y) \cap \overline{W_1}) \cap \overline{W_2},$$

     por tanto $x \in \varphi^{-1}(U) \cap \overline{W_1} \cap \overline{W_2} = W_1 \cap W_2$, lo cual es una contradicción pues $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Por lo tanto

     $$\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = \emptyset.$$

   - Sea $W \subset \varphi^{-1}(U)$ cerrado invariante.
     Sea $\overline{W}$ la cerradura de W en X, como $\overline{W}$ es invariante, se tiene que $\varphi(\overline{W})$ es cerrado en Y pues (Y, φ) es cociente bueno de X por G.
     Supongamos que $\varphi(W)$ no es cerrado en U, entonces podemos tomar

     $$y \in \overline{\varphi(W)}^U \setminus \varphi(W) \text{ (donde } \overline{\varphi(W)}^U \text{ representa la cerradura en } U).$$

     Se tiene que $\varphi^{-1}(y) \cap W = \emptyset$, pues de lo contrario, $\varphi^{-1}(y) \in W$ y como φ es sobreyectivo tendríamos que $y \in \varphi(W)$ lo cual no es posible. Por tanto $\varphi^{-1}(y)$ y W son dos cerrados invariantes y disjuntos en $\varphi^{-1}(U)$, por lo que

     $$\{y\} \cap \overline{\varphi(W)} = \emptyset,$$

     lo cual es una contradicción pues $y \in \overline{\varphi(W)} \setminus \varphi(W)$. Por lo tanto, $\overline{\varphi(W)}^U = \varphi(W)$.

2. Supongamos que $\varphi\colon X \to Y$ y que $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de Y tal que $(U_i, \varphi|_{\varphi^{-1}(U_i)})$ es un cociente bueno de $\varphi^{-1}(U_i)$ por G para todo i.

   - Sea $y \in Y$, como $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de Y, $y \in U_{i_0}$ para algún i_0, dado que $\varphi : \varphi^{-1}(U_{i_0}) \to U_{i_0}$ es sobre, existe $x \in \varphi^{-1}(U_{i_0}) \subset X$ tal que $\varphi(x) = y \in U_{i_0} \subset Y$. Por tanto $\varphi : X \to Y$ es sobreyectivo.
   - Sean $g \in G$ y $x \in X$, entonces $x \in \varphi^{-1}(U_i)$ para algún i, como $(U_i, \varphi|_{\varphi^{-1}(U_i)})$ es un cociente bueno de $\varphi^{-1}(U_i)$ por G, $\varphi(gx) = \varphi(x)$. Por tanto φ es G-invariante.
   - Sea $U \subset Y$ un abierto. Para ver que $\varphi^* : A(U) \to A(\varphi^{-1}(U))$ es un isomorfismo, basta tomar una cubierta por básicos.
     Consideremos a todos los básicos Y_f tales que $Y_f \subset U \cap U_i$. Como cada (U_i, φ) es cociente bueno de $\varphi^{-1}(U_i)$, se tiene $\varphi^* : A(Y_f) \to A(\varphi^{-1}(Y_f)) \subset \varphi^{-1}(U)$ es isomorfismo para cada básico $Y_f \subset U$.
   - Sean $W_1, W_2 \subset X$ cerrados invariantes y disjuntos en X.
     Supongamos que $\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) \neq \emptyset$ y sea $y \in \varphi(W_1) \cap \varphi(W_2)$, veamos que esto nos lleva a una contradicción. Existe U_{i_0} tal que $y \in U_{i_0}$. Notemos que $W_1 \cap \varphi^{-1}(U_i)$ y $W_2 \cap \varphi^{-1}(U_i)$ son cerrados invariantes y disjuntos en $\varphi^{-1}(U_i)$ para toda i. Como $(U_{i_0}, \varphi|_{\varphi^{-1}(U_{i_0})})$ es cociente bueno de $\varphi^{-1}(U_{i_0})$ por G, se tiene que
     $$y \in \varphi(W_1 \cap \varphi^{-1}(U_{i_0})) \cap \varphi(W_i \cap \varphi^{-1}(U_{i_0})) = \emptyset,$$
     lo cual es una contradicción. Por lo que
     $$\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = \emptyset.$$
   - Si $W \subset X$ es un cerrado invariante.
     Supongamos que $\varphi(W)$ no es cerrado, entonces podemos tomar
     $$y \in \overline{\varphi(W)} \setminus \varphi(W).$$
     Luego $y \in U_{i_0}$ para algún i_0. Consideremos a los conjuntos $\varphi^{-1}(y)$ y $W \cap \varphi^{-1}(U_{i_0})$, estos son disjuntos, cerrados e invariantes en $\varphi^{-1}(U_{i_0})$. Como $(U_{i_0}, \varphi|_{\varphi^{-1}(U_{i_0})})$ es cociente bueno de $\varphi^{-1}(U_{i_o})$ por G se tiene que
     $$\{y\} \cap \varphi(W \cap \varphi^{-1}(U_{i_0})) = \emptyset,$$
     en U_{i_0}, esto implica que $\{y\} \cap \varphi(W) \cap U_{i_0} = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $y \notin \varphi(W)$. Por lo tanto $\varphi(W)$ es cerrado.

$\square$

Observación 2.3.7. Estas propiedades locales se conservan en el caso de tener un espacio de órbitas, en el siguiente sentido:

i. si (Y, φ) es un espacio de órbitas, entonces $(U, \varphi|_{\varphi^{-1}(U)})$ también es un espacio de órbitas para cada abierto $U \subset Y$, pues para todo $y \in U \subset Y$ se tiene que $\varphi^{-1}(y)$ es una sola órbita en X,

ii. si $(U_i, \varphi|_{\varphi^{-1}(U_i)})$ es un espacio de órbitas para cada i, entonces $(Y = \bigcup U_i, \varphi)$ también es un espacio de órbitas, pues para cada $y \in Y$ existe i tal que $y \in U_i$, luego $\varphi^{-1}(y)$ es una sola órbita en $\varphi^{-1}(U_i) \subset X$.

2.4. Cocientes de Variedades Afines

En esta sección veremos que si X es una variedad afín y existe un grupo reductivo G actuando de manera racional entonces existe un cociente bueno de X por G.

Definición 2.4.1. Sea G un grupo algebraico y R una $\mathbb{K}$-álgebra. Una **acción racional** de G en R es una acción

$$\begin{aligned} G \times R &\to G \\ (g, f) &\mapsto f^g, \end{aligned}$$

tal que

i. para todo $g \in G$, $f \mapsto f^g$ es un $\mathbb{K}$-automorfismo de R,

ii. para cada $f \in R$, existe un subespacio vectorial de dimensión finita W de R, $f \in W$ y G-invariante tal que $G \times W \to W$ es lineal.

En tal contexto, decimos que G **actúa racionalmente en** R.

Lema 2.4.2. *[17, Lema 3.4.1]. Sea G un grupo reductivo actuando racionalmente en una $\mathbb{K}$-álgebra finitamente generada R. Sea J un ideal en R , invariante bajo la acción de G. Si $f \in (R/J)^G$, entonces $f^t \in R^G/(J \cap R^G)$ para algún entero positivo t.*

Observación 2.4.3. *Tenemos que:*

i. $(R/J)^G$ es una $\mathbb{K}$-álgebra entera sobre $R^G/(J \cap R^G)$ (Lema 2.4.2).

ii. Si $G \times X \to X$ es una acción lineal de un grupo reductivo G en X, por el Lema 2.1.12 la acción inducida en $A[X]$ (ver Observación 2.1.7) es una acción racional.

Lema 2.4.4. *[17, Lema 3.4.2] Sea G un grupo reductivo actuando racionalmente en una $\mathbb{K}$-álgebra finitamente generada R. Si $f_1, ..., f_s \in R^G$ y $f \in (\sum f_i R) \cap R^G$, entonces $f^t \in \sum f_i R$ para algún entero positivo t.*

El siguiente teorema es uno de los más importantes resultados dentro de GIT.

Teorema 2.4.5 (Nagata)**.** *[17, Teorema 3.4]. Sea G un grupo geométricamente reductivo actuando racionalmente en una $\mathbb{K}$-álgebra finitamente generada R. Entonces R^G es finitamente generada.*

Como toda acción lineal de un grupo reductivo G en una variedad afín X induce una acción racional en $A[X]$, el Teorema de Nagata 2.4.5 nos dice que la $\mathbb{K}$-álgebra de invariantes de la acción es finitamente generada, tal hecho se utiliza para probar el siguiente teorema:

Teorema 2.4.6. *Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad afín X. Entonces existe una variedad afín Y y un morfismo $\phi \colon X \to Y$ tal que (Y, ϕ) es un cociente bueno de X por G.*

Demostración. Por el Teorema de Nagata 2.4.5 y (ii) de la Observación 2.4.3 se tiene que $A[X]^G$ es finitamente generada, es decir existen $f_1, .., f_s \in A[X]^G$ tales que

$$A[X]^G = \mathbb{K}[f_1, ..., f_s].$$

Sea $J = \{F \in \mathbb{K}[y_1, .., y_s] : F(f_1, ..., f_s) = 0\}$ y $Y := V(J)$, la variedad asociada al ideal J. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon X &\to Y \\ x &\mapsto (f_1(x), ..., f_s(x)). \end{aligned}$$

Entonces, para demostrar que (Y, ϕ) es un cociente bueno de X por G, tenemos que:

1) **ϕ es G-invariante:**
   Sea $g \in G$ y $x \in X$, entonces

   $$\phi(gx) = (f_1(gx), ..., f_s(gx)) = (f_1(x), ..., f_s(x)) = \phi(x),$$

   la penúltima igualdad es cierta ya que f_i es G-invariante para toda $i = 1, .., s$.

2) **ϕ es sobreyectivo:**
   Sea $y \in Y$ y sean $f_1, .., f_r$ los generadores del ideal maximal en $A[Y]$ correspondiente a y.
   Supongamos que $\sum f_i A[X] = A[X]$, entonces

   $$\sum f_i A[X] \cap A[X]^G = A[X]^G,$$

   por el Lema 2.4.4 tenemos que para todo $f \in A[X]^G$ existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $f^t \in \sum f_i A[X]^G$, pero como el ideal maximal es primo se sigue que $f \in \sum f_i A[X]^G$, lo cual es una contradicción pues el ideal maximal es propio. Por lo tanto $\sum f_i A[X] \subsetneq A[X]$ y con ello contenido en un ideal maximal $\mathcal{M} \subset A[X]$, el cual corresponde a algún punto $x \in X$ que satisface $\phi(x) = y$.

3) **Para cada $U \subset Y$ abierto, $\phi^*\colon A[U] \to A[\phi^{-1}(U)]^G$ es un isomorfismo:**
   Es suficiente probar la afirmación en los abiertos básicos

   $$U = Y_f = \{y \in Y : f(y) \neq 0\},$$

   donde $f \in A[Y]$. En este caso tenemos que $\phi^{-1}(U) = X_{\phi^*(f)}$.
   Como ϕ es sobreyectivo se tiene que ϕ^* es inyectiva y dado que ϕ es invariante obtenemos que $A[Y] = A[X]^G$, por lo que

   $$A[U] = A[Y_f] = A[Y]_f = (A[X]^G)_f = (A[X]_{\phi^*(f)})^G = A[\phi^{-1}(U)]^G.$$

4) **Si $W_1, W_2 \subset X$ cerrados, invariantes y disjuntos, entonces**

   $$\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset.$$

   Por el Lema 2.2.3, existe $f \in A[X]^G$ tal que $f(W_1) = 0$ y $f(W_2) = 1$, por (3) se tiene $A[Y] \cong A[X]^G$ así que existe $h \in A[Y]$ tal que $f = g \circ \phi$ por lo que:

   $$g(\phi(W_1)) = 0, \ g(\phi(W_2)) = 1.$$

   Luego, $\phi(W_1) \subset g^{-1}(0)$ y $\phi(W_1) \subset g^{-1}(1)$, así que

   $$\overline{\phi(W_1)} \cap \overline{\phi(W_2)} = \emptyset.$$

5) **Si $W \subset X$ es invariante y cerrado, entonces $\phi(W)$ es cerrado:**
Supongamos $\phi(W)$ no es cerrado, entonces existe $y \in \overline{\phi(W)} \setminus \phi(W)$, por lo que W y $\phi^{-1}(y)$ son cerrados, invariantes y disjuntos, por (4) tenemos que

$$\overline{\phi(W)} \cap \{y\} = \emptyset,$$

pero esto es una contradicción, pues y es elemento de ambos conjuntos. Por lo tanto $\phi(W)$ es cerrado.

□

2.5. Cocientes de Variedades Proyectivas

A diferencia de las variedades afines, cuando $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva, en general no es posible construir un cociente bueno de una acción de un grupo algebraico lineal G sobre X. Además tal cociente tiene una dependencia en el encaje. Sin embargo D. Mumford demuestra que luego de descartar puntos específicos de X (llamados puntos inestables), sí es posible construir un cociente bueno para dicha acción.

Supongamos que G es un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$, entonces tenemos una acción inducida de G en el anillo de polinomios en $n+1$ variables, dada por:

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{K}[x_0, ...x_n] &\to \mathbb{K}[x_0, ...x_n] \\ (g, f) &\mapsto f^g(x_0, ...x_n) = f(g^{-1}(x_0, ...x_n)). \end{aligned}$$

Dado $f \in \mathbb{K}[x_0, ...x_n]$ homogéneo, definimos

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

Definición 2.5.1. Sea $x \in X$, diremos que x es:

1. **semiestable** si existe un polinomio f, invariante y homogéneo de grado≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$. Denotaremos al conjunto de puntos semiestables de X por X^{ss},

2. **estable** si es semiestable y además $dim(O(x)) = dim(G)$ y la acción de G en $X_f = \{z \in X \mid f(z) \neq 0\}$ es cerrada. El conjunto de puntos estables de X se denotará por X^s,

3. **inestable** si no es semiestable.

Observación 2.5.2. Si $R = \{f \in \mathbb{K}[x_0, ..., x_n] : f$ es homogéneo, invariante y grado positivo$\}$, entonces:

$$X^{ss} = \bigcup_{f \in R} X_f.$$

Dado que cada X_f es una abierto afín de X invariante por la acción de G, por el Teorema 2.4.6 existe un cociente bueno (Y_f, ϕ_f) de X_f por G. Tenemos además que X^{ss} es abierto en X.

Usando los hechos de la Observación 2.5.2 y las propiedades locales de un cociente bueno, Proposición 2.3.6, es posible construir una variedad Y cubierta por los abiertos afines Y_f y un morfismo ϕ: $X^{ss} \to Y$ que define un buen cociente de X^{ss} por G. Por lo tanto se tiene el principal Teorema de GIT, descrito para variedades proyectivas:

Teorema 2.5.3. *[17, Teorema 3.14] Sea G un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$.*

i. Existe un cociente bueno (Y, ϕ) de X^{ss} por G, donde Y es una variedad proyectiva.

ii. Existe $Y^s \subset Y$ abierto tal que $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$ y (Y^s, ϕ) es un cociente geométrico de X^s por G.

iii. Si $x_1, x_2 \in X^{ss}$ entonces

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset.$$

iv. Para $x \in X^{ss}$,
x es estable $\Leftrightarrow dim(O(x)) = dim(G)$ y $O(x)$ es cerrada en X^{ss}.

2.6. Criterio de Hilbert-Mumford

Pese a la gran importancia teórica de los resultados más relevantes en GIT, es decir, los Teoremas 2.5.3 y 2.7.7, encontrar los puntos (semi)estables e inestables de una variedad es complicado. Sin embargo existe un criterio, el criterio de Hilbert-Mumford, que es de gran utilidad para determinar tales puntos. Dicho criterio será introducido esta sección.

Un concepto relevante para poder utilizar el criterio de Hilbert-Mumford es el de subgrupos a un parámetro.

Definición 2.6.1. Un subgrupo a un parámetro de G es un homomorfismo no trivial $\lambda : \mathbb{K}^* \to G$ de grupos algebraicos. El conjunto de subgrupos a un parámetro de G es denotado como $\Gamma(G)$.

Sean G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y $\lambda : \mathbb{K}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro de G. Tenemos la representación de $\mathbb{K}^*$ en $GL(n+1, \mathbb{K})$ definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{K}^* &\to GL(n+1, \mathbb{K}) \\ t &\mapsto \lambda(t) : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1} \\ &\qquad\qquad v \mapsto \lambda(t)v. \end{aligned}$$

Proposición 2.6.2. *[18, Ejemplo 1.5.1.12] La representación $\lambda : \mathbb{K}^* \to GL(n+1, \mathbb{K})$ es diagonalizable, es decir, existe una base $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tal que*

$$\lambda(t)v_i = t^{r_i} v_i \qquad i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$.

Consideremos un punto $x \in X$ y un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{K}^* \to G$ de G. Definimos el **peso de x en v_i** como el entero r_i tal que

$$\lambda(t)v_i = t^{r_i}v_i.$$

Sea la base $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ que diagonaliza al subgrupo a un parámetro. Dado que la acción de G es lineal, si $\bar{x} = \sum_{i=0}^n a_i v_i$, entonces

$$\lambda(t)\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{r_i} v_i.$$

En el contexto anterior se tiene la siguiente definición:

Definición 2.6.3. Sea $x \in X$ y λ un subgrupo a un parámetro de G. Definimos

$$\begin{aligned} \mu \colon X \times \Gamma(G) &\to \mathbb{Z} \\ (x, \lambda) &\mapsto \min\{-r_i \mid a_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

Esta función se conoce como **función μ de Mumford.**

Dada una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y un punto $x \in X$, denotamos por $\widetilde{X}$ al cono afín de X y por $\bar{x} \in \tilde{X}$ a un elemento tal que $\bar{x} \in x$.

Lema 2.6.4. *Sean G un grupo reductivo actuando en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y λ un subgrupo a un parámetro de G. Entonces*

i. $\mu(x, \lambda) < 0$ *si, y sólo si,* $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x}$ *no existe.*

ii. $\mu(x, \lambda) > 0$ *si, y sólo si,* $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0$.

iii. $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$, *para todo* $g \in G$.

Demostración.

i. $\mu(x, \lambda) \geq 0$ si, y sólo si, $r_i \geq 0$ para todo i tal que $a_i \neq 0$ si, y sólo si,

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = \lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{n} a_i t^{r_i} v_i,$$

existe.

ii. $\mu(x, \lambda) > 0$ si, y sólo si, $r_i > 0$ para todo i tal que $a_i \neq 0$ si, y sólo si,

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = \lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{n} a_i t^{r_i} v_i = 0.$$

iii. Supongamos que $\{gv_0, gv_1, \dots, gv_n\}$ es una base que diagonaliza a λ, entonces, existen $r_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\lambda(t)gv_i = t^{r_i}gv_i.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(g^{-1}\lambda(t)g)(v_i) &= g^{-1}(\lambda(t)gv_i).\\ &= g^{-1}t^{r_i}gv_i.\\ &= t^{r_i}v_i.\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es una base que diagonaliza a $g^{-1}\lambda(t)g$. Por lo tanto $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda(t)g)$.

□

Por el Lema 2.6.4 (ii) se sigue que, si existe un subgrupo a un parámetro λ tal que

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0,$$

entonces x es un punto inestable, esto debido a que el límite pertenece a $\overline{O(\bar{x})}$.

El siguiente teorema, conocido como el criterio de Hilbert-Mumford, es muy útil para obtener los puntos estables y semiestables de la acción.

Teorema 2.6.5 (Criterio de Hilbert-Mumford)**.** *[17, Teorema 4.9]. Sean G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y x un punto de X. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *x es semiestable si, y sólo si, $\mu(x, \lambda) \leq 0$ para todo subgrupo a un parámetro λ de G.*

2. *x es estable si, y sólo si, $\mu(x, \lambda) < 0$ para todo subgrupo a un parámetro λ de G.*

3. *x es inestable si, y sólo si, existe un subgrupo a un parámetro λ de G tal que $\mu(x, \lambda) > 0$.*

La siguiente proposición clasifica los subgrupos a un parámetro de $\mathrm{SL}(n+1)$.

Proposición 2.6.6. *[17, Observación 4.10]. Los subgrupos a un parámetro de $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{K})$ son de la forma*

$$\begin{aligned}\lambda : \mathbb{K}^* &\to \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{K})\\ t &\mapsto g\begin{pmatrix} t^{r_0} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & t^{r_1} & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & t^{r_n}\end{pmatrix} g^{-1},\end{aligned}$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_0 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_n$, $r_0 + \ldots + r_n = 0$ y $g \in SL(n+1, \mathbb{K})$.

Por el Teorema 2.6.5 y la Proposición 2.6.6, se concluye el siguiente teorema.

Teorema 2.6.7. *[17, Proposición 4.11]. Si $SL(n+1,\mathbb{K})$ actúa linealmente sobre una variedad proyectiva X, el punto $x \in X$ es estable (resp. semiestable) si, y sólo si, para todo subgrupo a un parámetro λ de la forma*

$$\begin{array}{rcl}\lambda : \mathbb{K}^* & \to & \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^{r_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{r_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{r_n} \end{pmatrix},\end{array}$$

donde $r_0 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_n$, $r_0 + \ldots + r_n = 0$ y para todo $g \in SL(n+1,\mathbb{K})$

$$\mu(gx, \lambda) < 0 \quad (\textit{resp. } \leq).$$

2.6.1. Uso del criterio de Hilbert-Mumford para hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$

Consideremos una hipersuperficie $H = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d. En base al problema moduli 1.1.3 tenemos que H está determinada por los ceros de un polinomio homogéneo:

$$f(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) = \sum a_{i_0,\ldots,i_n} Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n},\ a_{i_0,\ldots,i_n} \in \mathbb{C},$$

de grado d, además de que f es único salvo múltiplos escalares, es decir, dos polinomios de grado d generan la misma hipersuperficie si y sólo si uno es un múltiplo del otro.

El conjunto de polinomios de grado d en $n+1$ variables forman un espacio vectorial, denotado por $\mathbb{C}^d[Y_0, ..., Y_n]$. Tal espacio vectorial puede ser identificado con el espacio vectorial de las secciones globales del haz vectorial $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, denotado por $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.

Definición 2.6.8. Definimos la acción de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$ sobre $X := \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$ de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl}\beta : \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C}) \times X & \to & X \\ (g, f) & \mapsto & f(g^{-1}(Y_0, \ldots, Y_n)),\end{array}$$

El siguiente teorema determina los pesos del polinomio con respecto a subgrupos a un parámetro.

Lema 2.6.9. *Sean una hipersuperficie $H = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d definida por*

$$f = \sum a_{i_0,\ldots,i_n} Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n},$$

y $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ un subgrupo a un parámetro definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, \ldots, t^{r_n}\}$. El peso de f en $a_{i_0,..,i_n}$ está dado por

$$-dr_0 - i_1(r_1 - r_0) - \cdots - i_n(r_n - r_0).$$

Demostración. En este caso la base de $\mathbb{C}^d[Y_0, ..., Y_n]$, dada por los monomios $Y_0^{i_0} Y_1^{i_1} \dots Y_n^{i_n}$ con $i_0 + \cdots + i_n = d$, diagonaliza la representación inducida por λ. Como la acción es lineal se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\lambda(t), f) &= f(\lambda(t)^{-1}(Y_0, \dots, Y_n)). \\
&= f(t^{-r_0} Y_0, \dots, t^{-r_n} Y_n). \\
&= \sum a_{i_0,\dots,i_n} (t^{-r_0} Y_0)^{d-i_1-\dots-i_n} (t^{-r_1} Y_1)^{i_1} \dots (t^{-r_n} Y_n)^{i_n}. \\
&= \sum a_{i_0,\dots,i_n} t^{(d-i_1-\dots-i_n)(-r_0)-i_1 r_1-\dots-i_n r_n} Y_0^{d-i_1-\dots-i_n} Y_1^{i_1} \dots Y_n^{i_n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los pesos están dados por

$$-dr_0 - i_1(r_1 - r_0) - \cdots - i_n(r_n - r_0).$$

□

Por el criterio de Hilbert-Mumford, una hipersuperficie H es inestable si y sólo si

$$\min\{-dr_0 - i_1(r_1 - r_0) - \cdots - i_n(r_n - r_0) \mid a_{i_0,\dots,i_n} \neq 0\} > 0,$$

para algún subgrupo a un parámetro de $SL(n+1, \mathbb{C})$.

Uno de los primeros resultados acerca de la estabilidad de hipersuperficies es el relacionado con hipersuperficies no singulares:

Teorema 2.6.10. *[2, Teorema 10.1]. Toda hipersuperficie no singular de grado $d \geq 2$ es semiestable. Más aún, si $d > 2$, las hipersuperficies no singulares son estable.*

Consideremos el caso en el $d = 1$, es decir que $H = V(f)$ es un hiperplano, por lo que H está determinado por un polinomio de la forma:

$$f(Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i Y_i, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Por el Lema 2.6.9, se tiene que:

$$\mu(H, \lambda) = \min\{-r_i \mid a_i \neq 0\}.$$

Para este caso particular se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.6.11. *Todo hiperplano es inestable.*

Demostración. Sea H un hiperplano en $\mathbb{P}^n$. Bajo un cambio de coordenadas podemos suponer que H está determinado por $f = Y_n$, consideremos el subgrupo a un parámetro dado por $r_1 = \cdots = r_{n-1} = 1$ y $r_n = -n$. Por el Lema 2.6.9, tenemos que:

$$\mu(H, \lambda) = \min\{-r_i \mid a_i \neq 0\} = -r_n = n > 0,$$

por lo tanto H es inestable. □

Ahora consideremos el caso particular en el que $H = V(f)$ con $f \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio de grado d en dos variables. Basta tomar los subgrupos a un parámetros de $SL(2,\mathbb{C})$ de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^r & 0 \\ 0 & t^{-r} \end{pmatrix}, \text{donde } r \in \mathbb{Z}_{>0} \end{array}$$

En este contexto H es llamada **forma binaria**.

Teorema 2.6.12. *Sea $f(x,y) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^{d-i} y^i$. La forma binaria determinada por f es semiestable (estable) si y sólo si $a_i = 0$ para cada $i \geq [\frac{d}{2}]$ (resp. $> [\frac{d}{2}]$), si y sólo si todo punto $p \in \mathbb{P}^1$ tiene multiplicidad $\leq [\frac{d}{2}]$ (resp. $< \frac{d}{2}$).*

Demostración. Por el Lema 2.6.9, los pesos están dados por

$$-dr - i(-r - r).$$

Por lo que la función μ de Mumford está determinada por

$$\min\{r(2i - d) \mid a_i \neq 0\}.$$

Sea $i_0 = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$, entonces

$$\min\{r(2i - d) \mid a_i \neq 0\} = r(2i_0 - d),$$

el cual es negativo o igual a cero (negativo) si y sólo si $i_0 \leq \frac{d}{2}$ (resp. $i_0 < \frac{d}{2}$). Por lo que:

$H = V(f)$ es semiestable (estable) si y sólo si

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{[\frac{d}{2}]} a_i x^{d-i} y^i$$

$$\left(\text{resp. } f(x,y) = \sum_{i=0}^{[\frac{d}{2}]-1} a_i x^{d-i} y^i\right)$$

si y sólo todo punto $p \in \mathbb{P}^1$ tiene multiplicidad $\leq [\frac{d}{2}]$ (resp. $< \frac{d}{2}$) $\square$

Los resultados antes presentados serán utilizados en el Capítulo 4.

2.7. Linealización

Sean L es un haz lineal sobre $X \subset \mathbb{P}^n$ y G es un grupo algebraico actuando en X. En ciertos casos es posible levantar la acción de G a L, a esta acción se le llama linealización de la acción de G, por lo que es posible dar una definición de punto semiestable (estable) e inestable en términos de las secciones globales del haz, así que la estructura del cociente de X por G puede cambiar si se tienen distintos haces lineales. En esta sección introducimos el concepto de linealización y mencionamos uno de los resultamos más importantes en GIT el Teorema 2.7.7, que nos dice que existe un cociente bueno del conjunto de puntos semiestables respecto a un haz linealizable L, $X^{ss}(L)$, por G.

Sea $p\colon L \to X$ un haz lineal sobre X, denotaremos por $H^0(X,L)$ al conjunto de secciones globales del haz, esto es:

$$H^0(X,L) := \{s\colon X \to L \mid p \circ s = Id_X\}.$$

Definición 2.7.1. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva, G un grupo algebraico actuando en X y $p\colon L \to X$ un haz lineal sobre X. Una **linealización de la acción de G con respecto a L** es una acción de G en L tal que:

i. para todo $y \in L,\ g \in G$,
$$p(gy) = gp(y),$$

ii. para todo $x \in X,\ g \in G$,
$$\begin{aligned} L_x &\to L_{gx} \\ y &\mapsto gy, \end{aligned}$$
es lineal.

Una **acción L-lineal de G en X** es una acción de G en X junto con una linealización de esta acción con respecto a L. En este contexto decimos que L es **linealizable respecto a la acción de G o G-linealizable**.

Observación 2.7.2. Sea L una haz linealizable sobre X respecto a la acción de G. La linealización induce una acción de G en $H^0(X,L)$, dada por

$$gs(x) = s(gx),$$

para cada $g \in G$, $s \in H^0(X,L)$ y $x \in X$.

El concepto de linealización nos permite definir los puntos semiestables, estables e inestables, en términos de las secciones de L.

Definición 2.7.3. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y L un haz lineal sobre X. Para cada acción L-lineal de un grupo reductivo G en X diremos que $x \in X$ es un punto:

1. **L-semiestable** si para algún entero positivo r, existe una sección invariante $f \in H^0(X, L^{\otimes r})$ tal que $f(x) \neq 0$ y
$$X_f = \{y \in X \mid f(y) \neq 0\} \text{ es afín.}$$
Denotamos al conjunto de puntos semiestables por $X^{ss}(L)$.

2. **L-estable** si $dim(O(x)) = dim(G)$, para algún entero positivo r, existe una sección invariante $f \in H^0(X, L^{\otimes r})$ tal que $f(x) \neq 0$, X_f es afín y la acción de G en X_f es cerrada. Denotamos al conjunto de puntos estables por $X^s(L)$.

3. **L-inestable** si no es L-semiestable.

Como podemos observar los conjuntos $X^{ss}(L)$ y $X^s(L)$ dependen del haz lineal y por tanto de una linealización. No todo haz lineal posee una linealización, pero si X es una variedad normal y L es un haz lineal sobre X, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^{\otimes n}$ es linealizable (ver [12, Corolario 1.6]).

Sean $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y L la restricción a X del haz lineal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Cualquier acción lineal de G en X induce una acción L-lineal de G en X, y además se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.7.4. *[17, Proposición 3.19] Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y L la restricción a X del haz lineal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, entonces:*

$$X^{ss}(L) = X^{ss},\ X^s(L) = X^s.$$

Las definiciones de puntos L-semiestables (L-estables) pueden reducirse a las definiciones dadas en términos de polinomios invariantes, considerando el siguiente lema:

Lema 2.7.5. *[17, Lema 3.20]. Las siguientes dos condiciones para L un haz lineal sobre X una prevariedad son equivalentes:*

i. para todo $x \in X$, existe una sección f de $L^{\otimes r}$, para algún entero positivo r, tal que $f(x) \neq 0$ y X_f es afín,

ii. existe un morfismo $\psi\colon X \to \mathbb{P}^n$ tal que la imagen de X es isomorfa a una variedad cuasi-proyectiva en $\mathbb{P}^n$ y $\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong L^{\otimes r}$ para algún entero positivo r.

Definición 2.7.6. Un haz lineal L sobre X que satisfaga alguna de las dos propiedades del Lema 2.7.5 se llama **amplio**.

Los haces lineales amplios jugarán un papel importante en el Capítulo 3. Sea L es un haz lineal amplio y supongamos que se tiene una linealización de G respecto a L. D. Mumford prueba (ver [12, Proposición 1.7]) que el morfismo ψ del Lema 2.7.5 puede ser elegido tal que las acciones de G en X y $L^{\otimes r}$ sean inducidas por ψ a partir de una acción de G en $\mathbb{P}^n$. Más aún (ver [12, Ampliación 1.8]) ψ puede ser elegido de tal manera que

$$\psi^{-1}(\mathbb{P}^s) = X^s.$$

De manera similar al Teorema 2.5.3, tenemos el siguiente teorema en el contexto de linealizaciones.

Teorema 2.7.7. *[17, Teorema 3.21] Sea X una variedad y L un haz lineal sobre X. Entonces para cada acción L-lineal de un grupo reductivo G en X,*

i. Existe un cociente bueno (Y, ϕ) de $X^{ss}(L)$ por G, donde Y es una variedad proyectiva.

ii. Existe $Y^s \subset Y$ abierto tal que $\phi^{-1}(Y^s) = X^s(L)$ y (Y^s, ϕ) es un cociente geométrico de $X^s(L)$ por G.

iii. Si $x_1, x_2 \in X^{ss}(L)$, entonces

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \cap X^{ss}(L) \neq \emptyset.$$

iv. Para $x \in X^{ss}(L)$,
x es estable $\Leftrightarrow dim(O(x)) = dim(G)$ y $O(x)$ es cerrada en $X^{ss}(L)$.

2.8. Moduli y GIT

Para finalizar este capítulo veremos una de las razones por las cuales la teoría de invariantes geométricos es de enorme utilidad para encontrar espacios moduli.

Definición 2.8.1. Dado un problema moduli como en la definición 1.1.2, diremos que una familia X parametrizada por un variedad S tiene **la propiedad universal local** si satisface: Para cualquier familia X' parametrizada por S' y cualquier punto $s \in S'$ existe un vecindad U de s tal que la familia $X|U$ es equivalente a la familia inducida por un morfismo $U \to S$. Diremos que la variedad S tiene la propiedad universal local si existe una familia parametrizada por S con tal propiedad.

La teoría de invariantes geométricos se convierte en una herramienta utilizada por la teoría de espacios moduli cuando en un problema moduli $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$, las clases de equivalencias de los objetos pueden ser interpretadas como las órbitas de la acción de un grupo en alguna variedad. Recordemos que si F es una familia parametrizada por una variedad S, para cada $s \in S$, F_s corresponde a un elemento de $\mathcal{A}$, en base a esto definimos:

Definición 2.8.2. Sea $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$ un problema moduli. Si F es una familia parametrizada por una variedad S, diremos que una acción de G en S es una **G-moduli acción para el problema moduli** si para cualesquiera dos elementos $s, t \in S$ se tiene que $F_s \sim F_t$ si, y sólo si, s y t pertenecen a la misma órbita.

El hecho de tener una G-moduli acción para un problema moduli nos permite caracterizar los espacios moduli gruesos como lo muestra las siguiente proposición:

Proposición 2.8.3. *[17, Proposición 2.13]. Sea $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$ un problema moduli. Supongamos que existe una familia F parametrizada por S con la propiedad universal local y que se tiene una G-moduli acción en S. Entonces:*

(i) Un espacio moduli grueso es un cociente categórico de S por G.

(ii) Un cociente categórico de S por G es un espacio moduli grueso si y sólo si es un espacio órbitas.

Demostración. Sea (M, ϕ) un cociente categórico de S por G. Consideremos los siguientes dos conjuntos:

$$\mathcal{C} = \{\rho \colon S \to M \mid \rho \text{ es constate en las órbitas}\},$$
$$\mathcal{T} = \{\Phi \colon Fam \to h_M \mid \Phi \text{ es tranformación natural}\}.$$

Existe una biyección entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{T}$, dada por las siguientes asignaciones:

1. Para cada $\Phi \colon Fam \to h_M \in \mathcal{T}$ definimos

$$\rho := \Phi(S)(F) = \nu_F \colon S \to M.$$

   Por hipótesis, $s, t \in S$ pertenecen a la misma órbita si y sólo si $F_s \sim F_t$, por lo tanto $\rho \in \mathcal{C}$.

2. Dado $\rho \in \mathcal{C}$, se tiene la transformación natural $\Phi\colon Fam \to h_M$ definida $\Phi(B)(T) = \alpha$, donde α se construye de la siguiente manera:
   Sea B un familia parametrizada por T, como F tiene la propiedad universal local, existen una cubierta abierta $\{U_i\}$ de T y morfismos $\psi_i\colon U_i \to S$ tales que $B|_{u_i} \approx \psi_i^*(F)$, por lo que podemos definir morfismos

   $$\alpha_i := \rho \circ \psi_i\colon U_i \to M.$$

   En base a estos morfismos, construimos el morfismo $\alpha\colon T \to M$ observando que, si $t \in U_i \cap U_j,\ i \neq j$, entonces $T_{\psi_i(t)} \sim T_t \sim T_{\psi_j(t)}$ y como ρ es constante en las órbitas, se tiene que $\alpha_i(t) = \alpha_j(t)$.

La prueba se sigue al observar que, (M, ϕ) es un cociente categórico si y sólo si (M, Φ) satisface que para cualquier variedad N y transformación natural $\psi\colon Fam \to h_N$, existe una única transformación natural

$$\Omega\colon h_M \to h_N,$$

tal que $\psi = \Omega \circ \Phi$. Además, (M, Φ) satisface que $\Phi(pto)$ es biyección si y sólo si (M, Φ) es un espacio de órbitas.

□

De los resultados de la teoría de invariantes geométricos, Teorema 2.7.7, Proposición 2.3.2 y Proposición 2.8.3, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.8.1. *En el contexto de la Proposición 2.8.3, para toda linealización L de la G-moduli acción:*

i. existe un cociente bueno de $X^{ss}(L)$ por G, al que denotaremos por $X^{ss}//_L G$, el cual además es un cociente categórico,

ii existe un cociente geométrico de $X^s(L)$ por G, al que denotaremos por $X^s//_L G$, el cual es un espacio moduli grueso.

Dado un problema moduli $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$ y una G-moduli acción es posible utilizar GIT para encontrar espacios moduli y con ello solucionar el problema moduli, como podemos observar la estructura de los GIT-cocientes, $X^{ss}//_L G$ y $X^s//_L G$, puede cambiar al variar el haz lineal, los principales resultados con respecto a este cambio se presentan en el Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

Variación de GIT-cocientes

En este capítulo damos un resumen de los principales resultados, sin demostración, de la teoría de variación de GIT-cocientes, las demostraciones pueden ser consultadas en [21]. Como vimos en la sección 2.6, si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva y G es un grupo reductivo actuando en X, la estructura de los GIT-cocientes, $X^{ss}//_L G$ y $X^s//_L G$, puede cambiar al variar el haz lineal. M. Thaddeus es uno de los primeros en estudiar este cambio, originando lo que se denomina teoría de variación de GIT-cocientes (abreviado VGIT por sus siglas en inglés) cuyo principal objetivo es describir el cambio en las estructuras de los GIT-cocientes al variar los haces lineales y por tanto la G-linealización.

Dados $(\mathcal{A}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$, un problema moduli, y una G-moduli acción es posible utilizar GIT, para encontrar espacios moduli y con ello solucionar el problema moduli. Dado que la estructura de los GIT-cocientes, $X^{ss}//_L G$ y $X^s//_L G$, puede cambiar al variar el haz lineal, los principales resultados de VGIT nos darán información sobre el cambio entre los espacios moduli de nuestro problema.

El primer paso para entender la variación de los cocientes, dado que no todo haz lineal es linealizable, es describir qué tipo de haces lineales son los que en realidad nos interesan y en dónde es que varían, es decir, la descripción del espacio de parámetros para haces lineales con propiedades adecuadas, este paso será descrito en la sección 3.1. Es posible que distintos haces lineales dentro del espacio de parámetros nos den un mismo cociente, por lo que es posible definir una relación de equivalencia (llamada GIT-equivalencia) en este espacio de parámetros. Uno de los principales resultados en VGIT, demostrado por M. Thaddeus (ver Teorema 3.2.3), nos dice que el número de clases de GIT-equivalencia es finito, por lo que es posible dar una estratificación del espacio de parámetros. Todo esto será tratado en la sección 3.2. En la sección 3.3 presentamos los principales resultados relacionados con el cambio que existe en los cocientes cuando pasamos de un estrato a otro estrato adyacente.

3.1. Espacio de parámetros para haces G-linealizables

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y G un grupo reductivo actuando en X. La semiestabilidad de un punto depende de la existencia de secciones globales, así que debemos asegurar que los haces lineales posean suficientes secciones. Daremos las definiciones usadas para poder determinar el espacio de parámetros de los haces lineales que nos interesan.

Dadas la acción de G en X y $p\colon X \to L$ una haz lineal, recordemos que L es G-linealizable si existe una acción de G en L tal que, para todo $y \in L,\ g \in G$,

$$p(gy) = gp(y),$$

y para todo $x \in X,\ g \in G$,

$$\begin{aligned} L_x &\to L_{gx} \\ y &\mapsto gy, \end{aligned}$$

es lineal.

Recordemos que un haz lineal L sobre X se dice amplio si existe un morfismo $\psi\colon X \to \mathbb{P}^n$ tal que la imagen de X es isomorfa a una variedad cuasi-proyectiva en $\mathbb{P}^n$ y $\psi^*(\mathcal{O}(1)) \cong L^{\otimes r}$ para algún entero positivo r. En otras palabras, L es amplio si existe un entero r tal que $L^{\otimes r}$ posee suficientes secciones globales para tener un encaje de X en un espacio proyectivo.

Definición 3.1.1. Sea L una haz G-linealizable sobre X. Diremos que L es **G-amplio** si L es amplio. Diremos que L es **G-efectivo** si el conjunto de secciones globales invariantes, $H^0(X,L)^G$, es no vacío.

Dada una variedad T, la acción de G en X induce un acción de G en $T \times X$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G \times (T \times X) &\to T \times X \\ (g,(t,x)) &\mapsto (t,gx). \end{aligned}$$

Definición 3.1.2. Diremos que dos haces G-linealizables, L_1, L_2, sobre X son **G-algebraicamente equivalentes, denotado por $L_1 \sim_{alg} L_2$,** si existe una variedad conexa T, puntos $t_1, t_2 \in T$ y un haz lineal L linealizable respecto a la acción inducida en $T \times X$ tales que

$$L|_{\{t_1\}\times X} \cong L_1,\ L|_{\{t_2\}\times X} \cong L_2.$$

Sea L un haz G-linealizable sobre X, su clase de equivalencia algebraica, $[L]_{alg}$, es llamada una **polarización de la acción de G en X o G-polarización.**

El grupo de Picard de X, denotado por $Pic(X)$, parametriza los haces lineales sobre X, por lo que nuestro espacio de parámetros será un subconjunto $\mathcal{B}$ de $Pic(X)$ tal que, para todo haz lineal $L \in \mathcal{B}$:

i. L es G-amplio: lo que permite considerar a X encajado en algún espacio proyectivo.

ii. L es G-linealizable: de este modo podemos extender la acción al haz lineal y trabajar bajo los conceptos dados en la definición 2.7.3.

iii. L es G-efectivo: con ello se tiene que $X^{ss}(L) \neq \emptyset$.

Al conjunto de haces G-linealizables lo denotaremos por $Pic(X)^G$.

Proposición 3.1.3. *[21, Proposición 2.1]. Sean $L_1, L_2 \in Pic(X)^G$. Si $L_1 \sim_{alg} L_2$, entonces $X^{ss}(L_1) = X^{ss}(L_2)$.*

La Proposición 3.1.3 nos dice que el cociente $X^{ss}//_L G$ es el mismo para cada haz lineal L perteneciente a una G-polarización, por lo que cada polarización determina un único GIT-cociente $X^{ss}//_L G$.

El grupo abeliano finitamente generado por el conjunto de clases $[L]_{alg}$ con $L \in Pic(X)^G$, es llamado el *grupo de Neron-Severi G-linealizado* y es denotado por $NS^G(X)$. Dado que el considerar un múltiplo de $L \in Pic(X)^G$ no cambia los puntos semiestables, es posible trabajar con coeficientes racionales, es decir, podemos considerar

$$NS^G_{\mathbb{Q}}(X) := NS^G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Sea $V(X)$ el cono convexo generado por los haces lineales amplios en $N^1_{\mathbb{R}}(X)$, donde $N^1_{\mathbb{R}}(X) = NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es el conjunto de clases de equivalencia numérica con coeficientes reales. Se tiene una función natural $f\colon NS^G_{\mathbb{R}}(X) \to N^1_{\mathbb{R}}(X)$, la cual simplemente se olvida de que el haz es G-linealizable. Entonces el conjunto

$$f^{-1}(V(X)) \cap NS^G_{\mathbb{Q}}(X),$$

está conformado por los haces G-linealizables y amplios. Consideremos el conjunto generado por las clases de haces lineales G-linealizables, G-efectivos y G-amplios, denotado por $C^G(X)$. M. Thaddeus prueba (ver [21, Teorema 2.3]) que $C^G(X)$ es un cono convexo y que es la intersección de $f^{-1}(V(X))$ con un poliedro racional en $NS^G_{\mathbb{R}}(X)$. En base a esto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.4. *El espacio de parámetros para los haces G-linealizables, G-amplios y G-efectivos, está definido por*

$$\mathcal{B} = NS^G_{\mathbb{Q}}(X) \cap C^G(X).$$

Demostración. Basta observar que $NS^G_{\mathbb{Q}}(X) \cap C^G(X)$ consta de las clases algebraicas de haces lineales que son G-linealizables, G-amplios y G-efectivos. □

En la sección 3.2 veremos que existe una estratificación de $\mathcal{B}$, que nos permite diferenciar los distintos cocientes obtenidos al variar la polarización.

3.2. Estratificación del espacio de parámetros

Definido nuestro espacio de parámetros $\mathcal{B}$, es posible definir una relación de equivalencia en $\mathcal{B}$.

Definición 3.2.1. Diremos que $L, L' \in \mathcal{B}$ son **GIT-equivalentes** si $X^{ss}(L) = X^{ss}(L')$.

Podemos observar que si dos polarizaciones L_1, L_2 son GIT-equivalentes entonces el conjunto de puntos estables es el mismo, es decir, $X^s(L_1) = X^s(L_2)$ y además los cocientes $X^{ss}//_{L_1}G$ y $X^{ss}//_{L_2}G$ son isomorfos. Utilizaremos la GIT-equivalencia para definir una estratificación en $\mathcal{B}$.

Definición 3.2.2.

i. Una **GIT-celda** σ es un subconjunto localmente cerrado, conexo y maximal de $\mathcal{B}$ tal que cualesquiera dos polarizaciones $L, L' \in \sigma \cap \mathcal{B}$ son GIT-equivalentes.

ii. Una **GIT-cámara** es una GIT-celda de dimensión maximal (es decir, con dimensión igual a $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{B}$).

iii. Una **GIT-pared** es una GIT-celda de codimensión 1 que separa a dos GIT-cámaras adyacentes.

Las GIT-celdas, cámaras y paredes dan una estratificación natural en el espacio de parámetros $\mathcal{B}$. Uno de los principales resultados en VGIT está relacionado con la finitud de esta estratificación.

Teorema 3.2.3. *[21, Teorema 2.4]. Existe sólo un número finito de GIT-cámaras (y por tanto un número finito de celdas y paredes). Además, la cerradura de una GIT-celda es un cono poliédrico racional convexo en $C^G(X)$.*

Observación 3.2.4. Del Teorema 3.2.3 tenemos

i. Existe sólo un número finito de GIT-clases de equivalencia. Tenemos que,

$$\mathcal{B}/\sim_{GIT} = \{[L_1], \ldots, [L_r]\},$$

y cada GIT-clase de equivalencia $[L_i]$ define un único GIT-cociente $X^{ss}//_{L_i}$.

ii. Soló puede existir un número finito de espacios moduli $(M_1, .., M_r)$ determinados por los distintos GIT-cocientes $X^s//_{L_i}G$, $i = 1, .., r$.

iii. Para cada $i = 1, .., r$, el conjunto de puntos semiestables $X^{ss}(L_i)$ es abierto. Por lo tanto sólo hay un número finito de subconjuntos abiertos de X que pueden ser vistos como $X^{ss}(L_i)$ para algún $i = 1, .., r$.

3.3. Cruce de GIT-paredes en VGIT

Una manera de entender el cambio en los GIT-cocientes (y por tanto en los espacios moduli) al pasar de una GIT-cámara a otra es ver qué es lo que ocurre al pasar por una GIT-pared que separa dichas GIT-cámaras.

Uno de los primeros resultados de VGIT está relacionado con el cambio de los puntos estables y semiestables de una polarización fija y cualquier otra polarización suficientemente cercana. Sea $L_0 \in \mathcal{B}$, $B_\epsilon(L_0)$ denota la bola Euclidiana de radio $0 < \epsilon << 1$ centrada en L_0. En [20, Proposición 4] N. Ressayre demuestre el siguiente teorema relacionado con el cambio en los puntos semiestables y estables de dos G-polarizaciones cercanas en $\mathcal{B}$.

Teorema 3.3.1. *Sea $L_0 \in \mathcal{B}$. Para cada G-polarización $L \in NS^G_{\mathbb{Q}}(X) \cap B_\epsilon(L_0)$, se tiene que*

$$X^s(L_0) \subseteq X^s(L) \subseteq X^{ss}(L) \subseteq X^{ss}(L_0).$$

El Teorema 3.3.1 nos dice que, para una G-polarización fija L_0, si consideramos otra G-polarización suficientemente cercana, el conjunto de puntos estables puede crecer, mientras que el conjunto de puntos semiestables puede decrecer. Por lo que el variar la polarización implica que el cambio en los cocientes se debe a agregar puntos estables y quitar puntos semiestables.

La cadena de contenciones del Teorema 3.3.1 implica que, si $X^s(L_0) \neq \emptyset$, existe un abierto, V, no vacío, contenido en $X^s(L)$ para toda G-polarización L suficientemente cercana. En este caso, al considerar los cocientes, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X^s//_L G \arrow[d, hook] & X^s//_{L_0} G \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] \\
X^{ss}//_L G \arrow[r, "\varphi"] & X^{ss}//_{L_0} G
\end{tikzcd}$$

Observamos que $V = X^s//_{L_0}G$ es un abierto común en los cocientes $X^{ss}//_L G$ y $X^{ss}//_{L_0}G$, por lo que, cuando ambos cocientes son irreducibles, φ es un morfismo birracional con abierto denso común V. En ciertos casos es posible dar más información sobre el morfismo φ. Un ejemplo de esto es la siguiente proposición:

Proposición 3.3.2. *Sean $\pi_{L_0} \colon X \to X^{ss}//_{L_0}G$ y $\pi_L \colon X \to X^{ss}//_L G$ las proyecciones de X a los respectivos cocientes. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $O(x_0) \subset X^{ss}(L_0) \setminus X^{ss}(L)$. Entonces para cada $x \in X^{ss}(L)$ con órbita cerrada tal que $\overline{O(x)} \cap X^{ss}(L_0) \supset O(x_0)$ se tiene la siguiente contracción $\varphi(\pi_L(x)) = \pi_{L_0}(x_0)$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_{L_0}"] \arrow[d, "\pi_L"] & X^{ss}//_{L_0}G \\
X^{ss}//_L G \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Entender la estructura del morfismo φ nos permite obtener información respecto al cambio en los cocientes al pasar de una GIT-cámara a otra.

Supongamos que L_0 está en una GIT-pared. Sean $L_-, L_+ \in \mathcal{B}$, G-polarizaciones pertenecientes a distintas GIT-cámaras adyacentes suficientemente cercanas a L_0, en esta situación se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.3.1.

$$X^s(L_0) \subseteq X^s(L_-) \cap X^s(L_+) \subseteq X^{ss}(L_-) \cap X^{ss}(L_+) \subseteq X^{ss}(L_0)$$

Demostración. Del Teorema 3.3.1 se tiene que:

$$X^s(L_0) \subseteq X^s(L_-) \subseteq X^{ss}(L_-) \subseteq X^{ss}(L_0) \text{ y}$$

$$X^s(L_0) \subseteq X^s(L_+) \subseteq X^{ss}(L_+) \subseteq X^{ss}(L_0),$$

de donde obtenemos las contenciones deseadas. □

En el contexto del Corolario 3.3.1 se tiene que todo punto L_0-estable en una GIT-pared es L_--estable y L_+-estable, por otro lado los puntos que son L_- y L_+ semiestables son L_0-semiestable, sin embargo, pueden existir puntos que sean L_--semiestables y L_+ inestables (y viceversa), pero L_0 semiestables. Se tienen los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & X^{ss}(L_-)\cap X^{ss}(L_+) \arrow[dl, hook] \arrow[dd, hook] \arrow[dr, hook] & \\
X^{ss}(L_-) \arrow[dr, hook] & & X^{ss}(L_+) \arrow[dl, hook] \\
 & X^{ss}(L_0) &
\end{tikzcd}$$

Sea $V = X^{ss}(L_-)\cap X^{ss}(L_+)$, entonces al momento de tomar cociente obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
 & V//G \arrow[dl, hook] \arrow[dd, hook] \arrow[dr, hook] & \\
X^{ss}//_{L_-}G \arrow[dr, "\varphi_-"] & & X^{ss}//_{L_+}G \arrow[dl, "\varphi_+"'] \\
 & X^{ss}//_{L_0}G &
\end{tikzcd}$$

Donde, bajo ciertas hipótesis (ver [21, Teorema 3.5]), φ_- y φ_+ son morfismos birracionales, con abierto denso común $V//G$, lo que induce un morfismo birracional $g\colon X^{ss}//_{L_-}G \to X^{ss}//_{L_+}G$. Obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^{ss}//_{L_-}G \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi_-"] & & X^{ss}//_{L_+}G \arrow[dl, "\varphi_+"'] \\
 & X^{ss}//_{L_0}G &
\end{tikzcd}$$

Lo anterior puede resumirse de la siguiente manera:

1. Existe un abierto, a saber V, que se conserva al pasar de una GIT-cámara a otra GIT-cámara adyacente cruzando la GIT-pared que las divide.

2. Este cruce involucra que el cambio en los GIT-cocientes, y por tanto en los espacios moduli, se debe a añadir puntos estables y quitar puntos semiestables.

3. Este proceso de añadir puntos estables o quitar puntos esta dado por los morfismos φ_- y φ_+ y puede verse como un "flip"sobre $X^{ss}//_{L_0}G$.

CAPÍTULO 4

VGIT para parejas de hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

En este capítulo presentamos el problema moduli para parejas de hipersuperficies (H_1, H_2), de grados d_1 y d_2, en $\mathbb{P}^n$ y veremos como se aplica la teoría de variación de GIT-cocientes en este problema.

4.1. Problema moduli de pareja de hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

Consideremos el problema moduli $(\mathcal{A}^n_{d_1,d_2}, \sim, \mathcal{F}, \approx)$, donde:

1. Objetos $\mathcal{A}^n_{d_1,d_2}$: conjunto de parejas ordenadas (H_1, H_2), donde H_1 y H_2 son hipersuperficies $\mathbb{P}^n$ de grados d_1 y d_2 respectivamente.

2. Relación de equivalencia $\sim$: $(H_1, H_2) \sim (H_1', H_2')$ si y sólo si existe $\gamma \in Aut(\mathbb{P}^n)$ tal que:
$$\gamma(H_i) = H_i',\ i = 1, 2.$$

3. Familia $\mathcal{F}$: sea S una variedad, una familia $\mathcal{F}$ parametrizada por S es el producto fibrado $F_1 \times_S F_2$, donde F_i es un subconjunto cerrado de $S \times \mathbb{P}^n$ tal que para todo $s \in S$ se tiene que
$$F_i \cap \{s\} \times \mathbb{P}^n,$$
es una hipersuperficie de grado d_i, para $i = 1, 2$.

4. Relación entre familias $\approx$: Sea S una variedad, entonces $F_1 \times_S F_2 \approx Q_1 \times_S Q_2$ si y sólo existe $\Gamma \in Aut(S \times \mathbb{P}^n)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \times_S Q_2 \arrow[rrr, "\pi_{Q_1}"] \arrow[ddd, "\pi_{Q_2}"'] & & & Q_1 \arrow[dl, "\Gamma"'] \arrow[ddl, bend left, "\pi_S"] \\
& F_1 \times_S F_2 \arrow[r, "\pi_{F_1}"] \arrow[d, "\pi_{F_2}"'] & F_1 \arrow[d, "\pi_S"'] & \\
& F_2 \arrow[r, "\pi_S"] & S & \\
Q_2 \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[urr, bend right, "\pi_S"'] & & &
\end{tikzcd}$$

y $\Gamma(Q_i) = F_i$ para $i = 1, 2$.

Definición 4.1.1. Un elemento de $\mathcal{A}^n_{d_1,d_2}$ es llamada **pareja de la forma** (d_1, d_2, n)**.**

4.2. VGIT para parejas de la forma (d_1, d_2, n)

En base a lo visto en la sección 2.6.1, el espacio de parámetros natural para los objetos de $\mathcal{A}^n_{d_1,d_2}$ está determinado por:

$$X := \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1))) \times \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_2))) \cong \mathbb{P}^{N_1} \times \mathbb{P}^{N_2},$$

donde $N_1 = \binom{d_1+n}{n} - 1$ y $N_2 = \binom{d_2+n}{n} - 1$.

Además, se tiene un acción lineal del grupo $G = SL(n+1, \mathbb{C})$ en X dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma \colon G \times X &\to X \\
(g, (H_1, H_2)) &\mapsto (gH_1, gH_2) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde gH_1 representa la acción dada en la definición 2.6.8.

Para estudiar las distintas polarizaciones, recordemos que $Pic(X) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ver [9, Corolario 6.17]), por lo que todo haz lineal L sobre X está determinado por dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$. Si L_1 y L_2 son haces lineales sobre $\mathbb{P}^{N_1}$ y $\mathbb{P}^{N_2}$ respectivamente, entonces $L = \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b))$, donde π_i es la proyección a $\mathbb{P}^{N_i}$ y $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $L_1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)$ y $L_2 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b)$.

$$\begin{tikzcd}
& L = \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b)) \arrow[d] & \\
L_1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a) \arrow[d] & X \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_1"] & L_2 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b) \arrow[d] \\
\mathbb{P}^{N_1} & & \mathbb{P}^{N_2}
\end{tikzcd}$$

Para simplificar la notación denotamos a $L = \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b))$ como $L = \mathcal{O}(a,b)$.

Por la fórmula de Künneth, se tiene que:

$$\begin{aligned} H^0(X,L) &= H^0(\mathbb{P}^{N_1} \times \mathbb{P}^{N_2}, \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b))). \\ &= H^0(\mathbb{P}^{N_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)) \otimes H^0(\mathbb{P}^{N_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b)). \end{aligned}$$

Si $a < 0$ ó $b < 0$, entonces $H^0(\mathbb{P}^{N_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_1}}(a)) = \{0\}$ ó $H^0(\mathbb{P}^{N_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_2}}(b)) = \{0\}$. Por lo tanto $H^0(X,L) = \{0\}$. Si $a = b = 0$, entonces L es el haz lineal trivial, el cual no es G-amplio. Por lo que estos casos no son de nuestro interés.

Por lo tanto, consideraremos enteros a, b no negativos y al menos uno de ellos no cero.

Proposición 4.2.1. *Sean $x = (H_1, H_2) \in X$ y $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro de G, entonces*

$$\mu^{\mathcal{O}(a,b)}(x,\lambda) = a\mu^{\mathcal{O}(1)}(H_1,\lambda) + b\mu^{\mathcal{O}(1)}(H_2,\lambda).$$

Demostración. Para x y $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ subgrupo a un parámetro se tiene que $\mu^L\colon Pic(X)^G \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos, además si $f\colon X \to Y$ es morfismo lineal G-equivariante, entonces $\mu^{f^*L}(x,\lambda) = \mu^L(fx,\lambda)$ [12, Página 49]. De estas dos propiedades tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu^{\mathcal{O}(a,b)}(x,\lambda) &= \mu^{\pi_1^*(\mathcal{O}(a)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}(b))}(x,\lambda). \\ &= \mu^{\pi_1^*(\mathcal{O}(a))}(x,\lambda) + \mu^{\pi_2^*(\mathcal{O}(b))}(x,\lambda). \\ &= \mu^{\mathcal{O}(a)}(\pi_1(x),\lambda) + \mu^{\mathcal{O}(b)}(\pi_2(x),\lambda). \\ &= a\mu^{\mathcal{O}(1)}(H_1,\lambda) + b\mu^{\mathcal{O}(1)}(H_2,\lambda). \end{aligned}$$

□

Cuando $a > 0$ podemos normalizar, dividiendo por a, sin alterar los resultados dados por la función μ de Mumford, obteniendo:

$$\frac{\mu^{\mathcal{O}(a,b)}(x,\lambda)}{a} = \mu^{\mathcal{O}(1)}(H_1,\lambda) + \frac{b}{a}\mu^{\mathcal{O}(1)}(H_2,\lambda).$$

Para simplificar notación, escribimos la función μ de Mumford para parejas de tipo (d_1, d_2, n) como:

$$\mu^t(x,\lambda) := \mu(H_1,\lambda) + t\mu(H_2,\lambda),\ t \in \mathbb{Q}^+. \tag{4.1}$$

Definición 4.2.2. Diremos que $L \in Pic(X)^G$ tiene **pendiente** $t \in \mathbb{Q}^+$ si $L \cong \mathcal{O}(a,b)$, $a > 0$ y $t = \frac{b}{a}$. Si $a = 0$ y $L \cong \mathcal{O}(a,b)$, diremos que L tiene pendiente ∞. En este contexto, denotaremos por $X^{ss}(t)$ (resp. $X^s(t)$) al conjunto de puntos t-semiestables (resp. t-estables) respecto a L y al correspondiente cociente por $M^{ss}(t, d_1, d_2, n)$ (resp. $M^s(t, d_1, d_2, n)$).

Teorema 4.2.3. *Una pareja (H_1, H_2) de la forma (d_1, d_2, n) es* 0*-estable (resp.* 0*-semiestable) si y sólo si H_1 es estable (resp. semiestable).*

Demostración. Sea $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro. Notemos que:

$$\mu^0((H_1, H_2), \lambda) = \mu(H_1, \lambda).$$

De donde se sigue que

$$\mu^0((H_1, H_2), \lambda) > (\text{resp.} \geq)\ 0 \text{ si y sólo si } \mu(H_1, \lambda) > (\text{resp.} \geq)\ 0.$$

□

Teorema 4.2.4. *Una pareja (H_1, H_2) de la forma (d_1, d_2, n) es ∞-estable si y sólo si H_2 es estable.*

Demostración. Sea $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro. Se tiene que

$$\mu^\infty((H_1, H_2), \lambda) = \mu(H_1, \lambda) + \infty\mu(H_2, \lambda) < 0 \text{ si y sólo si } \mu(H_2, \lambda) < 0$$

□

De la igualdad 4.1, observamos que el signo de $\mu^t((H_1, H_2), \lambda)$, y por tanto la t-estabilidad de (H_1, H_2), está determinado por los signos de $\mu(H_1, \lambda)$ y $t\mu(H_1, \lambda)$ y las interrelaciones que haya entre ellos, los siguientes teoremas nos muestran algunos de estos casos.

Teorema 4.2.5. *Una pareja (H_1, H_2) de la forma (d_1, d_2, n) es t-estable (resp. t-semiestable) si y sólo si (H_2, H_1) es $\frac{1}{t}$-estable (resp. $\frac{1}{t}$-semiestable).*

Demostración. Sea $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro. El teorema se sigue de observar que:

$$0 > (\text{resp.} \geq)\ \mu^t((H_1, H_2), \lambda) = \mu(H_1, \lambda) + t\mu(H_2, \lambda),$$

si y sólo si

$$0 > (\text{resp.} \geq)\ \mu(H_2, \lambda) + \frac{1}{t}\mu(H_1, \lambda) = \mu^{\frac{1}{t}}((H_2, H_1), \lambda).$$

□

Teorema 4.2.6. *Se tiene que $M^{ss}(t, d_1, d_2, n) \cong M^{ss}(\frac{1}{t}, d_2, d_1, n)$.*

Demostración. El isomorfismo está dado por:

$$\begin{gathered} \varphi\colon M^{ss}(t, d_1, d_2, n) \to M^{ss}(\frac{1}{t}, d_2, d_1, n) \\ (H_1, H_2) \mapsto (H_2, H_1). \end{gathered}$$

Por el Teorema 4.2.5, φ está bien definido y es inyectivo ya que, si $\varphi((H_1, H_2)) = \varphi((H_1', H_2'))$, entonces $(H_2, H_1) = (H_2', H_1')$, es decir $H_i = H_i'$ para $i = 1, 2$ y por tanto $(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$. Además, dado $(H_2, H_1) \in M^{ss}(\frac{1}{t}, d_2, d_1, n)$ se sigue que $(H_1, H_2) \in M^{ss}(t, d_1, d_2, n)$ y $\varphi((H_1, H_2)) = (H_2, H_1)$, por lo que φ es sobreyectivo. □

En base al Teorema 4.2.6, sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante, podemos suponer que $d_1 \geq d_2$.

Teorema 4.2.7. *Sea (H_1, H_2) una pareja de la forma (d_1, d_2, n). Supongamos que H_1 es $\mathcal{O}(a)$-estable.*

a. Si H_2 es $\mathcal{O}(b)$-semiestable, entonces (H_1, H_2) es t-estable para $t = \frac{b}{a}$.

b. Si H_2 es $\mathcal{O}(b)$-inestable, existe $M > 0$ tal que (H_1, H_2) es t-inestable siempre que $t > M$.

Demostración. Sea $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro, como H_1 es $\mathcal{O}(a)$-estable se tiene que $a\mu(H_1, \lambda) < 0$.

a. Supongamos que H_2 es $\mathcal{O}(b)$-semiestable, entonces $b\mu(H_2, \lambda) \leq 0$ y con ello

$$a\mu(H_1, \lambda) + b\mu(H_2, \lambda) \leq a\mu(H_1, \lambda) < 0,$$

por lo que (H_1, H_2) es t-estable con $t = \frac{b}{a}$.

b. Como H_2 es $\mathcal{O}(b)$-inestable se tiene que $\mu(H_2, \lambda_0) > 0$ para algún $\lambda_0\colon \mathbb{C}^* \to G$ subgrupo a un parámetro, además $\mu(H_1, \lambda_0) < 0$, pues H_2 es $\mathcal{O}(a)$-estable. Definimos $M = -\frac{\mu(H_1,\lambda_0)}{\mu(H_2,\lambda_0)} > 0$ y supongamos que $t > M$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(H_1, \lambda_0) + t\mu(H_2, \lambda_0) &> \mu(H_1, \lambda_0) + M\mu(H_2, \lambda_0). \\ &= \mu(H_1, \lambda_0) - \frac{\mu(H_1, \lambda_0)}{\mu(H_2, \lambda_0)}\mu(H_2, \lambda_0). \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que (H_1, H_2) es t-inestable.

□

Teorema 4.2.8. *Supongamos que H_1 es $\mathcal{O}(a)$-inestable y que H_2 es $\mathcal{O}(b)$-estable. Existe $M > 0$ tal que (H_1, H_2) es t-inestable siempre que $t < M$.*

Demostración. Existe λ_0 tal que $\mu(H_1, \lambda_0) > 0$, como H_2 es estable se tiene que $\mu(H_2, \lambda_0) < 0$. Sea $M = -\frac{\mu(H_1,\lambda_0)}{\mu(H_2,\lambda_0)}$ y supongamos que $t < M$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu^t((H_1, H_2), \lambda_0) &= \mu(H_1, \lambda_0) + t\mu(H_2, \lambda_0). \\ &> \mu(H_1, \lambda_0) + M\mu(H_2, \lambda_0). \\ &= \mu(H_1, \lambda_0) - \frac{\mu(H_1, \lambda_0)}{\mu(H_2, \lambda_0)}\mu(H_2, \lambda_0). \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que (H_1, H_2) es t-inestable □

Observación 4.2.9. El los Teoremas 4.2.10 y 4.2.11, podemos omitir el prefijo $\mathcal{O}$-estable, en el siguiente sentido: si H_i es $\mathcal{O}(a)$-estable y a' es otro entero positivo, entonces H_i es $\mathcal{O}(a')$-estable, esto es debido a que el multiplicar o dividir por un número positivo no altera el signo de la función μ de Mumford y por tanto la estabilidad se conserva. Lo mismo ocurre con la inestabilidad y la semiestabilidad. Por tanto, para simplificar notación solo diremos que un H_i es estable, semiestable o inestable.

En base a la Observación 4.2.9, podemos reescribir los teoremas anteriores como:

Teorema 4.2.10. *Sea (H_1, H_2) una pareja de la forma (d_1, d_2, n). Supongamos que H_1 es estable.*

a. Si H_2 es semiestable, entonces (H_1, H_2) es t-estable para $t \in \mathbb{Q}^+$.

b. Si H_2 es inestable, existe $M > 0$ tal que (H_1, H_2) es t-inestable siempre que $t > M$.

Teorema 4.2.11. *Supongamos que H_1 es inestable y que H_2 es estable. Existe $M > 0$ tal que (H_1, H_2) es t-inestable siempre que $t < M$.*

El siguiente teorema es consecuencia de la teoría de variación de GIT-cocientes (ver Teorema 3.2.3).

Teorema 4.2.12. *Existe un número finito de pendientes, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_r$, donde $t_i \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$ tales que:*

a. $M^{ss}(t, d_1, d_2, n) \neq \emptyset$ si y sólo si $t \in [t_0, t_r]$.

b. $M^{ss}(t, d_1, d_2, n)) \cong M^{ss}(t', d_1, d_2, n)$ si $t, t' \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, .., r-1$.

De aquí en adelante consideramos $t \in [t_0, t_r]$. Notar que t_r puede ser infinito.

Si $d_2 > 2$, por el Teorema 2.6.10 y la Proposición 4.2.10, las parejas (H_1, H_2) formadas por hipersuperficies no singulares son t-estables para toda $t \in [t_0, t_r]$. En otras palabras, el conjunto de tales parejas está contenido en todo GIT-cociente $M^{ss}(t, d_1, d_2, n)$.

4.2.1. Casos particulares para parejas de la forma $(d, 1, n)$

En esta sección consideraremos una pareja (H_1, H_2) de la forma $(d, 1, n)$, es decir una hipersuperficie de grado d y un hiperplano en $\mathbb{P}^n$. Esta pareja está definida por los polinomios:

$$f_{H_1}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) = \sum a_{i_0,\dots,i_n} Y_0^{d-i_1-\dots-i_n} Y_1^{i_1} \dots Y_n^{i_n}, \ a_{i_0,\dots,i_n} \in \mathbb{C}.$$
$$f_{H_2}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{j=0}^{n} b_j Y_i, \ b_j \in \mathbb{C}.$$

Teorema 4.2.13. *Si $t > \frac{d}{n}$, entonces la pareja (H_1, H_2) de la forma $(d, 1, n)$ es t-inestable.*

Demostración. Bajo un cambio de coordenadas podemos suponer que $f_{H_2} = Y_n$. Consideremos a $\lambda_0 \colon \mathbb{C}^* \to G$ el subgrupo a un parámetro definido por $r_0 = r_1 = ... = r_{n-1} = 1$ y $r_n = -n$, entonces:

$$\mu(H_2, \lambda_0) = n \text{ y } \mu(H_1, \lambda_0) = \min\{-d + (n+1)i_n \mid a_{i_0,\dots,i_n} \neq 0\},$$

y con ello

$$\begin{aligned} \mu^t((H_1, H_2), \lambda_0) &= \mu(H_1, \lambda_0) + t\mu(H_2, \lambda_0). \\ &= \min\{-d + (n+1)i_n \mid a_{i_0,\dots,i_n} \neq 0\} + tn. \\ &\geq -d + tn. \end{aligned}$$

Por tanto, si $t > \frac{d}{n}$, se tiene que

$$\mu^t((H_1, H_2), \lambda_0) > 0,$$

y con ello (H_1, H_2) es inestable. □

Del Teorema 4.2.13 se sigue el siguiente corolario:

Corolario 4.2.1. *Para parejas (H_1, H_2) de la forma $(d, 1, n)$, $t_r \leq \frac{d}{n}$.*

Proposición 4.2.14. *Toda pareja (H_1, H_2) de la forma $(1, 1, n)$ con $n > 1$ es t-inestable para todo $t \leq \frac{1}{n}$.*

Demostración. Elijamos coordenadas tales que $f_{H_1} = Y_n$. Sea $t \leq \frac{1}{n}$, tenemos dos casos:

i. Caso $b_0 = 0$. Consideremos $\lambda_0 \colon \mathbb{C}^* \to G$ el subgrupo a un parámetro dado por $r_0 = n$ y $r_1 = \cdots = r_n = -1$, entonces

$$\mu(H_1, \lambda_0) = 1 = \mu(H_2, \lambda_0),$$

por lo que $\mu^t((H_1, H_2), \lambda_0) > 0$, lo que implica que (H_1, H_2) es t-inestable.

ii. Caso $b_0 \neq 0$. Sea $\lambda_0 \colon \mathbb{C}^* \to G$ el subgrupo a un parámetro dado por $r_0 = \cdots = r_{n-1} = 1$ y $r_n = -n$, entonces

$$\mu(H_1, \lambda_0) = n \text{ y } \mu(H_2, \lambda_0) = -1,$$

por lo que

$$\mu^t((H_1, H_2), \lambda_0) = n - t \geq n - \frac{1}{n} > 0,$$

lo que implica que (H_1, H_2) es t-inestable.

□

De del Teorema 4.2.13 y la Proposición 4.2.14, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.2.2. *No existe espacio moduli para las parejas (H_1, H_2) de la forma $(1, 1, n)$ con $n > 1$.*

Es importante mencionar que la determinación de las pendientes está relacionada con la interrelación de las hipersuperficies, como por ejemplo de la forma en que éstas se intersectan y de las posibles singularidades que se presenten. Radu Laza, en su artículo *Deformations of singularities and variation of GIT quotients [16]*, considera parejas (C, P) de la forma $(d, 1, 2)$, es decir, parejas conformadas por una curva plana de grado d y una línea en $\mathbb{P}^2$, obteniendo varios resultados generales como:

1. [16, Lema 2.16] Si P es transversal a C, entonces la pareja (C, P) es $\frac{d}{2}$-semiestable.
2. [16, Lema 2.17] La pareja (C, P) es $\frac{d}{2}$-semiestable si y sólo si P no es una componente de C y $(mult)_p(C \cap P) \leq \frac{d}{2}$ para todo $p \in C \cap P$.
3. [16, Lema 3.1] Las pendientes críticas para una pareja de la forma $(5, 1, 2)$ son: 0, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$, 1, $\frac{10}{7}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{13}{7}$, 2, $\frac{11}{5}$ y $\frac{5}{2}$.
4. [16, Corolario 3.2] Sea (C, P) una pareja de la forma $(5, 1, 2)$. Suponga que $C + P$ es reducida. Entonces la pareja (C, P) es estable (semiestable) en $t = 1$ si y sólo si $C+P$ tiene, en el peor de los casos, singularidades simples (singularidades elípticas simples o cúspides).

.

Bibliografía

[1] David Ben-Zvi, *Moduli Spaces*, Princeton Companion to Mathematics, ed. T. Gowers. Princeton University Press, (2008).

[2] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*, London Mathematical Society Lectures Note series. 296.

[3] I. Dolgachev, Hu, Y., *Variation of geometric invariant theory quotients*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 87(1), 5-51, (1998).

[4] J. Fogarty, *Invariant theory (No. 29)*, New York, WA Benjamin,(1969).

[5] B. Fantechi, *Stacks for everybody.* In European Congress of Mathematics (pp. 349-359). Birkhäuser Basel. (2001).

[6] B. Fantechi, *Fundamental algebraic geometry: Grothendieck's FGA explained*(No. 123). American Mathematical Soc, (2005).

[7] T. L. Gómez, *Algebraic stacks*, Proceedings Mathematical Sciences, 111(1), 1-31, (2001).

[8] S. Mukai, *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge, University Press, (2003).

[9] R. Hartshorne, *Algebraic geometry (Vol. 52)*, Springer Science & Business Media, (1977).

[10] Hermann Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representatios*, Princeton University Press, Princeton, N. J. , (1939),

[11] James E. Humphreys, *Linear Algebraic Group*, Springer-Verlag, New York (1981).

[12] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), Springer-Verlag, Berlin, third edition, (1994).

[13] Kollár, J., Mori, S., *Birational geometry of algebraic varieties (Vol. 134)*, Cambridge university press, (2008).

[14] J. Le Pottier, *Lectures on vector bundle*, Cambridge University Press, (1997).

[15] R. Laza, *GIT and moduli with a twist*, Handbook of moduli (2011).

[16] R. Laza, *Deformations of singularities and variation of GIT quotients*, Transactions of the American Mathematical Society 361.4 (2009): 2109-2161.

[17] P.E. Newstead, *Lectures on introduction to moduli space problems and orbit spaces*, Tata Institute of fundamental research, Bombay, Springer-Verlag, (1978).

[18] A. H. Schmitt, *Geometric invariant theory and decorated principal bundles*, European Mathematical Society, (2008).

[19] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, J. reine angew. Math. (Crelle's journal) 54 (1857), 115-155.

[20] N. Ressayre, *The GIT-equivalence for G-line bundles*, Geometriae Dedicata, 81(1), (2000): 295-324.

[21] M. Thaddeus, *Geometric invariant theory and flips*, Journal of the American Mathematical Society 9.3 (1996): 691-723.

[22] C. Okonek, Schneider, M., Spindler, H., and Gelfand, S. I., *Vector bundles on complex projective spaces (Vol. 3)*, Boston: Birkhäuser, (1980).

[23] William J. Haboush, *Reductive groups are geometrically reductive*, Ann. of Math., (2), 102, (1975)