



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Teoría de rotación para homeomorfismos solenoidales

T E S I S

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
con Orientación en
Matemáticas Básicas

P r e s e n t a
**Francisco José López
Hernández**

Directores de Tesis:
Dr. Manuel Cruz López
Dr. Xavier Gomez-Mont Ávalos

Guanajuato, Gto.. junio de 2017

Agradecimientos

Quisiera iniciar agradeciendo a mis padres Gregorio López y Ricarda Henández quienes han sido mi motivación y mi fuerza para luchar cuando mis constantes, muy constantes errores me meten en dificultades, ustedes han sido mi mayor ejemplo de perseverancia y esfuerzo. Gracias por estar siempre para apoyarme, los amo. Quiero también agradecer a mis hermana Mónica que me dio dos hermosos sobrinos, Brianna la alegría de la casa y el pequeño Tadeo a quien todavía no conozco (esto del doctorado te priva de algunos momentos) pronto estaré jugando con ustedes enanos.

Casi siete años en Guanajuato, lugar donde hice tantos amigos que quisiera agradecer que realmente es difícil mencionar a todos pero aquí va un intento: Mauro, Thalía, Pancho, PPL, Isa, Tulio, Hugo, Santana, Oliver, Jonatán, Ramiro, Ronaldo, Adrian, Mondra, Dani, Gabriel, Gustavo, Pamela, Norma, Jenny, Malors, Leal, Mario (Cumbias)... ¡joles si es difícil mencionar a todos, mejor a los demás les debo una cerveza.

Agradezco a mi asesor el Dr. Manuel Cruz López por darme la oportunidad de trabajar con él, por instruirme y aconsejarme en este proyecto y gracias también por permitirme aprender de usted como persona. Al Dr. Alberto Verjovsky y al Dr. Carlos Cabrera por recibirme durante mi estancia en el IMATE (unidad Cuernavaca) y de quienes recibí consejos para este trabajo.

A la institución que me dio su respaldo estos años el Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT) incluidas todas las personas que en el trabajan y quienes me ayudaron de alguna o de otra manera. A los Doctores Pedro Luis Del Ángel, Victor Núñez y Mónica Moreno por sus enseñanzas durante toda mi estancia en Cimat. También un agradecimiento especial al departamento de servicios escolares, con Janet, Lalo y Lolita quienes en muchas ocasiones me ayudaron cuando no sabía ni que onda con los trámites, gracias por su paciencia. Por último agradezco a CONACyT por el apoyo económico brindado durante la realización de mis estudios de doctorado.

Muchas gracias, este o no tu nombre aquí, por cada experiencia cuenta.

Índice general

1. Introducción	7
2. Teoría clásica de rotación	13
2.1. Teoría de rotación en \mathbb{T}^1	13
2.2. Teoría de rotación en \mathbb{T}^2	17
3. Teoría de rotación para homeomorfismos solenoidales	21
3.1. El solenoide universal y su espacio de homeomorfismos	21
3.1.1. El solenoide universal unidimensional	21
3.1.2. El grupo de homeomorfismos isotópicos a la identidad	25
3.1.3. La función de desplazamiento de elementos en $\widehat{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$.	27
3.2. Rotación y ciclos asintóticos	31
3.3. Interpretación geométrica	34
3.4. Rotación y medidas invariantes	36
4. Dinámica de homeomorfismos solenoidales	41
4.1. Dinámica cociente	41
4.2. Homeomorfismos inducidos	43
4.3. Dinámica de homeomorfismos inducidos	47
4.4. Desplazamiento equi-límite periódico	49
4.4.1. Dinámica racional	51
5. Teoría de rotación en grupos abelianos compactos	53

Capítulo 1

Introducción

H. Poincaré (ver [Poi]) introdujo un invariante de conjugación topológica para homeomorfismos del círculo \mathbb{T}^1 que preservan orientación llamado el *número de rotación* definido a través de la propiedad de levantamientos al espacio cubriente universal \mathbb{R} del círculo.

Denotemos por $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ al grupo de homeomorfismos que preservan orientación de \mathbb{T}^1 y sea $\widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$ el espacio que contiene las funciones real valuadas que son levantamientos de funciones en $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. Definamos $\tau : \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tau(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Dado que la función τ es \mathbb{Z} -invariante y no depende de la elección de x , éste puede ser proyectado a un único $\rho(f) = \pi(\tau(f)) \in \mathbb{T}^1$. Por lo tanto, para cualquier $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ tenemos un elemento distinguido $\rho(f)$ llamado el *número de rotación de Poincaré*, el cual nos da información de la dinámica topológica generada por f , resumida en los siguientes casos:

1. $\rho(f)$ es racional si y sólo si f tiene un punto periódico;
2. si $\rho(f)$ es irracional, entonces f es semi-conjugada a la rotación irracional por $\rho(f)$.

Esta teoría fue generalizada a los llamados *conjuntos de rotación* para homeomorfismos del toro \mathbb{T}^2 isotópicos a la identidad de una manera similar como en el caso de $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. El conjunto de rotación de cualquier $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^2)$, denotado como $\rho(f)$, es un subconjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^2 (ver [M-Z]).

El teorema de J. Franks nos da información dinámica (ver [Fra]) similar a la parte (1) de la descripción anterior en el caso en que $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^2)$ es tal que $\rho(f)$ no tiene interior vacío. Si un vector v está en el interior del conjunto de rotación $\rho(f)$ y tiene ambas coordenadas racionales, entonces existe un punto periódico $x \in \mathbb{T}^2$ con la propiedad que

$$\frac{F^q(x_0) - x_0}{q} = v,$$

para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^2$ levantamiento de x y q es el periodo de x .

Por otro lado, T. Jaeger obtuvo una versión del teorema de semi-conjugación (ver [Jag]) similar a la parte (2) del teorema de Poincaré para pseudo-rotaciones irracionales con desplazamiento promedio acotado.

La teoría de rotación fue generalizada para homeomorfismos de la recta real con desplazamiento acotado por J. Kwapisz en [Kwa] y nos da una generalización de los conjuntos de rotación como en el caso del toro, en particular esto nos da una definición de conjunto de rotación para el caso en el que el desplazamiento es una función casi-periódica. Algunos aspectos de esta teoría fueron introducidos por M. Pollicott para variedades compactas arbitrarias en [Pol] y recientemente la teoría fue generalizada a grupos solenoidales por A. Verjovsky y M. Cruz López en [C-V], dando un teorema de semi-conjugación para el caso de pseudo-rotaciones irracionales con desplazamiento promedio acotado. Un resumen más detallado sobre otras generalizaciones de esta teoría puede ser encontrado en [A-J].

En este trabajo de tesis se desarrolla la teoría de rotación para homeomorfismos del solenoide universal uni-dimensional desde distintos puntos de vista, de manera particular usamos el trabajo realizado por J. Kwapisz en [Kwa] y por A. Verjovsky y M. Cruz López en [C-V] para obtener información dinámica en cierta clase de homeomorfismos.

El *solenoide universal unidimensional* es definido como el límite inverso de la torre de cubrientes no ramificados de \mathbb{T}^1 ,

$$\mathcal{S} := \varprojlim_n (\mathbb{T}^1, p_n),$$

junto con homomorfismos suprayectivos determinado por la proyección sobre la n -ésima coordenada

$$\pi_n : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{T}^1.$$

La proyección sobre la primer coordenada π_1 define un $\widehat{\mathbb{Z}}$ -haz localmente trivial

$$\widehat{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{T}^1,$$

donde

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

es la completación profinita de \mathbb{Z} , el cual es un grupo topológico abeliano, compacto, perfecto y totalmente desconexo homeomorfo al conjunto de Cantor. Dado que \mathbb{Z} es residualmente finito, su completación profinita $\widehat{\mathbb{Z}}$ admite una inclusión densa de \mathbb{Z} . También tenemos una inclusión densa de \mathbb{R} en \mathcal{S} , $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}$. Para más detalles ver sección 3.1.1.

En la sección 3.1.3 de este trabajo se estudia la función de desplazamiento para homeomorfismos solenoidales isotópicos a la identidad. Además se hace una comparación con la función de desplazamiento de homeomorfismos del círculo que preservan orientación. Si $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ tenemos un homeomorfismo $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es levantamiento de f , y que satisface que su función de desplazamiento

$$\delta := F - \text{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es periódica. La función de desplazamiento para homeomorfismos solenoidales isotópicos a la identidad, $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$, puede ser definida usando su levantamiento al “espacio cubriente” $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ (ver sección 3.1.2). Estos homeomorfismos pueden ser descritos de la forma

$$(x, k) \mapsto (F_k(x), k) := (x + \delta_k(x), k),$$

donde $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y creciente con $\delta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Así, para todo $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$, la *función de desplazamiento* es definida como

$$\delta_k = F_k - \text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas con la topología compacto-abierta. Tenemos definida una \mathbb{R} -acción sobre $C(\mathbb{R})$ dada por

$$(s, \delta) \mapsto \delta^s$$

donde $\delta^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $\delta^s(x) = \delta(x + s)$. Denotemos por $\Omega(\delta)$ a la cerradura de la órbita de δ bajo esta acción. Una función δ es *casi-periódica* si $\Omega(\delta)$ es compacta. En este caso podemos definir una estructura de grupo topológico sobre $\Omega(\delta)$. El teorema de clasificación de funciones casi-periódicas (ver [Bohr]) afirma que $\Omega(\delta)$ sólo puede ser isomorfa a los siguientes casos

1. El círculo en el caso *periódico*.
2. \mathbb{T}^n con $n > 1$ en el caso *quasi-periódico*.
3. Un grupo solenoidal en el caso *puramente límite periódico*.

En este caso se demuestra que si δ_0 es la función de desplazamiento de $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ para $k = 0$, entonces $\Omega(\delta_0)$ es grupo topológico cociente de \mathcal{S} , es decir, se puede escribir de la forma

$$\Omega(\delta_0) \cong \mathcal{S} / \ker(K),$$

donde $\ker(K)$ es el kernel de un homomorfismo continuo $K : \mathcal{S} \rightarrow \Omega(\delta_0)$. Como consecuencia inmediata a este hecho es que podemos describir la función de desplazamiento para homeomorfismos solenoidales isotópicos a la identidad que preservan orientación de la siguiente manera.

Teorema 3.1.17 Para todo $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ la función de desplazamiento $\delta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica o puramente límite periódica.

En la sección 4.1 se prueba que dado $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ con función de desplazamiento para $k = 0$ denotado por δ_0 , existe un homeomorfismo isotópico a la identidad que preserva orientación $g : \Omega(\delta_0) \rightarrow \Omega(\delta_0)$ tal que g es semi-conjugado a f vía K , i.e. se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow K & & \downarrow K \\ \Omega(\delta_0) & \xrightarrow{g} & \Omega(\delta_0) \end{array}$$

Estudiamos un ejemplo sobre como esta semi-conjugación nos da información de la dinámica generada por un homeomorfismo f , el caso cuando

$$\Omega(\delta_0) \cong \mathcal{S} / \ker(K) \cong \mathbb{T}^1$$

llamado el subespacio de *homeomorfismos inducidos* por una función periódica que denotaremos por $\text{Homeo}_I(\mathcal{S})$ (comparar [R-T-L]). Este espacio es estudiado en la sección 4.2 para el caso de homeomorfismos solenoidales isotópicos a la identidad que preservan orientación.

A lo largo de la sección damos una descripción de estos homeomorfismos, los cuales satisfacen que para algún $n \in \mathbb{Z}_+$, tenemos un homeomorfismo que preserva la orientación $f_n : \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi_n \\ \mathbb{R}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}/n\mathbb{Z}. \end{array}$$

También damos una descripción de los levantamientos de este tipo de homeomorfismos, el conjunto de los cuales denotaremos por $\text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S})$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, y serán llamados *homeomorfismos inducidos de grado n*. Observemos que si $n|m$, donde $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S}) \subset \text{Homeo}_{I_m}(\mathcal{S}),$$

y tenemos que

$$\text{Homeo}_I(\mathcal{S}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S})$$

Este subespacio de $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ tiene una estructura de grupo y coincide con el sub-espacio denso en $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ de los homeomorfismos que tienen desplazamiento periódico. También probamos que

$$\text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S}) \cong \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1).$$

Usando la extensión central universal (ver [Ghys])

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow 1$$

obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1) & \longrightarrow & \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_\alpha & \longrightarrow & \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow 1 \end{array}$$

donde R_α denota traslación entera en \mathcal{S} .

Luego, la dinámica de homeomorfismos inducidos puede ser descrita usando la teoría de rotación de Poincaré para $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. En [C-V] los autores estudian la dinámica del caso cuando el número de rotación es irracional para homeomorfismos solenoidales isotópicos a la identidad que preservan orientación, pero no prestan atención al caso racional. Para completar el cuadro de la teoría de Poincaré en el caso de homeomorfismos inducidos, introducimos la siguiente definición que captura

la idea de racionalidad.

Definición 4.3.2 Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$. Decimos que $s \in \mathcal{S}$ es p/q -fibra periódica si existen $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$f^q(s) = s + \sigma(p),$$

donde la suma es a lo largo de las hojas. Notemos que el nombre “fibra periódico” es debido al hecho que los puntos están regresando a la p -fibra en s de manera periódica después de q iterados, en este caso llamaremos a la órbita de s una p/q -fibra.

La relación entre la dinámica generada por el homeomorfismo $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ y la dinámica generada por el homeomorfismo $f \in \text{Homeo}_I(\mathcal{S})$ es descrita en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.3 Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ inducida por $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. Se cumple lo siguiente

1. Si $\rho(f) = p/q$, entonces cualquier punto $s \in \mathcal{S}$ es un punto p/q -fibra periódico o la órbita de s es asintótica a la órbita de un punto p/q -fibra periódico.
2. Si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, entonces f es semi-conjugado a la rotación por $\rho(f)$.

La parte fundamental de la prueba de este teorema es que estos homeomorfismos son pseudo-rotaciones que satisfacen la condición de desplazamiento promedio acotado. En la sección 4.4 se hace un estudio de una familia más amplia que satisface dichas condiciones, descritas a continuación.

Definición 4.4.1 Una familia de funciones \mathcal{F} se dice *equi-casi-periódica* si para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto relativamente denso $\tau(\epsilon)$ de números de traslación para toda $\phi \in \mathcal{F}$ y se llamará *equi-límite periódica* cuando además se trata de una familia de funciones límites periódicas.

Estudiamos el caso en el que $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ genera una familia de homeomorfismos con funciones de desplazamiento equi-límite periódico, esto es, si la familia de funciones $\{F^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, donde cada F^n es el levantamiento a $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ de f^n , tiene desplazamiento equi-límite periódico. Al espacio que consiste de todos los homeomorfismos con dicha propiedad lo denotaremos por $\text{Homeo}_U(\mathcal{S})$. Concluimos con el siguiente resultado.

Definamos $D_x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ el desplazamiento en la hoja base y como $D_x(n) = F_0^n(x) - x$ el desplazamiento del n -ésimo iterado en la hoja base.

Teorema 4.4.4 Sea $f \in \text{Homeo}_U(\mathcal{S})$. Entonces

1. D_x define un quasi-homomorfismo del subgrupo generado por f en \mathbb{R} .
2. El conjunto de rotación consiste de un solo punto, es decir, es una pseudo-rotación.
3. f satisface la condición de desplazamiento promedio acotado.

Para finalizar este trabajo de tesis en el capítulo 5 se propone extender esta teoría a grupos topológicos compactos abelianos en general.

Capítulo 2

Teoría clásica de rotación

En este capítulo haremos un muy breve repaso de la teoría de rotación para homeomorfismos del círculo que preservan orientación y su generalización para homeomorfismos que preservan orientación del toro.

2.1. Teoría de rotación en \mathbb{T}^1

Sea $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el toro de dimensión 1. Este puede ser identificado con el círculo unitario \mathbb{S}^1 , los complejos de norma 1 con la topología de subespacio que tiene estructura de grupo topológico abeliano y además es compacto. Denotemos por $C(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$ al conjunto de funciones continuas de \mathbb{T}^1 en si mismo. El *grupo de homeomorfismos* de \mathbb{T}^1

$$\text{Homeo}(\mathbb{T}^1) = \{f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1 \mid f \in C(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1) \text{ y } f^{-1} \in C(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)\},$$

admite un descomposición

$$\text{Homeo}(\mathbb{T}^1) \cong \text{Aut}(\mathbb{T}^1) \times \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1),$$

donde $\text{Aut}(\mathbb{T}^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el grupo de automorfismos de \mathbb{T}^1 y $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ son los homeomorfismos de \mathbb{T}^1 que preservan el orden cíclico de \mathbb{T}^1 . Haremos un breve resumen de la dinámica de funciones que son isotópicas a la identidad.

Iniciemos con un ejemplo: el de las rotaciones rígidas.

Ejemplo 2.1.1. Sea $\omega \in \mathbb{T}^1$ y definamos $r_\omega : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ dada por

$$r_\omega(\exp(2\pi i\theta)) = \exp(2\pi i(\theta + \omega)).$$

La siguientes propiedades son bien conocidas:

1. Si $\omega = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, con $\text{mcd}(p, q) = 1$, entonces la órbita $\mathcal{O}(\theta) := \{r_\omega^n(\theta) : n \in \mathbb{Z}\}$ es periódica de periodo q , para todo θ .

2. Si $\omega \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entonces todas las órbitas $\mathcal{O}(\theta)$ son densas en \mathbb{T}^1 .

Este ejemplo es muy importante para el entendimiento de la dinámica de funciones en $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, ya que en la idea original de Poincaré se logró comparar la dinámica de cualquier homeomorfismo del círculo con la dinámica de las rotaciones rígidas, y esto se da a través de las conjugaciones o semi-conjugaciones.

Definición 2.1.2. Denotemos por $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$ la aplicación cubriente, llamada el recubridor universal

$$x \mapsto \exp(2\pi ix).$$

Sea f en $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. Un levantamiento de f es una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi F(x) = f\pi(x)$; o equivalentemente, tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

conmuta. Dado que un homeomorfismo f del círculo es continuo, podemos elegir un levantamiento F de f de manera que también sea continuo. En lo sucesivo supondremos que todos los levantamientos son continuos. Denotaremos por $\widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$ al conjunto de dichas funciones F .

Esto nos será muy útil, ya que se puede estudiar la dinámica de los homeomorfismos del círculo a través de la dinámica de funciones reales.

Definición 2.1.3. Sea G un grupo. Un quasihomomorfismo de G es una función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para algún $C > 0$ fijo

$$|f(a \cdot b) - f(a) - f(b)| \leq C,$$

para todo $a, b \in G$.

Si $x \in \mathbb{R}$, denotemos por $D_x : \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ a la asignación

$$F \mapsto D_x(F) := F(x) - x,$$

que llamaremos la función de desplazamiento. Probaremos que esta aplicación define un quasihomomorfismo de $\widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$. Nos auxiliaremos del siguiente hecho:

Lema 2.1.4. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|D_x(F) - D_y(F)| \leq 1$

Teorema 2.1.5. D_x define un quasi-homomorfismo.

Demostración. Si $F, G \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$, entonces

$$\begin{aligned} |D_x(F \circ G) - D_x(F) - D_x(G)| &= |F(G(x)) - F(x) - G(x) + x| \\ &= |F(G(x)) - G(x) - F(x) + x| \\ &= |D_{G(x)}(F) - D_x(F)| \leq 1. \end{aligned}$$

□

Dada $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$ y $n \in \mathbb{Z}$, definamos

$$a_n := D_x(F^n) = F^n(x) - x.$$

Notemos que por el teorema anterior esto define un quasi-homomorfismo de \mathbb{Z} a través de un subgrupo de $\widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$ con un generador $n \rightarrow a_n$. El siguiente lema muestra un hecho importante sobre los quasi-homomorfismos de \mathbb{Z} , se presentará sin demostración la cual puede ser revisada en [Nav].

Lema 2.1.6. *Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales. Supongamos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ define un quasi-homomorfismo de \mathbb{Z} a \mathbb{R} ; es decir, existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leq C, \quad (2.1.1)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces, existe un único $\tau \in \mathbb{R}$, tal que la sucesión $\{|a_n - n\tau|\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es acotada. Dicho valor es igual al límite de la sucesión $\{a_n/n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cuando n tiende a infinito (en particular dicho límite existe).

Observación 2.1.7. *Notemos que una consecuencia del teorema anterior y de lema 2.1.4, es que la sucesión*

$$|D_x(F^n) - n\tau| = |F^n(x) - x - n\tau| \leq 1$$

es acotada de manera uniforme. A dicha condición se le conoce como la propiedad de desplazamiento promedio acotado.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y denotemos por $a_n = F^n(x) - x$. Por el lema 2.1.6, (a_n/n) converge.

Definición 2.1.8. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ y F un levantamiento de f . Definimos el número de traslación de Poincaré de F como:*

$$\tau(F) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \in \mathbb{R}.$$

y el número de rotación de Poincaré de f como $\rho(f) = \pi(\tau(F))$.

Teorema 2.1.9. *$\tau(F)$ no depende de la elección de $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por el lema 2.1.4, el límite es independiente a la elección del punto. Esto se puede ver, dado que $|D_x(F^n) - D_y(F^n)| \leq 1$ implica que

$$|D_x(F^n)/n - D_y(F^n)/n| = |D_x(F^n) - D_y(F^n)|/n \leq 1/n.$$

□

En [Ghys] podemos verificar la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.1.10. *Si $f, g \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ son conjugados, entonces tienen el mismo número de rotación.*

El siguiente teorema establece una relación entre las órbitas periódicas de f y su número de rotación, además describe por completo la dinámica en el caso que el homeomorfismo tenga número de rotación racional.

Teorema 2.1.11. *Si el número de rotación $\rho(f) = p/q$ de $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ es racional, entonces f posee al menos un punto periódico y toda órbita periódica es de periodo q . Además, toda órbita es asintótica a la órbita de un punto periódico.*

Mientras que el caso irracional puede enunciarse de la siguiente manera:

Teorema 2.1.12. *Si el número de rotación $\alpha = \rho(f)$ de $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ es irracional, entonces f es semi-conjugado a la rotación r_α . Además, la semi-conjugación es una conjugación si y sólo si todas las órbitas de f son densas.*

Demostración. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f tal que $F(0) \in [0, 1)$. Notemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ el valor

$$\varphi(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (F^n(x) - n\alpha)$$

es finito, por el lema 2.1.6. Para ver que esta función define una semi-conjugación entre F y R_α se pueden verificar que φ cumple las siguientes propiedades:

1. φ es creciente y continua por la izquierda.
2. $\varphi(x + 1) = \varphi(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $\varphi(F^k(x)) = \varphi(x) + k\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$. Particularmente,

$$\varphi(F(x)) = \varphi(x) + \alpha = R_\alpha(\varphi(x))$$

se cumple.

Para demostrar que φ es una semi-conjugación, primero debemos probar que φ es continua. Observemos que para $x \in \mathbb{R}$, por ser φ creciente, el conjunto $\varphi^{-1}(x)$ es un punto o un intervalo no degenerado. Denotemos por $\widetilde{\text{Plan}}(F)$ la unión de los interiores de estos últimos intervalos

$$\widetilde{\text{Plan}}(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \varphi^{-1}(x)^\circ,$$

y por $\widetilde{\text{Salt}}(F)$ el interior del complemento de $\varphi(\mathbb{R})$

$$\widetilde{\text{Salt}}(F) = \text{int}[(\varphi(\mathbb{R}))^c].$$

Por la propiedad 2, los conjuntos $\widetilde{\text{Plan}}(F)$ y $\widetilde{\text{Salt}}(F)$ son invariantes por traslaciones enteras. Así, estos subconjuntos de \mathbb{R} se proyectan a subconjuntos de \mathbb{T}^1 y denotamos por $\text{Plan}(f)$ y $\text{Salt}(f)$ a sus respectivas proyecciones.

Para ver que φ es continua, basta verificar que $\text{Salt}(f)$ es el conjunto vacío. Primero verifiquemos que $\text{Salt}(f)$ es invariante por la rotación r_α . Si $x \in \widetilde{\text{Salt}}(F)$, por definición de $\widetilde{\text{Salt}}(F)$, existe U_x vecindad de x tal que $\varphi^{-1}(U_x) = \emptyset$; supongamos que $\varphi(z) = y + \alpha$ para algún $z \in \mathbb{R}$ y $y \in U_x$, entonces por 3

$$\varphi(F^{-1}(z)) = \varphi(z) - \alpha = y.$$

Por lo tanto $x + \alpha \in U_x + \alpha \subset \widetilde{\text{Salt}}(F)$. Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$ todas las órbitas de r_α son densas, así $\text{Salt}(f)$ debe ser vacío y por tanto φ es continua e induce una semi-conjugación entre f y r_α .

Finalmente, observemos que $\text{Plan}(f)$ es invariante por f . Si $x \in \widetilde{\text{Plan}}(F)$, por definición existe U_x vecindad de x tal que $\varphi(U_x) = c$, para algún $c \in \mathbb{R}$. Por ser F homeomorfismo, $F(U_x)$ es una vecindad de $F(x)$ y

$$\varphi(F(y)) = \varphi(y) + \alpha = c + \alpha$$

para todo $y \in U_x$ y por tanto $F(x) \in F(U_x) \subset \widetilde{\text{Plan}}(F)$. Luego, si las órbitas por f son densas, $\text{Plan}(f)$ debe ser vacío y por tanto φ es inyectiva e induce una conjugación entre f y r_α . \square

Con estos teoremas podemos describir la dinámica de f . Si $\rho(f)$ es racional, tenemos una órbita periódica y las demás son periódicas o asintóticas a una de éstas. Mientras que si $\rho(f)$ es irracional, obtenemos que todas sus órbitas son densas y f es conjugada a la rotación por $\rho(f)$ o existe un sub-conjunto minimal K y f es semi-conjugado a la rotación por $\rho(f)$.

2.2. Teoría de rotación en \mathbb{T}^2

En esta sección veremos algunos teoremas de la teoría clásica de rotación para homeomorfismos del toro \mathbb{T}^2 que son isotópicos a la identidad, principalmente la generalización de los teoremas 2.1.11 y 2.1.12.

Sea $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ el conjunto de homeomorfismos de \mathbb{T}^2 . Denotemos por $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ al conjunto de homeomorfismos del toro isotópicos a la identidad y por $\text{Homeo}^{\text{ne}}(\mathbb{T}^2)$ al subconjunto de los homeomorfismos $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ que además cumple la propiedad de ser no errantes, es decir, para todo x existe una vecindad U_x de x tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. También definimos $\widetilde{\text{Homeo}}(\mathbb{T}^2)$ y $\widetilde{\text{Homeo}}_0(\mathbb{T}^2)$ al conjunto de funciones $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que son levantamientos de funciones en $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ y $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ respectivamente. Finalmente, denotemos por $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la proyección canónica.

Definición 2.2.1. Sea $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_0(\mathbb{T}^2)$ y $z \in \mathbb{R}^2$. Definimos la función de desplazamiento como

$$D_z : \widetilde{\text{Homeo}}(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F \mapsto F(z) - z.$$

Sea $\rho_p(F, z)$ el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{D_z(F^n)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

en caso que éste exista. Definimos $\rho_p(F) = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^2} \rho_p(F, z)$, llamaremos a esta unión el conjunto de rotación puntual de f .

Es importante resaltar que ésta no es la definición usual del conjunto de rotación. A fines de tener una analogía al caso de la sección anterior, el propósito de definir el conjunto de rotación es

medir el promedio de desplazamiento de cualquier punto. Este desplazamiento promedio es medido por partes finitas de órbitas, tomando luego el límite al infinito; hasta antes de este paso no hay motivos especiales para fijar un punto; por lo tanto, no haremos esto y consideraremos el límite de las sucesiones convergentes

$$\left\{ \frac{D_{z_i}(F^{n_i})}{n_i} \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad z_i \in \mathbb{R}^2, \quad n_i \rightarrow \infty.$$

El conjunto obtenido de esta forma es llamado *el conjunto de rotación* y se denotará por $\rho(F)$. En [M-Z] M. Misiurewicz y K. Ziemian estudian propiedades generales de dicho conjunto. Entre los resultados más importantes, está que este conjunto siempre es compacto y convexo.

Observación 2.2.2. *Dada $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, tomamos uno de sus levantamientos $F \in \widetilde{\text{Homeo}}(\mathbb{T}^2)$. F cumple con la propiedad*

$$F(x + n, y + m) = F(x, y) + (n, m).$$

Lo que nos permitiría proyectar $\rho(F) \subset \mathbb{R}^2$ a un único conjunto, digamos $\rho(f) \subset \mathbb{T}^2$. Notemos que no se hizo así; esto puede estar fundamentado en el hecho de que hay propiedades de $\rho(F)$, como la convexidad, que resultan esenciales a la hora de estudiar la dinámica de f y que se facilita su manejo en \mathbb{R}^2 .

En [Fra] J. Franks demuestra el siguiente teorema que garantiza la existencia de órbitas periódicas bajo condiciones establecidas en el conjunto de rotación en analogía con el teorema 2.1.11.

Teorema 2.2.3. *Sea $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tal que $\rho(F)$ tiene interior no vacío. Si ρ está en el interior de $\rho(f)$ tiene ambas coordenadas racionales, entonces f posee un punto periódico α que realiza ρ . Esto es,*

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n((x, y)) - (x, y)}{n},$$

donde F es un levantamiento de f a \mathbb{R}^2 y (x, y) es un levantamiento de α .

T. Jäger, en [Jag] demuestra bajo ciertas suposiciones un teorema de semi-conjugación de manera similar al teorema 2.1.12, antes de enunciar el teorema daremos una definición auxiliar.

Definición 2.2.4. *Sea $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, decimos que f es una pseudo-rotación irracional si existe un vector con ambas coordenadas irracionales $\rho \in \mathbb{R}^2$ y un levantamiento $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que para todo $z \in \mathbb{R}^2$ se cumple:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_z(F^n)}{n} = \rho. \quad (2.2.1)$$

De manera similar, cuando $K \subset \mathbb{T}^2$ es un subconjunto invariante y (2.2.1) se satisface para todo $z \in K$, diremos que f es una pseudo-rotación irracional sobre K .

Como en el caso del círculo, si f es semi-conjugada a la rotación

$$R_\rho : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$z \mapsto z + \rho \quad \text{mód } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

entonces debe existir cierto promedio de convergencia en (2.2.1), llamado error de estimación a priori de c/n para alguna constante c independiente de z . Para reformular esto hacemos:

$$D : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$D(n, z) := F^n(z) - z - n\rho.$$

Sea $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_0(\mathbb{T}^2)$. Diremos que una pseudo-rotación irracional F tiene *desplazamiento promedio acotado*, con constante c si se satisface

$$\|D(n, z)\| \leq c$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 2.2.5. *Supongamos que $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ es una pseudo-rotación conservativa, i.e tiene una medida invariante cuyo soporte es el espacio total \mathbb{T}^2 , con vector de rotación $\rho \in \mathbb{R}^2$ y desplazamiento promedio acotado. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. ρ es totalmente irracional si y sólo si f es semi-conjugada a R_ρ .
2. ρ no es totalmente racional ni totalmente irracional si y sólo si f tiene una circloide periódica.
3. ρ es racional si y sólo si f tiene un punto periódico.

Los teoremas 2.2.3 y 2.2.5 son ejemplos de cómo algunos aspectos de la teoría clásica de rotación pueden ser generalizados en \mathbb{T}^2 . Hay muchos resultados al respecto, por ejemplo cuando el conjunto de rotación es un intervalo, y la teoría sigue en desarrollo. Es de nuestro interés hacer un desarrollo de esta teoría en otros espacios. En el siguiente capítulo se muestra cómo esto se puede definir en grupos topológicos abelianos compactos, de los cuales \mathbb{T} y \mathbb{T}^2 son ejemplos de estos.

Capítulo 3

Teoría de rotación para homeomorfismos solenoidales

En este capítulo se darán algunas generalizaciones de la teoría de rotación a homeomorfismos del solenoide universal unidimensional que preservan orientación. Iniciaremos definiendo el solenoide y describiendo los homeomorfismos que estamos interesados en estudiar su dinámica. Después daremos las respectivas generalizaciones del conjunto rotación definidas a través de la teoría de ciclos asintóticos, medidas invariantes y promedio de desplazamiento de las órbitas.

3.1. El solenoide universal y su espacio de homeomorfismos

3.1.1. El solenoide universal unidimensional

Consideremos \mathbb{Z} el grupo de los enteros. Todos los subgrupos normales de índice finito en \mathbb{Z} son de la forma

$$n\mathbb{Z} := \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n \dots\},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Definimos un orden en el conjunto de índices \mathbb{N} mediante la relación de divisibilidad, $n \leq m$ si y sólo si $n|m$. Con esta relación, \mathbb{N} es un conjunto parcialmente ordenado.

Notemos que si $n \leq m$, los subgrupos asociados satisfacen la relación de inclusión $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, por lo que tenemos bien definida una proyección canónica entre los grupos cocientes

$$\begin{aligned} f_{n,m} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k + m\mathbb{Z} &\longmapsto k + n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Además se satisfacen las relaciones de compatibilidad

$$f_{n,j} = f_{n,m} \circ f_{m,j}, \quad n \leq m \leq j.$$

Es decir, tenemos bien definido un sistema inverso de grupos topológicos abelianos compactos y homomorfismos continuos $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, f_{n,m})$.

Definición 3.1.1. La completación profinita de \mathbb{Z} es el límite inverso definido por

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \left\{ (k_n) \in \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : f_{n,m}(k_m) = k_n \right\}.$$

Como límite inverso de grupos topológicos abelianos, $\widehat{\mathbb{Z}}$ es un grupo topológico abeliano con la operación por coordenadas y la topología heredada de la topología producto. Denotamos por

$$f_n : \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

la proyección en la n -ésima coordenada.

Lema 3.1.2. Los conjuntos $f_i^{-1}(U)$ con $i \in \mathbb{N}$ y U abierto en $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, forman una base para la topología en $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Sean $\varphi_i : \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ las proyecciones canónicas. Por definición de la topología de sub-espacio, cualquier abierto en $\widehat{\mathbb{Z}}$ es la unión de conjuntos de la forma

$$V = \widehat{\mathbb{Z}} \cap \varphi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \varphi_{i_n}^{-1}(U_n); \quad n \in \mathbb{Z}, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N},$$

y cualquier U_j es abierto en $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ para cada j .

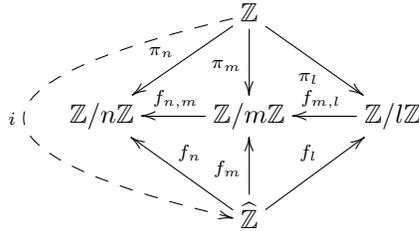
Para demostrar que dado cualquier $k = (k_n) \in V$, existe un conjunto abierto U en $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ de tal forma que $k \in f_j^{-1}(U)$ y $f_j^{-1}(U) \subset V$, consideramos y $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \geq i_1, \dots, i_n$. Por la continuidad de cada una de las aplicaciones, $f_{i_r,l}^{-1}(U_r)$ es abierto en $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Además, $k_l \in f_{i_r,l}^{-1}(U_r)$ dado que $f_{i,l}(k_l) = k_i$ para $i \leq l$.

Por otro lado, el abierto $U := \bigcap_{r=1}^n f_{i_r,l}^{-1}(U_r)$ contiene a k_l y por lo tanto $f_l^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de k en $\widehat{\mathbb{Z}}$. Por último, si $(a_m) \in f_l^{-1}(U)$, entonces $a_l \in U$ y en consecuencia $a_{i_r} = f_{i_r,l}(a_l) \in U_r$ para cada $r \in \{1, \dots, n\}$. Es decir, $f_l^{-1}(U) \subset V$. \square

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k &\longmapsto (k \pmod{n\mathbb{Z}})_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

inducida por la proyección en cada factor. Entonces, podemos ver que $i(\mathbb{Z}) \subset \widehat{\mathbb{Z}}$; de la misma manera denotamos por $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ a la aplicación asociada. Como para cada proyección f_n la composición $f_n \circ i$ es un homomorfismo cociente y además es continua, entonces i es un homomorfismo continuo.



Notemos que i es un homomorfismo inyectivo dado que $k \in \ker(i)$ si y sólo si $k + n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$; es decir, $\ker i = \bigcap n\mathbb{Z} = \{0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(i(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Luego, para cualquier abierto U en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se satisface que $f_n(i(\mathbb{Z})) \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto, $i(\mathbb{Z}) \cap f_n^{-1}(U) \neq \emptyset$. Es decir, $i(\mathbb{Z})$ es denso en $\widehat{\mathbb{Z}}$ y en consecuencia $\widehat{\mathbb{Z}}$ es perfecto.

En resumen, $\widehat{\mathbb{Z}}$ es un grupo topológico abeliano con una inclusión densa de \mathbb{Z} ; además es compacto, perfecto y totalmente desconexo, y por lo tanto homeomorfo al conjunto de Cantor.

Definimos la *acción diagonal* de \mathbb{Z} en el producto $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}) &\longrightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \\ (t, (x, k)) &\longmapsto (x + t, k - t), \end{aligned}$$

donde $t := i(t)$ es la imagen de t en $\widehat{\mathbb{Z}}$ dada por la aplicación $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$.

Definición 3.1.3. *Definiremos el solenoide universal unidimensional como el espacio de órbitas $\mathcal{S} = \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$,*

Denotamos por $P : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ a la proyección cociente, la cual asigna a cada punto (x, k) , su clase $[x, k]$. Esta aplicación es una aplicación “cubriente” con fibra \mathbb{Z} . Una región fundamental para la acción de \mathbb{Z} en el producto $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ está dada por $[0, 1) \times \widehat{\mathbb{Z}}$. Dado que \mathcal{S} es la imagen continua del conjunto compacto $[0, 1] \times \widehat{\mathbb{Z}}$, esto implica en particular que \mathcal{S} es compacto.

Notemos que tenemos definidas inclusiones de \mathbb{R} en \mathcal{S} dada por la imagen de subconjuntos de la forma $\mathbb{R} \times \{k\}$, $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$, dado que la proyección P es continua e inyectiva sobre conjuntos de esta forma, tenemos $\widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$ inclusiones pues si $[\mathbb{R} \times \{k\}] = [\mathbb{R} \times \{q\}]$ entonces $k = q + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Llamaremos a $\mathcal{L}_0 := P(\mathbb{R} \times \{0\}) = [\mathbb{R} \times \{0\}]$, *la hoja base*. Notemos que \mathcal{L}_0 es la componente arco-conexa que contiene a 0, además dicha componente es densa. De la densidad de dicha componente arco-conexa se concluye fácilmente que \mathcal{S} es conexo.

Observación 3.1.4. *Es importante resaltar que \mathcal{S} puede definirse como el límite inverso*

$$\mathcal{S} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$$

en forma análoga a como se hizo con $\widehat{\mathbb{Z}}$. El conjunto \mathcal{S} con la topología proyectiva es un grupo topológico abeliano compacto unidimensional que admite un subgrupo denso a 1-parámetro $\sigma : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{S}$, cuya imagen la denotaremos por $\mathcal{L}_0 := \sigma(\mathbb{R})$, podemos verificar que esta inclusión coincide con la hoja base.

De acuerdo con esta observación tenemos una inclusión $\sigma' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ cuya imagen la denotamos por $\mathcal{L}'_0 = \sigma'(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \\ & \searrow \sigma & \downarrow P \\ & & \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{S} \end{array}$$

Lema 3.1.5. \mathcal{S} es un haz fibrado localmente trivial con espacio base \mathbb{T}^1 y fibra $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Consideremos la proyección $p : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{T}^1$, dada por la proyección de cubriente $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$; es decir, $p(x, k) = \pi(x)$. Luego, si $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$p(x + t, k - t) = \pi(x + t) = \pi(x) = p(x, k).$$

Es decir, p es invariante bajo la acción de \mathbb{Z} y por lo tanto tenemos una aplicación bien definida $p' : \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{T}^1$.

Ahora, sea $x \in \mathbb{T}^1$ y U_x una vecindad abierta de x tal que U_x está totalmente cubierta por π , i.e.

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup U_i; \quad \pi(U_i) \cong U.$$

Luego, la familia $\{U_i \times \widehat{\mathbb{Z}}\}$ consiste de abiertos disjuntos de $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ tales que para cualesquiera i, j existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $U_i \times \{k\} \cong (U_j + t) \times \{k - t\}$, es decir la familia es invariante bajo la acción. Así $p' : U_i \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \cong U$ es homeomorfismo para cada i . Por lo tanto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} p'^{-1}(U) & \longrightarrow & U_i \times \widehat{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{p \times id} & U \times \widehat{\mathbb{Z}} \\ p' \downarrow & & p \downarrow & & pr_1 \downarrow \\ U & \xrightarrow{id} & U & \xrightarrow{id} & U \end{array}$$

En consecuencia, $p' : \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{T}^1$ es un haz fibrado localmente trivial con fibra $\widehat{\mathbb{Z}}$. \square

Una construcción alternativa del solenoide universal unidimensional es como el límite inverso de la torre de cubrientes no ramificados de \mathbb{T}^1 , si tomamos en \mathbb{Z}_+ el orden parcial definido anteriormente y las aplicaciones

$$\begin{aligned} p_{n,m} : \mathbb{R}/m\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \\ x + m\mathbb{Z} &\longmapsto x + n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

se satisfacen las relaciones de compatibilidad

$$p_{n,j} = p_{n,m} \circ p_{m,j}, \quad n \leq m \leq j.$$

Es decir, tenemos bien definido un sistema inverso de grupos topológicos abelianos compactos y homomorfismos continuos $(\mathbb{R}/n\mathbb{Z}, p_{n,m})$ y tenemos que

$$\mathcal{S} = \varprojlim_n (\mathbb{R}/n\mathbb{Z}, p_{n,m}) = \left\{ (k_n) \in \prod \mathbb{R}/n\mathbb{Z} : p_{n,m}(x_m) = x_n \right\},$$

Observación 3.1.6. Podemos hacer construcciones de solenoides distintos al universal de manera similar al universal como es el caso de los p -ádicos, con p un número primo, el límite inverso de cubrientes de grado p^n

$$\begin{aligned} p_{n,m} : \mathbb{R}/p^m\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}/p^n\mathbb{Z} \\ x + p^m\mathbb{Z} &\longmapsto x + p^n\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

si $m < n$. Los solenoides p -ádicos resultan ser también grupos topológicos abelianos compactos. Una construcción geométrica del solenoide diádico, es decir $p = 2$, el cual puede ser visto como la intersección infinita de toros sólidos encajados uno en el otro como se muestra en la figura 1.

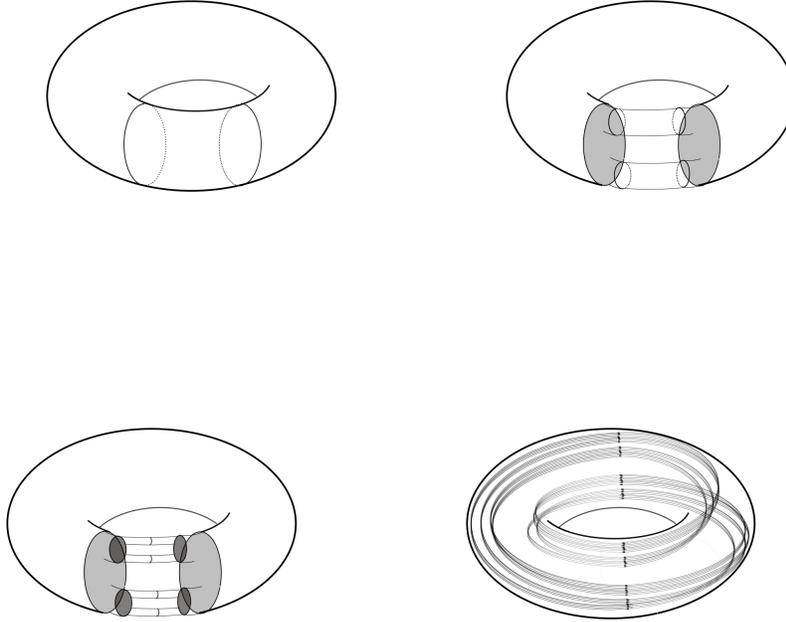


Figura 1.

En este caso la fibración sobre \mathbb{T}^1 coincide con la restricción de proyección sobre la primer coordenada en $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ y la fibra homeomorfa al conjunto de Cantor aparece punteada en el último toro y se realiza como la intersección de discos al tomar un corte transversal al toro.

3.1.2. El grupo de homeomorfismos isotópicos a la identidad

El siguiente estudio es un caso particular al realizado por J. Kwapisz en [Kwa2] donde se realiza un estudio completo de los levantamientos de las clases de isotopía del grupo de homeomorfismos de solenoides.

Definición 3.1.7. La componente de isotopía de la identidad se denota por

$$\text{Homeo}_+(\mathcal{S}) := \{h \in \text{Homeo}(\mathcal{S}) : h \sim \text{Id}\},$$

donde \sim denota equivalencia homotópica.

Lema 3.1.8. Sea $h \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$. Entonces, h tiene un levantamiento $H : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ definido como

$$H(x, k) = (x + \delta(x, k), k),$$

donde $\delta : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, acotada e invariante bajo la acción diagonal; es decir,

$$\delta(x - n, k + n) = \delta(x, k),$$

para todo $(x, k) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Consideramos una homotopía $f_\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\lambda \in [0, 1]$, tal que $f_0 \equiv \text{Id}$ y $f_1 \equiv h$. Si $F_\lambda(x, k)$ se obtiene como el levantamiento de la trayectoria $f_\lambda(z)$ con $z = P(x, k)$, entonces $F_0(x, k) = (x, k)$. Como $\widehat{\mathbb{Z}}$ es totalmente desconexo $\text{pr}_2 F_\lambda(x, k) = k$ para cada $\lambda \in [0, 1]$, y existe una función continua $\tilde{\delta} : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_\lambda(x, k) = (x + \tilde{\delta}(x, k, \lambda), k).$$

Por lo tanto, escogiendo $\delta(x, k) := \delta(x, k, 1)$ y $H \equiv F_1$ obtenemos el resultado deseado. Observar que $\delta(x - 1, k + 1) = \delta(x, k)$ por la propiedad de levantamiento único de trayectorias. \square

Observación 3.1.9. *Observemos que el levantamiento no es único pues por la equivarianza con la acción diagonal, para cualquier entero p se cumple que el homeomorfismo definido como*

$$H_2(x, k) = (x + \delta(x, k) - p, k + p),$$

también es un levantamiento continuo de h , por lo que la forma general de los levantamientos son de la forma

$$H(x, k) = (x + \delta(x, k) - p, k + p).$$

Para cualquier $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ fijo, la función

$$F_k := \text{Id}_{\mathbb{R}} + \delta_k(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

es estrictamente creciente; es decir, dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > y$, entonces,

$$x + \delta(x, k) > y + \delta(y, k).$$

Ya que en caso contrario, $x - y \leq \delta(y, k) - \delta(x, k)$ para $x > y$. Luego, al hacer el límite $x \rightarrow \infty$, δ no estaría acotada por abajo, lo cual no es posible ya que proviene de una función continua definida en \mathcal{S} .

Finalmente observemos que para cualquier hoja en \mathcal{S} tenemos una función representante para cada $k \in \mathbb{Z}$ en el levantamiento F , una por cada trasladado entero de k . El siguiente teorema nos permite elegir cualquiera de estas funciones representantes.

De manera general nos centraremos en los levantamientos de la forma,

$$H(x, k) = (x + \delta(x, k), k),$$

es decir omitimos la traslación por p . Esto simplificará muchos cálculos a la hora de tomar iterados. Una primera justificación para hacer esto es el siguiente teorema.

Teorema 3.1.10. *Sea $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces F_k y F_{k+n} son conjugados vía r_n .*

Demostración. Recordemos que $\delta : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple la propiedad de equivarianza

$$\delta(x+n, k-n) = \delta(x, k),$$

para $(x, k) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$ arbitrarios. Notemos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} F_{k+n}(x) &= x + \delta(x, k+n) \\ &= x + \delta(x+n, k) \\ &= F_k(x+n) - n. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$F_{k+n}(x) + n = F_k(x+n),$$

es decir,

$$r_n(F_{k+n}(x)) = F_k(r_n(x)).$$

□

3.1.3. La función de desplazamiento de elementos en $\widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$.

En esta sección estudiaremos propiedades generales de desplazamientos de funciones $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$, dicho estudio puede ser consultado en [Lop]. Para esto, nos auxiliaremos de la caracterización de los levantamientos de un homeomorfismo descrita en la sección anterior. Antes un breve recordatorio de la teoría de funciones casi-periódicas.

Denotemos por $C(\mathbb{R})$ al conjunto de funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} con la topología compacto-abierta. En $C(\mathbb{R})$ tenemos definida una acción de \mathbb{R} en $C(\mathbb{R})$ por la traslación

$$C(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow C(\mathbb{R}), \quad (\varphi, t) \longmapsto \varphi^t,$$

donde $\varphi^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\varphi^t(x) := \varphi(x+t).$$

Denotaremos por $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ a la órbita de φ bajo esta acción, y por $\Omega(\varphi)$ a la cerradura de $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ en $C(\mathbb{R})$.

Definición 3.1.11. Diremos que $\varphi \in C(\mathbb{R})$ es casi-periódica si $\Omega(\varphi)$ es un conjunto compacto.

Observación 3.1.12. Si φ es casi-periódica, entonces es uniformemente continua. Más aún, $\Omega(\varphi)$ es una familia de funciones equicontinua por el teorema de Arzelá-Ascoli.

En este caso podemos definir una estructura de grupo “ $*$ ” tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n} * \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n + s_n}.$$

Notemos que $(\Omega(\varphi), *)$ es un grupo topológico abeliano compacto con elemento neutro φ . Una vez definida esta estructura de grupo, esta puede ser utilizada para demostrar el siguiente teorema de clasificación a través de los posibles grupos de caracteres la cual puede ser consultada en [Bohr].

Teorema 3.1.13. *Si φ es casi-periódica entonces $\Omega(\delta)$ es isomorfo a alguno de los siguientes espacios.*

1. \mathbb{T}^1 , en este caso se dice que φ es periódica.
2. \mathbb{T}^n , con $n > 1$ y φ es llamada quasi-periódica.
3. Un grupo con estructura solenoidal, en este caso φ es llamada límite periódica.

Recordemos que cualquier $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ tiene un levantamiento $F : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ definido como

$$F(x, k) = (F_k(x), k) := (x + \delta(x, k), k),$$

donde $\delta : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en ambas coordenadas, que es acotada e invariante bajo la acción diagonal; es decir,

$$\delta(x, k) = \delta(x + n, k - n),$$

para todo $(x, k) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{Z}$. De aquí, como $\mathcal{S} = \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$, para $[s] \in \mathcal{S}$, se cumple $f([s]) = [F(s)]$. Es fácil ver que esto no depende de la elección del elemento en la clase, dado que

$$\begin{aligned} F(x + 1, k - 1) &= (x + 1 + \delta(x + 1, k - 1), k - 1) \\ &= (x + 1 + \delta(x, k), k - 1) \\ &= F(x, k) + (1, -1). \end{aligned}$$

Denotemos por $\widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$ al conjunto que consiste de todos los levantamiento de homeomorfismos isotópicos a la identidad de \mathcal{S} . Por lo dicho anteriormente, para cada $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ se tiene definida una función de *desplazamiento a la altura k* $\delta_k = F_k - \text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En lo que sigue nos centraremos en estudiar de cerca algunas de las propiedades de esta función de desplazamiento. Si $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función continua y $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ es el subgrupo denso a 1-parámetro, definimos

$$K_0 : \mathcal{L}_0 \rightarrow C(\mathbb{R})$$

como la única función que satisface

$$0 \mapsto \alpha_0,$$

donde

$$\alpha_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

está definida por

$$\alpha_0 := \alpha \circ \sigma,$$

y

$$K_0(\sigma(t)) = \alpha_0^t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ya que por definición

$$\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\alpha_0) := \{\alpha_0^t \in C(\mathbb{R}) : \alpha_0^t(x) = \alpha_0^t(x + t)\}.$$

Esta función K_0 tiene por contradominio $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\alpha_0)$ y es un homomorfismo. En el siguiente teorema demostraremos que se puede extender a un homomorfismo suprayectivo $K : \mathcal{S} \rightarrow \Omega(\alpha_0)$.

Teorema 3.1.14. *Para cualquier función continua $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, la función K_0 se extiende a un homomorfismo continuo y suprayectivo $K : \mathcal{S} \rightarrow \Omega(\alpha_0)$. Esto es, $\Omega(\alpha_0)$ es un grupo cociente de \mathcal{S} .*

Demostración. Veamos que $K_0 : \mathcal{L}_0 \rightarrow \Omega(\alpha_0)$ define un homomorfismo suprayectivo. Si $\varphi \in \text{Orb}_{\mathbb{R}}(\alpha_0)$, entonces $\varphi(t) = \alpha_0(t + r)$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Por definición

$$\begin{aligned} \alpha_0(t + r) &= \alpha(\sigma(t + r)) \\ &= \alpha(\sigma(t) + \sigma(r)) \\ &= \alpha_{\sigma(r)}(t), \end{aligned}$$

para todo $t, r \in \mathbb{R}$. Por lo tanto K_0 es suprayectivo. Además, las operaciones en \mathcal{L}_0 y en $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\alpha_0)$ son las inducidas por \mathbb{R} , lo que implica que K_0 es un homomorfismo continuo. Notemos que este homomorfismo se extiende naturalmente a un homomorfismo suprayectivo

$$K : \mathcal{S} \rightarrow \Omega(\alpha_0),$$

ya que \mathcal{S} es compacto, \mathcal{L}_0 es denso, el flujo de traslación es una isometría y α es uniformemente continua y K_0 es continua. Si $s \in \mathcal{S}$ y $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_n)$ con $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{R}$, podemos definir

$$K(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_0(\sigma(t_n)).$$

Veamos que esto está bien definido. Dado que α es uniformemente continua, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $d_{\mathcal{S}}(x, y) < \delta$, se satisface $d_{\mathbb{R}}(\alpha(x), \alpha(y)) < \epsilon$. Ya que $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_n)$ podemos elegir N suficientemente grande como para que si $n, m > N$ entonces $d(\sigma(n), \sigma(m)) < \delta$. Más aún, por ser el flujo de traslación una isometría $d(x + \sigma(n), x + \sigma(m)) < \delta$ para toda $x \in \mathcal{L}$ y en consecuencia

$$d_{\mathbb{R}}(\alpha(x + \sigma(t_n)), \alpha(x + \sigma(t_m))) < \epsilon$$

de manera uniforme sobre x , se sigue que la sucesión es de Cauchy en $\Omega(\alpha_0)$. Así, la imagen de la extensión de K_0 a \mathcal{S} es cerrado en $\Omega(\alpha_0)$ y debe contener a $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\alpha_0)$. Como $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\alpha_0)$ es densa en $\Omega(\alpha_0)$, se sigue que $\text{Im}(K) = \Omega(\alpha_0)$. Aplicando el primer teorema de isomorfismo, ya que \mathcal{S} es compacto y $C(\mathbb{R})$ es Hausdorff, concluimos que

$$\Omega(\alpha_0) \cong \mathcal{S}/\ker(K).$$

□

Observación 3.1.15. *Como $\Omega(\alpha_0)$ es un subgrupo cociente de \mathcal{S} , se sigue que $\Omega(\alpha_0)$ es compacto y α_0 es casi-periódica. Si α_0 es casi-periódica, entonces*

$$\mathbb{T}^n \cong \Omega(\alpha_0) \cong \mathcal{S}/\ker(K),$$

para algún $n \geq 2$. Como \mathbb{T}^n no puede ser visto como un grupo cociente de \mathcal{S} para $n \geq 2$, se sigue que α_0 no es casi-periódica, por lo que sólo puede ser periódica o límite periódica.

Observación 3.1.16. *El teorema anterior resalta la importancia de conocer explícitamente cómo son todos los subgrupos cerrados de \mathcal{S} . Algunas posibilidades son el trivial, $\widehat{\mathbb{Z}}$, subgrupos cerrados de $\widehat{\mathbb{Z}}$. Una consecuencia inmediata de este hecho es el siguiente teorema.*

Teorema 3.1.17. *Para todo $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ la función de desplazamiento $\delta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente es límite periódica.*

Demostración. Primero recordemos que para $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ fijo y $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario

$$\delta_{k+n}(x) = \delta_k(x+n).$$

Esto implica que δ_k y δ_{k+n} están en la misma órbita de la acción de \mathbb{R} en $C(\mathbb{R})$. Por lo que demostrar que δ_k es límite periódica, para algún $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$, implicará que δ_{k+n} es límite periódica para toda $n \in \mathbb{Z}$. Así, bastará probar que para algún $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ fijo, δ_k es límite periódica, pues para $p \in \widehat{\mathbb{Z}}$ arbitrario, δ_p será punto de acumulación de funciones límite periódica $\{\delta_{k+n_i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Si $\delta : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, acotada y \mathbb{Z} -invariante, entonces δ induce una función $\bar{\delta} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Denotemos por $\bar{\delta}_0$ a la función obtenida en la demostración del teorema anterior que coincide con la función δ_0 . Esto es claro del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \delta_0 & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R} \\
 & \searrow \sigma & \downarrow P & \nearrow \bar{\delta} & \\
 & & \mathcal{S} & &
 \end{array}$$

donde $\sigma'(x) = (x, 0)$, ya que

$$\begin{aligned}
 \delta_0 &= \delta \circ \sigma' \\
 &= \bar{\delta} \circ P \circ \sigma' \\
 &= \bar{\delta} \circ \sigma \\
 &= \bar{\delta}_0.
 \end{aligned}$$

Como $\bar{\delta}_0$ es límite periódica, se sigue que δ_0 es límite periódica. Por lo que δ_k es límite periódica, para cualquier $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$. \square

Corolario 3.1.18. *El grupo de caracteres de la función de desplazamiento a la altura 0, $\text{Char}(\delta_0)$ es un subgrupo de \mathbb{Q} .*

Ejemplo 3.1.19. *Definamos $\bar{\delta} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\bar{\delta}(s) = d(s, 0)$ la función distancia al 0. Es fácil ver que en la construcción anterior*

$$\text{Ker}(K) = \{0\},$$

por las propiedades de métrica. Por lo tanto $\Omega(\bar{\delta}) \cong \mathcal{S}$. Si definimos el homeomorfismo determinado por el desplazamiento $\bar{\delta}$, $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dado por

$$f(s) = s + \sigma(\bar{\delta}(s)),$$

obtenemos un homeomorfismo isotópico a la identidad cuyo desplazamiento es límite periódico.

Lema 3.1.20. Si $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$, entonces la función de desplazamiento

$$A_F : \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow C(\mathbb{R})$$

definida como

$$k \longmapsto F_k - \text{Id} = \delta_k$$

es continua y cerrada.

Demostración. Dado que $\delta : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, por la ley exponencial A_F es continua. Además, el lema de la función cerrada establece que: cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ desde un espacio compacto X a un espacio de Hausdorff Y es cerrada. Dado que $\widehat{\mathbb{Z}}$ es compacto y $C(\mathbb{R})$ es Hausdorff una consecuencia inmediata es que A_F es una aplicación continua y cerrada. \square

Denotemos por $C^{lp}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} que son periódicas o límite periódicas, por $C^{lp}(\mathbb{R})'$ al conjunto de funciones que son límites periódicas, pero no periódicas y por $C^p(\mathbb{R})$ a las funciones periódicas. El lema 3.1.20 y teorema 3.1.17 dicen que la función $A_F : \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow C(\mathbb{R})$ es una función continua y cerrada, consideremos $A_F : \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow C^{lp}(\mathbb{R})$, definida de la misma forma

$$k \longmapsto \delta_k.$$

Teorema 3.1.21. Sea $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$ dada por $F = (x + \delta_k(x), k)$. Si $A_F : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow C^{lp}(\mathbb{R})$ es inyectiva, entonces $A_F(k) := \delta_k$ es límite periódica para todo $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Si A_F es inyectiva $\delta_k \neq \delta_{k+n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por la \mathbb{Z} -invarianza de δ , se cumple que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\delta_k(x) \neq \delta_{k+n}(x) = \delta_k(x+n).$$

Concluimos que δ_k no puede ser periódica, así que sólo puede ser límite periódica. \square

Denotamos por $\widetilde{\text{Homeo}}_+^{lp}(\mathcal{S}) := \{F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S}) \mid F_k - \text{Id}_{\mathbb{R}} \in C^{lp}(\mathbb{R})' \forall k \in \widehat{\mathbb{Z}}\}$, que consta de los levantamientos de homeomorfismos de \mathcal{S} isotópicos a la identidad que tienen desplazamiento límite periódico.

3.2. Rotación y ciclos asintóticos

Definimos el primer grupo de cohomología entera de \mathcal{S} dado por todas las clases de isotopía de funciones continuas $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{T}^1$, el cual denotaremos

$$\check{H}^1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) = C^0(\mathcal{S}, \mathbb{T}^1) / \sim$$

donde \sim denota equivalencia isotópica. El grupo de caracteres de \mathcal{S} es el conjunto de homomorfismos continuos de \mathcal{S} en \mathbb{T}^1 , que denotamos por

$$\text{Char}(\mathcal{S}) := \{\chi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{T}^1 \mid \chi \text{ es un homomorfismo continuo } \},$$

y la operación de grupo definida por multiplicación puntual. Sabemos que por ser \mathcal{S} un grupo topológico compacto se cumple

$$\check{H}^1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \cong \text{Char}(\mathcal{S}).$$

(ver [H-M])

Definición 3.2.1. Dado $f \in \text{Homeo}_+(S)$. Definimos la suspensión de f como el espacio cociente

$$\mathcal{S}_f = S \times [0, 1] / \sim,$$

donde \sim denota la equivalencia $(x, 0) \sim (f(x), 1)$.

Dado que $f \sim \text{Id}$ sabemos que \mathcal{S}_f y $S \times \mathbb{T}^1$ son homeomorfos, $\mathcal{S}_f \simeq S \times \mathbb{T}^1$, y podemos concluir que

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathcal{S}_f, \mathbb{Z}) &\cong \text{Char}(S \times \mathbb{T}^1) \\ &\cong \text{Char}(S) \times \text{Char}(\mathbb{T}^1) \\ &\cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Denotemos por $\text{Hom}(\check{H}^1(\mathcal{S}_f, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ el espacio que consiste todos los homomorfismos de $\check{H}^1(\mathcal{S}_f, \mathbb{Z})$ en \mathbb{R} . Notemos que

Lema 3.2.2. $\text{Hom}(\check{H}^1(\mathcal{S}_f, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\check{H}^1(\mathcal{S}_f, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \\ &\cong \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \times \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \\ &\cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Llamaremos *el flujo de la suspensión* de f sobre \mathcal{S}_f al flujo que recorre las hojas de \mathcal{S}_f a tiempo 1 y que está definido como

$$\widehat{f}_t(x, u) = (f^n(x), u + t - n),$$

donde $n \leq u + t \leq n + 1$.

Definición 3.2.3. Sea $\gamma : \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que f es diferenciable con respecto al flujo de la suspensión si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(\widehat{f}_{t+h}(x)) - \gamma(\widehat{f}_t(x))}{h}$$

existe uniformemente sobre \mathcal{S}_f y denotaremos este límite por $\frac{d}{dt}\gamma$.

Un hecho importante sobre esta definición es el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [Sch].

Teorema 3.2.4 (Kakutani). *Cualquier función continua $\gamma : \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser aproximada uniformemente por funciones que son diferenciables con respecto al flujo.*

Notemos que dados $s \in \mathcal{S}_f$ y $T > 0$ podemos definir el homomorfismo $\Lambda_{s,T} \in \text{Hom}(C^0(\mathcal{S}_f, \mathbb{T}^1), \mathbb{R})$ como

$$\Lambda_{s,T}(\gamma) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \arg[\gamma](\widehat{f}_t(s)) dt,$$

donde $\gamma : \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{T}^1$ es una función continua con argumento $\arg[\gamma]$ y podemos elegirla de tal manera que el argumento sea continua a lo largo de órbitas del flujo de suspensión. Estos homomorfismos están descritos en el siguiente resultado (ver [Pol]).

Lema 3.2.5. *Para cada $s \in \mathcal{S}_f$ tenemos las siguientes condiciones.*

1. *La familia de homomorfismos continuos*

$$\{\Lambda_{s,T}\}_{T \in \mathbb{R}_+} \subset \text{Hom}(C^0(\mathcal{S}_f, \mathbb{T}^1), \mathbb{R})$$

*es equicontinua en la topología débil-**.

2. *Los puntos límite*

$$\mathcal{R}^s \subset \text{Hom}(C^0(\mathcal{S}_f, \mathbb{T}^1), \mathbb{R})$$

de esta familia son constantes en cada clase de equivalencia isotópica.

Este lema nos dice que cada $r^s \in \mathcal{R}^s$ nos da un elemento bien definido en $\text{Hom}(\check{H}^1(\mathcal{S}_f, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$. Según el lema 3.2.2, podemos escribir el homomorfismo en términos de sus coordenadas:

$$r^s = (r_1^s, r_2^s) \in \mathcal{R}^s \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Notemos que dada la construcción explícita del homomorfismo, dado que el flujo es a tiempo constante 1, podemos ver que $r_2^s \equiv 1 \in \mathbb{R}$, por lo tanto r_2^s es independiente de todas las elecciones, en particular de la segunda coordenada en \mathcal{S}_f . Si denotamos $s = (g, u)$, entonces r_1^s depende únicamente de la segunda coordenada $g \in \mathcal{S}$. Así podemos considerar sólo la componente

$$r_1^s \in \mathbb{R}$$

del homomorfismo continuo $r^s \in \mathcal{R}^s$. Si denotamos esta proyección por \mathcal{R}^1 , donde $s = (g, u)$, podemos establecer una biyección $\mathcal{R}^1 \longrightarrow \mathcal{R}^s$ vía

$$r^g \longmapsto r^s = (r^g, 1).$$

Definición 3.2.6. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ y $g \in \mathcal{S}$, definimos el conjunto de rotación de g relativo a f*

$$\tau_g(f) := \{r^g | r^g \in \mathcal{R}^1\} \subset \mathbb{R}.$$

Definamos el conjunto de rotación de f como

$$\tau(f) := \bigcup_{g \in \mathcal{S}} \tau_g(f).$$

3.3. Interpretación geométrica

En analogía con la teoría clásica de rotación, resulta natural pensar en el conjunto de rotación definido por el promedio de los desplazamientos de las órbitas una vez que tenemos el análogo a los cubrientes universales \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 de \mathbb{T} y \mathbb{T}^2 respectivamente. De la sección 3.1.2 sabemos que cada homeomorfismo isotópico a la identidad de \mathcal{S} se levanta a un homeomorfismo isotópico a la identidad de $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ de la forma

$$F(x, k) = (x + \delta(x, k), k) := (F_k(x), k)$$

donde para cada $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$, $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función límite periódica. La siguiente definición está inspirada en los trabajos [M-Z] y [Kwa] a fines de probar propiedades similares de dicho conjunto.

Definición 3.3.1. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ con levantamiento $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$.

1. Si $(x, k) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$, el número de rotación de F relativo a (x, k) es el límite

$$\varrho(F_k(x)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_k^n(x) - x}{n}, 0 \right) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$$

en caso que éste exista.

2. Llamaremos el conjunto de rotación de F_k al conjunto de puntos de acumulación del conjunto

$$\varrho(F_k) := \left\{ \left(\frac{F_k^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, 0 \right) \mid x_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

3. Finalmente, llamaremos el conjunto de rotación de F al conjunto

$$\varrho(F) := \bigcup_{k \in \widehat{\mathbb{Z}}} \varrho(F_k).$$

Observación 3.3.2. Notemos que de la definición podemos concluir que:

$$\varrho(F_k)(x) \subset \varrho(F_k) \subset \varrho(F).$$

Además, notemos que por la forma de la expresión de F_k los promedios de los desplazamientos toman valores en $\mathbb{R} \times \{k\}$ ya que

$$F_k^n(x) - x = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \delta_k(F_k^i(x)) \right)$$

donde $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida como F a la altura k , $x \mapsto F_k(x) := x + \delta_k(x)$. Dado que $\delta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es límite periódica, esto recae en el trabajo de Kwapisz (ver [Kwa]), para cada k , $\varrho(F_k)$ será un punto de $\mathbb{R} \times \{0\}$, que denotaremos por $(\varrho(F_k), 0)$ aquí $\varrho(F_k)$ es un punto en \mathbb{R} . En este sentido tenemos los siguientes resultados encaminados a ver de manera explícita la relación entre estos intervalos.

Lema 3.3.3. *Sea $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conjugados por un homeomorfismo $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $H := \text{Id} + \Phi$, con Φ una función acotada. Entonces, tienen el mismo conjunto de rotación en el sentido de Kwapisz (ver [Kwa]), el cual por el momento será denotado por $\tau(F)$.*

Demostración. Por definición si $x \in \tau(F_1)$ existen sucesiones $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ y $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$ tales que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_1^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = x.$$

Notemos que si $H \circ F_1 = F_2 \circ H$, entonces,

$$H \circ F_1^{n_i} = (\text{Id} + \Phi) \circ F_1^{n_i}(x_i) = F_2^{n_i} \circ H(x_i),$$

sumando y restando $H = \text{Id} + \Phi$ al lado derecho de la última igualdad

$$\begin{aligned} F_1^{n_i}(x_i) + \Phi \circ F_1^{n_i}(x_i) &= F_2^{n_i} \circ H(x_i) + \text{Id}(x_i) + \Phi(x_i) - \text{Id}(x_i) - \Phi(x_i) \\ &= F_2^{n_i} \circ H(x_i) + \text{Id}(x_i) + \Phi(x_i) - H(x_i). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} F_1^{n_i}(x_i) + \Phi \circ F_1^{n_i}(x_i) - \text{Id}(x_i) &= F_2^{n_i} \circ H(x_i) + \Phi(x_i) - H(x_i) \\ &= (F_2^{n_i} - \text{Id}) \circ H(x_i) + \Phi(x_i), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{(F_1^{n_i} - \text{Id})(x_i)}{n_i} + \frac{\Phi \circ F_1^{n_i}(x_i)}{n_i} = \frac{(F_2^{n_i} - \text{Id}) \circ H(x_i)}{n_i} + \frac{\Phi(x_i)}{n_i}.$$

Dado que Φ es acotada

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_1^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_2^{n_i}(H(x_i)) - H(x_i)}{n_i},$$

y por lo tanto $x \in \rho(F_2)$. La otra contención se puede demostrar de manera completamente análoga, de lo que podemos concluir que:

$$\tau(F_1) = \tau(F_2).$$

□

Notemos que el conjunto $\varrho(F_k) := (\rho(F_k), k)$ puede verse como el conjunto de rotación de F_k pensado como función real-valuada a la altura 0 en el producto $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$. Olvidando por un momento la altura, tenemos intervalos de \mathbb{R} determinados por el homeomorfismo $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A continuación aplicaremos el teorema anterior para poder comparar los intervalos reales $\rho(F_k)$.

Teorema 3.3.4. *Sea $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$ tal que $F(x, k) := (F_k(x), k)$. Si $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ y $l \in \mathbb{Z}$, entonces los intervalos $\rho(F_k), \rho(F_{k+l})$ son iguales.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del teorema anterior y del teorema 3.1.10 que establece una conjugación entre F_k y F_{k+n} para el caso cuando $l = k + n$ con $n \in \mathbb{Z}$. □

Una vez establecida esta relación, el siguiente teorema puede ser probado siguiendo las ideas presentadas en la proposición 2.1 de [M-Z].

Teorema 3.3.5. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ y $k \in \mathbb{Z}$. Entonces se satisface*

$$\rho(f^k) = k \cdot \rho(f)$$

donde por $k \cdot \rho(f)$ nos referimos el producto usual de un conjunto y un número real.

3.4. Rotación y medidas invariantes

Como fue establecido en [Pol] hay una relación entre el conjunto de rotación y medidas invariantes en términos de lo siguiente, en el cual el teorema de representación de Riesz juega un papel importante.

Dados $g \in \mathcal{S}_f$ y $T > 0$, definimos una medida de probabilidad $\mu_{g,T}$ sobre \mathcal{S}_f a través de los valores de sus integrales como

$$\int \gamma d\mu_{g,T} = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(\widehat{f}_t(g)) dt$$

donde $\gamma \in C^0(\mathcal{S}_f, \mathbb{R})$. Dado que el espacio de medidas de probabilidad sobre \mathcal{S}_f es débil-* compacto existen puntos de acumulación de estas medidas. Para cualquier $s \in \mathcal{S}_f$, donde $s = (g, t)$ denotemos por $\mathcal{M}_{g,f}$ a los puntos límite de $\{\mu_{g,T} | T \in \mathbb{R}^+\}$. Esta medida es claramente \widehat{f}_t -invariante.

La relación entre los funcionales que definen el conjunto de rotación $\rho_g(f)$ y la familia $\mathcal{M}_{g,f}$ es determinada por el siguiente teorema de Schwartzmann.

Teorema 3.4.1. *Los funcionales que definen $\rho_g(f)$ están determinados por*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h'}{h}(w) d\mu(w) \mid \mu \in \mathcal{M}_{g,f} \right\},$$

donde $h \in C^0(\mathcal{S}_f, \mathbb{T}^1)$ y h' denota la diferenciación con respecto al flujo.

Denotemos a la unión de estas medidas por

$$\mathcal{M}_f := \cup_{g \in \mathcal{S}_f} \mathcal{M}_{g,f}.$$

Estas medidas \widehat{f}_t -invariantes están en biyección con medidas f -invariantes, dado que toda medida \widehat{f}_t -invariante puede ser escrita como $\mu \times l$ donde μ es una medida f -invariante sobre \mathcal{S} y l es la medida usual de Lebesgue. Por lo tanto, tenemos una función bien definida

$$\mathcal{L} : \mathcal{M}_f \longrightarrow \rho(f) \subset (\text{Hom}(\text{Char}(\mathcal{S}), \mathbb{R})) \tag{3.4.1}$$

tal que

$$\mathcal{M}_{g,f} \longmapsto \rho_g(f)$$

Esta es una definición alternativa a la definición de conjuntos de rotación para homeomorfismos solenoidales presentada en [C-V], la cual resumiremos brevemente para hacer una pequeña comparación y veremos en qué contexto estas definiciones coinciden.

Lema 3.4.2. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$. Para toda función continua $h : \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{T}^1$ existe un único 1-cociclo $C_h : \mathbb{R} \times \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{R}$ asociado a h tal que*

$$h(\widehat{f}_t(z, s)) = \exp(2\pi i C_h(t, (z, s))) \cdot h(z, s),$$

para todo $(z, s) \in \mathcal{S}_f$ y $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto tenemos un homomorfismo bien definido

$$\text{Char}(\mathcal{S}_f) \cong \check{H}^1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\widehat{f}_t)$$

que envía a cada caracter a la clase de cohomología que corresponde al único 1-cociclo asociado

$$\chi_{q,n} \mapsto [C_{\chi_{q,n}}]$$

donde $H^1(\widehat{f}_t)$ es la 1-cohomología asociada al flujo \widehat{f}_t (ver [C-V]).

Ahora, para cualquier medida Boreliana de probabilidad ν \widehat{f}_t -invariante sobre \mathcal{S}_f , existe un homomorfismo bien definido $H_{f,\nu} : H^1(\widehat{f}_t) \rightarrow \mathbb{R}$

$$[C_\chi] \mapsto \int_{\mathcal{S}_f} C_\chi(1, z, s) d\nu.$$

Por lo tanto, tenemos un homomorfismo $H_{f,\nu} : \text{Char}(\mathcal{S}_f) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H_{f,\nu}(\chi_{q,n}) = \int_{\mathcal{S}_f} C_{q,n}(1, z, s) d\nu.$$

En consecuencia $H_{f,\nu}$ determina un elemento en $\text{Hom}(\text{Char}(\mathcal{S}_f, \mathbb{R})) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si $f := \text{Id} + \sigma(\varphi)$ con $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el homomorfismo $H_{f,\nu}$ puede ser escrito de manera explícita como

$$H_{f,\nu}(\chi_{q,n}) := q \int_{\mathcal{S}} \varphi d\nu + n,$$

el cual es unívocamente determinado por el valor $\int_{\mathcal{S}} \varphi d\nu$ y podemos definir el conjunto de rotación en medida

$$\rho_m(f) = \left\{ \int_{\mathcal{S}} \varphi d\nu \mid \nu \text{ medida invariante por } f \right\}.$$

En [C-V] se poscompone este homomorfismo con la proyección canónica de \mathbb{R} a \mathbb{T}^1 para obtener un elemento en $\text{Char}(\text{Char}(\mathcal{S}_f))$ y por dualidad, este es un elemento bien definido en $\mathcal{S}_f \cong \mathcal{S} \times \mathbb{T}^1$ definiendo el número de rotación asociado a la medida como la primera coordenada de este elemento. En este trabajo no se hace uso de dicha poscomposición por lo que solo compararemos elementos de rotación hasta antes de este paso. Este conjunto resulta ser compacto y convexo como lo establecen los autores, con valores extremos en las medidas ergódicas, el teorema ergódico de Birkhoff establece una biyección en el conjunto de rotación en medida y el definido anteriormente, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.3. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$, entonces $\rho_m(f) = \varrho(f)$.*

Demostración. Primero demostraremos que $\rho_m(f) = \varrho(f)$. Sea ν medida f -invariante ergódica, por el teorema ergódico de Birkhoff se satisface que ν -cpt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(s)) = \int_{\mathcal{S}} \varphi d\nu$$

Luego si $P((x, k)) = s$ se satisface

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \phi(f^k(s)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(F_k^n(x) - F_k^{n-1}(x) \right) \\ &= \frac{F_k^n(x) - x}{n} \end{aligned}$$

y podemos concluir que $\rho_m(f) = \varrho(f)$. Para demostrar que $\varrho(f) \subset \rho_m(f)$, tomamos $\rho \in \varrho(f)$ por lo que existen sucesiones $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$ y $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}_+$ y un $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_k^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = \rho.$$

Sea $s_i = P((x_i, k))$, definamos la medida

$$\nu_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \delta_{f^j(s_i)},$$

donde δ_s denota la medida de Dirac con centro en s . Dado que \mathcal{S} es compacto, también lo es su espacio de medidas de probabilidad con la topología débil-* por lo que la sucesión $\{\nu_i\}$ tiene una sub-sucesión convergente a una medida de probabilidad de \mathcal{S} que denotaremos por ν . La medida ν resulta ser f -invariante y se satisface que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \phi d\nu &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} \phi d\nu_i \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_k^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \end{aligned}$$

por lo que $\rho \in \rho_m(f)$, con lo que concluimos la prueba. \square

Notemos que cuando la medida ν es como se definió a principios de la sección, y \mathcal{L} está definido como en 3.4.1 entonces $\mathcal{L}(\nu) = H_{f,\nu}$. Notemos que esta construcción puede ser aplicada a cualquier grupo compacto.

Teorema 3.4.4. *Bajo las condiciones establecidas*

$$\mathcal{L}(\nu) = H_{f,\nu}$$

Demostración. Sea ν medida invariante tal que existe $s \in \mathcal{S}_f$ y una sucesión de tiempos $T_n > 0$, tal que las medidas de probabilidad μ_{s,T_n} sobre \mathcal{S}_f definidas por

$$\int \gamma d\mu_{g,T_n} = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \gamma(\widehat{f}_t(s)) dt$$

(donde $\gamma \in C^0(\mathcal{S}_f, \mathbb{R})$) convergen de manera uniforme a ν . Podemos ver que

$$H_{f,\nu}(\chi_{q,n}) = \int_{\mathcal{S}_f} C_\chi(1, z, s) d\nu$$

dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} C_\chi(1, \widehat{f}_t(s)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \frac{d}{dt} \arg[\gamma](\widehat{f}_t(s)) dt$$

donde $\gamma : \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{T}^1$ y $\gamma \sim \chi$.

□

Capítulo 4

Dinámica de homeomorfismos solenoidales

A lo largo de este capítulo haremos el estudio de algunas propiedades dinámicas de homeomorfismos isotópicos a la identidad del solenoide universal unidimensional, en particular establecemos hipótesis que garantizan que se cumpla la condición de desplazamiento promedio acotado y usamos esto para describir algunos conjuntos invariantes.

4.1. Dinámica cociente

En esta sección compararemos la dinámica generada por un homeomorfismo $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ con la dinámica generada por un homeomorfismo de un grupo cociente de \mathcal{S} , buscando de esta manera obtener algunos conjuntos invariantes del homeomorfismo f .

Dado $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$, la función de desplazamiento a la altura 0, δ_0 , satisface

$$\Omega(\delta_0) \cong \mathcal{S} / \ker(K),$$

donde $\ker(K)$ es el kernel de un homomorfismo específico K y $\Omega(\delta_0)$ es el grupo compacto definido en la sub-sección 3.1.3. Ahora nos gustaría definir un homeomorfismo isotópico a la identidad $g : \Omega(\delta_0) \rightarrow \Omega(\delta_0)$ de tal manera que este sea semiconjugado a f vía K i.e. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow K & & \downarrow K \\ \Omega(\delta_0) & \xrightarrow{g} & \Omega(\delta_0) \end{array}$$

Primero, dada una función límite periódica $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $x \mapsto x + \delta(x)$ es un homeomorfismo creciente, definimos $g : \Omega(\delta) \rightarrow \Omega(\delta)$ como

$$\gamma \mapsto \gamma * \delta^{\gamma(0)}$$

donde “*” denota el producto en $\Omega(\delta)$ definido anteriormente.

Lema 4.1.1. g es un homeomorfismo isotópico a la identidad.

Demostración. Notemos que g es una función continua ya que el producto $*$ y la función de “evaluación” son continuas. Dado que $\Omega(\delta)$ es compacto y Hausdorff, es suficiente probar que g es biyección.

Esta función es suprayectiva pues es suprayectiva sobre $\text{Orb}_{\mathbb{R}}(\delta)$ que es denso en $\Omega(\delta)$ y g es continua.

Para probar la inyectividad de g , podemos tomar $\alpha, \beta \in \Omega(\delta)$ tal que $\alpha = \delta^a$ y $\beta = \delta^b$. Suponiendo que $g(\beta) = g(\alpha)$ tenemos

$$\alpha * \delta^{\alpha(0)} = \beta * \delta^{\beta(0)}.$$

Por definición sabemos que $\alpha * \delta^{\alpha(0)} = \delta^{a+\delta(a)}$ y $\beta * \delta^{\beta(0)} = \delta^{b+\delta(b)}$, pues $\delta^s(0) = \delta(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\delta(x + a + \delta(a)) = \delta(x + b + \delta(b)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo $x = -\delta(a)$ se satisface que

$$\delta(a) = \delta(b + \delta(b) - \delta(a)).$$

Pero

$$\begin{aligned} F(b + \delta(b) - \delta(a)) &= b + \delta(b) - \delta(a) + \delta(b + \delta(b) - \delta(a)) \\ &= b + \delta(b) - \delta(a) + \delta(a) \\ &= b + \delta(b) \\ &= F(b). \end{aligned}$$

Ya que F es un homeomorfismo creciente $b = b + \delta(b) - \delta(a)$ y por lo tanto $\delta(b) = \delta(a)$. Esto implica

$$(\beta)^{-1} * \alpha = \beta^{\beta(0)} * (\delta^{\alpha(0)})^{-1} = \delta^{\delta(b) - \delta(a)} = \delta^0,$$

y concluimos que $\alpha = \beta$. Podemos extender este argumento por límites a todo $\Omega(\delta)$ para probar la inyectividad de g . Finalmente, si definimos $G : [0, 1] \times \Omega(\delta) \rightarrow \Omega(\delta)$ como

$$(c, \gamma) \mapsto \gamma * \delta^{c\gamma(0)},$$

entonces G es una isotopía de g a la identidad. \square

El siguiente teorema se sigue de la proposición anterior y de las propiedades de levantamiento de $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$

Teorema 4.1.2. Si $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ y δ_0 es la función de desplazamiento a la altura 0, entonces $g : \Omega(\delta_0) \rightarrow \Omega(\delta_0)$ es semi-conjugada a f por K .

Demostración. Para probar este teorema lo único que necesitamos es ver que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow K & & \downarrow K \\ \Omega(\delta_0) & \xrightarrow{g} & \Omega(\delta_0). \end{array}$$

Pero

$$K \circ f(s) = K(s + i\delta(s)) = \delta_{s+\delta(s)},$$

mientras que

$$g \circ K(s) = K(\delta_s) = \delta_s * \delta_{\delta_s(0)} = \delta_{s+\delta(s)}$$

pues $\delta_s(0) = \delta(s)$. □

4.2. Homeomorfismos inducidos

Homeomorfismos inducidos de grado 1

Dado $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ podemos extender éste a un homeomorfismo $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$. Caracterizaremos éstos como el conjunto de todos los homeomorfismos que proyectan, a través de la proyección canónica, a homeomorfismos que preservan orientación del círculo. Después estudiamos la dinámica generada por homeomorfismos en $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ y su relación con el conjunto de rotación definido anteriormente.

Sea $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. Definimos $f_n : \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ extendiendo f_1 de la siguiente manera. Tomemos un levantamiento $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el cual es \mathbb{Z} -equivariante y por lo tanto también es $n\mathbb{Z}$ -equivariante. Podemos proyectar este levantamiento a un homeomorfismo $f_n : \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$. Notemos que estos homeomorfismos satisfacen las condiciones de compatibilidad, es decir, si $n|m$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/m\mathbb{Z} & \xrightarrow{p_{nm}} & \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \\ \downarrow f_m & & \downarrow f_n \\ \mathbb{R}/m\mathbb{Z} & \xrightarrow{p_{nm}} & \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos definido un homeomorfismo:

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}.$$

Llamaremos a los homeomorfismos que pueden ser obtenidos de esta manera *homeomorfismos inducidos de grado 1* y el espacio que consiste de todos los homeomorfismos inducidos será denotado por $\text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$.

Cada f_n podemos escribirlo como $\text{Id} + \delta_n$, donde $\delta_n : \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ puede ser identificado con una función $\delta_n : \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso cada δ_n es \mathbb{Z} -invariante y acotada por 1, por lo tanto f puede ser escrita como

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)) &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ &+ (\delta_1(x_1), \delta_2(x_2), \dots, \delta_n(x_n), \dots) \end{aligned}$$

Resulta claro de la definición que si

$$f := \text{Id} + \bar{\delta} \in \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$$

es inducido por

$$f_1 := \text{Id} + \delta_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1),$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \delta_0 & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R} \\
 & \searrow \sigma & \downarrow P & \nearrow \bar{\delta} & \\
 & \pi & \mathcal{S} & \delta_1 & \\
 & & \downarrow \pi_1 & & \\
 & & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

donde $\sigma'(x) = (x, 0)$. Notemos que la función de desplazamiento de f queda determinada por

$$\bar{\delta}((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)) = (\delta_1(x_1), \delta_2(x_2), \dots, \delta_n(x_n), \dots)$$

de lo que podemos concluir que $\bar{\delta}(x) \in \mathcal{L}_0$ para todo $x \in \mathcal{S}$, y con esto quedaría demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. $\text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S}) \subset \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$.

Notemos que el homeomorfismo f definido anteriormente es único salvo traslaciones enteras en la hoja base. Esto es debido a la dependencia de la elección del levantamiento a \mathbb{R} los cuales inducen el mismo homeomorfismo que difieren por alguna traslación entera $n \in \mathbb{Z}$. Así que tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R_\alpha \longrightarrow \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S}) \longrightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow 1$$

donde $R_\alpha := \{r_\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \mid r_\alpha(s) = s + \alpha, \alpha \in i(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}\} \cong \mathbb{Z}$. Además, usando el lema del cinco en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1) & \longrightarrow & \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R_\alpha & \longrightarrow & \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2. $\text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S}) \simeq \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathbb{T}^1)$.

Esto también nos da una descripción de los levantamientos de un homeomorfismo inducido de grado 1 a $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$.

Teorema 4.2.3. *Sea $f \in \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$ que es inducido por un homeomorfismo $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. Entonces f tiene un levantamiento $F : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ de la forma*

$$(x, k) \mapsto (F'(x), k),$$

donde $F' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por $x \mapsto x + \delta(x)$ es un levantamiento de f_1 a \mathbb{R} .

Otro punto a notar es que si $f \in \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$ es inducido por $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

En el siguiente teorema veremos que esta propiedad caracteriza a los homeomorfismos inducidos dentro de $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$.

Teorema 4.2.4. $f \in \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$ si y sólo si $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ y el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

conmuta

Demostración. \Rightarrow Esto es claro por como están definidos estos homeomorfismos y por el teorema anterior.

\Leftarrow Dado que $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$, este preserva todas las hojas, y ya que f preserva orientación sobre cada hoja, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

implica que f es $\sigma(\mathbb{Z})$ -invariante por lo que tendrá un levantamiento como el establecido en el teorema anterior. Así $f \in \text{Homeo}_1(\mathcal{S})$. \square

Observación 4.2.5. Esta descripción puede ser utilizada para obtener una descripción de los homeomorfismos $f \in \text{Homeo}(\mathcal{S})$ que satisfacen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

trasladando los elementos de $\text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$ por elementos de $\text{Aut}(\mathcal{S})$.

Homeomorfismos inducidos de grado mayor

Al igual que los homeomorfismos inducidos de grado 1, podemos pensar en los homeomorfismos en $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ que satisfacen para cierta $n \in \mathbb{Z}$ que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi_n \\ \mathbb{R}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

Estamos interesados en dar una descripción explícita de los levantamientos de este conjunto de espacios de homeomorfismos al cual denotaremos por $\text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S})$ y les llamaremos *homeomorfismos inducidos de grado n* por el homeomorfismo $f_n \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R}/n\mathbb{Z})$.

Teorema 4.2.6. $f \in \text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S})$ es inducido por un homeomorfismo $f_n \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ si y sólo si f tiene un levantamiento a $F : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ de la forma:

$$(x, k) \mapsto (F_n, k) = (F_0(x) + r(k), k),$$

donde $F_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de f_n a \mathbb{R} y $r(k) \in \{0, \dots, n-1\}$ determinado por $r(k) = i$ si y sólo si $k \in p_n^{-1}(i)$, p_n la proyección canónica $\widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Demostración. Notemos que la restricción de f a la hoja base es una función $n\mathbb{Z}$ -invariante por lo que se satisface $f|_{\mathcal{L}_0} : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ es una función $\sigma(n\mathbb{Z})$ -invariante. Luego

$$f(x + \sigma(n)) = f(x) + \sigma(n)$$

Sea $F_0 : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ el levantamiento a $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ restringido a la altura 0. Entonces F_0 es un levantamiento a \mathbb{R} de f_n que es $n\mathbb{Z}$ invariante, es decir

$$f(x + n) = f(x) + n.$$

Ahora notemos que por la equivarianza con la acción diagonal debe satisfacerse para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$(F_n, k) = (F_0(x) + r(k), k)$$

donde $r(k)$ es el residuo al dividir k por n . Por lo tanto ya que la inclusión de \mathbb{Z} es densa en $\widehat{\mathbb{Z}}$ y la función

$$K : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$$

es continua y constante sobre cada abierto $p_n^{-1}(i)$, esta es constante sobre cada abierto y queda determinada como fue enunciada. \square

Corolario 4.2.7. Si dos homeomorfismos son inducidos por el mismo homeomorfismo $f_n \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R}/n\mathbb{Z})$ entonces difieren por un entero.

Observemos ahora que si $n|m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $\text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S}) \subset \text{Homeo}_{I_m}(\mathcal{S})$. Esto es claro del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S} \\
 \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi_n \\
 \mathbb{R}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \\
 \downarrow p_{mn} & & \downarrow p_{mn} \\
 \mathbb{R}/m\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_m} & \mathbb{R}/m\mathbb{Z}
 \end{array}$$

donde f_m es la proyección de f_n bajo la función de cubriente p_{mn} . Por lo que tenemos una sistema inductivo $\{\text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S})\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ con el orden parcial de divisibilidad en \mathbb{Z} y funciones de inclusión. Denotemos por $\text{Homeo}_I(\mathcal{S})$ al límite directo de este sistema y es claro que

$$\text{Homeo}_I(\mathcal{S}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{Homeo}_{I_n}(\mathcal{S}).$$

Teorema 4.2.8. $\text{Homeo}_I(\mathcal{S})$ es abierto y denso en $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$

Demostración. Basta notar que el complemento $(\text{Homeo}_I(\mathcal{S}))^c$ es $\text{Homeo}_+^{\text{lp}}(\mathcal{S})$ que son las funciones cuyo desplazamiento límite periódico el cual es cerrado, pues contiene a sus puntos límites y además se satisface que toda función en $\text{Homeo}_+^{\text{lp}}(\mathcal{S})$ puede ser aproximada por funciones en $\text{Homeo}_I(\mathcal{S})$. Además se cumple

$$\text{Homeo}_+(\mathcal{S}) = \text{Homeo}_I(\mathcal{S}) \sqcup \text{Homeo}_+^{\text{lp}}(\mathcal{S}).$$

□

4.3. Dinámica de homeomorfismos inducidos

Ahora haremos el estudio de la dinámica de homeomorfismos inducidos a través de la teoría de rotación. En esta sección, por simplicidad, se realiza el análisis para homeomorfismos de grado 1, sin embargo este estudio aplica para todos los homeomorfismos inducidos de grado mayor.

Teorema 4.3.1. Si $f := \text{Id} + \bar{\delta} \in \text{Homeo}_{I_1}(\mathcal{S})$ es inducido por $f_1 := \text{Id} + \delta_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, entonces $\tau_{\mathbb{T}^1}(f_1) = \tau_{\mathcal{S}}(f)$.

La relación entre la dinámica generada por un homeomorfismo $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ y la dinámica generada por el homeomorfismo inducido $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ queda definida por el teorema anterior y se puede deducir del hecho que la restricción de f a la hoja base se identifica, vía el subgrupo 1-parámetro, a un levantamiento f_1 de \mathbb{R} . Una consecuencia de este hecho es la clasificación de la dinámica de homeomorfismos inducidos resumida a continuación.

Definición 4.3.2. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$. Diremos que $s \in \mathcal{S}$ es p/q -fibra periódico si existen $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tales que

$$f^q(s) = s + \sigma(p),$$

donde $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ es la inclusión canónica. Escribiremos sólo $s+p$ para denotar $s+\sigma(p)$. Notemos que el nombre fibra periódica es debido a que los puntos retornan a la fibra en s de manera periódica con periodo q y un desplazamiento p sobre la hoja.

Teorema 4.3.3. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ inducido por un homeomorfismo $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$. Si $\rho(f) = p/q$ entonces se satisfacen las siguientes condiciones

1. f tiene un punto p/q -fibra periódico.
2. Si $s \in \mathcal{S}$, entonces s es un punto p/q -periódico o la órbita de s es asintótica a la órbita de un punto p/q -periódico.

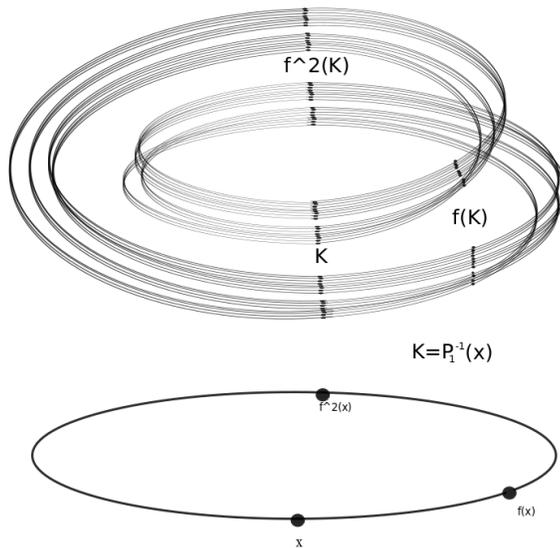


Figura 2.

Teorema 4.3.4. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ inducido por un homeomorfismo $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ con $\rho(f) = p/q$. Si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, entonces f es semiconjugada a la rotación por $\rho(f)$

Demostración. Por el teorema 4.6 de [C-V] es suficiente probar que f satisface la condición del desplazamiento promedio acotado. Lo cual se sigue directamente de la construcción pues la restricción a cada hoja es una función $\sigma(\mathbb{Z})$ -periódica. \square

4.4. Desplazamiento equi-límite periódico

En esta sección estudiaremos una clase de homeomorfismos solenoidales con mayor generalidad a la presentada en la sección anterior. Veremos el caso en el que el homeomorfismo $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ genera una familia de homeomorfismos con funciones de desplazamiento equi-límite periódico, esto es, si la familia de funciones $\{F^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, donde cada F^n es el levantamiento a $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ de f^n , tiene desplazamiento equi-límite periódico. Una definición equivalente de funciones casi-periódicas que nos resultará de utilidad en esta sección a fines de definir desplazamiento equi-límite periódico es la siguiente.

Definición 4.4.1. Sea $\phi \in C(\mathbb{R})$. ϕ se dice que es casi-periódica si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto de números reales $\tau(\epsilon)$ tal que existe $l > 0$ de tal manera que todo intervalo de longitud l tiene intersección no vacía con $\tau(\epsilon)$ y que satisface que

$$|\phi(x + \tau) - \phi(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\tau \in \tau(\epsilon)$. A los números $\tau(\epsilon)$ se les conoce como números de traslación y llamaremos una longitud de $\tau(\epsilon)$ a un número l que satisfaga que todo intervalo de longitud l intersecta a $\tau(\epsilon)$.

Una familia de funciones \mathcal{F} se dice equi-casi-periódica si para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto relativamente denso $\tau(\epsilon)$ de números de traslación para toda $\phi \in \mathcal{F}$ y se llamará equi-límite periódico cuando se trata de una familia de funciones límites periódicas.

Denotemos al espacio de estas funciones que generan una familia de homeomorfismos con funciones de desplazamiento equi-uniformemente límite periódico como $\text{Homeo}_U(\mathcal{S})$. Una primera observación que nos da ejemplos de dichas funciones es la siguiente.

Observación 4.4.2. $\text{Homeo}_I(\mathcal{S}) \subset \text{Homeo}_U(\mathcal{S})$.

Muchas de las propiedades dinámicas que tienen los homeomorfismos inducidos se pueden obtener para los homeomorfismos en $\text{Homeo}_U(\mathcal{S})$. Sea $f \in \text{Homeo}_U(\mathcal{S})$, con levantamiento $F : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ y $x \in \mathbb{R}$. Definamos $D_x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ el desplazamiento en la hoja base y como $D_x(n) = F_0^n(x) - x$ el desplazamiento del n -ésimo iterado en la hoja base.

Lema 4.4.3. Sean $f \in \text{Homeo}_U(\mathcal{S})$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Si $\epsilon > 0$ y $l(\epsilon)$ denota a la longitud de los números de traslación τ , entonces

$$|D_x(n) - D_y(n)| < k(\tau + \epsilon) + 2\epsilon,$$

donde k sólo depende de $l(\epsilon)$.

Demostración. Primero veamos que podemos suponer que $x, y \in [0, l(\epsilon))$ esto es dado que existe número de traslación τ_1 y $x' \in [0, l(\epsilon))$ tal que $x = x' - \tau_1$ y de igual manera existe τ_2 para y . Además se cumple

$$\begin{aligned} |D_x(n) - D_y(n)| &= |D_{x'+\tau_1}(n) - D_{y'+\tau_2}(n)| \\ &\leq |D_{x'}(n) - D_{y'}(n)| + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Bajo esta suposición, tenemos que $x \leq y \leq x + l(\epsilon)$. Tomemos $\tau \in [0, l(\epsilon))$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ el menor número que satisface $k\tau > l(\epsilon)$, entonces se cumple

$$x \leq y \leq x + k\tau$$

Así como cada F_0^n es estrictamente creciente, se cumple que

$$F_0^n(x) \leq F_0^n(y) \leq F_0^n(x + k\tau).$$

Como $F_0^n(x + k\tau) \leq F_0^n(x) + k(\tau + \epsilon)$, sumando $F_0^n(x) \leq F_0^n(y) \leq F_0^n(x) + k(\tau + \epsilon)$ término a término con la desigualdad $-x - k(\tau + \epsilon) \leq -y \leq -x$ obtenemos

$$F_0^n(x) - x - k(\tau + \epsilon) \leq F_0^n(y) - y \leq F_0^n(x) - x + k(\tau + \epsilon).$$

Así,

$$-k(\tau + \epsilon) \geq (F_0^n(x) - x) - (F_0^n(y) - y) \leq (\tau + \epsilon).$$

De aquí concluimos que

$$|D_{x'}(n) - D_{y'}(n)| \leq k(\tau + \epsilon).$$

Esto último concluye la prueba □

Notemos que a diferencia del caso periódico esta no es una cota óptima, sin embargo nos da el suficiente control de los desplazamientos en el sentido que $k(\tau + \epsilon) + 2\epsilon$ depende únicamente del parametro ϵ . Una vez probado este lema, tiene consecuencias inmediatas sobre el conjunto de rotación de f que pueden ser probadas de manera análoga a como se hizo en $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ y que enlistaremos en los siguiente teorema.

Teorema 4.4.4. *Sea $f \in \text{Homeo}_U(\mathcal{S})$. Entonces*

1. D_x define un quasi-homomorfismo del subgrupo generado por f en \mathbb{R} .
2. El conjunto de rotación consiste de un solo punto, es decir es una pseudo-rotación.
3. f satisface la condición de desplazamiento promedio acotado.

Demostración. Sea $f \in \text{Homeo}_U(\mathcal{S})$ y F_0 el levantamiento a $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ restringido a la altura 0.

1. Si $\epsilon > 0$ y $l(\epsilon)$ denota a la longitud de los números de traslación τ , entonces

$$\begin{aligned} |D_x(m+n) - D_x(n) - D_x(m)| &= |F_0^n \circ F_0^m(x) - F_0^m(x) - F_0^n(x) + x| \\ &= |F_0^n(F_0^m(x)) - F_0^m(x) - F_0^n(x) + x| \\ &= |D_{F_0^m(x)}(n) - D_x(m)| \leq l(\epsilon) + \epsilon. \end{aligned}$$

2. Es una consecuencia directa del lema anterior.
3. Se deduce del lema 2.1.6 y del hecho que D_x es un quasi-homomorfismo. □

Notemos que a diferencia de $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ donde se tenía un quasi-homomorfismo de manera global, en este caso el quasi-homomorfismo es definido sólo para subgrupos con un generador y al cambiar el generador estamos cambiando la cota.

Como consecuencia inmediata de la condición de desplazamiento promedio acotado es que tenemos una semiconjugación a la rotación por $\rho(f)$ con lo que podemos hacer la distinción entre los casos racional e irracional para entender sus conjuntos invariantes.

4.4.1. Dinámica racional

En este capítulo generalizaremos el modelo de dinámica racional presentado en el teorema 4.3.3 para homeomorfismos en $\text{Homeo}_+(\mathcal{S})$ en general, esto es dar condiciones suficientes y necesarias para garantizar la existencia de puntos racionales en el interior del conjunto de rotación, antes de esto necesitamos de la siguiente definición.

Definición 4.4.5. Sean $f \in \text{Homeo}_+(\mathcal{S})$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

1. Dado $\epsilon > 0$ diremos que $s \in \mathcal{S}$ es ϵ -fibra periódico con ϵ -fibra periodo p/q si existe un levantamiento $F \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(\mathcal{S})$ de f tal que existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tales que

$$|F_k^{nq}(x) - x - np| < \epsilon,$$

para todo (x, k) levantamiento de s y $n > N$.

2. Diremos que $s \in \mathcal{S}$ es casi p/q -fibra periódico si es ϵ -fibra periódico con ϵ -fibra periodo p/q para todo $\epsilon > 0$.

Teorema 4.4.6. Si s es un punto ϵ -fibra periódico con ϵ -fibra periodo p/q , entonces existe una vecindad abierta U de s tal que todo punto en su interior es 2ϵ -fibra periódico con 2ϵ -fibra periodo p/q .

Demostración. Primero lo demostraremos para el caso $q = 1$. Sea $F : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ el levantamiento de la hipótesis. Por continuidad uniforme de la función $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existe $\delta' > 0$ tal que si $|x - y| < \delta'$ entonces

$$|F_k^n(x) - F_k^n(y)| < \epsilon/3.$$

Por la continuidad de la función de altura $\widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow C(\mathbb{R})$ dada por $k \mapsto F_k$ se cumple que

$$|F_{k_1}^{nq}(x_1) - F_k^{nq}(x_1)| < \epsilon/3$$

para todo k_1 en una vecindad abierta K de $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Finalmente tomando $\delta = \inf\{\delta', \epsilon/3\}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} |F_{k_1}^{nq}(x_1) - x_1 - np| &= |F_{k_1}^{nq}(x_1) - F_k^{nq}(x_1) + F_k^{nq}(x_1) - F_k^{nq}(x) \\ &\quad + F_k^{nq}(x) - x + x - x_1 - np| \\ &\leq |F_{k_1}^{nq}(x_1) - F_k^{nq}(x_1)| + |F_k^{nq}(x_1) - F_k^{nq}(x)| \\ &\quad + |F_k^{nq}(x) - x - np| + |x - x_1| \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

para todo $(k_1, x_1) \in K \times B_\delta(x)$ y $n > N$. Proyectando esta vecindad, obtenemos una vecindad de s con la propiedad deseada. \square

Capítulo 5

Teoría de rotación en grupos abelianos compactos

En este capítulo seguiremos las ideas presentadas en la sección 3.2 para grupos topológicos en general y así para obtener una generalización de los conjuntos de rotación.

Dado G un grupo topológico abeliano, denotemos el conjunto de homeomorfismos isotópicos al homeomorfismo identidad por $\text{Homeo}_+(G)$. Definamos el primer grupo de cohomología entera dado por todas las clases de isotopía de funciones continuas $f : G \rightarrow \mathbb{T}^1$, la cual denotaremos

$$\check{H}^1(G, \mathbb{Z}) = C^0(G, \mathbb{T}^1) / \sim$$

donde \sim denota equivalencia isotópica. El *grupo de caracteres de G* es el conjunto de homomorfismos continuos de G en \mathbb{T}^1 , que denotamos por

$$\text{Char}(G) := \{\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}^1 \mid \chi \text{ es un homomorfismo continuo}\},$$

y la operación de grupo definida por multiplicación puntual. Sabemos que si G es un grupo topológico compacto, entonces

$$\check{H}^1(G, \mathbb{Z}) \cong \text{Char}(G).$$

(ver [H-M])

Definición 5.0.1. Dado $f \in \text{Homeo}_+(G)$, definimos la suspensión de f como el espacio cociente

$$\mathcal{G}_f = G \times [0, 1] / (x, 0) \sim (f(x), 1).$$

Notemos que dado que $f \sim \text{Id}$, esto implica que $\mathcal{G}_f \cong G \times \mathbb{T}^1$, y por lo tanto podemos concluir que

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathcal{G}_f, \mathbb{Z}) &\cong \text{Char}(G \times \mathbb{T}^1) \\ &\cong \text{Char}(G) \times \text{Char}(\mathbb{T}^1) \\ &\cong \text{Char}(G) \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Llamaremos *el flujo de la suspensión* de f sobre \mathcal{G}_f al flujo que recorre las hojas de \mathcal{G}_f a tiempo 1 y que está definido como

$$\widehat{f}_t(x, u) = (f^n(x), u + t - n),$$

donde $n \leq u + t \leq n + 1$.

Definición 5.0.2. Sea $k : \mathcal{G}_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que f es diferenciable con respecto al flujo de la suspensión si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(\widehat{f}_{t+h}(x)) - k(\widehat{f}_t(x))}{h}$$

existe uniformemente sobre \mathcal{G}_f , denotaremos este límite por $\frac{d}{dt}k$ o k' .

Un hecho importante sobre esta definición es el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [Sch].

Teorema 5.0.3 (Kakutani). *Cualquier función continua puede ser aproximada uniformemente por funciones que son diferenciables con respecto al flujo.*

Sea $\text{Hom}(\check{H}^1(\mathcal{G}_f, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ el espacio que consiste de todos los homomorfismos de $\check{H}^1(\mathcal{G}_f, \mathbb{Z})$ a \mathbb{R} . Notemos que dados $s \in \mathcal{G}_f$ y $T > 0$ podemos definir el homomorfismo $\Lambda_{s,T} \in \text{Hom}(C^0(\mathcal{G}_f, \mathbb{T}^1), \mathbb{R})$ como

$$\Lambda_{s,T}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \arg[k](\widehat{f}_t(s)) dt,$$

donde $k : \mathcal{G}_f \rightarrow \mathbb{T}^1$ es una función continua con argumento $\arg[k]$ y podemos elegirla de tal manera que el argumento sea continua a lo largo de órbitas del flujo de suspensión. Estos homomorfismos están descritos en el siguiente resultado de Schwartzmann ([Sch] y [Pol]).

Lema 5.0.4. *Para cada $s \in \mathcal{G}_f$ tenemos las siguientes condiciones*

1. *La familia de homomorfismos continuos*

$$\{\Lambda_{s,T}\}_{T \in \mathbb{R}_+} \subset \text{Hom}(C^0(\mathcal{G}_f, \mathbb{T}^1), \mathbb{R})$$

*es equicontinua en la topología débil-**.

2. *Los puntos límite*

$$\mathcal{R}^s \subset \text{Hom}(C^0(\mathcal{G}_f, \mathbb{T}^1), \mathbb{R})$$

de esta familia son constantes sobre clases de equivalencia isotópica.

Este lema nos dice que cada $r^s \in \mathcal{R}^s$ nos da un elemento bien definido en $\text{Hom}(\check{H}^1(\mathcal{G}_f, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$. Podemos escribir el homomorfismo en términos de sus coordenadas:

$$r^s = (r_1^s, r_2^s) \in \mathcal{R}^s \subset \text{Hom}(\text{Char}(G), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Notar que dada la construcción explícita del homomorfismo, dado que el flujo es a tiempo constante 1, $\Lambda_{s,T}$ y \mathcal{R}^s podemos ver que $r_2^s \equiv 1 \in \mathbb{R}$, por lo tanto r_2^s es independiente de todas las elecciones,

en particular de la segunda coordenada en \mathcal{G}_f . Si denotamos $s = (g, u)$, entonces r_1^s depende únicamente de la segunda coordenada $g \in G$. Así podemos considerar sólo la componente

$$r_1^s \in \text{Hom}(\text{Char}(G), \mathbb{R})$$

del homomorfismo continuo $r^s \in \mathcal{R}^s$. Si denotamos esta proyección por \mathcal{R}^1 , donde $s = (g, u)$, podemos establecer una biyección $\mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^s$ vía

$$r^g \mapsto r^s = (r^g, 1).$$

Definición 5.0.5. Sea $f \in \text{Homeo}_+(G)$ y $g \in G$, definimos el conjunto de rotación de g relativo a f

$$\tau_g(f) := \{r^g | r^g \in \mathcal{R}^1\} \subset \text{Hom}(\text{Char}(G), \mathbb{R}).$$

Definamos el conjunto de rotación de f como

$$\tau(f) := \bigcup_{g \in G} \tau_g(f).$$

Ejemplo 5.0.6. En el caso que $G = \mathbb{T}^1$ y $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, la suspensión de f es homeomorfa a $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ y

$$\text{Hom}(\text{Char}(\mathbb{T}^1), \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

por lo tanto,

$$\tau(f) := \bigcup_{g \in \mathbb{T}^1} \tau_g(f) \subset \mathbb{R}.$$

Así, sólo estamos midiendo el promedio de desplazamiento a lo largo de órbitas de \mathbb{T}^1 . El conjunto $\tau(f)$ es un subconjunto de \mathbb{R} y podemos ver que este conjunto proyecta sobre \mathbb{T}^1 al usual número de rotación de Poincaré. (ver Figura 3.)

En este contexto esta definición de conjunto de rotación coincide con la definición de Pollicott (ver [Pol]) y la definición usual de número de rotación, lo mismo pasa cuando G es el toro de dimensión 2. El caso que nos interesa es cuando G no es el círculo, el toro de n -dimensional ó el solenoide universal unidimensional. Ejemplos de estos son los solenoides p -ádicos, con p número primo, descritos en la observación 3.1.6, y cuya importancia de entender su dinámica está basada en el teorema 4.1.2 para poder hacer un estudio análogo al caso de los homeomorfismos inducidos de la sección 4.3.

Notemos que una condición necesaria sobre el grupo para que la teoría de rotación definida sea no trivial es que su grupo G de caracteres $\text{Char}(G)$ no sea un grupo de torsión pues

$$\text{Hom}(\text{Char}(G), \mathbb{R}) \cong 0$$

como es el caso de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Otros grupos en los que podríamos estar interesados estudiar la información dinámica que se puede obtener a través de la teoría de rotación es el caso de $\widehat{\mathbb{Z}}$ y en general grupos profinitos, para los que se satisface

$$\text{Hom}(\text{Char}(G), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R},$$

sin embargo la identidad es el único homeomorfismo isoptópico a la identidad.

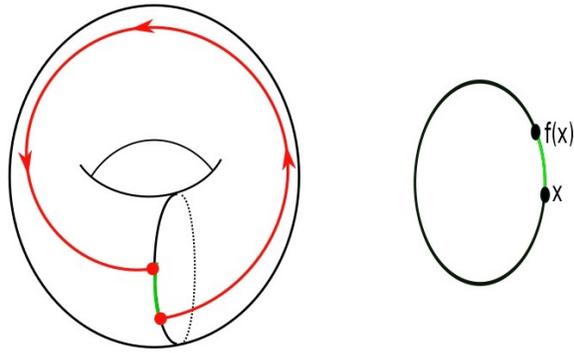


Figura 3.

Bibliografía

- [A-J] Aliste-Prieto J. and Jager, T. *Almost periodic structures and the semiconjugacy problem*. Journal of Differential Equations, 252(2012) pp. 4988-5001.
- [Bohr] Bohr, Harald *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1947.
- [C-V] Cruz-López M. and Verjorvsky A., *Poincaré theory for compact abelian one-dimensional solenoidal groups*. arXiv:1308.1853v2 [math.DS].
- [Fra] Franks J. *Realizing rotation vector for torus homeomorphisms*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 311, No. 1 (Jan., 1989), pp. 107-115.
- [Ghys] Ghys E. , *Groups acting on the circle*. L'Enseignement Mathématique 47 (2001), 329–407.
- [H-M] Hofmann, Karl H and Morris, Sidney A. *The structure of compact groups*. A primer for the student a handbook for the expert. Second revised and augmented edition. de Gruyter Studies in Mathematics, 25. Walter de Gruyter & Co., Berlin, (2006).
- [Jag] Jäger, T. *Linearization of conservative toral homeomorphisms*. Invent. Math. Vol. 3, 2009, pp. 601-616.
- [Kwa] Kwapisz, J. *Poincaré rotation number for maps of the real line with almost periodic displacement*. Nonlinearity. Vol. 3, 2000, pp. 1841-1854.
- [Kwa2] Kwapisz, J. *Homotopy and dynamics for homeomorphisms of solenoids and Knaster continua*. Fundamenta Mathematicae 168 (2001)
- [Lop] López-Hernández, Francisco J., *The displacement function of solenoidal homeomorphisms*. M.Sc. Thesis 2013.

- [M-Z] Misiurewicz, M. and Ziemian, K. *Rotation sets for maps of tori*. J. London Math. Soc. Vol. 3, 1989, pp. 490-506.
- [Nav] Navas A., *Grupos de difeomorfismos del círculo*. Ensaio Matemáticos **13**, Sociedade Brasileira de Matemática (2007).
- [Poi] Poincaré J.H., *Memoire sur les courbes définis par une équation différentielle*, Journal de Mathématiques, 7 (1881), 375-422.
- [Pol] M. Pollicott, *Rotation sets for homeomorphism and homology*. Transactions of the American Mathematical Society, Volume 331, Number 2, June 1992.
- [R-T-L] Rogers, James T., Jr.; Tollefson, Jeffrey L. *Homeomorphisms homotopic to induced homeomorphisms of weak solenoidal spaces*. Colloq. Math. 25 (1972), 81-87.
- [Sch] Schwartzman S., *Asymptotic Cycles*. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 66, No. 2 (Sep., 1957), pp. 270-284.